Kapitola II

TEORIE URČITÉHO INTEGRÁLU (RIEMANNOVA)

§ 1. Úvod. K pojmu určitého integrálu — jímž se budeme v následujících paragrafech zabývat — byli matematikové přivedeni — mimo jiné — také geometrickým problémem, totiž otázkou po plošné míře rovinných oborů. V elementární geometrii se definuje plošná velikost neboli obsah trojúhelníků (jako polovina součinu základny a výšky) a dále plošná velikost neboli obsah oborů, jež se dají rozložit na konečný počet trojúhelníků, tj. plošná velikost mnohoúhelníků. Vzniká otázka, jakým způsobem jest vhodno definovat obsah oborů obecnějších, jež nelze rozložit na konečný počet trojúhelníků; vezměme jeden takový jednoduchý případ.

Budiž dána funkce $f(x)$, spojitá a kladná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Sestrojme obor P (viz obr. 1a), ohraničený jednak osou x, jednak přímkami $x = a$ a $x = b$, jednak křivkou $y = f(x)$. Jak definovat obsah oboru P? Zde se přirozeně nabízí tato myšlenka: rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na několik dílků „dělicími body" $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (viz obr. 1b nebo 1c, kde jest $n = 5$; pro větší pohodlí píšeme $a = x_0$, $b = x_n$, takže jest $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$); nad každým z těchto n intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jakožto základnou sestrojíme dva obdélníky: obdélník Q_i, jehož výška se rovná *největší* hodnotě funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (viz obr. 1b), a obdélník R_i, jehož výška se rovná *nejmenší* hodnotě funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (viz obr. 1c).[1]) Označíme-li znakem M_i největší hodnotu a znakem m_i nejmenší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest obsah obdélníka Q_i roven číslu $M_i(x_i - x_{i-1})$ a obsah obdélníka R_i roven číslu $m_i(x_i - x_{i-1})$. Obdélníky $Q_1, Q_2, \ldots$ $\ldots, Q_n$ tvoří jistý mnohoúhelník Q, „opsaný" oboru P (na obr. 1b je šrafován); jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\,. \tag{1}$$

Obdobně obdélníky $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tvoří jistý mnohoúhelník R, „vepsaný" oboru P (na obr. 1c je šrafován); jeho obsah je roven číslu

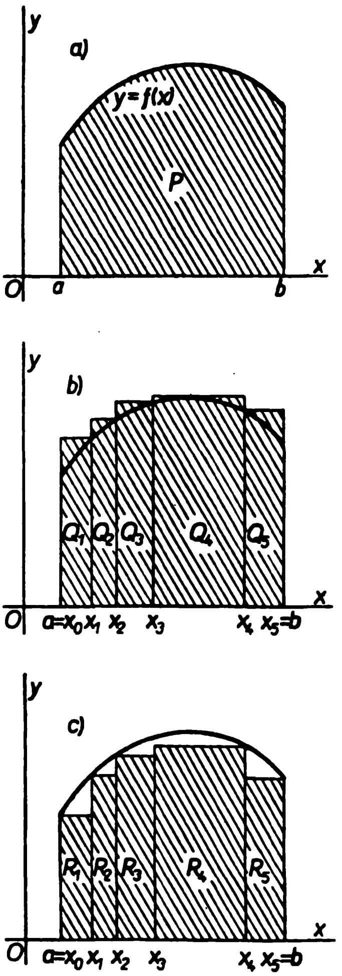
$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\,. \tag{2}$$

Když nyní počet dílků (na něž jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$) necháme vzrůstat nade všechny meze, přičemž délky jednotlivých těchto dílků konvergují k nule, zdá se

[1]) Podle věty 128 v DI (str. 236, v 4. vyd. str. 269) jest mezi hodnotami, kterých funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nabývá, skutečně jedna největší a jedna nejmenší.

pravděpodobno, že obsah „opsaného" mnohoúhelníka Q (tj. číslo (1)) i obsah „vepsaného" mnohoúhelníka R (tj. číslo (2))budou konvergovat k téže limitě, a jest docela přirozeno nazvat tuto společnou limitu „obsahem oboru P".

Ovšem dosud nevíme, existuje-li vskutku tato společná limita – to budeme musit teprve dokázat. Půjde nám tedy v dalším především o to, studovat součty (1) a (2), a hlavně o to, sledovat, co se s těmito součty děje, když délky jednotlivých dílků (tj. čísla $x_i - x_{i-1}$) konvergují k nule. To je již otázka, kterou nikterak nemusíme vázat na geometrický problém, z něhož jsme vyšli. Bude pro nás důležité, abychom tuto otázku řešili co nejobecněji a zbavili se všech zbytečných omezení, ke kterým nás vedla původní geometrická formulace problému. Především je pro studium součtů (1) a (2) zbytečný předpoklad, že funkce $f(x)$ je kladná; součty (1) a (2) můžeme sestrojit, i když funkce $f(x)$ není stále kladná. Za druhé číslo M_i, jakožto největší hodnota funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, je zároveň také supremem funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$[2]) a obdobně číslo m_i jest infimem funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Toto supremum a infimum existuje pro každou funkci $f(x)$, omezenou v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, i když tato funkce není spojitá;[3]) tedy i předpoklad spojitosti funkce $f(x)$ je zbytečný, a stačí, nahradíme-li jej předpokladem, že funkce $f(x)$ je omezená v každém z intervalů $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$, čili že je omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Proto o funkci $f(x)$ nebudeme v dalším – aspoň prozatím – předpokládat nic jiného, nežli že jest omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, a budeme svůj problém formulovat v plné obecnosti takto:



Obr. 1.

Budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na několik dílů dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

---

[2]) Viz poznámku 1 v kap. I, § 2.

[3]) Toto supremum u *nespojité* funkce nemusí ovšem již být největší hodnotou funkce. Příklad: definujme $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto: pro $0 \leqq x < 1$ budiž $f(x) = 3x$, pro $x = 1$ budiž $f(1) = 0$. Supremum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je zřejmě číslo 3, ač funkce této hodnoty vůbec nenabývá.

a sestrojme součty

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

kde M_i značí supremum a m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Naším úkolem jest studovat tyto součty a hlavně vyšetřovat, co se s těmito součty děje, když počet dílků, na něž jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$, vzrůstá nade všechny meze, přičemž současně čísla $x_i - x_{i-1}$ konvergují k nule.

Tím jest dán program; provedení tohoto programu jsou věnovány další paragrafy této kapitoly.[4])

Poznámka 1. Sčítací index ve vzorcích (1), (2) jsme označili písmenem i (počáteční písmeno slova index). Nemusíme se obávat záměny s imaginární jednotkou i, protože tzv. imaginární čísla (tj. komplexní čísla, jež nejsou reálná) se objeví pouze v kap. IV, § 1, 2 a potom porůznu v kap. IX, X, XI. Tam si ovšem dám pozor, abych písmeno i vyhradil pro imaginární jednotku. Mohl jsem sice ve vzorcích (1), (2) a dále označit sčítací index jiným písmenem, ale snad neškodí, zvykne-li si čtenář na to, že rozsah a rozmanitost matematiky si vynucuje, že se v různých úsecích matematiky užívá téhož symbolu v různém významu. Jinak bychom si vedle obvyklých písmen musili vymýšlet stále nové symboly. Je ovšem nutno se vždy přesně domluvit, aby se vyloučilo nedorozumění.

§ 2. Součtová definice určitého integrálu. Budiž dán interval $\langle a, b\rangle$ a budiž dána funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno $n + 1$ bodů[5]) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež splňují vztahy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3}$$

říkáme, že tyto body definují určité *rozdělení* intervalu $\langle a, b\rangle$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ budeme nazývat *dělicími body* tohoto rozdělení; tyto body dělí interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.[6])

[4]) Zdůrazňuji, že tento paragraf měl pouze informativní charakter; chtěl jsem zde čtenáři pouze ukázat, že otázka, jíž bude věnována tato kapitola, není nijak uměle sestrojena, nýbrž že jsme k ní vedeni zcela přirozeným způsobem. Pro logickou výstavbu teorie, jež bude podána v dalších paragrafech, je ovšem tento úvodní paragraf vlastně zbytečný. Proto přirozeně tento paragraf neobsahuje žádných pozitivních výsledků a také při jeho stylizaci jsem nekladl velkou váhu na obvyklé požadavky matematické přesnosti.

[5]) Míním ovšem body na ose číselné, čili reálná čísla.

[6]) Nejjednodušší „rozdělení" intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme, vezmeme-li $n = 1$; potom jest $x_0 = a$, $x_1 = b$; při tomto „rozdělení" máme ovšem jediný částečný interval $\langle x_0, x_1\rangle = \langle a, b\rangle$.

Toto rozdělení, definované dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_n$, označme písmenem D.[7]) Označme znakem Δx_i délku i-tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, tj. položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Označme dále znakem M_i supremum a znakem m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$.[8]) Danému rozdělení D přiřadíme nyní dvě čísla: číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \,,$$

jež budeme nazývat *horním součtem příslušným k rozdělení D*, a číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \,,$$

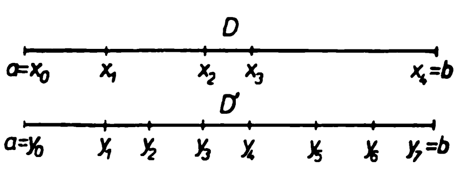
jež budeme nazývat *dolním součtem příslušným k rozdělení D*. Tyto horní a dolní součty budeme nyní podrobně vyšetřovat.[9])

Pro každé i platí ovšem nerovnost $m_i \leqq M_i$, tedy $m_i \, \Delta x_i \leqq M_i \, \Delta x_i$, a sečteme-li od $i = 1$ do $i = n$, dostaneme nerovnost $s(D) \leqq S(D)$, čili slovy:

Tvrzení A. *Dolní součet, příslušný k rozdělení D, je nejvýše roven hornímu součtu příslušnému k témuž rozdělení.*

V dalším budeme však nuceni srovnávat též součty příslušné ke dvěma *různým* rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$.

Budtež D, D' dvě rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$; budeme říkat, že rozdělení D' je *zjemněním* rozdělení D, jestliže každý dělicí bod rozdělení D je také dělicím bodem rozdělení D'. (Viz obr. 2, kde rozdělení D' dané dělicími body $y_0, y_1, \ldots, y_7$ je zjemněním rozdělení D daného dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_4$; zde jest $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_4$, $x_4 = y_7$.) Budiž nyní rozdělení D', dané dělicími body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$, vskutku zjemněním rozdělení D, daného dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Označme znakem M_i supremum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a znakem M'_k supremum této funkce v intervalu $\langle y_{k-1}, y_k\rangle$; položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; potom jest



Obr. 2.

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \,, \qquad S(D') = \sum_{k=1}^{m} M'_k \, \Delta y_k \,.$$

[7]) Takových rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je ovšem nekonečně mnoho: především můžeme zvolit libovolně celé kladné číslo n a za druhé, když číslo n jest již zvoleno, můžeme ještě zvolit dělicí body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ libovolně, až na to, že musí vyhovovat podmínce (3). Různá rozdělení budeme rozlišovat čárkami, indexy apod.

[8]) Funkce $f(x)$ jest v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ omezená podle kap. I, § 2, poznámka 6.

[9]) Je vidět, že postupujeme přesně podle programu stanoveného v § 1.

Srovnejme tato dvě čísla. Vezměme určitý interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$; body x_{i-1}, x_i jsou ovšem také dělicími body rozdělení D'; budiž třeba $x_{i-1} = y_r$, $x_i = y_s$ (jest ovšem $r < s$). Částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $S(D)$ příspěvkem[10] $M_i \Delta x_i$, kdežto k součtu $S(D')$ přispívá příspěvkem $\sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta y_k$. Je-li $r + 1 \leqq k \leqq s$, jest interval $\langle y_{k-1}, y_k \rangle$ částečným intervalem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a tedy podle pozn. 6 v kap. I, § 2 jest $M'_k \leqq M_i$. Tedy jest (viz poznámku[10])

$$\sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta y_k \leqq M_i \sum_{k=r+1}^{s} \Delta y_k = M_i(y_s - y_r) = M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i \Delta x_i .$$

Je tedy příspěvek, kterým interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $S(D')$, nejvýše roven příspěvku, kterým týž interval přispívá k součtu $S(D)$. Ježto to platí pro každý částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, jest $S(D') \leqq S(D)$; obdobně se dokáže nerovnost $s(D') \geqq s(D)$. Dokázali jsme tedy toto

Tvrzení B. *Je-li rozdělení D' zjemněním rozdělení D, jest $S(D') \leqq S(D)$, $s(D') \geqq s(D)$.*

Z tvrzení B učiníme ihned jeden důsledek: Budiž D_0 ono rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, jež je definováno dělicími body $x_0 = a$, $x_1 = b$. Zřejmě jest $S(D_0) = M(x_1 - x_0) = M(b - a)$, $s(D_0) = m(b - a)$, kde M značí supremum, m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$. Ježto každé rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ je zřejmě zjemněním rozdělení D_0 (neboť body a, b jsou dělicími body každého rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$), jest podle tvrzení B součet $S(D_0)$ největší ze všech horních součtů příslušných všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$;[11] obdobně součet $s(D_0)$ jest nejmenší ze všech dolních součtů. Dostáváme tedy tuto větu:

Věta 12. *Je-li M supremum a m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$, jest největší hodnota horního součtu rovna číslu $M(b - a)$, nejmenší hodnota dolního*

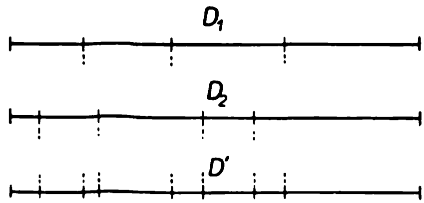
[10]) Co tím rozumíme, je snad jasno. Budeme říkat, že interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ příspěvkem $M_i \Delta x_i$; obecněji, je-li $p < q$, budeme říkat, že interval $\langle x_p, x_q \rangle$ přispívá k součtu $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ příspěvkem $\sum_{i=p+1}^{q} M_i \Delta x_i = M_{p+1}(x_{p+1} - x_p) + M_{p+2}(x_{p+2} - x_{p+1}) + \dots + M_q(x_q - x_{q-1})$. Učiňme ještě jednu poznámku, které často použijeme. Je-li $p < q$, je $\sum_{i=p+1}^{q} \Delta x_i = (x_{p+1} - x_p) + (x_{p+2} - x_{p+1}) + \dots + (x_q - x_{q-1}) = x_q - x_p$; speciálně tedy $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n - x_0 = b - a$. Geometrický význam těchto rovnic je jasný: délka intervalu $\langle x_p, x_q \rangle$ se rovná součtu délek intervalů $\langle x_p, x_{p+1} \rangle$, $\langle x_{p+1}, x_{p+2} \rangle$, ..., $\langle x_{q-1}, x_q \rangle$.

[11]) To znamená, že žádný z horních součtů není větší než číslo $S(D_0)$.

součtu rovna číslu $m(b - a)$. Je-li tedy D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, platí nerovnosti $m(b - a) \leqq s(D) \leqq S(D) \leqq M(b - a)$.[12]

Buďtež nyní D_1, D_2 dvě zcela libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme znakem D' rozdělení, jež je zjemněním rozdělení D_1 a rovněž zjemněním rozdělení D_2. (Takové zjemnění D' se dá snadno sestrojit např. tím, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D_2; tak je to provedeno na obr. 3).

Podle tvrzení B je $S(D_1) \geqq S(D')$; podle tvrzení A je $S(D') \geqq s(D')$; podle tvrzení B je $s(D') \geqq s(D_2)$; odtud plyne $S(D_1) \geqq s(D_2)$. Platí tedy



Obr. 3.

Tvrzení C. *Jsou-li D_1, D_2 dvě libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$* (totožná nebo navzájem různá), *jest $S(D_1) \geqq s(D_2)$.* (Čili: každý dolní součet je nejvýše roven kterémukoliv hornímu součtu.)

Každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $S(D)$; všechna čísla $S(D)$ příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří jistou množinu číselnou; označme ji znakem $\mathfrak{M}$. Rovněž tak každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $s(D)$; všechna čísla $s(D)$ příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří jistou množinu číselnou; označme ji znakem $\mathfrak{m}$.

Čísla množiny $\mathfrak{M}$ (jinými slovy: horní součty $S(D)$) jsou podle věty 12 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b - a)$ a nejméně rovna číslu $m(b - a)$; tedy množina $\mathfrak{M}$ je omezená, má tedy podle vět o supremu a infimu (kap. I, § 1) supremum a infimum. Supremum snadno stanovíme: největší horní součet, čili největší číslo množiny $\mathfrak{M}$, jest podle věty 12 číslo $M(b - a)$; podle **DI**, str. 70, v 4. vyd. str. 73 je toto číslo supremem množiny $\mathfrak{M}$. Nás bude však zajímat hlavně *infimum* množiny $\mathfrak{M}$. *Toto infimum množiny* $\mathfrak{M}$ (čili infimum horních součtů) *označíme znakem* $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme je nazývat *horním integrálem funkce $f(x)$ od a do b.*

Rovněž čísla množiny $\mathfrak{m}$ (jinými slovy: dolní součty $s(D)$) jsou podle věty 12 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b - a)$ a nejméně rovna číslu $m(b - a)$; tedy množina $\mathfrak{m}$ je omezená. Nejmenší číslo (a tedy infimum) množiny $\mathfrak{m}$ je podle věty 12 číslo $m(b - a)$. Nás bude však zajímat hlavně *supremum* množiny $\mathfrak{m}$. *Toto supremum množiny* $\mathfrak{m}$ (čili supremum dolních součtů) *označíme znakem* $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme je nazývat *dolním integrálem funkce $f(x)$ od a do b.*

Funkci $f(x)$ nazýváme v obou případech (při horním i dolním integrálu) funkcí integrovanou nebo integrandem; čísla a, b nazýváme *mezemi* horního (dolního)

[12]) Nerovnost $s(D) \leqq S(D)$ plyne z tvrzení A.

integrálu, a to číslo a nazýváme *dolní mezí*, číslo b *horní mezí*. Písmeno x, které vystupuje ve funkci $f(x)$ a v symbolu $\mathrm{d}x$, nazýváme *integrační proměnnou*.[13])

Věta 13. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Označíme-li písmenem M supremum a písmenem m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest*

$$m(b - a) \leqq \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a)\,.$$

Důkaz. Položme pro zkrácení

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = s\,, \quad \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S\,.$$

Číslo S je *infimem* množiny $\mathfrak{M}$, kdežto číslo $M(b - a)$, jak jsme zjistili před okamžikem, jest *supremem* množiny $\mathfrak{M}$; tedy jest $S \leqq M(b - a)$. Obdobně se dokáže nerovnost $m(b - a) \leqq s$. Zbývá tedy ještě dokázat nerovnost $s \leqq S$. Víme, že $S = \inf \mathfrak{M}$, $s = \sup \mathfrak{m}$. Podle tvrzení C není žádné číslo z $\mathfrak{m}$ větší než žádné číslo z $\mathfrak{M}$ (tj. vezmu-li libovolné číslo z $\mathfrak{m}$ a libovolné číslo z $\mathfrak{M}$, je první číslo nejvýše rovno druhému). Podle pozn. 1 v kap. I, § 1 je tedy vskutku $s \leqq S$.

Uveďme ještě dva jednoduché důsledky věty 13:

Věta 14. *Budiž $a < b$; nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ budte splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$A(b - a) \leqq \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b - a)\,.$$

Důkaz. Budiž M supremum a m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$; podle poznámky 3 v kap. I, § 2 jest $A \leqq m$, $B \geqq M$ a tedy podle věty 13

$$A(b - a) \leqq m(b - a) \leqq \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a) \leqq B(b - a)\,.$$

Věta 15. *Budiž $a < b$; nerovnost $|f(x)| \leqq K$ budiž splněna pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\left|\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b - a)\,, \quad \left|\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b - a)\,.$$

---

[13]) Integrační proměnná nemusí vždy být označena písmenem x, může být označena třeba písmenem t, u, y apod.; horní (dolní) integrál píšeme pak $\overline{\int}_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ atd. Hodnota horního (a rovněž dolního) integrálu nezávisí na označení integrační proměnné; to znamená: je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int}_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

(neboť funkce f nabývá v kterémkoliv bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ stejné hodnoty, ať v ní nezávisle proměnnou značím písmenem x či t). Tedy např.

$$\overline{\int}_2^5 (x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_2^5 (t^2 - t + 2)\,\mathrm{d}t,\ \underline{\int}_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = \underline{\int}_0^\pi \sin y\,\mathrm{d}y \text{ atd.}$$

Důkaz. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$; podle věty 14 je tedy

$$-K(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq K(b-a) \quad \text{čili} \quad \left|\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a)\,;$$

obdobně pro horní integrál.

Ve větě 13 jsme zjistili, že vždy platí vztah $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí-li v tomto vztahu znamení rovnosti, nazýváme společnou hodnotu horního a dolního integrálu krátce *integrálem* (obšírněji *určitým integrálem*[14])) *funkce* $f(x)$ *od* a *do* b *a označujeme ji znakem* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; ještě obšírněji mluvíme o Riemannově určitém integrálu.[15]) *Říkáme v tomto případě* (tj. tehdy, když se horní integrál rovná dolnímu), *že* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje, nebo že funkce* $f(x)$ *má určitý integrál od* a *do* b *nebo také, že funkce* $f(x)$ *jest integrace schopna v intervalu* $\langle a, b\rangle$.[16]) Tím jsme podali tzv. *Riemannovu* (nebo také Cauchyovu-Riemannovu) *součtovou definici určitého integrálu.* Podle této definice tedy integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (kdež $a < b$) existuje tehdy a jen tehdy, je-li $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; je-li tato rovnost splněna, jest integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definován vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$ [17])

Příklad 1. Budiž $a < b$; budiž fukce $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$, třeba $f(x) = c$. Potom supremum i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovno číslu c; podle věty 13 jest tedy

$$c(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \leqq c(b-a)\,.$$

Ježto oba krajní členy jsou si rovny, musí v těchto nerovnostech vesměs platit znamení rovnosti; tedy konstanta c má určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$ [18])

Příklad 2. Definujme funkci $f(x)$ takto: pro racionální x budiž $f(x) = 0$, pro iracionální x budiž $f(x) = 1$. Budiž $\langle a, b\rangle$ libovolný interval. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} <$

[14]) Název „určitý integrál" volíme proto, abychom tento integrál zřetelněji odlišili od tzv. „integrálu neurčitého", kterým se budeme zabývat v kapitole III.

[15]) Existují totiž ještě jiné definice integrálu. Jednou z nejdůležitějších je definice Lebesgueova, na které budou spočívat úvahy II. svazku tohoto Integrálního počtu. Několik zásadních poznámek k definicím integrálu viz v kap. VIII, § 1.

[16]) Jinak se u určitého integrálu užívá téhož názvosloví jako u horního a dolního integrálu: a je dolní mez, b je horní mez atd.

[17]) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme tedy dosud definovali jen pro $a < b$. Později rozšíříme tuto definici i na případy $a = b$, $a > b$.

[18]) Je-li $c = 1$, budeme místo $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$ psát kratčeji $\int_a^b \mathrm{d}x$, jak je zvykem.

$< x_n = b$. Budiž M_i supremum a m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Zřejmě jest $M_i = 1$, $m_i = 0$ a tedy máme $S(D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \,.\, \Delta x_i = b - a$, $s(D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \,.\, \Delta x_i = 0$. Ježto všechny horní součty jsou rovny číslu $b - a$, jest i jejich infimum rovno číslu $b - a$; jest tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$ a obdobně $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje.

Poznamenejme ještě: Má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b, můžeme ve větách 13, 14, 15 nahradit horní a dolní integrál prostě integrálem. Tím dostáváme tuto větu:

Věta 16. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ nechť má určitý integrál od a do b. Potom platí:*

1. Je-li M supremum a m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$, jest

$$m(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a)\,.$$

2. Jsou-li nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$, jest

$$A(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b - a)\,.$$

3. Platí-li nerovnost $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$, jest

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b - a)\,.$$

§ 3. Horní (dolní) integrál jako limita horních (dolních) součtů. V předešlém paragrafu jsme definovali horní integrál funkce $f(x)$ (omezené v intervalu $\langle a, b \rangle$) od a do b jako infimum horních součtů; ukážeme nyní, že tento horní integrál jest nejenom infimem horních součtů, nýbrž také – zhruba řečeno – limitou, ke které konvergují horní součty $S(D)$, jestliže se rozdělení D mění tak, že čísla Δx_i konvergují k nule.[19]) Tento výrok nemá ovšem dosud přesného smyslu, neboť není jasno, jak se má zde rozumět slovům „limita" a „konvergovat k nule" (pojem limity posloupnosti ani pojem limity funkce jedné nebo několika proměnných se nám – aspoň prozatím – nehodí). Musíme se tedy vyslovit přesněji, a to učiníme v tomto paragrafu.

Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Znakem $\nu(D)$ označíme největší z čísel $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$); *toto označení podržíme v celé kapitole*; číslo $\nu(D)$ nazývejme *normou* rozdělení D. Naším cílem bude především důkaz této věty:

[19]) To je ve shodě s naším programem, vytčeným v § 1; jedním z našich cílů jest právě sledovat, co se děje s horními a dolními součty, když čísla Δx_i konvergují k nule.

Věta 17. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnosti*

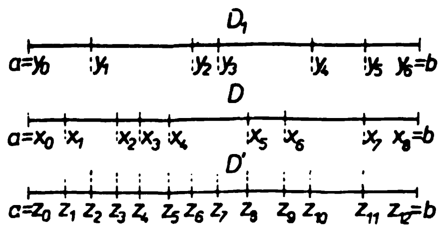
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon \tag{4}$$

jsou splněny pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje podmínku $\nu(D) < \delta$.

Důkaz. Budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Naším cílem jest dokázat existenci takového kladného čísla δ, že nerovnosti (4) jsou splněny pro všechna rozdělení D vyhovující podmínce $\nu(D) < \delta$. Ježto $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ je infimem horních součtů a ježto $\frac{1}{2}\varepsilon$ je kladné, existuje (podle věty o infimu) aspoň jedno rozdělení D_1 tak, že

$$S(D_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{5}$$

Toto rozdělení D_1 až do konce důkazu podržíme.



Obr. 4.

Rozdělení D_1 budiž definováno dělicími body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{p-1} < y_p = b$. Ježto funkce $f(x)$ jest omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje (podle poznámky 2 v kap. I, § 2) kladné číslo K tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $|f(x)| \leqq K$. Položme nyní

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4Kp}\,; \tag{6}$$

tedy je $\delta > 0$. Budiž nyní D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež vyhovuje podmínce $\nu(D) < \delta$; dokážeme, že potom platí nerovnosti (4); tím bude věta 17 dokázána.

Buďtež $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dělicí body rozdělení D. Sestrojme rozdělení D' tak, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D (viz obr. 4, kde jsou zakreslena rozdělení D_1, D, D'). Dělicí body rozdělení D' označíme $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(a = z_0 < z_1 < \ldots < z_{m-1} < z_m = b)$.

Vyšetřujme součty

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\,, \qquad S(D') = \sum_{k=1}^{m} M'_k\,\Delta z_k\,.$$

($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; M_i značí supremum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; M'_k značí supremum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle z_{k-1}, z_k\rangle$.) Částečné intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$ rozdělení D rozdělme na dvě třídy: interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ budeme nazývat intervalem prvního druhu, není-li žádný z bodů $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{p-1}$ *vnitřním* bodem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ budeme nazývat intervalem druhého druhu, je-li aspoň jeden z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ *vnitřním* bodem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. [Na obr. 4 jsou $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_2, x_3 \rangle$, $\langle x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_5, x_6 \rangle$, $\langle x_7, x_8 \rangle$ intervaly prvního druhu (jest $y_5 = x_7$, takže bod y_5 není vnitřním bodem intervalu $\langle x_7, x_8 \rangle$); intervaly $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_4, x_5 \rangle$, $\langle x_6, x_7 \rangle$ jsou intervaly druhého druhu.] Ježto každý interval druhého druhu obsahuje aspoň jeden z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ jako vnitřní bod, je počet intervalů druhého druhu nejvýše roven číslu $p - 1$.

Vyšetřujme nyní příspěvky, jimiž jednotlivé intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívají jednak k součtu $S(D)$, jednak k součtu $S(D')$. Je-li $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ interval *prvního* druhu, jest interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ též částečným intervalem rozdělení D', třeba $x_{i-1} = z_{k-1}$, $x_i = z_k$, a tedy zřejmě přispívá interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ týmž příspěvkem k součtu $S(D)$ jako k součtu $S(D')$. Je-li však $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ interval *druhého* druhu, jest tento interval v rozdělení D' rozdělen na dva nebo více intervalů, takže jest $x_{i-1} = z_r$, $x_i = z_s$, kde $s - r > 1$. Příspěvek intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ k součtu $S(D)$ jest tedy $M_i\, \Delta x_i$, kdežto příspěvek téhož intervalu k součtu $S(D')$ jest $\sum_{k=r+1}^{s} M'_k\, \Delta z_k$. Pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$; podle poznámky 4 v kap. I, § 2 je tedy $|M_i| \leqq K$, $|M'_k| \leqq K$; dále jest $\Delta x_i \leqq \nu(D) < \delta$; tedy jest

$$(7) \qquad |M_i\, \Delta x_i| < K\delta\,,$$

$$(8) \qquad \Big|\sum_{k=r+1}^{s} M'_k\, \Delta z_k\Big| \leqq K \sum_{k=r+1}^{s} \Delta z_k = K(z_s - z_r) =$$

$$= K(x_i - x_{i-1}) = K\, \Delta x_i < K\delta\,.$$

Vyšetřujme nyní rozdíl $S(D) - S(D')$; příspěvky, kterými přispívají intervaly *prvního* druhu k součtu $S(D)$ a k součtu $S(D')$, jsou si rovny a v rozdílu $S(D) - S(D')$ se tedy zruší. Každý interval *druhého* druhu přispívá k součtu $S(D)$ i k součtu $S(D')$ příspěvkem, jehož prostá hodnota podle (7), (8) jest menší než $K\delta$. Tedy takový interval druhého druhu přispívá k rozdílu $S(D) - S(D')$ příspěvkem, jehož prostá hodnota je menší než $2K\delta$. Ježto pak počet intervalů druhého druhu není větší než $p - 1$, jest podle (6)

$$|S(D) - S(D')| \leqq (p - 1) \,.\, 2K\delta < 2pK\delta = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,;$$

tedy jest

$$(9) \qquad S(D) < S(D') + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Dále jest rozdělení D' zjemněním rozdělení D_1 a tedy podle tvrzení B z § 2

$$(10) \qquad S(D') \leqq S(D_1)\,.$$

Ze vztahů (9), (10), (5) plyne

$$S(D) < S(D') + \tfrac{1}{2}\varepsilon \leqq S(D_1) + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \int_a^b f(x)\, dx + \varepsilon\,,$$

čímž je druhá nerovnost (4) dokázána. První nerovnost (4)

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D)$$

je však samozřejmá, ježto horní integrál je infimem horních součtů. Tím je věta 17 dokázána.

Z této věty učiníme ihned jeden důsledek:

Věta 18. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_m, \ldots$ posloupnost rozdělení*[20]) *intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že je $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Potom posloupnost čísel $S(D_1), S(D_2), \ldots, S(D_m), \ldots$ má limitu rovnou hornímu integrálu $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (čili $\lim_{m\to\infty} S(D_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$).*

Důkaz. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Máme dokázat, že existuje číslo m_0 tak, že nerovnost

$$(11) \qquad \left|S(D_m) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

platí pro všechna m, jež jsou větší než m_0. Podle věty 17 existuje kladné číslo δ takové, že nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

platí pro všechna rozdělení D, jež vyhovují vztahu $v(D) < \delta$. Ježto $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$, existuje číslo m_0 takové, že nerovnost $v(D_m) < \delta$ platí pro všechna m, jež jsou větší než m_0. Je-li tedy $m > m_0$, platí nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D_m) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

a tedy tím spíše nerovnost (11), jak jsme měli dokázat.

Význam věty 18 spočívá v této okolnosti: chceme-li nalézt $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, nemusíme vyšetřovat *všechna* rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ a sestrojit infimum příslušných horních součtů $S(D)$, nýbrž stačí, sestrojíme-li nějakou *posloupnost* rozdělení $D_1, D_2, D_3, \ldots$ takovou, že $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$, a najdeme-li limitu posloupnosti $S(D_1), S(D_2), S(D_3), \ldots$ Objasníme za chvíli tuto výhodu na příkladě; napřed však poznamenávám ještě, že obdobné věty platí také pro dolní integrál:

Věta 19. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnosti*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon$$

jsou splněny pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje podmínku $v(D) < \delta$.

[20]) Míním ovšem nekonečnou posloupnost. Řekli jsme již v DI, str. 79, v 4. vyd. str. 83, že členy posloupnosti mohou být jakékoliv věci.

Věta 20. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $D_1, D_2, D_3, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Potom jest*

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkazy vět 19, 20 neprovádím, ježto jsou zcela obdobné důkazům vět 17, 18. Čtenář ostatně může snadno odvodit věty 19, 20 z vět 17, 18 tímto způsobem: Budiž $s(D)$ dolní součet příslušný k funkci f a k rozdělení D; budiž $S'(D)$ horní součet příslušný k funkci $-f$ a k rozdělení D; z poznámky 5 v kap. I, § 2 (pro $c = -1$) plyne, že $s(D) = -S'(D)$; odtud snadno $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^b}(-f(x))\,\mathrm{d}x$, načež věty 19, 20 plynou okamžitě z vět 17, 18.

Příklad 1. Budiž $f(x) = x$ a počítejme

$$\overline{\int_2^3} x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \underline{\int_2^3} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Sestrojme rozdělení $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ tak, že D_m jest ono rozdělení intervalu $\langle 2, 3\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body rozdělení D_m jsou tedy $x_0 = 2$, $x_1 = 2 + 1/m$, $x_2 = 2 + 2/m, \ldots, x_i = 2 + i/m, \ldots, x_m = 2 + m/m = 3$. Jest $v(D_m) = 1/m$, tedy

$$\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0\,;$$

tedy podle vět 18, 20 jest

$$\lim_{m\to\infty} S(D_m) = \overline{\int_2^3} x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \underline{\int_2^3} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Počítejme $S(D_m)$, $s(D_m)$. Největší hodnota (a tedy i supremum) funkce $f(x) = x$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle = \left\langle 2 + \frac{i-1}{m}, 2 + \frac{i}{m}\right\rangle$ jest $2 + i/m$; obdobně nejmenší hodnota (a tedy i infimum) funkce $f(x)$ v tomto intervalu jest $2 + (i - 1)/m$. Tedy jest

$$S(D_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(2 + \frac{i}{m}\right)\frac{1}{m} = 2 + \frac{1}{m^2}(1 + 2 + \ldots + m) =$$

$$= 2 + \frac{m(m+1)}{2m^2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2m}\,;$$

$$s(D_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(2 + \frac{i-1}{m}\right)\frac{1}{m} = 2 + \frac{1}{m^2}(0 + 1 + \ldots. + (m-1)) =$$

$$= 2 + \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2m}\,.$$

Tedy jest

$$\overline{\int_2^3} x\,dx = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \frac{5}{2}, \qquad \underline{\int_2^3} x\,dx = \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \frac{5}{2}.$$

Tedy funkce x má integrál od 2 do 3 a je $\int_2^3 x\,dx = \frac{5}{2}$. Později odvodíme ovšem jiné, pohodlnější metody pro výpočet určitých integrálů.

Věty 17 až 20 se týkaly libovolných funkcí omezených v intervalu $\langle a, b\rangle$. Odvodíme ještě dvě obdobné věty, jež se však týkají pouze funkcí, jež mají integrál od a do b.

Věta 21. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce, jež má určitý integrál od a do b. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že platí toto: je-li D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = b$, které vyhovuje podmínce $v(D) < \delta$, a jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná čísla, která vyhovují podmínce $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí nerovnost*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Důkaz. Budiž $f(x)$ funkce, jež má integrál od a do b. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Podle věty 17 existuje kladné číslo δ_1 tak, že nerovnost[21])

$$S(D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon \tag{13}$$

platí pro všechna rozdělení D, která vyhovují podmínce $v(D) < \delta_1$. Podle věty 19 existuje kladné číslo δ_2 tak, že nerovnost

$$s(D) > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \tag{14}$$

platí pro všechna rozdělení D vyhovující podmínce $v(D) < \delta_2$. Položme $\delta =$ $= \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; tedy $\delta > 0$. Budiž D libovolné rozdělení vyhovující podmínce $v(D) < \delta$; potom platí nerovnost (13) i nerovnost (14). Buďte $a = x_0 < x_1 < \ldots <$ $< x_n = b$ dělicí body rozdělení D. Označme znakem M_i supremum a znakem m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná čísla vyhovující nerovnostem $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, jest ovšem $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq$ $\leqq M_i$ a tedy

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = S(D); \tag{15}$$

[21]) Místo horního a dolního integrálu píšeme ovšem krátce integrál.

odtud a z nerovností (13), (14) plyne pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon\,;$$

to je však právě hledaná nerovnost (12).

Věta 22. *Buďiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce, jež má určitý integrál od a do b. Budiž dále $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež vyhovuje podmínce $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Dělicí body rozdělení D_m buďte*

$$a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots < x_{n_m - 1,m} < x_{n_m,m} = b\,.^{22})$$

Pro každou hodnotu m budiž dáno n_m čísel $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots, \xi_{n_m,m}$ tak, že platí $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n_m$. Potom jest

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

(Přitom značíme $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m}$.)

D ů k a z. Podle vět 18 a 20 jest

$$\lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{17}$$

Jest však zřejmě (viz důkaz nerovnosti (15) v důkazu věty 21)

$$s(D_m) \leqq \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \leqq S(D_m)\,. \tag{18}$$

Ze vztahů (17), (18) plyne však okamžitě rovnice (16).[23]

Všimněme si, jaký je rozdíl např. mezi větou 18 a větou 22. Existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme jej podle věty 18 počítat takto: sestrojíme posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle : D_1, D_2, \ldots$ takovou, že $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$; limita posloupnosti $S(D_1), S(D_2), \ldots$ je potom hledaný integrál. Abychom však stanovili horní součet $S(D_m)$, musíme stanovit supremum funkce $f(x)$ ve všech částečných intervalech, na které jest interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen rozdělením D_m. Věta 22 praví pak — zhruba řečeno — že můžeme místo tohoto suprema funkce $f(x)$ v takovém částečném intervalu vzít namátkou hodnotu funkce $f(x)$ v *kterémkoliv* bodě toho částečného intervalu. Poznamenávám ovšem ještě jednou, že vět 17 až 20 můžeme použít pro jakoukoliv omezenou funkci, kdežto vět 21 a 22 můžeme použít jen tehdy, víme-li již předem, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Jak se to pozná, o tom si odvodíme některé věty v § 4, 5, 6, hlavně však v § 8.

[22]) Tyto body, jakož i jejich počet závisí ovšem na m — v označení byl na tuto okolnost vzat zřetel. Číslo n_m značí např. počet částečných intervalů, na něž je interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen rozdělením D_m.

[23]) Podle známé věty: je-li $a_m \leqq c_m \leqq b_m$, $\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} b_m = \alpha$, jest též $\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$, viz DI, věta 6' str. 86, v 4. vyd. str. 91.

§ 4. Integrace součtu.

Věta 23. *Budiž $a < b$; budte $f_1(x)$, $f_2(x)$ funkce omezené v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom je*

$$\overline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{19}$$

$$\underline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{20}$$

Důkaz. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Budiž M_i' supremum funkce $f_1(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, budiž M_i'' supremum funkce $f_2(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, budiž M_i supremum funkce $f_1(x) + f_2(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pro všechna x intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí nerovnost $f_1(x) + f_2(x) \leqq M_i' + M_i''$ a tedy jest (podle poznámky 3 v kap. I, § 2) $M_i \leqq M_i' + M_i''$. Označím-li tedy znaky $S'(D)$, $S''(D)$, $S(D)$ horní součty příslušné k funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x) + f_2(x)$, jest

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n}(M_i' + M_i'')\,\Delta x_i = S'(D) + S''(D)\,. \tag{21}$$

Sestrojme posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_1, D_2, D_3, \ldots$ tak, že $\lim\limits_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$ (můžeme třeba zvolit za D_m ono rozdělení, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů). Potom jest podle (21) pro každé m

$$S(D_m) \leqq S'(D_m) + S''(D_m)\,;$$

přechodem k limitě dostáváme podle věty 18 vztah (19). Vztah (20) se dokáže obdobně.

Věta 24. *Budiž $a < b$; existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$, existuje i integrál $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x$ a jest*

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Podle vět 23 a 13 je

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x \leqq \underline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \overline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

oba krajní výrazy (vpravo i vlevo) jsou si rovny, tedy platí vesměs znamení rovnosti, čímž je věta 24 dokázána.

Věta 25. *Budiž $a < b$; má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b a je-li c libovolné číslo, má i funkce $c\,f(x)$ určitý integrál od a do b a je*

$$\int_a^b c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Rozeznávejme tři případy:

1. Je-li $c = 0$, jest podle příkladu 1 v § 2

$$\int_a^b 0 \,.\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0 = 0 \,.\, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Je-li $c > 0$, vyšetřujme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Budiž $S'(D)$ horní a $s'(D)$ dolní součet příslušný k funkci $c f(x)$; $S(D)$ budiž horní a $s(D)$ dolní součet příslušný k funkci $f(x)$. Je-li M_i supremum a m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest podle pozn. 5 v kap. I, § 2 supremum funkce $c f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ rovno číslu cM_i a infimum rovno číslu cm_i. Tedy

$$S'(D) = \sum_{i=1}^{n} cM_i\,\Delta x_i = c\,S(D)\,, \qquad s'(D) = \sum_{i=1}^{n} cm_i\,\Delta x_i = c\,s(D)\,.$$

Budiž $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$. Potom je pro každé m

$$S'(D_m) = c\,S(D_m)\,, \quad s'(D_m) = c\,s(D_m)\,;$$

podle vět 18 a 20 získáme odtud přechodem k limitě rovnice

$$\overline{\int_a^b} c f(x)\,\mathrm{d}x = c\,\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\underline{\int_a^b} c f(x)\,\mathrm{d}x = c\,\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

jak se mělo dokázat.

3. Budiž konečně $c < 0$; zachováme-li totéž označení jako v případě $c > 0$, dostáváme nyní podle pozn. 5 v kap. I, § 2, že supremum funkce $c f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je rovno číslu cm_i a infimum je rovno číslu cM_i; z toho

$$S'(D) = \sum_{i=1}^{n} cm_i\,\Delta x_i = c\,s(D)\,, \qquad s'(D) = \sum_{i=1}^{n} cM_i\,\Delta x_i = c\,S(D)\,,$$

odkudž stejně jako dříve $S'(D_m) = c\,s(D_m)$, $s'(D_m) = c\,S(D_m)$ a tedy přechodem k limitě

$$\overline{\int_a^b} c f(x)\,\mathrm{d}x = c\,\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\underline{\int_a^b} c f(x)\,\mathrm{d}x = c\,\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

jak se mělo dokázat.

Poznámka 1. Větu 24 jsme dokázali pro dva sčítance; úplnou indukcí lze okamžitě odvodit obdobnou větu pro libovolný počet sčítanců. Kombinujeme-li tuto větu s větou 25 (o násobení integrované funkce konstantou), dostáváme konečně tuto větu:

Věta 26. *Budiž $a < b$; jsou-li $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ funkce mající určitý integrál od a do b a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ libovolná čísla, má i funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ určitý integrál od a do b a jest*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = \\ = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jako speciální případ dostáváme tento výsledek (pro $n = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$): Mají-li funkce $f_1(x), f_2(x)$ určitý integrál od a do b ($a < b$), má i funkce $f_1(x) - f_2(x)$ určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta 27. *Budiž $a < b$; $f(x)$ budiž funkce, jež má určitý integrál od a do b; budiž $f(x) \geqq 0$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0\,.$$

Důkaz plyne okamžitě z věty 16 (z druhé její části), klademe-li v ní $A = 0$ a klademe-li za B třeba supremum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta 28. *Budiž $a < b$; $f_1(x), f_2(x)$ buďtež funkce mající určitý integrál od a do b; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Podle věty 26 existuje $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$; podle věty 27 jest $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0$; podle věty 26 jest tedy

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0\,.$$

Poznámka 2. Důležitý doplněk k této větě obsahuje poznámka 2 na konci § 5.

§ 5. Integrál od a do c, vyjádřený integrály od a do b a od b do c.

Věta 29. *Budiž $a < b < c$ a budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, c\rangle$. Potom jest*

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

(22)

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Budiž D'_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_m = b\,, \quad \text{kdež} \quad x_i = a + \frac{i}{m}(b - a)\,;$$

zřejmě jest $v(D'_m) = (b - a) : m$. Obdobně budiž D''_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle b, c\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy

$$b = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = c\,, \quad \text{kdež} \quad y_i = b + \frac{i}{m}(c - b)\ ;$$

zřejmě jest $v(D''_m) = (c - b) : m$. Dělicí body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < b < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = c$ definují jisté rozdělení D_m intervalu $\langle a, c\rangle$, přičemž

$$v(D_m) = \operatorname{Max}\left((b - a) : m\,,\ (c - b) : m\right) ;$$

zřejmě jest

$$S(D_m) = S(D'_m) + S(D''_m) \tag{23}$$

pro každé m. Ježto $\lim\limits_{m\to\infty} v(D'_m) = \lim\limits_{m\to\infty} v(D''_m) = \lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$, jest podle (23) a podle věty 18

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \lim_{m\to\infty} S(D'_m) + \lim_{m\to\infty} S(D''_m) =$$

$$= \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

čímž je dokázán vztah (22) pro horní integrál. Důkaz pro dolní integrál jest obdobný.

Věta 30. *Budiž $a < b < c$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i integrál $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$; potom existuje i integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a jest*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Z předpokládané existence integrálu od a do b a integrálu od b do c plyne, že funkce $f(x)$ jest omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c\rangle$ a tedy i v intervalu $\langle a, c\rangle$ (podle poznámky 7 v kap. I, § 2); podle věty 29 jest tedy

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a rovněž}$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

jak se mělo dokázat.

Poznámka 1. Věty 29 a 30 se týkaly dvou „sousedních" intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$. Úplnou indukcí lze z nich okamžitě odvodit obdobné věty pro libovolný počet takových intervalů; např. je-li $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ a je-li funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a_1, a_n\rangle$, je

$$\overline{\int_{a_1}^{a_n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{a_1}^{a_2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{a_2}^{a_3}} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \overline{\int_{a_{n-1}}^{a_n}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta 31. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ nechť má určitý integrál od a do b. Nechť $\langle c, d\rangle$ jest částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$.*[24]*) Potom funkce $f(x)$ má též určitý integrál od c do d.*

Důkaz. Podle věty 29 (a podle poslední poznámky) jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^c f(x)\,dx + \overline{\int}_c^d f(x)\,dx + \overline{\int}_d^b f(x)\,dx\,, \text{[25]})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{\int}_c^d f(x)\,dx + \underline{\int}_d^b f(x)\,dx\,. \text{[25]})$$

Z toho odečtením

$$(24)\qquad \left(\overline{\int}_a^c f(x)\,dx - \underline{\int}_a^c f(x)\,dx\right) + \left(\overline{\int}_c^d f(x)\,dx - \underline{\int}_c^d f(x)\,dx\right) + \\ + \left(\overline{\int}_d^b f(x)\,dx - \underline{\int}_d^b f(x)\,dx\right) = 0\,. \text{[25]})$$

Žádný sčítanec na levé straně rovnice (24) není záporný (podle věty 13); tedy musí každý z těchto sčítanců být roven nule (neboť kdyby některý z nich byl různý od nuly – a tedy kladný – byl by i součet na levé straně rovnice (24) kladný a nemohl by se rovnat nule). Speciálně tedy prostřední člen se rovná nule, tj.

$$\overline{\int}_c^d f(x)\,dx = \underline{\int}_c^d f(x)\,dx\,,$$

jak se mělo dokázat.

Poznámka 2. Důležitým doplňkem k větě 28 v § 4 je tato věta: *Budiž $a < b$; $f_1(x)$, $f_2(x)$ buďte funkce mající určitý integrál od a do b; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Konečně nechť existuje číslo c v intervalu (a, b) tak, že $f_1(c) \neq f_2(c)$* (tedy nutně $f_1(c) > f_2(c)$) *a že $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou spojité v bodě c. Potom je*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx > \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

(Proti znamení $\geqq$ ve větě 28 máme tedy zde znamení $>$.)

Důkaz. Označme $f_1(c) - f_2(c) = h$, tedy $h > 0$. Ježto funkce $f_1(x) - f_2(x)$ je spojitá v bodě c, existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x intervalu $\langle c - \delta, c + \delta\rangle$ je $f_1(x) - f_2(x) \geqq \frac{1}{2}h$. Mimoto volme δ tak malé, že $a < c - \delta < c + \delta < b$. Potom je podle věty 28 (integrály existují podle věty 31)

$$(24a)\qquad \int_a^{c-\delta} f_1(x)\,dx \geqq \int_a^{c-\delta} f_2(x)\,dx\,, \qquad \int_{c+\delta}^b f_1(x)\,dx \geqq \int_{c+\delta}^b f_2(x)\,dx$$

a konečně (viz větu 24 a příklad 1 v § 2)

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f_1(x)\,dx \geqq \int_{c-\delta}^{c+\delta} (f_2(x) + \tfrac{1}{2}h)\,dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f_2(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} \tfrac{1}{2}h\,dx\,,$$

tj.

$$(24b)\qquad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f_1(x)\,dx \geqq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f_2(x)\,dx + h\delta\,.$$

[24]) To znamená $a \leqq c < d \leqq b$.

[25]) První sčítanec ovšem odpadne, je-li $a = c$; třetí sčítanec odpadne, je-li $d = b$.

Sečtením tří nerovností (24a), (24b) dostáváme podle pozn. 1 vskutku

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \geqq \int_a^b f_2(x)\,dx + h\delta > \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

§ 6. Změna integrované funkce v konečném počtu bodů.

Věta 32. *Budiž $a < b$. Budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $g(x)$ funkce, jež se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,, \qquad \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Důkaz. Ježto funkce $f(x)$ je omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, je podle pozn. 8 v kap. I, § 2 též funkce $g(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, takže horní integrál $\overline{\int_a^b} g(x)\,dx$ má smysl. Abychom dokázali, že

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,, \tag{25}$$

stačí, dokážeme-li toto: nerovnost

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^b} g(x)\,dx\right| < \varepsilon \tag{26}$$

platí, ať je ε jakékoliv kladné číslo. Budiž tedy dáno libovolné kladné číslo ε. Zvolme čísla $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že rovnost $f(x) = g(x)$ platí pro každé x intervalu $\langle a, b\rangle$, jež se nerovná žádnému z čísel $a_0, a_1, \ldots, a_p$.[26]) Existují (podle poznámky 2 v kap. I, § 2) dvě kladná čísla K_1, K_2 tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| \leqq K_1$, $|g(x)| \leqq K_2$; položme $K = \mathrm{Max}\,(K_1, K_2)$, potom jest

$$|f(x)| \leqq K\,, \qquad |g(x)| \leqq K \tag{27}$$

pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zvolme nyní kladné číslo δ tak malé, aby byly splněny tyto podmínky:

$$\delta < \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_p - a_{p-1})\,, \tag{28}$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4Kp}\,. \tag{29}$$

Z nerovnosti (28) plyne

$$a = a_0 < a_0 + \delta < a_1 - \delta < a_1 + \delta < a_2 - \delta < \ldots < a_{p-1} + \delta <$$
$$< a_p - \delta < a_p = b\,;$$

[26]) Nejjednodušeji mohu tedy čísla $a_0, a_1, \ldots, a_p$ volit takto: vezmu všechny hodnoty x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí nerovnost $f(x) \neq g(x)$ a přidám k nim ještě hodnoty a, b (ať nerovnosti $f(a) \neq g(a)$, $f(b) \neq g(b)$ platí nebo neplatí). Tato čísla, seřazená podle velikosti, označím $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

podle věty 29 a podle poznámky 1 v § 5 jest tedy

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_{a_0}^{a_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int}_{a_0+\delta}^{a_1-\delta} + \overline{\int}_{a_1-\delta}^{a_1+\delta} + \overline{\int}_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} + \ldots + \overline{\int}_{a_{p-1}+\delta}^{a_p-\delta} + \overline{\int}_{a_p-\delta}^{a_p}\,;\text{[27])}$$

$$\overline{\int}_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_{a_0}^{a_0+\delta} g(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int}_{a_0+\delta}^{a_1-\delta} + \overline{\int}_{a_1-\delta}^{a_1+\delta} + \overline{\int}_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} + \ldots + \overline{\int}_{a_{p-1}+\delta}^{a_p-\delta} + \overline{\int}_{a_p-\delta}^{a_p}\,.$$

Odečtěme tyto dvě rovnice člen po členu. V intervalech $\langle a_{i-1} + \delta,\ a_i - \delta\rangle$ jest $f(x) = g(x)$ (pro $i = 1, 2, \ldots, p$) a tedy

$$\overline{\int}_{a_{i-1}+\delta}^{a_i-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_{a_{i-1}+\delta}^{a_i-\delta} g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

akže tito členové se zruší. Zbude tedy

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int}_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \Big(\overline{\int}_{a_0}^{a_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int}_{a_0}^{a_0+\delta} g(x)\,\mathrm{d}x\Big) + \tag{30}$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1}\Big(\overline{\int}_{a_i-\delta}^{a_i+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int}_{a_i-\delta}^{a_i+\delta} g(x)\,\mathrm{d}x\Big) + \Big(\overline{\int}_{a_p-\delta}^{a_p} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int}_{a_p-\delta}^{a_p} g(x)\,\mathrm{d}x\Big)\,.$$

Podle věty 15 a podle nerovností (27) jest

$$\Big|\overline{\int}_{a_0}^{a_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq K\delta\,, \qquad \Big|\overline{\int}_{a_p-\delta}^{a_p} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq K\delta\,,$$

$$\Big|\overline{\int}_{a_i-\delta}^{a_i+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq 2K\delta \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, p-1\,,$$

a obdobné nerovnosti platí, píšeme-li v nich funkci $g(x)$ místo funkce $f(x)$. Z rovnice (30) plyne tedy

$$\Big|\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int}_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq 2(K\delta + (p-1)\,.\,2K\delta + K\delta) = 4pK\delta\,;$$

podle (29) je však $4pK\delta < \varepsilon$, platí tedy nerovnost (26); tím je dokázána rovnice (25). Obdobná rovnice pro dolní integrál se dokáže zcela analogicky.

Věta 33. *Budiž $a < b$; nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; funkce $g(x)$ nechť se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje též $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a jest*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Podle předpokladu jest

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

tedy podle věty 32 jest

$$\overline{\int}_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ a rovněž } \underline{\int}_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

jak jsme měli dokázat.

[27]) **Za integračním znamením má ovšem všude stát $f(x)$ dx; v následujícím vzorci má zase všude stát $g(x)$ dx.**

Celkem jest možno vyslovit výsledek tohoto paragrafu zhruba asi takto: změním-li funkci integrovanou pouze v konečném počtu bodů, nezmění se horní (dolní) integrál (popř. integrál). Tento výsledek se dá ještě podstatně zobecnit; o tom pojednáme až v II. svazku.

§ 7. **Integrál jako funkce horní meze.** Doplňme především poněkud definici integrálu, jakož i definici horního a dolního integrálu. Dosud (v § 2) jsme definovali $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$, $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$ jen tehdy, bylo-li $a < b$. Doplňme nyní tuto definici též pro $a = b$ tímto dodatkem:

Dodatek k definici integrálu. *Je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$, definujeme $\overline{\int}_a^a f(x)\,dx = \underline{\int}_a^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.*[28])

Připomeňme, že nerovnost $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$, kterou jsme dříve (viz větu 13) dokázali pro $a < b$, platí podle této definice i pro $a = b$ (potom je totiž na obou stranách nula).

Budiž nyní $a < b$; budiž f funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom existuje nejenom horní integrál $\overline{\int}_a^b f(t)\,dt$, nýbrž též horní integrál $\overline{\int}_a^x f(t)\,dt$[29]) pro každé x, jež vyhovuje nerovnostem $a \leqq x \leqq b$. Tento horní integrál jest tedy funkcí proměnné x definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$; obdobně dolní integrál $\underline{\int}_a^x f(t)\,dt$ jest funkcí proměnné x definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$. Dokážeme nyní dvě důležité věty o těchto funkcích.

Věta 34. *Budiž $a < b$. Funkce f budiž omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $\overline{\int}_a^x f(t)\,dt$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a rovněž funkce $\underline{\int}_a^x f(t)\,dt$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Ježto funkce f je omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje podle pozn. 2 v kap. I, § 2 kladné číslo K tak, že nerovnost $|f(t)| \leqq K$ je splněna pro všechna t intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro zkrácení pišme

$$F(x) = \overline{\int}_a^x f(t)\,dt\,.$$

Máme dokázat, že funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. máme dokázat[30]) (viz kap. I, § 3): je-li předně $a \leqq x_0 < b$, je funkce $F(x)$ spojitá zprava v bodě x_0; je-li za druhé $a < x_0 \leqq b$, je funkce $F(x)$ spojitá zleva v bodě x_0.

[28]) Tedy $\int_a^a f(x)\,dx$ existuje vždy, je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$. Pojmenování dříve zavedená, jako horní mez, dolní mez, funkce integrovaná atd. podržíme i zde.

[29]) Měním označení integrační proměnné (viz poznámku [13])), aby se integrační proměnná t nepletla s horní mezí x. Často se to nečiní a píše se $\overline{\int}_a^x f(x)\,dx$.

[30]) Prosím čtenáře, aby až do konce této kapitoly si stále uvědomoval obsah kapitoly I, ježto ji nyní budeme neustále používat.

Budiž tedy předně $a \leqq x_0 < b$; budiž ε libovolné kladné číslo. Položme

$$\delta = \operatorname{Min}\left(b - x_0, \frac{\varepsilon}{K}\right), \tag{31}$$

tedy $\delta > 0$. Dokážeme: je-li $x_0 < x < x_0 + \delta$, je

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\,;$$

tím bude dokázáno, že funkce $F(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0.

Budiž tedy x číslo takové, že jest $x_0 < x < x_0 + \delta$;[31]) potom jest

$$F(x) = \bar{\int}_a^x f(t)\,dt = \bar{\int}_a^{x_0} f(t)\,dt + \bar{\int}_{x_0}^x f(t)\,dt = F(x_0) + \bar{\int}_{x_0}^x f(t)\,dt\,;$$[32])

tedy $F(x) - F(x_0) = \bar{\int}_{x_0}^x f(t)\,dt$. Pro $x_0 \leqq t \leqq x$ jest $|f(t)| \leqq K$; podle věty 15 jest tedy

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\bar{\int}_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leqq K(x - x_0)\,;$$

jest však $x - x_0 < \delta$; podle (31) je tedy

$$|F(x) - F(x_0)| < K\delta \leqq \varepsilon\,,$$

jak jsme měli dokázat.

Budiž za druhé $a < x_0 \leqq b$; budiž ε libovolné kladné číslo; položme

$$\delta = \operatorname{Min}\left(x_0 - a, \frac{\varepsilon}{K}\right);$$

tedy $\delta > 0$. Dokážeme: je-li $x_0 - \delta < x < x_0$, je

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Tím bude dokázáno, že funkce $F(x)$ je v bodě x_0 spojitá zleva.

Budiž tedy x takové číslo, že platí $x_0 - \delta < x < x_0$;[33]) potom jest

$$F(x_0) = \bar{\int}_a^{x_0} f(t)\,dt = \bar{\int}_a^x f(t)\,dt + \bar{\int}_x^{x_0} f(t)\,dt = F(x) + \bar{\int}_x^{x_0} f(t)\,dt\,,$$

z čehož jako dříve plyne

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\bar{\int}_x^{x_0} f(t)\,dt\right| \leqq K(x_0 - x) < K\delta \leqq \varepsilon\,,$$

jak jsme měli dokázat. Tím je dokázána ona část věty 34, jež se týká horního integrálu; pro dolní integrál je důkaz obdobný.

---

[31]) Ježto podle (31) jest $x_0 + \delta \leqq x_0 + (b - x_0) = b$, je též $x < b$.

[32]) Je-li $a < x_0$, plyne tato rovnice z věty 29; je-li $a = x_0$, je tato rovnice též správná, ježto potom je $\bar{\int}_a^{x_0} f(t)\,dt = 0$.

[33]) Tedy jest $x > a$, neboť $x_0 - \delta \geqq x_0 - (x_0 - a) = a$.

Věta 35. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ budiž omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $a \leqq x_0 < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x_0, má funkce $\overline{\int_a^x} f(t)$ v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$ a rovněž funkce $\underline{\int_a^x} f(t)$ má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$. Obdobně, je-li $a < x_0 \leqq b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zleva v bodě x_0, má funkce $\overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ i funkce $\underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x_0 derivaci zleva, rovnou číslu $f(x_0)$.*

Dodatek. *Je-li tedy $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x,*[34]) *existují v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)\,.^{35})$$

Důkaz věty 35. Položme pro zkrácení $F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$; budiž $a \leqq x_0 < b$; budiž funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x_0.

Je-li $0 < h < b - x_0$, jest

$$F(x_0 + h) = \overline{\int_a^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_0) + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a tedy

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{32}$$

Budiž dáno libovolné kladné číslo ε; ježto funkce $f(t)$ je spojitá zprava v bodě x_0, existuje kladné číslo δ takové, že nerovnost $|f(t) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ je splněna pro každé t, pro něž platí $x_0 \leqq t < x_0 + \delta$. Přitom mohu předpokládat, že platí $\delta \leqq b - x_0$.[36]) Je-li $0 < h < \delta$, platí nerovnost $x_0 \leqq t < x_0 + \delta$ pro všechna čísla t intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$; pro všechna čísla t intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$ je tedy $|f(t) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ čili

$$f(x_0) - \tfrac{1}{2}\varepsilon < f(t) < f(x_0) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,;$$

podle věty 14 platí tedy nerovnosti

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) - \tfrac{1}{2}\varepsilon \leqq \frac{1}{h}\overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqq f(x_0) + \tfrac{1}{2}\varepsilon < f(x_0) + \varepsilon\,.$$

Podle (32) platí tedy nerovnosti

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \varepsilon$$

[34]) To znamená: spojitá zprava i zleva.

[35]) Neboť potom derivace zprava i zleva podle věty 35 existují a rovnají se témuž číslu $f(x)$; podle věty 123 v DI, str. 213, v 4. vyd. str. 242 existuje tedy derivace a rovná se rovněž číslu $f(x)$.

[36]) Kdyby totiž bylo náhodou $\delta > b - x_0$, mohli bychom místo čísla δ vzít menší číslo $b - x_0$.

čili

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

pro každé h splňující podmínky $0 < h < \delta$. To však znamená právě, že funkce $F(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$, jak jsme měli dokázat.

Tvrzení o derivaci zleva se dokáže obdobně – provedu to již rychleji. Buďiž nyní $a < x_0 \leqq b$; funkce $f(x)$ buďiž spojitá zleva v bodě x_0. Je-li $0 > h > a - x_0$, položme $-h = k$, tedy $0 < k < x_0 - a$, načež

$$F(x_0) = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{x_0-k}} + \overline{\int_{x_0-k}^{x_0}} = F(x_0 - k) + \overline{\int_{x_0-k}^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

tedy

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{F(x_0 - k) - F(x_0)}{-k} = \frac{1}{k} \overline{\int_{x_0-k}^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Odtud obdobně jako dříve se dokáže, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ ($\delta \leqq x_0 - a$) tak, že pro $0 < k < \delta$ je

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{1}{k} \overline{\int_{x_0-k}^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t < f(x_0) + \varepsilon\,;$$

tj. pro $0 > h > -\delta$ je

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \varepsilon\,.$$

Tedy má funkce $F(x)$ v bodě x_0 derivaci zleva rovnou $f(x_0)$, jak jsme měli dokázat.

Důkaz tvrzení pro dolní integrál se provádí stejně, jen místo horního integrálu je třeba všude psát dolní integrál.

Jestliže jest $a < b$ a jestliže existuje $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, potom podle věty 31 a podle dodatku k definici integrálu existuje též integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé x intervalu $\langle a, b \rangle$. V tomto případě můžeme tedy ve větě 34 a 35 např. místo horního integrálu psát prostě integrál a dostáváme tak tuto větu:

Věta 36. *Buďiž $a < b$; nechť existuje $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Potom platí tato tvrzení:*

1. *Funkce $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$*[37]) *jest spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$.*

2. *Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)\,.$$ [38])

---

[37]) Tento integrál je funkcí proměnné x.

[38]) Použil jsem jen dodatku k větě 35; pro derivaci zprava a zleva máme tento výsledek: Je-li $a \leqq x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá zprava v bodě x, má integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x derivaci zprava, rovnou číslu $f(x)$. Obdobně: je-li $a < x \leqq b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá zleva v bodě x, má integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x derivaci zleva, rovnou číslu $f(x)$ (viz větu 35).

§ 8. Funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$ má určitý integrál od a do b. Z vět 34 a 35 učiníme tento důležitý důsledek:

Věta 37. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež má v intervalu (a, b) nejvýše konečný počet bodů nespojitosti;*[39]) *potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz. Sestrojme body $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, jenž nesplývá s žádným z bodů $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$.[40]) Vezměme kterýkoliv interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; funkce $f(x)$ je v tomto intervalu omezená a je spojitá v každém *vnitřním* bodě tohoto intervalu. Pro zkrácení položme

$$\overline{\int}_{a_{i-1}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)\,, \qquad \underline{\int}_{a_{i-1}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x)\,;$$

použijeme-li vět 34 a 35 (přičemž místo intervalu $\langle a, b\rangle$ klademe interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$), dostáváme tento výsledek:

1. Funkce $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$.

2. V každém vnitřním bodě intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ existují derivace $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$. Funkce $F(x) - G(x)$ je tedy spojitá v *uzavřeném* intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ a má derivaci rovnou nule v každém *vnitřním* bodě tohoto intervalu. Podle věty 7 je tedy funkce $F(x) - G(x)$ konstantní v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$, tj. $F(x) - G(x) = c$ pro $a_{i-1} \leqq x \leqq a_i$. Abychom stanovili konstantu c, dosaďme za x nějakou hodnotu intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$; nejlépe se nám hodí hodnota $x = a_{i-1}$, neboť

$$F(a_{i-1}) = \overline{\int}_{a_{i-1}}^{a_{i-1}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,, \qquad G(a_{i-1}) = \underline{\int}_{a_{i-1}}^{a_{i-1}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,;$$

tedy $c = 0$. Tedy jest $F(x) = G(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$. Speciálně pro $x = a_i$ jest

$$F(a_i) = G(a_i)\,, \quad \text{čili} \quad \overline{\int}_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = \underline{\int}_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

takže $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t$ existuje. Tedy existují integrály

$$\int_{a_0}^{a_1} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

podle věty 30 (a podle poznámky 1 k této větě) existuje tedy též integrál

$$\int_{a_0}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

jak bylo třeba dokázat.

[39]) Funkce $f(x)$ nemusí mít po případě vůbec žádný bod nespojitosti. Bodem nespojitosti nazýváme ovšem takový bod intervalu (a, b), v němž funkce f není spojitá.

[40]) Takové body $a_0, a_1, \ldots, a_p$ mohu dostat třeba takto: vezmu body a, b, přidám k nim všechny body intervalu $\langle a, b\rangle$, v nichž funkce $f(x)$ není spojitá a všechny tyto body, seřazené podle velikosti, označím znaky $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Uveďme tento speciální případ věty 37:

Věta 38. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$; potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz. Podle věty 127 v **DI** str. 235, v 4. vyd. str. 268 jest funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$; tedy mohu použít věty 37 a tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Věta 37 by se dala podstatně zobecnit; tím se budeme zabývat až v II. svazku Integrálního počtu.

§ 9. Funkce primitivní a její souvislost s určitým integrálem.

Věta 39. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Budiž D_m $(m = 1, 2, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů. Dělicí body rozdělení D_m jsou tedy body $a = x_{0,m} < < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots < x_{m-1,m} < x_{m,m} = b$, kde jest

$$x_{i,m} = a + \frac{i}{m}(b - a) \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m\,;$$

tedy $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = (b - a)/m$, $\nu(D_m) = (b - a)/m$, tedy $\lim\limits_{m\to\infty} \nu(D_m) = = 0$. Ježto funkce $F(x)$ jest spojitá v uzavřeném intervalu $\langle x_{i-1,m}, x_{i,m}\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $(x_{i-1,m}, x_{i,m})$, lze podle věty o přírůstku funkce (věta 6) každému i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ přiřadit jisté číslo $\xi_{i,m}$ vyhovující nerovnostem $x_{i-1,m} < \xi_{i,m} < x_{i,m}$ tak, že jest

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = (x_{i,m} - x_{i-1,m}) \cdot F'(\xi_{i,m}).$$

Vzhledem k tomu, že podle předpokladu jest $F'(\xi_{i,m}) = f(\xi_{i,m})$, lze tuto rovnici psát též ve tvaru

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sečteme-li tyto rovnice pro $i = 1, 2, \ldots, m$, dostaneme vlevo $F(x_{m,m}) - F(x_{0,m})$ čili $F(b) - F(a)$, takže dostáváme rovnici

(33) $$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} = F(b) - F(a).$$

Uvažme především, že jest $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ (znamení rovnosti bychom dokonce mohli potlačit); za druhé uvažme, že jest $\lim\limits_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$. Můžeme tedy použít věty 22 (v našem případě jest ovšem $n_m = m$); platí tedy vztah

$$(34) \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Podle rovnice (33) jest výraz

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m}$$

roven číslu $F(b) - F(a)$ pro každé m; tedy i jeho limita je rovna číslu $F(b) - F(a)$, takže podle rovnice (34) jest

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

jak bylo třeba dokázat.

Věta 39 je důležitá z mnoha důvodů. Upozorňuji především na to, že nám velmi často umožňuje výpočet určitého integrálu. Je-li $a < b$, existuje-li $\int_a^b f(x)\, dx$ (to nastane podle věty 38 např. tehdy, je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$) a podaří-li se nám nalézt funkci $F(x)$ spojitou v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje rovnici $F'(x) = f(x)$ v každém vnitřním bodě tohoto intervalu, můžeme $\int_a^b f(x)\, dx$ okamžitě (podle věty 39) vypočíst z rovnice $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. Objasníme si to na příkladech:

Příklad 1. Integrál $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x}\, dx$ jistě existuje. Funkce[41]) $\lg x$ je spojitá v intervalu $\langle 2, 7\rangle$ a má derivaci rovnou $\dfrac{1}{x}$ dokonce pro každé kladné x. Tedy jest $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x}\, dx = \lg 7 - \lg 2 = \lg \frac{7}{2}$.

Příklad 2. Obdobně počítám $\int_0^\pi \sin x\, dx$; funkce $-\cos x$ je všude spojitá a má všude derivaci $\sin x$. Tedy jest $\int_0^\pi \sin x\, dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$.

Jestliže funkce $F(x)$ má derivaci rovnou funkci $f(x)$ pro všechna x otevřeného intervalu (a, b), říkáme, že funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). Je vidět, že funkce $F(x)$, o níž se mluví ve větě 39, je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež je v intervalu (a, b) primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Z věty 39 a z příkladů, jež jsme právě uvedli, je jasná důležitost primitivních funkcí pro výpočet určitých integrálů; následující kapitola III bude věnována hlavně metodám pro výpočet primitivních funkcí.

[41]) Jde ovšem o přirozený logaritmus.

Větu 39 lze velmi podstatně zobecnit; uvedeme zde jen jedno velmi jednoduché zobecnění:

Věta 40. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež má derivaci $F'(x) = f(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b), vyjma nejvýše v konečném počtu bodů. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.^{42})$$

Důkaz. Sestrojme čísla $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že rovnice $F'(x) = f(x)$ je splněna v každém bodě intervalu (a, b), jenž nesplývá s žádným z bodů $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Vezměme kterýkoliv interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Podle věty 31 existuje $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$. Ježto funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ a ježto rovnice $F'(x) = f(x)$ platí v každém bodě otevřeného intervalu (a_{i-1}, a_i), můžeme použít věty 39 a dostáváme

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx = F(a_i) - F(a_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Podle věty 30 a podle poznámky 1 k této větě je tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{p} (F(a_i) - F(a_{i-1})) =$$
$$= F(a_p) - F(a_0) = F(b) - F(a)\,,$$

jak bylo třeba dokázat.

§ 10. Definice integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a > b$. Dosud jsme definovali integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a < b$ (v § 2) a pro $a = b$ (na počátku § 7). Doplníme tuto definici ještě pro případ $a > b$ takto:

Druhý dodatek k definici integrálu. *Budiž $a > b$; potom definujeme určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ rovnicí $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, jestliže ovšem $\int_b^a f(x)\,dx$ existuje.*[43])

Tím máme definován určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a < b$, pro $a = b$ i pro $a > b$. Přehlédněme ještě jednou, jak jsme jej definovali:

1) Je-li $a = b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ tehdy a jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$; potom jest $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

---

[42]) Rozdíl proti větě 39 jest v tom, že nepožadujeme, aby rovnice $F'(x) = f(x)$ byla splněna ve *všech* bodech intervalu (a, b), nýbrž připouštíme, aby existoval v intervalu (a, b) *konečný* počet bodů, v nichž rovnice $F'(x) = f(x)$ neplatí (buď proto, že $F'(x)$ v takovém bodě vůbec neexistuje nebo proto, že $F'(x)$ má hodnotu různou od čísla $f(x)$). Naproti tomu spojitost funkce $F(x)$ požadujeme v *celém* intervalu $\langle a, b\rangle$ bez výjimky.

[43]) Jest $b < a$, takže $\int_b^a f(x)\,dx$ se bere ve smyslu definice z § 2. Obvyklé názvosloví (funkce integrovaná, integrační proměnná, meze integrálu) zachováváme i zde; v integrálu $\int_a^b f(\;\;dx$ nazýváme číslo a dolní mezí, číslo b horní mezí, i když jest $a > b$.

2) Je-li $a < b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tehdy a jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; potom jest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Je-li $a > b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tehdy a jen tehdy, existuje-li $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$; potom jest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

V předcházejících paragrafech jsme odvodili řadu vět pro integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ v případě $a < b$; podíváme se nyní, platí-li tyto věty též bez tohoto omezení (tj. platí-li též pro $a = b$, $a > b$). Přitom se omezíme na nejdůležitější věty. Především ve větě 26 lze předpoklad $a < b$ vynechat; platí totiž

Věta 41. *Existují-li integrály* $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ *a jsou-li* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *libovolná čísla, existuje i integrál* $\int_a^b (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \tag{35}$$
$$+ c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. 1. Je-li $a = b$, je věta samozřejmá (všechny vyšetřované integrály se rovnají nule). 2. Je-li $a < b$, je tato věta totožná s větou 26. 3. Je-li konečně $a > b$, použijme toho, že existují podle předpokladu integrály $\int_b^a f_1(x)\,\mathrm{d}x, \int_b^a f_2(x)\,\mathrm{d}x, \ldots$ $\ldots, \int_b^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Ježto je $b < a$, můžeme použít věty 26. Tedy existuje $\int_b^a (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x$ a jest

$$\int_b^a (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_b^a f_1(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int_b^a f_n(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

násobíme-li tento vztah na obou stranách číslem -1, dostáváme hledaný vztah (35).

Rovněž ve větě 30 lze předpoklad $a < b < c$ vynechat; platí totiž

Věta 42. *Existují-li integrály* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i integrál* $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{36}$$

Důkaz. 1. Jsou-li aspoň dvě ze tří čísel a, b, c sobě rovna, je věta 42 správná. Neboť je-li předně $a = b$, jest $\int_a^b = 0$[44]) a tedy vzorec (36) platí. Je-li za druhé $b = c$, je $\int_b^c = 0$ a vzorec (36) opět platí; je-li konečně $a = c$, jest podle 2. dodatku k definici integrálu $\int_a^b + \int_b^c = 0 = \int_a^c$, takže vzorec (36) opět platí.

2. Zbývá tedy případ, že všechna tři čísla a, b, c jsou navzájem různá; zde je možno šest různých pořadí podle velikosti:

I. $a < b < c$; v tomto případě platí vzorec (36) podle věty 30.

II. $a < c < b$; zde je podle věty 30 a 31 $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$, tedy $\int_a^c = \int_a^b - \int_c^b = \int_a^b + \int_b^c$, jak se mělo dokázat.

[44]) Pro zkrácení vynechávám $f(x)\,\mathrm{d}x$; místo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ píši tedy $\int_a^b$ atd.

III. $b < a < c$; zde je podle věty 30 a 31 $\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c$, čili $\int_a^c = \int_b^c - \int_b^a = \int_a^b + \int_b^c$, jak se mělo dokázat.

IV. $b < c < a$; zde jest $\int_b^a = \int_b^c + \int_c^a$, čili $\int_a^c = - \int_c^a = \int_b^c - \int_b^a = \int_a^b + \int_b^c$.

V. $c < a < b$; zde jest $\int_c^b = \int_c^a + \int_a^b$, čili $\int_a^c = - \int_c^a = \int_a^b - \int_c^b = \int_a^b + \int_b^c$.

VI. $c < b < a$; zde jest $\int_c^a = \int_c^b + \int_b^a$; násobím-li číslem -1, dostanu $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$.

Úplnou indukcí plyne z věty 42 okamžitě

Věta 43. *Existují-li integrály* $\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{a_2}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i integrál* $\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Větu 36 lze zobecnit takto:

Věta 44. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Budiž c libovolné číslo intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom platí tato tvrzení:*

1. *Funkce* $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$[45]) *jest spojitá v intervalu* $\langle a, b \rangle$.

2. *Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)\,.$$ [46])

Důkaz. Jest $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (podle věty 42); ježto $\int_c^a$ jest konstanta (tj. číslo nezávislé na x), plyne věta 44 okamžitě z věty 36.

Ve větě 44 jsme vyšetřovali integrál jakožto funkci *horní* meze; obdobně můžeme vyšetřovat integrál jako funkci *dolní* meze; dostáváme tuto větu:

Věta 45. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Budiž c libovolné číslo intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom platí tato tvrzení:*

1. *Funkce* $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *jest spojitá v intervalu* $\langle a, b \rangle$.

2. *Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right) = -f(x)\,.$$ [47])

Důkaz. Ježto je $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, plyne věta 45 okamžitě z věty 44.

---

[45]) Tento integrál je funkcí proměnné x.

[46]) Jediný rozdíl proti větě 36 je tedy ten, že dolní mez nemusí být právě rovna číslu a, nýbrž může být rovna libovolnému číslu c z intervalu $\langle a, b \rangle$; platí ovšem též poznámka obdobná k pozn.[38]) u věty 36 o derivaci zprava a zleva.

[47]) Platí ovšem zase příslušná poznámka o derivaci zprava a zleva.

Ve větách 33, 37, 38, 39, 40 jsme předpokládali $a < b$; jak je tyto věty nutno upravit, když jest $a > b$, není snad třeba obšírně vypisovat; omezme se na to, že ukážeme, jak vypadá obdoba k větám 38 a 39 pro $a > b$:

Věta 46. *Budiž $a > b$; budiž $f(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle b, a\rangle$;*[48]) *potom $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.*

Důkaz. Jest $b < a$; podle věty 38 existuje tedy $\int_b^a f(x)\,dx$, a tedy – podle definice – existuje též $\int_a^b f(x)\,dx$.

Věta 47. *Budiž $a > b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle b, a\rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu (b, a) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{37}$$

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\int_a^b f(x)\,dx$, tedy existuje též $\int_b^a f(x)\,dx$; ježto je $b < a$, můžeme použít věty 39, čímž dostáváme rovnici $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$; násobíme-li tuto rovnici číslem -1, dostáváme hledaný vztah (37).

Obdobně bychom mohli i k ostatním větám, jež jsme pro integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ odvodili v případě $a < b$, nalézt věty obdobné pro případ $a > b$. Např. věta 28 zněla takto: Budiž $a < b$; nechť existují integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest $\int_a^b f_1(x)\,dx \geqq \int_a^b f_2(x)\,dx$. Příslušná věta pro $a > b$ zní takto: Budiž $a > b$; nechť existují integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle b, a\rangle$; potom jest $\int_a^b f_1(x)\,.\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx$.[49]) Neboť – ježto $b < a$ – plyne z věty 28 nerovnost $\int_b^a f_1(x)\,dx \geqq \int_b^a f_2(x)\,dx$; násobíme-li obě strany této nerovnosti *záporným* číslem -1, musíme současně obrátit smysl této nerovnosti, čímž dostáváme hledanou nerovnost $\int_a^b f_1(x)\,.\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx$.

[48]) Piši ovšem $\langle b, a\rangle$ a nikoliv $\langle a, b\rangle$, ježto je $b < a$.

[49]) Smysl nerovnosti je tedy v případě $a > b$ opačný než v případě $a < b$.