Kapitola I

PŘEHLED NĚKTERÝCH VĚT Z „DIFERENCIÁLNÍHO POČTU I" A DOPLŇKY K NIM

Studium této knihy předpokládá znalost látky obsažené v mé knize Diferenciální počet I (1946, 4. vyd. 1955, 5. vyd. 1963).[1]

Tuto knihu budu citovat znakem **DI**, např. „**DI**, věta 112" nebo „cvičení 5 z kap. II, § 3 v **DI**" apod. Rozdíly mezi jednotlivými vydáními jsou celkem malé, takže nevadí, jestliže čtenář této knihy studoval Diferenciální počet I z některého staršího vydání. Avšak ve formátu je rozdíl: první čtyři vydání knihy **DI** vyšla v menším formátu než páté vydání. Proto tam, kde cituji stránky z **DI**, uvádím je napřed podle pátého a potom podle čtvrtého vydání. Např.: „Viz **DI**, poslední odst. na str. 173, v 4. vyd. druhý odst. na str. 215". První údaj se tedy týká 5. vydání. V prvním až třetím vydání **DI** se tyto stránkové údaje neliší mnoho od 4. vydání. Pro snazší orientaci čtenáře je v této knize i v 4. a 5. vydání knihy **DI** připojen vzadu soupis číslovaných vět a definic s udáním stránek.

V této kapitole uvádím některé věty z **DI** a připojuji k nim některé doplňky, které pro látku probíranou v **DI** neměly významu, které však nyní budeme potřebovat. Koho by tato úvodní kapitola nudila, může ji prozatím přeskočit a může se k ní vrátit teprve tehdy, až bude některý její výsledek potřebovat. Než však začnete číst, přečtěte si předmluvu; najdete tam návod ke studiu této knihy.

§ 1. Věta o supremu a infimu (DI, věta 39 a 40). Zopakujme, popř. zaveďme některé pojmy a některá označení týkající se množin (viz též **DI**, kap. I, str. 20—22, v 4. vyd. str. 8—10). Znak $x \in M$ značí, že x je prvkem množiny M;[2]) např. je $\frac{3}{2} \in \langle 1, 2 \rangle$, ale není $3 \in \langle 1, 2 \rangle$.[3]) Jestliže každý prvek množiny M_1 je prvkem množiny M_2, říkáme, že množina M_1 je částí množiny M_2, a píšeme $M_1 \subset M_2$. Např. jest $(0, 1) \subset \langle 0, 1 \rangle$, $(1, 3) \subset (-2, 3)$, $\langle 1, 2 \rangle \subset (0, 3)$ (ale není $\langle 0, 1 \rangle \subset (0,1)$). Jsou-li M_1, $M_2, \ldots, M_k$ libovolné množiny, značíme znakem $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ množinu, k níž patří právě ony prvky, jež patří aspoň k jedné z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Množině $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ říkáme sjednocení (nebo součet) množin M_1,

[1]) Tuto znalost jest ovšem možno získat i z jiných učebnic diferenciálního počtu.

[2]) Říkáme také, že x patří k M, nebo že x leží v M.

[3]) Intervaly $\langle a, b \rangle$, (a, b) atd. jsou důležité speciální množiny reálných čísel; jejich definici a označení viz v **DI**, str. 146—147, v 4. vyd. str. 160—161.

$M_2, \ldots, M_k$ (nemá ovšem obecně nic společného se součtem čísel). Zřejmě toto sjednocení nezávisí na pořadí „sčítanců". Např. $\langle 0, 1\rangle \cup (1, 2) = \langle 0, 2)$, $\langle -1, 2\rangle \cup \cup \langle 1, 4\rangle = \langle -1, 4\rangle$, $\langle 2, 5\rangle \cup (3, 4\rangle = \langle 2, 5\rangle$ (v prvním příkladě nemají oba „sčítanci" společných prvků, v druhých dvou případech mají; ve třetím příkladě je dokonce druhý sčítanec částí prvního).

Podotýkám: V této knize se budeme zabývat hlavně reálnými čísly; proto slovo „číslo" bude vždy znamenat reálné číslo, pokud nebude jinak poznamenáno. Slova „číselná množina" budou znamenat množinu reálných čísel, tj. množinu, jejíž všechny prvky jsou reálná čísla.

Budiž nyní N nějaká číselná množina. Existuje-li číslo K tak, že všechna čísla x množiny N splňují nerovnost $x \leqq K$, nazýváme množinu N shora omezenou.[4]) *Je-li N neprázdná shora omezená množina, existuje* podle věty 39 v **DI** (str. 56, v 4. vyd. str. 53) *jedno a jen jedno číslo G mající tyto dvě vlastnosti*:

I. *Žádné číslo z N není větší než G.*

II. *Je-li G' libovolné číslo menší než G, existuje v N aspoň jedno číslo, jež je větší než G'.*

Toto číslo G se nazývá *supremum* množiny N a značíme je znakem $\sup N$. Věta právě vyslovená (vytištěná kursivou, tj. ležatě) je tzv. *věta o supremu.* V **DI** najdete ještě jednu formulaci této věty.

Obdobně: Existuje-li číslo K tak, že všechna čísla $x \in N$ splňují nerovnost $x \geqq K$, říkáme, že N je zdola omezená. (Také zde bychom místo $x \geqq K$ mohli psát $x > K$, viz [4]).) *Je-li N neprázdná a zdola omezená, existuje* podle věty 40 v **DI** (str. 57, v 4. vyd. str. 54—55) *jedno a jen jedno číslo g mající tyto dvě vlastnosti*:

I. *Žádné číslo z N není menší než g.*

II. *Je-li g' libovolné číslo větší než g, existuje v N aspoň jedno číslo, jež je menší než g'.*

Toto číslo g se nazývá *infimum* množiny N a značíme je znakem $\inf N$. Věta právě vyslovená (vytištěná kursivou) je tzv. *věta o infimu.*

Je-li N shora i zdola omezená, říkáme krátce, že N jest omezená. Je-li tedy N neprázdná a omezená, existují obě čísla $\sup N$, $\inf N$ a zřejmě jest $\inf N \leqq \sup N$.

Komu nejsou uvedené pojmy zcela běžné, nechť si přečte v **DI** text od str. 54, ř. 11 zdola do str. 57, ř. 7 zdola (v 4. vyd. od str. 51, ř. 15 zdola do str. 55, ř. 12 zdola) a dále snadný § 10 v kapitole I. Doplňme úvahy onoho § 10 touto poznámkou:

---

[4]) Znamení $\leqq$ můžeme v této definici nahradit znamením $<$, tj. můžeme říci: Množina N je shora omezená tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo L tak, že pro všechna čísla x množiny N je $x < L$. Důkaz: Jestliže pro všechna x množiny N je $x < L$, je tím spíše $x \leqq L$, a lze vzít $K = L$. Jestliže naopak pro všechna x množiny N je $x \leqq K$, stačí položit třeba $L = K + 1$, načež pro všechna $x \in N$ (čti: pro všechna x množiny N) je $x < L$. Tento přechod od vztahu $\leqq$ ke vztahu $<$ (a naopak) je téměř samozřejmý, a budu ho v dalším často bez další připomínky užívat. (Obdobně pro $\geqq$ a $>$.)

Poznámka 1. Buďte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}$ dvě neprázdné množiny číselné, nechť každé číslo množiny $\mathfrak{m}$ je nejvýše rovno každému číslu množiny $\mathfrak{M}$; tj. nechť pro každé $x \in \mathfrak{m}$ a každé $y \in \mathfrak{M}$ platí nerovnost $x \leqq y$. Potom je $\sup \mathfrak{m} \leqq \inf \mathfrak{M}$.

Důkaz. Zvolím-li nějaké číslo $y_0 \in \mathfrak{M}$, je $x \leqq y_0$ pro všechna $x \in \mathfrak{m}$, takže $\mathfrak{m}$ je shora omezená; tedy existuje číslo $s = \sup \mathfrak{m}$. Zvolím-li obdobně nějaké číslo $x_0 \in \mathfrak{m}$, je $y \geqq x_0$ pro všechna $y \in \mathfrak{M}$, takže $\mathfrak{M}$ je zdola omezená, takže existuje číslo $S = \inf \mathfrak{M}$. Máme ukázat, že $s \leqq S$. Kdyby bylo $s > S$, existovalo by číslo t tak, že $S < t < s$. Podle věty o infimu (vlastnost II) by tedy existovalo v $\mathfrak{M}$ číslo y_1 menší než t, a podle věty o supremu (vlastnost II) by existovalo v $\mathfrak{m}$ číslo x_1 větší než t; tedy by bylo $x_1 > y_1$, ale to není možné, ježto $x_1 \in \mathfrak{m}$, $y_1 \in \mathfrak{M}$, a odtud podle předpokladu plyne $x_1 \leqq y_1$. Nemůže tedy být $s > S$, a tedy je $s \leqq S$.

§ 2. Funkce omezené. Přenesme nyní pojmy a věty, jež jsme právě uvedli, na funkce. Slovo „funkce" bude v této knize, pokud nebude jinak poznamenáno, znamenat funkci ve smyslu definice 14 z **DI**, str. 148, v 4. vyd. str. 162, tj. tak zvanou (konečnou) reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Budiž M nějaká číselná množina a budiž f funkce definovaná v množině M (nevadí, je-li funkce f definována též v některých bodech, jež neleží v M). Množinu všech čísel $f(x)$ pro všechna $x \in M$ označme na chvíli znakem N;[5]) říkáme (viz **DI**, začátek § 1 v kap. VII, str. 197, v 4. vyd. str. 222 a začátek § 2 v kap. IX, str. 234, v 4. vyd. str. 267—268), že funkce f zobrazuje množinu M na množinu N. Je-li množina N shora omezená, tj. existuje-li číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leqq K$, říkáme, že funkce f je shora omezená v M; je-li množina N zdola omezená, tj. existuje-li číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geqq K$, říkáme, že funkce f je zdola omezená v M.[6]) Uvědomíme-li si, jak jsme definovali množinu N (je to množina všech hodnot $f(x)$ pro všechna $x \in M$) a užijeme-li vět o supremu a infimu (viz § 1), vidíme, že platí tyto věty:

Věta 1. *Funkce f budiž shora omezená v neprázdné číselné množině M. Potom existuje jedno a jen jedno číslo G mající tyto dvě vlastnosti:*

I. Pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leqq G$.

II. Je-li G' libovolné číslo menší než G, existuje v množině M aspoň jedno číslo x_0 tak, že je $f(x_0) > G'$.

Toto číslo G[7]) *značíme znakem $\sup_{x \in M} f(x)$ a říkáme mu supremum funkce f v množině M.*

[5]) Množina N je tedy definována takto: číslo y patří k N tehdy a jen tehdy, jestliže existuje číslo $x \in M$ tak, že je $f(x) = y$.

[6]) Místo $f(x) \leqq K$, $f(x) \geqq K$ bychom zde ovšem mohli psát $f(x) < K$, $f(x) > K$, viz pozn. [4]).

[7]) Je to zřejmě supremum množiny N.

Věta 2. *Funkce f budiž zdola omezená v neprázdné číselné množině M. Potom existuje jedno a jen jedno číslo g mající tyto dvě vlastnosti:*

I. Pro všechna $x \in M$ jest $f(x) \geqq g$.

II. Je-li g' libovolné číslo větší než g, existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in M$ tak, že je $f(x_0) < g'$.

Toto číslo g[8]) značíme znakem $\inf\limits_{x \in M} f(x)$ a říkáme mu infimum funkce f v množině M.

Je-li funkce f shora i zdola omezená v neprázdné množině M, říkáme krátce, že jest omezená v M. Potom je zřejmě $\inf\limits_{x \in M} f(x) \leqq \sup\limits_{x \in M} f(x)$.

Připojme nyní k větám 1, 2 několik jednoduchých poznámek, jichž budeme v dalším často užívat. Některé z nich jsou velmi příbuzné větám z kap. I, § 10 v **DI**.

Poznámka 1. Jestliže mezi hodnotami, kterých nabývá funkce f v množině M, je jedna ze všech největší, tj. existuje-li $c \in M$ takové, že pro všechna $x \in M$ jest $f(x) \leqq f(c)$, je $f(c) = \sup\limits_{x \in M} f(x)$.[9]) Neboť číslo $f(c)$ má tyto dvě vlastnosti z věty 1: Předně je $f(x) \leqq f(c)$ pro každé $x \in M$. Za druhé: je-li G' libovolné číslo menší než $f(c)$, existuje číslo $x_0 \in M$ — např. $x_0 = c$ — takové, že $f(x_0) > G'$.

Podobně: Existuje-li $d \in M$ tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geqq f(d)$ (tj. je-li $f(d)$ nejmenší ze všech hodnot, kterých funkce f nabývá v M), je $f(d) = \inf\limits_{x \in M} f(x)$.

Poznámka 2. Funkce f je omezená (to značí, jak víme: shora i zdola omezená) v M tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leqq K$.

Důkaz. 1. Jestliže pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leqq K$, jest $-K \leqq f(x) \leqq K$, a funkce f jest omezená v M.

2. Jestliže za druhé f jest omezená v M, existují čísla L_1, L_2 tak, že pro všechna $x \in M$ je $L_1 \leqq f(x) \leqq L_2$. Položíme-li $K = \text{Max}(L_2, -L_1)$, je $L_2 \leqq K$, $-L_1 \leqq K$, $L_1 \geqq -K$, a tedy pro všechna $x \in M$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$, tj. $|f(x)| \leqq K$.

Také v této pozn. 2 bychom místo $|f(x)| \leqq K$ mohli psát $|f(x)| < K$.

Poznámka 3.[10]) Nechť pro všechna $x \in M$ (M neprázdná) je $f(x) \leqq K$; potom f je shora omezená v M a jest

$$\sup_{x \in M} f(x) \leqq K .$$

Důkaz. f je zřejmě shora omezená v M. Položme $\sup\limits_{x \in M} f(x) = G$. Kdyby bylo $K < G$, existovalo by podle věty 1 číslo $x_0 \in M$ tak, že $f(x_0) > K$; ale to je ve sporu s předpokladem, tedy není $K < G$, tedy je $G \leqq K$.

[8]) Je to zřejmě infimum množiny N.

[9]) Takové číslo c jistě existuje podle věty 128 v **DI**, str. 236, v 4. vyd. str. 269, jestliže množina M je uzavřený interval a jestliže nadto funkce f je spojitá v M.

[10]) Tato velmi jednoduchá poznámka nám bude velmi užitečná.

Obdobně: Jestliže pro všechna $x \in M$ (M neprázdná) je $f(x) \geqq K$, je f zdola omezená v M a jest

$$\inf_{x \in M} f(x) \geqq K .$$

Poznámka 4. Jestliže pro všechna $x \in M$ (M neprázdná) je $|f(x)| \leqq K$, je $|\inf_{x \in M} f(x)| \leqq K$, $|\sup_{x \in M} f(x)| \leqq K$.

Důkaz. Pro všechna $x \in M$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$; podle poznámky 3 je tedy

$$-K \leqq \inf_{x \in M} f(x) \leqq \sup_{x \in M} f(x) \leqq K .$$

Poznámka 5. Budiž f omezená v neprázdné množině M; budiž $c \neq 0$. Položme

$$G = \sup_{x \in M} f(x), \quad g = \inf_{x \in M} f(x), \quad G_1 = \sup_{x \in M} c f(x), \quad g_1 = \inf_{x \in M} c f(x) . \text{[11]}$$

Potom platí: Je-li $c > 0$, je $G_1 = cG$, $g_1 = cg$; je-li $c < 0$, je $G_1 = cg$, $g_1 = cG$.

Důkaz. Budiž předně $c > 0$. Pro každé $x \in M$ je $f(x) \leqq G$, tedy $c f(x) \leqq cG$, takže podle poznámky 3 je $G_1 \leqq cG$. Pro každé $x \in M$ je $c f(x) \leqq G_1$, tedy $f(x) \leqq$ $\leqq G_1 : c$, takže podle poznámky 3 je $G \leqq G_1 : c$, $G_1 \geqq cG$. Tedy je $G_1 = cG$. Podobně pro g_1.

Budiž za druhé $c < 0$. Pro každé $x \in M$ je $f(x) \geqq g$, tedy (pamatujte stále, že $c < 0$) $c f(x) \leqq cg$, takže podle poznámky 3 je $G_1 \leqq cg$. Pro každé $x \in M$ je $c f(x) \leqq$ $\leqq G_1$, tedy $f(x) \geqq G_1 : c$, takže podle poznámky 3 je $g \geqq G_1 : c$, $cg \leqq G_1$. Tedy je $G_1 = cg$. Podobně pro g_1.

Poznámka 6. Budiž f omezená v M, budiž M_1 neprázdná část množiny M. Potom jest f omezená v M_1 a jest

$$\sup_{x \in M_1} f(x) \leqq \sup_{x \in M} f(x), \quad \inf_{x \in M_1} f(x) \geqq \inf_{x \in M} f(x) . \tag{1}$$

Důkaz. Položme $G = \sup_{x \in M} f(x)$, $g = \inf_{x \in M} f(x)$. Potom nerovnosti $f(x) \leqq G$, $f(x) \geqq g$ platí pro každé $x \in M$ a tedy speciálně pro každé $x \in M_1$. Podle pozn. 3 je tedy $\sup_{x \in M_1} f(x) \leqq G$, $\inf_{x \in M_1} f(x) \geqq g$, což jsou nerovnosti (1).

Poznámka 7. Buďte $M_1, M_2, \ldots, M_k$ neprázdné množiny číselné. Funkce f budiž omezená v každé z množin $M_1, \ldots, M_k$. Potom jest f také omezená v množině $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Klademe-li

$$G_j = \sup_{x \in M_j} f(x), \quad g_j = \inf_{x \in M_j} f(x), \quad G = \sup_{x \in M_1 \cup \ldots \cup M_k} f(x), \quad g = \inf_{x \in M_1 \cup \ldots \cup M_k} f(x),$$

jest

$$G = \operatorname{Max}(G_1, G_2, \ldots, G_k), \quad g = \operatorname{Min}(g_1, g_2, \ldots, g_k) .$$

[11]) Funkce $c f(x)$ jest omezená v M, což se ukáže během důkazu.

Důkaz. Každý bod $x \in M_1 \cup \ldots \cup M_k$ leží v některé z množin $M_1, \ldots, M_k$, a tedy je $f(x) \leqq \mathrm{Max}\,(G_1, \ldots, G_k)$. Podle pozn. 3 je tedy f shora omezená v $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ a jest $G \leqq \mathrm{Max}\,(G_1, \ldots, G_k)$. Za druhé: Pro každé j ($j = 1, 2, \ldots, k$) je $M_j \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$ a tedy podle poznámky 6 je $G_j \leqq G$, takže $\mathrm{Max}\,(G_1, \ldots, G_k) \leqq G$. Tedy $G = \mathrm{Max}\,(G_1, \ldots, G_k)$. Pro g je důkaz obdobný.

Příklad 1. Je-li $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, a je-li f omezená v každém z intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, je funkce f také omezená v intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$.

Poznámka 8. Je-li funkce f omezená v M a liší-li se funkce g od funkce f pouze v konečném počtu bodů množiny M, je též g omezená v M.

Důkaz. Užijeme poznámky 2. Podle ní existuje číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leqq K$. Buďte $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ony body množiny M, pro něž je $f(x) \neq g(x)$. Položme

$$K_1 = \mathrm{Max}\,(K, |g(x_1)|, |g(x_2)|, \ldots, |g(x_p)|)\,;$$

potom je zřejmě $|g(x)| \leqq K_1$ pro všechna $x \in M$, takže podle pozn. 2 je g omezená v M.

Poznámka 9. Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou omezené v M. Potom také funkce

$$|f(x)|,\quad f(x) + g(x),\quad f(x) - g(x),\quad f(x) \,.\, g(x)$$

jsou omezené v M.

Důkaz. Zase užijeme poznámky 2. Existují čísla K, L taková, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq L$. Tedy je též pro všechna $x \in M$

$$\big||f(x)|\big| = |f(x)| \leqq K, \qquad |f(x) \pm g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| \leqq K + L,$$
$$|f(x)\, g(x)| = |f(x)| \,.\, |g(x)| \leqq KL.$$

§ 3. Spojitost, hlavně spojitost složených funkcí. V **DI** jsme definovali spojitost funkce v bodě a rovněž spojitost v bodě zprava a zleva (viz **DI**, definice 17, 18, str. 158, 164, v 4. vyd. str. 176, 183). Rovněž jsme definovali spojitost funkce v intervalu (viz **DI**, definice 23, str. 185, v 4. vyd. str. 208): Budiž J interval (libovolného druhu); potom říkáme, že funkce f je spojitá v J, jestliže platí toto:

1) Funkce f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J.

2) Jestliže počáteční bod intervalu J patří k intervalu J, je funkce f v tomto bodě spojitá zprava.

3) Jestliže koncový bod intervalu J patří k intervalu J, je funkce f v tomto bodě spojitá zleva.

Tuto definici lze též vyslovit takto (viz **DI**, kap. V, § 8, předposlední odstavec):

Funkce f je spojitá v intervalu J, jestliže je předně spojitá zprava v každém bodě intervalu J, jenž není jeho koncovým bodem, a za druhé spojitá zleva v každém bodě intervalu J, jenž není jeho počátečním bodem.

Také jsme poznamenali (viz **DI**, kap. V, § 8 na konci), že okolnost, zda funkce f je spojitá v J, nezávisí na tom, zda a jak je funkce f definována v bodech ležících mimo tento interval, tj.: Je-li f spojitá v J a je-li $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in J$, je též funkce g spojitá v J.

O spojitosti složených funkcí jsme dokázali tuto větu (**DI**, věta 98, str. 163, v 4. vyd. str. 181):

Věta 3. *Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá v bodě c a nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $\varphi(c)$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v bodě c.*

Dokážeme nyní dvě věty o spojitosti složených funkcí v *intervalu*.

Věta 4. *Funkce $\varphi(t)$ budiž spojitá v otevřeném intervalu*[12] (α, β); *funkce $f(x)$ budiž spojitá v otevřeném intervalu (a, b). Pro každé t intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu (α, β).*

Důkaz. Budiž t_0 libovolný bod intervalu (α, β); tedy je $\varphi(t)$ spojitá v bodě t_0 a hodnota $\varphi(t_0)$ leží podle předpokladu v (a, b), takže funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $\varphi(t_0)$. Podle věty 3 je tedy funkce $f(\varphi(t))$ spojitá v bodě t_0. Ježto t_0 byl libovolný bod intervalu (α, β), je $f(\varphi(t))$ spojitá v intervalu (α, β). Obdobnou větu dokážeme pro uzavřené intervaly:

Věta 5. *Funkce $\varphi(t)$ budiž spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; funkce $f(x)$ budiž spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro každé t intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.*

Důkaz. Definujme funkci $\psi(t)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ takto: Pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(t)$, pro $t < \alpha$ budiž $\psi(t) = \varphi(\alpha)$, pro $t > \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(\beta)$. Funkce $\psi(t)$ je zřejmě spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$.[13]

Obdobně definujeme funkci $g(x)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ takto: Pro $a \leqq x \leqq b$ budiž $g(x) = f(x)$, pro $x < a$ budiž $g(x) = f(a)$, pro $x > b$ budiž $g(x) = f(b)$. Funkce $g(x)$ je rovněž spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Podle věty 4 (v níž za interval (α, β) i za interval (a, b) je třeba vzít interval $(-\infty, +\infty)$) je tedy funkce $g(\psi(t))$ spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a tedy též v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ (viz **DI**, kap. V, § 8, předposlední odstavec). Ale pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ je $g(\psi(t)) = f(\varphi(t))$,[14] a tedy funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.

---

[12]) Omezeném nebo neomezeném.

[13]) Ježto pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ je $\psi(t) = \varphi(t)$, je funkce ψ spojitá zprava v bodě α; ježto pro $t \leqq \alpha$ je funkce $\psi(t)$ rovna konstantě $\varphi(\alpha)$, je funkce ψ spojitá zleva v bodě α. Tedy je funkce ψ spojitá v bodě α. Obdobně v bodě β; ostatní hodnoty t nečiní obtíží.

[14]) Důkaz: Budiž $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Potom je $\psi(t) = \varphi(t)$ a tedy $g(\psi(t)) = g(\varphi(t))$. Dále je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$ a tedy $g(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$ (neboť pro $a \leqq x \leqq b$ je $g(x) = f(x)$). Tedy $g(\psi(t)) = f(\varphi(t))$.

§ **4. Limity monotónních funkcí.** V **DI**, věta 63, 64 (str. 95, 96, v 4. vyd. str. 102, 103), jsme dokázali základní věty o existenci limit monotónních posloupností. Podobné věty platí o limitách monotónních funkcí. Vyslovme a dokažme je. Budiž předně $f(x)$ *neklesající* v omezeném otevřeném intervalu (a, b). *Není-li f shora omezená v (a, b), je* $\lim_{x \to b-} f(x) = +\infty$. (Důkaz: budiž K libovolné číslo; existuje tedy $x_0 \in \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) > K$; pro každé x vyhovující podmínkám $x_0 < x < b$[15]) je tedy $f(x) > K$.) *Je-li však f shora omezená v (a, b), je* $\lim_{x \to b-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$. (Důkaz: Položme $G = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) > > G - \varepsilon$. Pro $x_0 < x < b$[15]) je tedy $G - \varepsilon < f(x) \leqq G$.) Dále: *Není-li f zdola omezená v (a, b), je* $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$. (Důkaz: K libovolnému číslu K existuje $x_0 \in \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) < K$; pro $a < x < x_0$[16]) je tedy $f(x) < K$.) *Je-li však f zdola omezená v (a, b), je* $\lim_{x \to a+} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$. (Důkaz: Položme $\inf_{x \in (a,b)} f(x) = g$. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) < g + \varepsilon$; pro $a < x < x_0$[16]) je tedy $g \leqq f(x) < g + \varepsilon$). Podobná věta s podobným důkazem platí pro funkce *nerostoucí* v (a, b) (pouze se vymění slova shora a zdola a znaky sup a inf, $+\infty$ a $-\infty$). Celkem jsme tedy zjistili: *Pro každou funkci f, která je monotónní v (a, b), existují limity* (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \to b-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$. Mimoto jsme ještě podrobněji zjistili, jak tyto limity v jednotlivých případech vypadají; zvláště jsme našli, kdy vyjde limita vlastní, kdy $+\infty$ a kdy $-\infty$. Podobná věta platí i tehdy, píši-ii $+\infty$ místo b nebo $-\infty$ místo a. Např.: Je-li $f(x)$ nerostoucí a shora omezená v $(-\infty, b)$, existuje vlastní limita $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup_{x \in (-\infty,b)} f(x)$. Důkazy si čtenář jistě doplní sám.

§ **5. Derivace, hlavně derivace složených funkcí.** Derivaci funkce f v bodě x značíme $f'(x)$, derivaci zprava $f'_+(x)$, derivaci zleva $f'_-(x)$. Tyto derivace mohou být vlastní nebo nevlastní (viz **DI**, kap. VIII, § 1, poznámka 4, str. 211–212, v 4. vyd. str. 239 až 240, kde jsou uvedena i jiná označení). Připomínám tuto důležitou větu (**DI**, věta 133, str. 242, v 4. vyd. str. 276):

Věta 6 (věta o přírůstku funkce). *Budiž f funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jež má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Potom existuje číslo ξ tak, že jest*

$$a < \xi < b\,, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)\,.$$

Z této věty plynou snadno tyto důsledky (které jsme ostatně také již odvodili v **DI**, věta 135 (poslední případ) a věta 136, str. 247–248, v 4. vyd. str. 283–284):

[15]) **Číslo x_0 má tvar $b - \delta$, kde δ je kladné, neboť $x_0 < b$.**

[16]) **Číslo x_0 má tvar $a + \delta$, kde δ je kladné, neboť $x_0 > a$.**

Věta 7. *Budiž f funkce spojitá v intervalu J,[17]) která má derivaci rovnou nule v každém vnitřním bodě intervalu J. Potom je funkce f konstantní v J.*

Důkaz. Buďte x_1, x_2 libovolné dva navzájem různé body intervalu J; dokážeme, že je $f(x_1) = f(x_2)$. K důkazu zvolme především očíslování bodů x_1, x_2 tak, že $x_1 < x_2$. Potom interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je částí intervalu J a každý vnitřní bod intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je vnitřním bodem intervalu J. Tedy je f spojitá v $\langle x_1, x_2 \rangle$ (viz **DI** kap. V, § 8, předposlední odstavec) a má derivaci – a to derivaci rovnou nule – v každém vnitřním bodě intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Podle věty 6 existuje tedy číslo ξ tak, že jest $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$ a současně $x_1 < \xi < x_2$, tedy $f'(\xi) = 0$ a tedy $f(x_1) = f(x_2)$.

Zvolme nyní libovolné číslo c intervalu J. Podle toho, co bylo právě dokázáno, je $f(x) = f(c)$ pro všechna $x \in J$ (pro $x = c$ je to zřejmé). Všechny hodnoty funkce f v intervalu J jsou tedy rovny jednomu a témuž číslu $f(c)$.

Věta 8. *Buďte f, g dvě funkce spojité v intervalu J, jež mají v každém vnitřním bodě intervalu J touž vlastní derivaci $f'(x) = g'(x)$. Potom jejich rozdíl je konstantní v J, tj. existuje číslo C tak, že pro všechna $x \in J$ je $g(x) = f(x) + C$.*

Důkaz. Funkce $g(x) - f(x)$ je podle věty 7 konstantní v J.

Podotýkám: V této knize budeme mluvit již jen o vlastní derivaci. Proto slovem derivace budeme v dalším rozumět vždy vlastní derivaci.

Všimněme si ještě derivace složených funkcí. V **DI** (věta 126, str. 217, v 4. vyd. str. 247) jsme dokázali toto:

Věta 9. *Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci $\varphi'(t)$ v jistém bodě t;[18]) nechť funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ v příslušném bodě $x = \varphi(t)$; potom funkce $F(t) = f(\varphi(t))$ má v onom bodě t derivaci $f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.*

Z věty 9 snadno plyne tato

Věta 10. *Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v intervalu (α, β);[19]) nechť funkce $f(x)$ má derivaci v intervalu (a, b); nechť pro každé t intervalu (α, β) hodnota funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ má v intervalu (α, β) derivaci $f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.*

Důkaz. Je-li t jakákoliv hodnota intervalu (α, β), existuje derivace $\varphi'(t)$ a hodnota $x = \varphi(t)$ leží v intervalu (a, b), takže funkce $f(x)$ má derivaci v bodě $x = \varphi(t)$. Z věty 9 tedy plyne, že existuje v bodě t derivace funkce $f(\varphi(t))$, jež se rovná číslu $f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

[17]) J může být interval jakéhokoliv druhu.

[18]) Teď už stále míním ovšem vlastní derivaci.

[19]) To ovšem znamená, že funkce $\varphi(t)$ má derivaci v každém bodě intervalu (α, β); podobně v analogických případech. Intervaly (α, β), (a, b) mohou být ovšem i neomezené.

Pro uzavřené intervaly platí obdobná

Věta 11. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má derivaci $\varphi'(t)$ v uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$; přitom slovem „derivace" a znakem $\varphi'(t)$ rozumím v bodě $t = \alpha$ derivaci zprava a v bodě $t = \beta$ derivaci zleva. Funkce $f(x)$ nechť má derivaci $f'(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$; přitom opět slovem „derivace" a znakem $f'(x)$ rozumím v bodě $x = a$ derivaci zprava a v bodě $x = b$ derivaci zleva. Pro každé t intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nechť je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$. Potom funkce $F(t) = f(\varphi(t))$ má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ derivaci $F'(t) = f'(\varphi(t))\, \varphi'(t)$; přitom opět slovem „derivace" a znakem $F'(t)$ rozumím pro $t = \alpha$ derivaci zprava a pro $t = \beta$ derivaci zleva.*[20])

Důkaz. Definujme funkce $\psi(t)$, $g(t)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ takto:

Pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(t)$; pro $t < \alpha$ budiž $\psi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\, \varphi'(\alpha)$; pro $t > \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(\beta) + (t - \beta)\, \varphi'(\beta)$.

Pro $a \leqq x \leqq b$ budiž $g(x) = f(x)$; pro $x < a$ budiž $g(x) = f(a) + (x - a) f'(a)$; pro $x > b$ budiž $g(x) = f(b) + (x - b) f'(b)$.

Položme ještě $G(t) = g(\psi(t))$; je-li $\alpha \leqq t \leqq \beta$, je $\psi(t) = \varphi(t)$ a současně $a \leqq \leqq \varphi(t) \leqq b$, tedy $g(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$, takže jest

$$G(t) = g(\psi(t)) = g(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) = F(t)\,.$$

V intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je tedy $G(t) = F(t)$. Podaří-li se nám tedy dokázat, že v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ platí rovnice

$$G'(t) = f'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\,, \tag{2}$$

bude tím věta dokázána; neboť potom bude $F'(t) = G'(t)$ pro $\alpha < t < \beta$ a pro $t = \alpha$ bude derivace zprava funkce $F(t)$ rovna číslu $G'_+(\alpha) = G'(\alpha) = f'(\varphi(\alpha))\, \varphi'(\alpha)$ a obdobně pro $t = \beta$ bude derivace zleva funkce $F(t)$ rovna číslu $G'_-(\beta) = G'(\beta) = f'(\varphi(\beta))\,.$ $.\, \varphi'(\beta)$.

Tvrdím nyní, že funkce $\psi(t)$ má derivaci v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a že v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Vskutku pro $t < \alpha$ existuje $\psi'(t) = \varphi'(\alpha)$ a pro $t > \beta$ existuje $\psi'(t) = \varphi'(\beta)$, pro $\alpha < t < \beta$ je pak zřejmě $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Zbývá vyšetřit hodnoty $t = \alpha$, $t = \beta$. Ježto pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ je $\psi(t) = \varphi(t)$, je $\psi'_+(\alpha) = \varphi'(\alpha)$; ježto pro $t \leqq \alpha$ je $\psi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\, \varphi'(\alpha)$, je $\psi'_-(\alpha) = \varphi'(\alpha)$, tedy vskutku $\psi'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$; obdobně se dokáže, že je $\psi'(\beta) = \varphi'(\beta)$. Tedy vskutku $\psi'(t)$ existuje v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ platí rovnice $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Obdobně se ukáže: $g'(x)$ existuje v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a v intervalu $\langle a, b \rangle$ platí rovnice $g'(x) =$

[20]) Pro zkrácení píši tedy $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\beta)$, $f'(a)$, $f'(b)$, $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$ místo $\varphi'_+(\alpha)$, $\varphi'_-(\beta)$, $f'_+(a)$, $f'_-(b)$, $F'_+(\alpha)$, $F'_-(\beta)$. U ostatních funkcí $\psi(t)$, $g(x)$, $G(t)$, které se vyskytnou v důkazu, toto zkrácení nezavádím, takže např. $\psi'(\alpha)$ bude znamenat derivaci funkce $\psi(t)$ v bodě α a *nikoliv* derivaci zprava.

$= f'(x)$. Ježto $\psi'(t)$ i $g'(x)$ existují v intervalu $(-\infty, +\infty)$, máme podle věty 10 tento výsledek: pro každé t je

$$G'(t) = g'(\psi(t))\, \psi'(t)\,. \tag{3}$$

Je-li však $\alpha \leqq t \leqq \beta$, je $\psi(t) = \varphi(t)$, $\psi'(t) = \varphi'(t)$ a dále je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$, takže $g'(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))$; z rovnice (3) plyne tedy

$$G'(t) = g'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\,,$$

čímž rovnice (2) v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ je dokázána.