18. Carathéodoryova theorie diferenciálních rovnic. Diferenciální relace

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 309--342.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402096

18. Carathéodoryova teorie diferenciálních rovnic. Diferenciální relace

18.1. V Carathéodoryově teorii se oslabují požadavky na řešení diferenciální rovnice. Proto pod tuto teorii spadá širší třída diferenciálních rovnic než diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou. Tím, že je úzce spjata s Lebesgueovou teorií integrálu, Carathéodoryova teorie umožňuje použít moderních matematických prostředků [např. v teorii regulace]. V této kapitole se předpokládá, že čtenář zná základy jednorozměrného Lebesgueova integrálu. V tomto odstavci jsou připomenuty některé pojmy a výsledky o Lebesgueově integrálu reálné funkce jedné reálné proměnné a jsou rozšířeny pro funkce jedné reálné proměnne s hodnotami v K^n. Tyto pojmy a výsledky tvoří základ výkladu v odst. 18.2 až 18.4, kde je probrána Carathéodoryova teorie diferenciálních rovnic. Výklad je veden paralelně ke kap. 3, 4, 10 až 14 této knihy, a proto v řadě případů je uveden pouze odkaz, že výsledek nebo důkaz výsledku je obdobný výsledku nebo důkazu v odpovídající kapitole. V odst. 18.5 jsou vyloženy základy teorie diferenciálních relací, v odst. 18.6 je pomocí diferenciálních relací zaveden pojem tzv. Filippovova řešení diferenciální rovnice a jsou nalezeny jeho základní vlastnosti; tento pojem je užitečný při vyšetřování nelineárních diferenciálních rovnic, jejichž pravá strana není spojitá vzhledem k prostorové proměnné. Při formulaci výsledků v odst. 18.6 se užívá pojmu „*skoro všude* v R^n" [tj. všude v R^n kromě nějaké množiny, která má Lebesgueovu míru rovnou nule] a pojmu měřitelné funkce více proměnných. Protože partie z odst. 18.5 a 18.6 jsou obtížnější, jsou důkazy odsunuty do dodatků. V nich se užívá některých pojmů a výsledků, které nebyly připomenuty v tomto odstavci [mj. též základních výsledků z teorie vícerozměrného Lebesgueova integrálu]. Poučení o Lebesgueově integrálu nalezne čtenář např. v [29].

18.1.1. Definice: Nechť $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ jsou intervaly, $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$. *Funkce* $u: \mathscr{I} \to K^n$ se nazývá *absolutně spojitá* v $\mathscr{J}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každou konečnou posloupnost disjunktních intervalů $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle \subset \mathscr{J}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, takovou, že součet $\sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)$ jejich délek je menší než δ, platí $\sum_{i=1}^{k} \|u(\beta_i) - u(\alpha_i)\| < \varepsilon$. Symbolem $\mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, K^n)$ budeme značit množinu funkcí $u: \mathscr{I} \to K^n$, které jsou absolutně spojité v každém kompaktním intervalu $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. O takových funkcích říkáme, že jsou *lokálně absolutně spojité* v $\mathcal{I}$.

18.1.2. Poznámka: (i) Obvyklá definice absolutně spojité funkce s hodnotami v R je v Definici 18.1.1 rozšířena na funkce s hodnotami v K^n.

(ii) Funkce $a: R \to R$ definovaná rovnicí $a(t) = t^2$ není absolutně spojitá v R, platí však $a \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(R, R)$. Funkce $b: (0, 1\rangle \to R$ definovaná rovnicí $b(t) = \sin(1/t)$ není absolutně spojitá v $(0, 1\rangle$, platí však $b \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}((0, 1\rangle, R)$.

(iii) Splňuje-li funkce $u: \mathcal{I} \to K^n$ Lipschitzovu podmínku, je absolutně spojitá v $\mathcal{I}$.

(iv) Je-li $\mathcal{I}$ kompaktní interval a má-li funkce $u: \mathcal{I} \to K^n$ spojitou derivaci, pak u je absolutně spojitá v $\mathcal{I}$.

(v) Nepředpokládáme-li, že interval $\mathcal{I}$ je kompaktní, a má-li funkce $u: \mathcal{I} \to K^n$ spojitou derivaci, platí $u \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(\mathcal{I}, K^n)$.

Přímo z Definice 18.1.1 [viz (3.2.8), (3.2.9)] plyne, že platí

18.1.3. Věta: *Nechť $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ jsou intervaly, $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, $u: \mathcal{I} \to K^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, kde $u_i: \mathcal{I} \to K$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Funkce u je absolutně spojitá v $\mathcal{J}$ právě tehdy, jsou-li funkce u_i absolutně spojité v $\mathcal{J}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Vztah $u \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(\mathcal{I}, K^n)$ platí právě tehdy, je-li $u_i \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(\mathcal{I}, K)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Předpokládáme, že čtenář zná pojem měřitelné funkce $q: \mathcal{I} \to R$, kde $\mathcal{I} \subset R$ je interval, a základní vlastnosti měřitelných funkcí a jejich souvislost s teorií Lebesgueova integrálu. [Např. že lineární kombinace $\alpha q_1 + \beta q_2$ měřitelných funkcí q_1, q_2 ($\alpha, \beta \in R$) je opět měřitelná funkce, že součin $q_1 q_2$ je měřitelná funkce, a je-li $q_1(t) \neq 0$ pro $t \in I$, je funkce $1/q_1(t)$ měřitelná. Také každá spojitá funkce je měřitelná.]

Nechť je $q: \mathcal{I} \to R$. Má-li funkce q Lebesgueův integrál, budeme jej zapisovat

$$\int_{\mathcal{I}} q \, \mathrm{d}t \quad \text{nebo} \quad \int_{\mathcal{I}} q(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{nebo} \quad \int_{\mathcal{I}} q \, \mathrm{d}s \quad \text{nebo} \quad \int_{\mathcal{I}} q(s) \, \mathrm{d}s \quad \text{nebo} \quad \int_{\mathcal{I}} q \, \mathrm{d}\tau$$

atp.

Přitom je buď

$$\int_{\mathcal{I}} q \, \mathrm{d}t \in R \quad \text{nebo} \quad \int_{\mathcal{I}} q \, \mathrm{d}t = \infty \, , \quad \int_{\mathcal{I}} q \, \mathrm{d}t = -\infty \, .$$

Interval $\mathcal{I}$ se přitom nazývá integrační interval, q se nazývá integrovaná funkce nebo funkce za integračním symbolem nebo integrand. Nebudeme se zabývat případem, kdy integrační obor je měřitelná množina, která není interval; tento případ je jen formálně obecnější a snadno se převede na případ, kdy integrační obor je interval. Funkce q, která má Lebesgueův integrál, je ovšem měřitelná. H. Lebesgue vycházel z pojmu měřitelné množiny $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ a její míry $m(\mathcal{A})$, zavedl pojem integrálu [který byl později po něm nazván] a dokázal, že platí toto tvrzení:

Nechť funkce $q\colon \mathscr{J} \to R$ nabývá pouze hodnot 0 nebo 1. Položme

$$\mathscr{A} = \{t \in \mathscr{J} |\ q(t) = 1\}.$$

Platí-li jeden z výroků

(i) Existuje integrál $\int_{\mathscr{J}} q \, dt$,

(ii) množina $\mathscr{A}$ je měřitelná,

pak platí i druhý a je $\int_{\mathscr{J}} q \, dt = m(\mathscr{A})$. (1.1)

V některých učebnicích (viz např. [51]) se zavádí nejdříve pojem Lebesgueova integrálu a pomocí (1.1) se zavádí pojem měřitelné množiny a míry $m(\mathscr{A})$ měřitelné množiny $\mathscr{A}$. [Každý interval je ovšem měřitelná množina a je

$$m(\langle\alpha, \beta\rangle) = m((\alpha, \beta\rangle) = m(\langle\alpha, \beta)) = m((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$$

pro $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$;

je-li $\mathscr{C}$ množina jednobodová nebo prázdná, je $m(\mathscr{C}) = 0$.]

Říkáme, že nějaký výrok, např. o nerovnostech mezi funkcemi [v intervalu $\mathscr{J}$], o konvergenci posloupnosti funkcí (v $\mathscr{J}$) atp., platí *skoro všude* (v $\mathscr{J}$), jestliže množina těch bodů (z $\mathscr{J}$), v nichž výrok neplatí, má míru rovnou nule. Místo „skoro všude" říká se též *„pro skoro všechna t* [nebo s, τ, atd.]". Připomeňme, že platí:

18.1.4. Věta: *Nechť $\mathscr{J}$ je interval $q\colon \mathscr{J} \to R$, $q(t) \geqq 0$ skoro všude. Potom platí:*

(i) *Existuje-li integrál $\int_{\mathscr{J}} q \, dt$, je $\int_{\mathscr{J}} q \, dt \geqq 0$ (může ovšem být $\int_{\mathscr{J}} q \, dt = \infty$).*

(ii) *Integrál $\int_{\mathscr{J}} q \, dt$ existuje právě tehdy, je-li funkce q měřitelná.*

(iii) *Je-li $q(t) = 0$ skoro všude, pak q je měřitelná a je $\int_{\mathscr{J}} q \, dt = 0$.*

(iv) *Je-li $\int_{\mathscr{J}} q \, dt = 0$, pak je $q(t) = 0$ skoro všude.*

(v) *Nechť funkce $q, \hat{q}\colon \mathscr{J} \to R$ jsou měřitelné, $0 \leqq \hat{q}(t) \leqq q(t)$ skoro všude. Potom je $0 \leqq \int_{\mathscr{J}} \hat{q} \, dt \leqq \int_{\mathscr{J}} q \, dt$.*

Připomeňme ještě, že platí toto tvrzení:

Existují-li integrály $\int_{\mathscr{J}} q_1 \, dt$, $\int_{\mathscr{J}} q_2 \, dt$ a je-li $\int_{\mathscr{J}} q_j \, dt \in R$, $\delta, \varepsilon \in R$, pro $j = 1, 2$, pak existuje i integrál $\int_{\mathscr{J}} (\delta q_1 + \varepsilon q_2) \, dt$ a je

$$\int_{\mathscr{J}} (\delta q_1 + \varepsilon q_2)\,\mathrm{d}t = \delta \int_{\mathscr{J}} q_1\,\mathrm{d}t + \varepsilon \int_{\mathscr{J}} q_2\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Existuje-li integrál $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t$, *je-li* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t \in R$ *a je-li* $\mathscr{J}$ *interval*, $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$, *pak existuje i integrál* $\int_{\mathscr{J}} q|_{\mathscr{J}}\,\mathrm{d}t$ *a je* $\int_{\mathscr{J}} q|_{\mathscr{J}}\,\mathrm{d}t \in R$ ($q|_{\mathscr{J}}$ *je restrikce funkce* q *na interval* $\mathscr{J}$ – *viz odst.* 0.2). (1.3)

Obvykle se ovšem píše $\int_{\mathscr{J}} q\,\mathrm{d}t$ místo $\int_{\mathscr{J}} q|_{\mathscr{J}}\,\mathrm{d}t$. Z tvrzení (iii) Věty 18.1.4 a z (1.2) plyne, že platí: *Nechť existuje* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t$ *a je* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t \in R$, *nechť je* $\mathscr{A} \subset \mathscr{I}$, $m(\mathscr{A}) = 0$. *Funkci* q *můžeme změnit libovolným způsobem na množině* $\mathscr{A}$ *a po takové změně bude existovat integrál* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t$ *a bude mít touž hodnotu (jako před změnou).*

Podle Věty 18.1.4 a (1.2) platí:

Nechť je $\varkappa > 0$, $0 \leqq \varrho(t) \leqq \varkappa$, $0 \leqq q(t)$ *pro* $t \in \mathscr{I}$. *Nechť existuje* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t$, *nechť je* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t < \infty$ *a nechť funkce* ϱ *je měřitelná. Potom existuje* $\int_{\mathscr{I}} q\varrho\,\mathrm{d}t$ *a je* $0 \leqq \int_{\mathscr{I}} q\varrho\,\mathrm{d}t \leqq \varkappa \int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t$. (1.4)

Z tvrzení (iii) Věty 18.1.4, z (1.2) a (1.3) dále plyne, že platí:

Je-li $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $q: \langle\alpha, \beta\rangle \to R$ *a existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_{\langle\alpha,\beta\rangle} q\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_{(\alpha,\beta\rangle} q\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_{\langle\alpha,\beta)} q\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_{(\alpha,\beta)} q\,\mathrm{d}t\,,$$

existují i ostatní a jsou si navzájem rovny. (1.5)

Proto symbolem $\int_\alpha^\beta q\,\mathrm{d}t$ označujeme kterýkoliv integrál v (1.5) a klademe

$$\int_\beta^\alpha q\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta q\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_\alpha^\alpha q\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Z (1.2) a (1.3) plyne, že platí

18.1.5. Věta: *Nechť* $\mathscr{I}$ *je interval*, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{I}$ *a nechť existuje integrál* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t$ *a je* $\int_{\mathscr{I}} q\,\mathrm{d}t \in R$. *Potom existují integrály ve vzorci*

$$\int_\alpha^\gamma q\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta q\,\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma q\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.6}$$

patří do R *a* (1.6) *platí.*

Dále platí tyto věty [které lze najít ve většině knih o Lebesgueově integrálu]:

18.1.6. Věta: *Nechť existuje* $\int_{\mathscr{I}} q(t)\,\mathrm{d}t$ *a je* $\int_{\mathscr{I}} q(t)\,\mathrm{d}t \in R$. *Pak existuje i integrál* $\int_{\mathscr{I}} |q(t)|\,\mathrm{d}t$ *a je* $\int_{\mathscr{I}} |q(t)|\,\mathrm{d}t \in R$.

18.1.7. Věta: *Nechť $\mathscr{I}$ je interval, nechť je* $0 \leqq q_1(t) \leqq q_2(t) \leqq \ldots$, $q(t) = \lim_{j\to\infty} q_j(t)$ *skoro všude v $\mathscr{I}$ a nechť existují integrály $\int_{\mathscr{I}} q_j \, \mathrm{d}t$. Pak existuje i integrál $\int_{\mathscr{I}} q \, \mathrm{d}t$ a je $\int_{\mathscr{I}} q \, \mathrm{d}t = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathscr{I}} q_j \, \mathrm{d}t$.*

18.1.8. Věta: *Nechť množiny $\mathscr{A}_j \subset R$ jsou měřitelné pro $j = 1, 2, 3, \ldots$. Pak množina $\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{A}_j$ je měřitelná a je $m(\mathscr{A}) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} m(\mathscr{A}_j)$. Speciálně, je-li $m(\mathscr{A}_j) = 0$, je i $m(\mathscr{A}) = 0$.*

[Větu 18.1.8 lze odvodit z Věty 18.1.7 užitím (1.1), (1.2) a Věty 18.1.4.]

18.1.9. Věta: *Nechť $\mathscr{I}$ je interval (popř. neomezený) a nechť je $\varrho: \mathscr{I} \to R$, $q_j: \mathscr{I} \to R$ pro $j = 1, 2, \ldots$, $q: \mathscr{I} \to R$, $q(t) = \lim_{j\to\infty} q_j(t)$ skoro všude, $|q_j(t)| \leqq \varrho(t)$ skoro všude pro $j = 1, 2, \ldots$. Nechť existují integrály $\int_{\mathscr{I}} q_j \, \mathrm{d}t$, $\int_{\mathscr{I}} \varrho \, \mathrm{d}t$ a nechť je $\int_{\mathscr{I}} \varrho \, \mathrm{d}t \in R$. Potom existuje též $\int_{\mathscr{I}} q \, \mathrm{d}t$ a je $\int_{\mathscr{I}} q \, \mathrm{d}t = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathscr{I}} q_j \, \mathrm{d}t$, $-\int_{\mathscr{I}} \varrho \, \mathrm{d}t \leqq \int_{\mathscr{I}} q \, \mathrm{d}t \leqq \int_{\mathscr{I}} \varrho \, \mathrm{d}t$.*

18.1.10. Věta: *Nechť je $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, a nechť funkce $v: \langle\alpha, \beta\rangle \to R$ je absolutně spojitá. Potom derivace $\dot{v}(t)$ funkce v existuje pro skoro všechna $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Zvolme $\dot{v}(t) \in R$ libovolně v těch bodech t, v nichž funkce v nemá derivaci. Potom pro libovolná $\gamma, \delta \in \langle\alpha, \beta\rangle$ existuje integrál $\int_{\gamma}^{\delta} \dot{v}(t) \, \mathrm{d}t$ a platí $v(\delta) - v(\gamma) = \int_{\gamma}^{\delta} \dot{v}(t) \, \mathrm{d}t$.*

18.1.11. Věta: *Nechť je $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $q: \langle\alpha, \beta\rangle \to R$, $s \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\eta \in R$. Nechť existuje $\int_{\alpha}^{\beta} q \, \mathrm{d}t$ a je $\int_{\alpha}^{\beta} q \, \mathrm{d}t \in R$. Položme $v(t) = \eta + \int_{s}^{t} q(\tau) \, \mathrm{d}\tau$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Potom funkce v je absolutně spojitá a $q(t)$ je derivace funkce v v bodě t pro skoro všechna t.*

18.1.12. Věta: *Nechť $\mathscr{J}, \mathscr{I} \subset R$ jsou intervaly, nechť funkce $\psi: \mathscr{I} \to \mathscr{J}$ je absolutně spojitá a neklesající*

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \vartheta(\tau)$$

skoro všude v $\mathscr{I}$, nechť existuje $\int_{\mathscr{J}} \xi(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$ a je $\int_{\mathscr{J}} \xi(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \in R$. Potom je

$$\int_{\psi(\sigma)}^{\psi(\tau)} \xi(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\sigma}^{\tau} \xi(\psi(\omega)) \, \vartheta(\omega) \, \mathrm{d}\omega \quad \textit{pro} \quad \sigma, \tau \in \mathscr{I}.$$

Věta 18.1.12 se nazývá věta o substituci a plyne přímo z Vět 18.1.10 a 18.1.11; jestliže totiž při pevném $\sigma \in \mathscr{J}$ položíme

$$\eta(t) = \int_{\psi(\sigma)}^{t} \xi(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda,$$

pak funkce η je absolutně spojitá a snadno zjistíme, že i složená funkce $\eta(\psi(\tau))$ je absolutně spojitá; Věta 18.1.12 platí, neboť lze dokázat, že je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \eta(\psi(\tau)) = \xi(\psi(\tau)) \, \vartheta(\tau)$$

skoro všude v $\mathscr{J}$.

Pojmy měřitelné funkce a Lebesgueova integrálu rozšíříme na funkce $p: \mathscr{I} \to C$ a $h: \mathscr{I} \to K^k$; přitom vyloučíme ty případy funkcí $q: \mathscr{I} \to R$, kdy je $\int_{\mathscr{I}} q \, dt = \infty$ nebo $\int_{\mathscr{I}} q \, dt = -\infty$; to znamená, že budeme rozšiřovat „konečný Lebesgueův integrál". Také některá z uvedených tvrzení a vět rozšíříme na funkce $p: \mathscr{I} \to C$ a $h: \mathscr{I} \to K^n$, $n > 1$.

18.1.13. Definice: Nechť $\mathscr{I}$ je interval. Nechť je $p: \mathscr{I} \to C$, $p(t) = p_1(t) + i\, p_2(t)$, kde $p_1, p_2: \mathscr{I} \to R$. *Funkce* p se nazývá *měřitelná,* jsou-li funkce p_1, p_2 měřitelné. Nechť je $h: \mathscr{I} \to K^n$, $h(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t))$, kde $h_i: \mathscr{I} \to K$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. *Funkce* h se nazývá *měřitelná,* jsou-li měřitelné funkce h_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

18.1.14. Poznámka: Není těžké dokázat, že funkce $h: \mathscr{I} \to K^n$ je měřitelná právě tehdy, je-li měřitelná množina $h^{-1}(H)$ pro každou uzavřenou množinu $H \subset K^n$ [$h^{-1}(H)$ je vzor množiny H při zobrazení h].

18.1.15. Definice: Nechť $\mathscr{I}$ je interval. *Funkce* $q: \mathscr{I} \to R$ se nazývá *integrovatelná v* $\mathscr{I}$, existuje-li integrál $\int_{\mathscr{I}} q \, dt$ a je-li $\int_{\mathscr{I}} q \, dt \in R$. Množinu takových funkcí označíme symbolem $L(\mathscr{I}, R)$.

Funkce $p: \mathscr{I} \to C$ se nazývá *integrovatelná v* $\mathscr{I}$, je-li $p(t) = p_1(t) + i\, p_2(t)$ pro $t \in I$, kde $p_1, p_2 \in L(\mathscr{I}, R)$. Množinu takových funkcí označíme symbolem $L(\mathscr{I}, C)$. Pro $p \in L(\mathscr{I}, C)$ klademe

$$\int_{\mathscr{I}} p \, dt = \int_{\mathscr{I}} p_1 \, dt + i \int_{\mathscr{I}} p_2 \, dt.$$

Funkce $h: \mathscr{I} \to K^n$ se nazývá *integrovatelná v* $\mathscr{I}$, je-li

$$h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t))$$

pro $t \in \mathscr{I}$, kde $h_j \in L(\mathscr{I}, K)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Množinu takových funkcí označíme symbolem $L(\mathscr{I}, K^n)$. Pro $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$ klademe

$$\int_{\mathscr{I}} h \, dt = \left(\int_{\mathscr{I}} h_1 \, dt, \int_{\mathscr{I}} h_2 \, dt, \ldots, \int_{\mathscr{I}} h_n \, dt \right).$$

Je tedy $\int_{\mathscr{I}} h \, dt \in K^n$ pro $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$ ve všech případech, tj. pro $n = 1, 2, 3, \ldots, K = R$ nebo $K = C$. Na funkce $h: \mathscr{I} \to K^n$ se přímo přenášejí tvrzení (1.2), (1.3), (1.5) a jejich důsledky, jakož i Věta 18.1.5. Tyto výsledky nebudeme přepisovat a budeme jich užívat pro funkce $h: \mathscr{I} \to K^n$. Všimněme si jen, že se můžeme nyní v některých případech vyjádřit stručněji. Např. tvrzení (1.2) přeformulujeme takto:

Nechť je $h^{[1]}, h^{[2]} \in L(\mathscr{I}, K^n)$, $\delta, \varepsilon \in K$. *Potom je též* $\delta h^{[1]} + \varepsilon h^{[2]} \in L(\mathscr{I}, K^n)$ *a platí*

$$\int_{\mathscr{I}} (\delta h^{[1]} + \varepsilon h^{[2]}) \, dt = \delta \int_{\mathscr{I}} h^{[1]} \, dt + \varepsilon \int_{\mathscr{I}} h^{[2]} \, dt. \tag{1.7}$$

Jiné z dřívějších tvrzení můžeme formulovat takto:

> *Nechť je $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$. Funkci h můžeme měnit na množině míry nula, aniž tím porušíme její příslušnost do množiny $L(\mathscr{I}, K^n)$ nebo změníme hodnotu integrálu $\int_{\mathscr{I}} q\, \mathrm{d}t$.* (1.8)

Postačující podmínky, aby měřitelná funkce $h\colon \mathscr{I} \to K^n$ byla integrovatelná, jsou obsaženy v této větě:

18.1.16. Věta: *Nechť $\mathscr{I}$ je interval, nechť funkce $h\colon \mathscr{I} \to K^n$, $\varrho\colon \mathscr{I} \to R$ jsou měřitelné, $\varrho(t) \geqq 0$, $\|h(t)\| \leqq \varrho(t)$ skoro všude a nechť je $\int_{\mathscr{I}} \varrho\, \mathrm{d}t < \infty$. Potom je $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$. [Speciálně může být $\varrho(t) = \|h(t)\|$; víme-li tedy, že funkce h je měřitelná a že je $\|h(.)\| \in L(\mathscr{I}, R)$, je $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$.]*

Důkaz: Je $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t))$, kde funkce h_j jsou měřitelné. Nechť je $K = R$. Podle (3.2.9) je

$$-\eta_2^{-1}\varrho(t) \leqq h_j(t) \leqq \eta_2^{-1}\varrho(t) \tag{1.9}$$

skoro všude, tj.

$$0 \leqq \eta_2^{-1}\varrho(t) - h_j(t)\,, \quad 0 \leqq \eta_2^{-1}\varrho(t) + h_j(t)$$

skoro všude, a protože funkce

$$\eta_2^{-1}\varrho - h_j\,, \quad \eta_2^{-1}\varrho + h_j$$

jsou měřitelné, podle Věty 18.1.4 existují integrály

$$\int_{\mathscr{I}} (\eta_2^{-1}\varrho - h_j)\, \mathrm{d}t\,, \quad \int_{\mathscr{I}} (\eta_2^{-1}\varrho + h_j)\, \mathrm{d}t\,.$$

Protože je

$$\eta_2^{-1}\varrho(t) + h_j(t) \leqq 2\eta_2^{-1}\varrho(t)$$

skoro všude, je podle téže věty

$$0 \leqq \int_{\mathscr{I}} (\eta_2^{-1}\varrho + h_j)\, \mathrm{d}t < \infty$$

a podle Věty 18.1.4 a (1.2) existuje

$$\int_{\mathscr{I}} h_j(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{a je} \quad \int_{\mathscr{I}} h_j(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathscr{I}} (\eta_2^{-1}\varrho + h_j)\, \mathrm{d}t + \int_{\mathscr{I}} (-\eta_2^{-1}\varrho)\, \mathrm{d}t \in R$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy $h \in L(\mathscr{I}, R^n)$. Je-li $K = C$, pak (1.9) nahradíme obdobnými dvěma nerovnostmi, kde místo $h_j(t)$ píšeme jednak $\operatorname{Re} h_j(t)$, jednak $\operatorname{Im} h_j(t)$ a dále postupujeme zcela stejným způsobem. Věta 18.1.16 je dokázána.

Užitím Věty 18.1.9 a (3.2.9) se snadno odvodí, že platí

18.1.17. Věta: *Nechť $\mathscr{I}$ je interval a nechť je $\varrho \in L(\mathscr{I}, R)$, $h^{[j]} \in L(\mathscr{I}, K^n)$ pro $j =$*

$= 1, 2, \ldots$, $h\colon \mathscr{I} \to K^n$, $\|h^{[j]}(t)\| \leqq \varrho(t)$ *skoro všude*, $j = 1, 2, \ldots$, $h(t) = \lim_{j\to\infty} h^{[j]}(t)$ *skoro všude. Potom je* $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$ *a platí*

$$\int_{\mathscr{I}} h \, dt = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathscr{I}} h^{[j]} \, dt .$$

Ve speciálním případě $n = 1$, $K = R$ plyne následující věta z Vět 18.1.6, 18.1.4 a z (1.2). Důkaz pro obecný případ je obsažen v Dodatku 18.1.

18.1.18. Věta: *Nechť* $\mathscr{I}$ *je interval,* $h \in L(\mathscr{I}, K^n)$. *Potom je* $\|h(.)\| \in L(\mathscr{I}, R)$ *a platí*

$$\left\| \int_{\mathscr{I}} h(t) \, dt \right\| \leqq \int_{\mathscr{I}} \|h(t)\| \, dt . \tag{1.10}$$

18.1.19. Poznámka: Nechť je $B\colon \mathscr{I} \to M_n(K)$, tj. $B = (B_{ij})$, kde $B_{ij}\colon \mathscr{I} \to K$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$. *Funkci B* nazýváme *integrovatelnou*, jsou-li integrovatelné funkce B_{ij}, a klademe

$$\int_{\mathscr{I}} B \, dt = \left(\int_{\mathscr{I}} B_{ij} \, dt \right).$$

$L(\mathscr{I}, M_n)$ je množina takových funkcí B, že je $B_{ij} \in L(\mathscr{I}, K)$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pokud nebereme v úvahu násobení matic, můžeme M_n ztotožnit s prostorem K^{n^2} (tím, že n^2 prvků D_{ij} matice D vypíšeme do řádku). Proto můžeme výsledků o integraci vektorových funkcí užít i pro maticové funkce. Speciálně podle Věty 18.1.18 platí: Je-li $B \in L(\mathscr{I}, M_n)$, je $\|B(.)\| \in L(\mathscr{I}, R)$ a platí

$$\left\| \int_{\mathscr{I}} B \, dt \right\| \leqq \int_{\mathscr{I}} \|B\| \, dt .$$

Množina integrovatelných funkcí je pro potřeby teorie diferenciálních rovnic příliš úzká; proto ji rozšíříme.

18.1.20. Definice: Nechť $\mathscr{I} \subset R$ je interval a nechť je $h\colon \mathscr{I} \to K^n$. *Funkci h* nazveme *lokálně integrovatelnou v* $\mathscr{I}$, je-li $h|_{\mathscr{J}} \in L(\mathscr{J}, K^n)$ pro každý kompaktní interval $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$. Množinu takových funkcí označíme $L_{lok}(\mathscr{I}, K^n)$.

18.1.21. Poznámka: Je-li $\mathscr{I}$ kompaktní interval, pak je $L_{lok}(\mathscr{I}, K^n) = L(\mathscr{I}, K^n)$ [viz (1.3)]. Definujme funkce ξ_1, ξ_2, ξ_3 rovnicemi $\xi_1(t) = t$, $\xi_2(t) = t^{-1}$, $\xi_3(t) = t \sin t$ pro $t \in (0, \infty)$. Funkce ξ_1, ξ_2, ξ_3 zřejmě patří do množiny $L_{lok}((0, \infty), R)$, žádná z nich však nepatří do množiny $L((0, \infty), R)$.

Vztah mezi množinami $AC_{lok}(\mathscr{I}, K^n)$ a $L_{lok}(\mathscr{I}, K^n)$ je popsán v následujících dvou větách.

18.1.22. Věta: *Nechť* $\mathscr{I}$ *je interval* $u \in AC_{lok}(\mathscr{I}\ K^n)$. *Potom pro skoro všecka* $t \in \mathscr{I}$ *existuje derivace* $\dot{u}(t)$ *funkce u v bodě t. V těch bodech t, kde funkce u nemá derivaci, definujme* $\dot{u}(t) \in K^n$ *libovolným způsobem. Potom je* $\dot{u}\colon \mathscr{I} \to K^n$.

$\dot{u} \in L_{\text{lok}}(\mathscr{I}, K^n)$ *a platí*

$$u(t) = u(s) + \int_s^t \dot{u}(\tau)\, d\tau \quad \textit{pro} \quad t, s \in \mathscr{I}\,. \tag{1.11}$$

Důkaz: Najděme čísla $\alpha, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ tak, že je

$$\ldots \leqq \alpha_3 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \beta_3 \leqq \ldots, \quad \mathscr{I} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle \alpha_j, \beta_j \rangle\,.$$

Je $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, kde $u_k: \mathscr{I} \to K$. Nechť je $K = R$. Nechť $\mathscr{A}_{jk}$ je množina takových $t \in \langle \alpha_j, \beta_j \rangle$, že funkce u_k nemá v bodě t derivaci. Protože funkce u_k je absolutně spojitá v $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$, podle Věty 18.1.11 je $m(\mathscr{A}_{jk}) = 0$. Nechť $\mathscr{A}$ je množina takových $t \in \mathscr{I}$, že funkce u v bodě t nemá derivaci. Zřejmě je $\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{A}_{jk} \right)$. Položme $\mathscr{A}_j = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{A}_{jk}$. Je

$$m(\mathscr{A}_j) \leqq \sum_{k=1}^{n} m(\mathscr{A}_{jk}) = 0\,, \quad m(\mathscr{A}) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} m(\mathscr{A}_j) = 0$$

[viz Větu 18.1.8], a tedy funkce u má derivaci v bodě t pro skoro všechna $t \in I$. Nechť $\dot{u}(t)$ je derivace funkce u v každém bodě t, v němž funkce u má derivaci, a zvolme $\dot{u}(t) \in R^n$ libovolně v těch bodech t, kde u derivaci nemá. Je $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, kde $\dot{u}_k: \mathscr{I} \to R$. Nechť je $s, t \in \mathscr{I}$. Existuje takové j, že je $s, t \in \langle \alpha_j, \beta_j \rangle$, a podle Věty 18.1.10 a (1.8) je

$$u_k(t) = u_k(s) + \int_s^t \dot{u}_k(\tau)\, d\tau \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Tedy platí (1.11). V případě, že je $K = C$, postupujeme obdobně s tím rozdílem, že pracujeme s reálnými funkcemi $\operatorname{Re} u_k$, $\operatorname{Im} u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, místo s funkcemi u_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Věta 18.1.22 je dokázána.

18.1.23. Věta: *Nechť $\mathscr{I}$ je interval, $h \in L_{\text{lok}}(\mathscr{I}, K^n)$, $s \in \mathscr{I}$, $y \in K^n$. Položme*

$$u(t) = y + \int_s^t h(\tau)\, d\tau$$

pro $t \in \mathscr{I}$. Potom je $u \in \mathrm{AC}_{\text{lok}}(\mathscr{I}, K^n)$ a $h(t)$ je derivace funkce u v bodě t pro skoro všechna t.

Věta 18.1.23 se dokáže užitím Věty 18.1.11. Z Věty 18.1.12 plyne, že platí

18.1.24. Věta: *Nechť $\mathscr{J}, \mathscr{I} \subset R$ jsou intervaly, nechť funkce $\psi: \mathscr{I} \to \mathscr{J}$ je lokálně absolutně spojitá a neklesající, $d\psi/dt = \vartheta(t)$ skoro všude v $\mathscr{I}$, $h \in L(\mathscr{J}, K^n)$. Potom je*

$$\int_{\psi(\sigma)}^{\psi(\tau)} h(\lambda)\, d\lambda = \int_\sigma^\tau h(\psi(\omega))\, \vartheta(\omega)\, d\omega \quad \textit{pro} \quad \sigma, \tau \in \mathscr{I}\,.$$

18.2. V tomto odstavci zavedeme tzv. absolutně spojitá řešení diferenciální rovnice a vyšetříme některé jejich základní vlastnosti. Budeme předpokládat, že je $G \subset R \times K^n$, $f: G \to K^n$.

18.2.1. Definice: Nechť $\mathscr{I}$ je interval, $u: \mathscr{I} \to K^n$. Funkci u nazveme ***řešením rovnice***

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \tag{2.1}$$

jestliže platí

$$u \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, K^n), \tag{2.2}$$

$$(t, u(t)) \in G \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{skoro všude v } \mathscr{I}. \tag{2.4}$$

18.2.2. Poznámka: V matematických pracích je obvykle jasné, jaké definice řešení se užívá, a proto se mluví pouze o řešení. V této kapitole – nebude-li výslovně řečeno něco jiného – budeme rozumět pod řešením diferenciální rovnice řešení ve smyslu Definice 18.2.1. Je-li někdy třeba odlišit řešení ve smyslu Definice 18.2.1 od řešení podle Definice 3.3.1, budeme řešení podle Definice 18.2.1 nazývat ***absolutně spojitými řešeními*** nebo též ***Carathéodoryovými řešeními*** a řešení podle Definice 3.3.1 budeme nazývat ***řešeními se spojitou derivací.*** Místo „absolutně spojité řešení" měli bychom ovšem říkat „lokálně absolutně spojité řešení".

Vzhledem k Poznámce 18.1.2 (v) platí

18.2.3. Věta: *Nechť $u: \mathscr{I} \to K^n$ je řešení se spojitou derivací rovnice* (2.1). *Potom u je absolutně spojité řešení rovnice* (2.1).

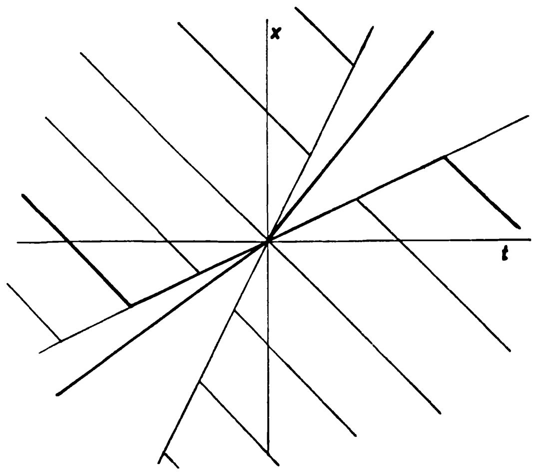
18.2.4. Poznámka: Absolutně spojité řešení nemusí mít spojitou derivaci. Nechť je $0 < \alpha < 1$. Položme $\eta(t) = (1 - \alpha)^{-1} |t|^{1-\alpha}$ pro $t \in R$. Funkce $\xi(t) = k \exp \eta(t)$, kde $k \in R$, je absolutně spojité řešení rovnice $\dot{x} = \operatorname{sgn} t\, |t|^{-\alpha} x$, funkce ξ však nemá derivaci v bodě $t = 0$.

18.2.5. Poznámka: Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x} = \tilde{f}(t, x), \tag{2.5}$$

kde funkce $\tilde{f}: R^2 \to R$ je dána předpisem: $\tilde{f}(t, x) = -1$ pro $t < 0$, $x > t/2$ nebo $x < 2t$; dále pro $t = 0$, $x \in R$ a konečně pro $t > 0$, $x > 2t$ nebo $x < t/2$; $\tilde{f}(t, x) = x/t$ v ostatních bodech (t, x). Popíšeme některá maximální absolutně spojitá řešení rovnice (2.5). Zvolme $\alpha, \beta \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle$ a položme $u(t) = \alpha t$ pro $t \leqq 0$, $u(t) = \beta t$ pro $t \geqq 0$; u je maximální řešení rovnice (2.1). Zvolme $\gamma, \delta > 0$ a položme $v(t) = -t - \gamma$ pro $t \leqq -2\gamma/3$ $v(t) = t/2$ pro $-2\gamma/3 \leqq t \leqq 2\delta/3$, $v(t) = -t + \delta$ pro $t \geqq 2\delta/3$; v je maximální řešení rovnice (2.5). Grafy ostatních maximálních řešení rovnice (2.5) můžeme složit obdobným způsobem z částí šikmých polopřímek zakreslených na obr. 41.

Snadno se dokáže, že platí toto tvrzení: Nechť je $f\colon R^2 \to R$, $f(t, 0) < 0$, nechť $w\colon (\alpha_1, \beta_1) \to R$ je řešení rovnice (2.1) se spojitou derivací a nechť pro nějaké $\tau \in (\alpha_1, \beta_1)$ je $w(\tau) < 0$. Potom je $w(t) < 0$ pro $t \in (\tau, \beta_1)$. Jak ukazuje existence řešení u rovnice (2.5), zmíněné tvrzení neplatí pro absolutně spojitá řešení.



Obr. 41

Integrál v této kapitole bude vždy Lebesgueův integrál. Z Věty 18.1.22 plyne, že platí

18.2.6. Věta: *Nechť $u\colon \mathscr{I} \to K^n$ je řešení rovnice* (2.1). *Potom složená funkce $f(\tau, u(\tau))$ je lokálně integrovatelná a platí*

$$u(t) = u(s) + \int_s^t f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \textit{pro} \quad s, t \in \mathscr{I}. \tag{2.6}$$

Z Věty 18.1.23 plyne, že platí

18.2.7. Věta: *Nechť je $u\colon \mathscr{I} \to K^n$, $s \in \mathscr{I}$, a nechť platí $(t, u(t)) \in G$ pro $t \in \mathscr{I}$. Nechť složená funkce $f(\tau, u(\tau))$ proměnné τ patří do množiny $L_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, K^n)$ a nechť je*

$$\mathrm{u}(t) = u(s) + \int_s^t f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \textit{pro} \quad t \in \mathscr{I}.$$

Potom u je řešení rovnice (2.1).

18.2.8. Věta: *Nechť funkce $f\colon G \to K^n$ je spojitá. Nechť $u\colon \mathscr{I} \to K^n$ je absolutně spojité řešení rovnice* (2.1). *Potom u je řešení se spojitou derivací.*

Důkaz: Věta 18.2.8 plyne z Věty 18.2.6, neboť složená funkce $f(\tau, u(\tau))$ je spojitá, a tedy vzhledem k (2.6) funkce u má derivaci $f(t, u(t))$ v každém bodě $t \in \mathscr{I}$.

18.2.9. Poznámka: Pojmy „prodloužení daného řešení" a „maximální řešení" se zavedou zcela stejným způsobem jako v odst. 1.8. Věta 3.4.1 zůstává v platnosti [pro absolutně spojitá řešení] a její důkaz se přenáší beze změny.

18.2.10. Poznámka: Také pro absolutně spojité řešení lze provést úvahy z odst. 2.18 o transformaci diferenciální rovnice. Podstatné přitom je, že funkce ϑ_1, ϑ_2 zavedené v (2.18.9) patří do množiny $AC_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, R)$, patří-li funkce u_1, u_2 do téže množiny, a že funkce v_1, v_2 zavedené v (2.18.12) patří do $AC_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, R)$, patří-li ω_1, ω_2 do téže množiny. Platí Věta 2.18.1 i Poznámky 2.18.2 až 2.18.5.

18.3. Absolutně spojitá řešení, která nemají spojitou derivaci, se mohou vyskytovat jen u takových diferenciálních rovnic, jejichž pravá strana není spojitá [srovnej Větu 18.2.8]. V tomto odstavci budeme vyšetřovat soustavy lineárních diferenciálních rovnic [a také lineární diferenciální rovnice vyšších řádů] za slabších předpokladů než v kap. 4. Základním předmětem našeho studia bude rovnice (4.1.1). Budeme předpokládat, že $\mathscr{I} \subset R$ je interval a že platí

$$A_{ij} \in L_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, K), \quad b_i \in L_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, K) \quad \text{pro} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Tak jako v kap. 4 budeme soustavu (4.1.1) zapisovat ve vektorovém tvaru (4.1.2) a podmínku (3.1) ve tvaru

$$A \in L_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, M_n), \quad b \in L_{\mathrm{lok}}(\mathscr{I}, K^n). \tag{3.2}$$

Výsledky, které jsme v kap. 4 dokázali pro řešení se spojitou derivací rovnice (4.1.2) za předpokladu, že funkce A, b jsou spojité, platí s odpovídajícími změnami i pro absolutně spojitá řešení rovnice (4.1.2) za předpokladu, že je splněno (3.2). Také důkazy lze, až na nevelké změny, provést jako v kap. 4. Proto v tomto odstavci budeme využívat formulací a postupů z kap. 4 a formou poznámek k výsledkům kap. 4 vyložíme potřebné změny. Přitom – aniž to budeme stále opakovat – budeme mít na mysli, že pracujeme s absolutně spojitými řešeními a že o funkcích A, b předpokládáme pouze, že platí (3.2).

18.3.1. Poznámka: Platí Věta 4.2.1 [tj. pro absolutně spojitá řešení za slabšího předpokladu, že platí (3.2)].

D ů k a z provedeme jako v kap. 4. Posloupnost funkcí $u^{[i]}: \mathscr{I} \to K^n$, $i = 1, 2, \ldots$, definujeme vzorci (4.2.1) a (4.2.2). To má smysl, neboť, jak ukážeme, poslední integrál v (4.2.2) existuje a patří do K^n. Funkce $u^{[1]}$ je zřejmě spojitá. Předpokládejme, že již víme, že pro nějaké i funkce $u^{[i]}$ je spojitá. Nechť interval $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ je kompaktní, $s \in \mathscr{J}$. Funkce $A(\sigma)\, u^{[i]}(\sigma)$ je měřitelná, je $\|A(\sigma)\, u^{[i]}(\sigma)\| \leqq \|A(\sigma)\|\, \|u^{[i]}(\sigma)\|$. Je

$$\int_{\mathscr{J}} \|A(\sigma)\| \, d\sigma < \infty$$

[viz Poznámku 18.1.19], a protože funkce $\|u^{[i]}(\sigma)\|$ je spojitá na $\mathscr{J}$, je

$$\int_{\mathscr{J}} \|A(\sigma)\| \; \|u^{[i]}(\sigma)\| \, d\sigma < \infty$$

[viz (1.4)]. Proto je

$$\int_{\mathscr{J}} A(\sigma) \, u^{[i]}(\sigma) \, d\sigma \in K^n$$

[viz Větu 18.1.16] a tak je

$$\int_s^t A(\sigma) \, u^{[i]}(\sigma) \, d\sigma \in K^n \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J} .$$

Protože $\mathscr{J}$ je libovolný kompaktní interval, je

$$\int_s^t A(\sigma) \, u^{[i]}(\sigma) \, d\sigma \in K^n \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I} .$$

Podle Věty 18.1.23 je funkce $u^{[i+1]}$ spojitá. Tedy funkce $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots$, jsou definovány vzorci (4.2.1), (4.2.2) a jsou spojité. Pro $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ funkce

$$\vartheta_{j+1}(t) = \left[\int_s^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right]^{j+1}$$

je lokálně absolutně spojitá v $\mathscr{I}$ a je

$$\frac{d\vartheta_{j+1}}{dt}(t) = (j + 1) \, \|A(t)\| \left[\int_s^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right]^j$$

skoro všude. Podle Věty 18.1.11 je

$$\int_s^t \|A(\sigma)\| \left[\int_s^\sigma \|A(\xi)\| \, d\xi \right]^j d\sigma = (j + 1)^{-1} \, \vartheta_{j+1}(t) .$$

Proto lze dokázat jako v kap. 4, že platí (4.2.5), a dále dokončit důkaz Věty 4.2.1.

18.3.2. Poznámka: V Gronwallově pomocné větě 4.3.1 poněkud zeslabíme podmínky pro funkci ϱ. Tato věta zůstane v platnosti, nahradíme-li předpoklad, že funkce ϱ je spojitá, předpokladem, že je $\varrho \in L_{1ok}(K, R)$.

Z učiněných předpokladů plyne, že je též $\varrho\xi \in L_{1ok}(K, R)$ [viz (1.4)], tedy funkce

$$\zeta(t) = \ln \left[\eta + \int_s^t \varrho(\sigma) \, \xi(\sigma) \, d\sigma \right]$$

je lokálně absolutně spojitá pro $t \geqq s$ a je

$$\frac{d\zeta}{dt}(t) = \varrho(t) \, \xi(t) \left[\eta + \int_s^t \varrho(\sigma) \, \xi(\sigma) \, d\sigma \right]^{-1}$$

skoro všude.

Proto je (viz Věty 18.1.11 a 18.1.4)

$$\ln\left[\eta + \int_s^t \varrho(\sigma)\,\xi(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma - \ln\eta =$$

$$= \int_s^t \varrho(\tau)\,\xi(\tau)\left[\eta + \int_s^\tau \varrho(\sigma)\,\xi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]^{-1} \mathrm{d}\tau \leqq \int_s^t \varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pro} \quad t \geqq s,$$

a důkaz se dokončí jako v odst. 4.3.

Tak jako v odst. 4.3 z Věty 4.3.1 plyne platnost Věty 4.3.2, dále Poznámek 4.3.3, 4.3.4 a Věty 4.3.5.

18.3.3. Poznámka: Odst. 4.4 lze převzít s jedinou změnou. Ve Větě 4.4.9 funkce U^{-1} nemusí mít spojitou derivaci, je však lokálně absolutně spojitá.

Abychom to dokázali, všimněme si, že funkce U^{-1} je spojitá. Protože U je lokálně absolutně spojitá a protože je

$$U^{-1}(t) - U^{-1}(s) = U^{-1}(t)\,[U(s) - U(t)]\,U^{-1}(s)$$

pro $s, t \in \mathscr{J}$, je funkce U^{-1} lokálně absolutně spojitá. Ve Větě 4.5.1 podmínky (i), (ii) nahradíme těmito podmínkami:

(i′) Funkce U je lokálně absolutně spojitá.

(ii′) $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)\,U(t)$ skoro všude v $\mathscr{J}$.

Věty 4.5.2 a 4.6.1 přecházejí beze změny a také vzorec pro variaci konstant (4.6.4) platí, neboť funkce z definovaná v (4.6.4) je lokálně absolutně spojitá, splňuje rovnici (4.1.2) a je $z(s) = y$. Obdobně platí Věta 4.7.1.

Rovnici (4.8.1) vyšetřujeme za předpokladu, že je $a_1, a_2, \ldots, a_n, q \in L_{\mathrm{lok}}(\mathscr{J}, K)$. Jejím řešením nazveme takovou funkci $u: \mathscr{J} \to K$, že existují derivace $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots, u^{(n-1)}: \mathscr{J} \to K$, že je $u^{(n-1)} \in \mathrm{AC}_{\mathrm{lok}}(\mathscr{J}, K)$ a rovnice (4.8.1) je splněna skoro všude. Přitom se přenášejí úvahy a výsledky odst. 4.8 i dalších odstavců kap. 4 s odpovídajícími změnami. Také úvahy a výsledky kap. 6 až 9 se přenášejí s odpovídajícími změnami; to však nebudeme rozebírat.

18.4. Obraťme se k teorii nelineárních diferenciálních rovnic; přitom budeme pracovat s absolutně spojitými řešeními. Podrobně vyložíme ty partie, kde je nutno postupovat jiným způsobem než v předcházejících kapitolách; tam, kde lze postupovat obdobně, jen stručně upozorníme na některé odchylky.

Nechť $Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ je definováno vzorcem (10.1.2). Budeme vyšetřovat rovnici

$$\dot{x} = f(t, x)\,. \tag{4.1}$$

18.4.1. Definice: Říkáme, že funkce $f: G \to K^n$ splňuje *Carathéodoryovy podmínky*, jestliže platí:

Množina $G \subset R \times K^n$ je otevřená. (4.2)

Funkce $f(., x)$ je měřitelná pro $x \in K^n$. (4.3)

Funkce $f(t, .)$ je spojitá pro $t \in R$. (4.4)

Ke každému $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ a funkce $\varrho: \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle \to R$ tak, že platí

(i) $Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2) \subset G$.

(ii) $\varrho \in L(\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle, R)$.

(iii) $\|f(t, x)\| \leqq \varrho(t)$ pro $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2)$. (4.5)

18.4.2. Věta (Carathéodoryova o lokální existenci řešení): *Nechť funkce $f: G \to K^n$ splňuje Carathéodoryovy podmínky, $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Potom existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že platí*

$$Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \subset G. \tag{4.6}$$

Nechť $\mathscr{J}$ je interval, $\mathscr{J} \subset \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$, a nechť $u: \mathscr{J} \to K^n$ je řešení rovnice (4.1) a nechť pro nějaké $\tau \in \mathscr{J}$ je $\|u(\tau) - \tilde{x}\| \leqq \delta_2$. Potom je

$$\|u(t) - \tilde{x}\| < 2\delta_2 \quad pro \quad t \in \mathscr{J}. \tag{4.7}$$

Ke každému bodu $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ existuje řešení $w_{(s,y)}: \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to K^n$ takové, že je splněna počáteční podmínka $w_{(s,y)}(s) = y$. (4.8)

Větu 18.4.2 dokážeme za důkazem Pomocné věty 18.4.5.

18.4.3. Poznámka: Věta 18.4.2 se liší od Věty 10.1.1 tím, že jde o absolutně spojitá řešení a že f splňuje pouze Carathéodoryovy podmínky. Je-li ovšem funkce $f: G \to K^n$ spojitá (kde G je otevřená podmnožina v $R \times K^n$), pak f splňuje Carathéodoryovy podmínky.

18.4.4. Poznámka: Věta 18.4.2 neobsahuje informaci o tom, jakým způsobem lze zvolit čísla δ_1, δ_2. Můžeme ji proto doplnit: Nechť je

$$\delta_1, \delta_2 > 0, \quad \varrho \in L(\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle, R),$$

nechť platí (4.6),

$$\|f(t, x)\| \leqq \varrho(t) \quad \text{pro} \quad (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2),$$

$$\int_{t_0 - \delta_1}^{t_0 + \delta_1} \varrho(t) \, dt < \delta_2.$$

Potom platí (4.7) a (4.8). To dokážeme současně s Větou 18.4.2.

18.4.5. Pomocná věta: *Nechť funkce f splňuje Carathéodoryovy podmínky, nechť je $(t_0, \tilde{x}) \in G$ a nechť Δ_1, Δ_2 mají stejný význam jako v (4.5). Nechť*

$$\mathscr{J} \subset \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle$$

je interval a nechť funkce v: $\mathscr{I} \to \bar{B}(\tilde{x}, 2\Delta_2)$ je spojitá. Potom složená funkce $f(t, v(t))$ je měřitelná.

Důkaz: Nechť α, β jsou krajní body intervalu $\mathscr{I}$. Pro $i = 0, 1, \ldots, k$, $k = 2, 3, \ldots$, položme $\zeta_{ik} = \alpha + i(\beta - \alpha)/k$, $v^{[k]}(t) = v(\zeta_{1k})$ pro $t \in I \cap \langle\zeta_{0k}, \zeta_{2k}\rangle$, $v^{[k]}(t) = v(\zeta_{ik})$ pro $t \in I \cap (\zeta_{ik}, \zeta_{i+1,k}\rangle$, $i = 2, 3, \ldots, k - 1$. Funkce $f(t, v^{[k]}(t))$ jsou měřitelné, je $v(t) = \lim_{k \to \infty} v^{[k]}(t)$, $f(t, v(t)) = \lim_{k \to \infty} f(t, v^{[k]}(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$, a tedy i funkce $f(t, v(t))$ je měřitelná.

Důkaz Věty 18.4.2: K bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ najdeme čísla $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ podle Definice 18.4.1. Položme $\delta_2 = \frac{1}{2}\Delta_2$ a číslo $\delta_1 > 0$ najdeme tak, aby bylo $\delta_1 \leqq \Delta_1$,

$$\int_{t_0 - \delta_1}^{t_0 + \delta_1} \varrho(\sigma) \, d\sigma < \delta_2 .$$

Zřejmě platí (4.6).

Dokážeme, že platí (4.7). V opačném případě by existovalo $T \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$ tak, že by bylo

$$\|u(T) - \tilde{x}\| = 2\delta_2 , \quad (t, u(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t \in \langle\tau, T) \text{ nebo pro } t \in (T, \tau\rangle.$$

Pak by ovšem platilo

$$\|u(T) - u(\tau)\| \leqq \left| \int_\tau^T \|f(t, u(t))\| \, dt \right| \leqq \left| \int_\tau^T \varrho(t) \, dt \right| < \delta_2 ,$$

tedy

$$\|u(T) - \tilde{x}\| \leqq \|u(T) - u(\tau)\| + \|u(\tau) - \tilde{x}\| < 2\delta_2$$

a to není možné. (4.7) platí.

Dokážeme, že platí (4.8). Budeme postupovat opět obdobně jako v důkazu tvrzení (10.1.5), jen místo Eulerových lomených čar užijeme jiných přibližných řešení, při nichž přihlížíme k chování funkce f na větších množinách než konečných. Nechť je $s < t_0 + \delta_1$; sestrojíme řešení z: $\langle s, t_0 + \delta_1\rangle \to K^n$ rovnice (4.1), $z(s) = y$. Nechť k je přirozené číslo, $k > 1$. Položme $s_j = s + j(t_0 + \delta_1 - s) k^{-1}$, $j = 0, 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} &z^{[k]}(t) = y , \quad s \leqq t \leqq s_1 , \\ &z^{[k]}(t) = y + \int_{s_1}^t f(\tau, z^{[k]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s] k^{-1})) \, d\tau \\ &\text{pro} \quad s_1 < t \leqq t_0 + \delta_1 . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ukážeme, že rovnice (4.9) určují jedinou funkci $z^{[k]}$: $\langle s, t_0 + \delta_1\rangle \to K^n$ a že je

$$(t, z^{[k]}(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, t_0 + \delta_1\rangle . \tag{4.10}$$

Je zřejmé, že $z^{[k]}$ je definována pro $t \in \langle s, s_1 \rangle$ a že (4.10) platí na intervalu $\langle s_0, s_1 \rangle$. Předpokládejme, že již víme, že funkce $z^{[k]}$ je definována pro $t \in \langle s, s_j \rangle$, kde j je některé z čísel $1, 2, \ldots, k - 1$ a že (4.10) platí na intervalu $\langle s_0, s_j \rangle$. Je tedy

$$(t, z^{[k]}(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t \in \langle s_0, s_j \rangle .$$

Proto z druhé rovnice (4.9) je určeno $z^{[k]}(t)$ pro $t \in (s_j, s_{j+1} \rangle$ [neboť složená funkce $f(\tau, z^{[k]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s]\, k^{-1}))$ je na intervalu $\langle s_j, s_{j+1} \rangle$ měřitelná podle Pomocné věty 18.4.4, je $\|f(\tau, z^{[k]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s]\, k^{-1}))\| \leqq \varrho(\tau)$] a je

$$\|z^{[k]}(t) - y\| \leqq \int_{s_1}^{t} \varrho(\tau)\, d\tau \leqq \int_{s}^{t} \varrho(\tau)\, d\tau \quad \text{pro} \quad t \in (s_j, s_{j+1} \rangle .$$

Je tedy funkce $z^{[k]}$ definována pro $t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle$ a (4.10) platí pro $t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle$. Položme

$$P(t) = \int_{s}^{t} \varrho(\tau)\, d\tau \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle . \tag{4.11}$$

Z (4.9) a (4.10) plyne, že je

$$\|z^{[k]}(t_2) - z^{[k]}(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|f(t, z^{[k]}(t - [t_0 + \delta_1 - s]\, k^{-1}))\|\, dt \leqq$$

$$\leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho(t)\, dt = P(t_2) - P(t_1)$$

$$\text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle , \quad t_1 < t_2 .$$

Protože funkce P je spojitá, jsou funkce $z^{[k]}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, stejně spojité na intervalu $\langle s, t_0 + \delta \rangle$ a zřejmě jsou i stejně omezené. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty (viz D10.1.2) lze vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnost $z^{[k_i]}$ na intervalu $\langle s, t_0 + \delta_1 \rangle$; existuje tedy funkce $z: \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle \to K^n$ a je $z(t) = \lim_{i \to \infty} z^{[k_i]}(t)$ pro $t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle$. Vzhledem k stejné spojitosti funkcí $z^{[k]}$ platí i

$$z(t) = \lim_{i \to \infty} z^{[k_i]}(t - [t_0 + \delta - s]\, k_i^{-1}) .$$

Je ovšem

$$(t, z(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle$$

a podle (4.4) je

$$f(\tau, z(\tau)) = \lim_{i \to \infty} f(\tau, z^{[k_i]}(\tau - [t_0 + \delta - s]\, k_i^{-1})) \quad \text{pro} \quad \tau \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle .$$

Protože je

$$\|f(\tau, z^{[k_i]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s]\, k_i^{-1}))\| \leqq \varrho(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle ,$$

podle Věty 18.1.17 platí

$$\int_s^t f(\tau, z(\tau))\,d\tau = \lim_{i\to\infty} \int_s^t f(\tau, z^{[k_i]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s]\,k_i^{-1}))\,d\tau\,.$$

Pro $k = k_i$ je ovšem $s_1 = s + (t_0 + \delta_1 - s)\,k_i^{-1}$; abychom zdůraznili závislost na k_i, budeme psát $s_1(k_i)$ místo s_1. Je

$$\left\| \int_s^{s_1(k_i)} f(\tau, z^{[k_i]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s]\,k_i^{-1}))\,d\tau \right\| \leqq$$

$$\leqq P(s + [t_0 + \delta_1 - s]\,k_i^{-1}) - P(s)$$

[viz (4.11)]. Tedy platí

$$\int_s^t f(\tau, z(\tau))\,d\tau = \lim_{i\to\infty} \int_{s_1(k_i)}^t f(\tau, z^{[k_i]}(\tau - [t_0 + \delta_1 - s]\,k_i^{-1}))\,d\tau$$

a z druhé rovnice (4.9) plyne pro $k = k_i$ limitním přechodem pro $i \to \infty$, že platí

$$z(t) = y + \int_s^t f(\tau, z(\tau))\,d\tau \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle\,.$$

Je-li $s > t_0 - \delta_1$, obdobným způsobem se zjistí, že existuje funkce v: $\langle t_0 - \delta_1, s \rangle \to \to K^n$ taková, že je

$$v(t) = y + \int_s^t f(\tau, v(\tau))\,d\tau \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, s \rangle\,.$$

Položíme-li $w(t) = v(t)$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, s \rangle$, $w(t) = z(t)$ pro $t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle$, je

$$w(t) = y + \int_s^t f(\tau, w(\tau))\,d\tau \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,.$$

Funkce w je řešením rovnice (4.1) podle Věty 18.2.7. (4.8) platí a Věta 18.4.2 je dokázána.

18.4.6. Poznámka: Nechť funkce u: $\mathscr{J} \to K^n$ je absolutně spojité řešení rovnice (2.1), $\mathscr{A} \subset R$, $m(\mathscr{A}) = 0$. Funkce u zůstane řešením, i když funkci f změníme v takových bodech $(t, x) \in G$, že je $t \in \mathscr{A}$.

Definice absolutně spojitého řešení má smysl i v tom případě, že funkce f není definována ve všech bodech $(t, x) \in G$, ale že platí:

Existuje množina $\mathscr{A}_1 \subset R$ taková, že je $m(\mathscr{A}_1) = 0$ a že $f(t, x)$ je definováno a je $f(t, x) \in K^n$, jakmile je $(t, x) \in G$, $t \in R - \mathscr{A}_1$. (4.12)

Pro funkce f splňující (4.12) se Carathéodoryovy podmínky modifikují v tom smyslu, že (4.4) má platit pro skoro všechna t a že nerovnost v (4.5) má platit pro skoro všechna t a všechna x, $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2)$.

Splňuje-li funkce f podmínku (4.12) a „modifikované Carathéodoryovy podmínky", pak, jak lze snadno ukázat, existuje množina $\mathscr{A}_2 \subset R$, $m(\mathscr{A}_2) = 0$ taková, že platí: Položíme-li $\tilde{f}(t, x) = f(t, x)$ pro $(t, x) \in G$, $t \in R - \mathscr{A}_2$, $\tilde{f}(t, x) = 0$ pro $(t, x) \in G$, $t \in \mathscr{A}_2$, pak funkce $\tilde{f}$ splňuje Carathéodoryovy podmínky [ve smyslu Definice 18.4.1]. Přitom každé řešení rovnice (2.1) je řešením rovnice $\dot{x} = \tilde{f}(t, x)$ a naopak.

Podmínka (4.12) je tedy pouze formálně obecnější než podmínka $f: G \to K^n$, a proto budeme pracovat s podmínkou $f: G \to K^n$.

18.4.7. Poznámka: Množinu $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ pro absolutně spojitá řešení zavedeme stejně jako byla zavedena v odst. 10.2 pro spojitá řešení. Také řešení „rovnice (1.1) má vlastnost Kneserovu [resp. Fukuharovu]" budou mít obdobný význam jako v odst. 10.2. Pro funkce f splňující Carathéodoryovy podmínky platí věty obdobné Větám 10.2.1 a 10.2.4 [Věta Kneserova a Věta Fukuharova]. Tyto věty jsou speciálními případy Vět 18.5.20 a 18.5.21.

18.4.8. Poznámka: Pokud jde o jednoznačnost, lze pro absolutně spojitá řešení převzít beze změny Definice 11.1.1 a 11.1.2 a Větu 11.1.3. Také důkaz Věty 11.1.3 zůstává v platnosti. Místo Věty 11.1.5 platí:

18.4.9. Věta: *Nechť ke každému bodu $(t_0, x^{[0]}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ a funkce $\lambda \in L(\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle, R)$ tak, že platí $Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2) \subset G$ a*

$$\|f(t, x^{[1]}) - f(t, x^{[2]})\| \leqq \lambda(t) \| x^{[1]} - x^{[2]} \| ,$$

jakmile $(t, x^{[i]}) \in Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2)$, $i = 1, 2$. Potom rovnice (1.1) je jednoznačná.

V podstatě jde tedy o to, že konstantu L z (1.11.3) můžeme nahradit integrovatelnou funkcí λ. Tato věta se opět dokáže pomocí Gronwallovy pomocné věty [viz Poznámku 18.3.2].

18.4.10. Poznámka: Také úvahy z odst. 11.2 a 11.3 zůstanou v platnosti, je však třeba provést jisté změny.

Ve Větě 11.2.1 nepředpokládáme, že funkce χ, μ jsou spojité, ale že χ splňuje Carathéodoryovy podmínky a že funkce μ je integrovatelná a tvrzení (i), (ii) změníme takto:

(i′) Je-li $\chi(t, .)$ neklesající pro každé t a je-li $\eta(s) < \xi(s)$ v nějakém bodě $s \in \mathscr{J}$, potom je $\eta(t) < \xi(t)$ pro $t > s$, $t \in \mathscr{J}$.

(ii′) Je-li $\chi(t, .)$ nerostoucí pro každé t a je-li $\eta(s) > \xi(s)$ v nějakém bodě $s \in \mathscr{J}$, potom je $\eta(t) > \xi(t)$ pro $t < s$, $t \in \mathscr{J}$.

S nevelkými změnami lze v důkazu postupovat obdobně jako v odst. 11.2.

Také Pomocná věta 11.2.4 platí, předpokládáme-li o funkci f pouze, že splňuje Carathéodoryovy podmínky. Také Věta 11.2.6 platí, předpokládáme-li o funkcích f a χ pouze, že splňují Carathéodoryovy podmínky a připojíme-li podmínku, že pro každé t funkce $\chi(t, .)$ je neklesající pro $\xi > 0$ a nerostoucí pro $\xi < 0$. Ve Větě 11.2.7

můžeme nerovnost pro f nahradit nerovností

$$\|f(t, x^{[2]}) - f(t, x^{[1]})\| \leqq \varrho(t)\, \psi(\|x^{[2]} - x^{[1]}\|)$$

pro

$$(t, x^{[1]}), (t, x^{[2]}) \in Q(t_0, x^{[0]}, \nu_1, \nu_2)\,;$$

přitom funkce ϱ: $\langle t_0 - \nu_1, t_0 + \nu_1 \rangle \to R$ je integrovatelná a funkce ψ je neklesající.

Také Věta 11.3.1 zůstane v platnosti, předpokládáme-li o funkcích f, χ pouze, že splňují Carathéodoryovy podmínky a připojíme-li podmínku, že pro každé t funkce $\chi(t, .)$ je neklesající pro $\xi > 0$.

18.4.11. Poznámka: Kap. 12 zůstává v platnosti pro absolutně spojitá řešení a pro rovnice splňující Carathéodoryovy podmínky téměř beze změn. Upozorníme jen na to, že ve Větě 12.1.8 je třeba připojit podmínku, že pro každé t funkce $\chi(t, .)$ je neklesající pro $\xi > 0$ a nerostoucí pro $\xi < 0$ a že v důkazu Věty 12.2.4 je třeba užít Věty 18.1.17.

18.4.12. Poznámka: Kap. 13 se zachovává pro rovnice splňující Carathéodoryovy podmínky v podstatných rysech. Přirozeně funkce $\Phi(., t_0, \tilde{x})$ nemusí mít derivaci všude, ale jen skoro všude [pro jednoduchost se nebudeme zabývat derivací funkce $\Phi(t, ., \tilde{x})$; také o ní by se dalo – za příslušných předpokladů – dokázat, že existuje skoro všude].

Místo Věty 13.1.1 vyslovíme tvrzení:

Nechť funkce f: $G \to K^n$ splňuje Carathéodoryovy podmínky. Nechť $p^{[1]}, p^{[2]}, \ldots, p^{[n]}$ je báze v K^n a nechť pro $p = p^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, existuje derivace $\mathrm{D}_p^{(2)} f$: $G \to K^n$ ve směru p a splňuje Carathéodoryovy podmínky. Potom jsou definovány funkce Φ, $\mathrm{D}_w^{(3)} \Phi$ pro všechna $w \in K^n$, jsou spojité, vzhledem k proměnné t jsou absolutně spojité a je

$$\mathrm{D}_w^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(., t_0, \tilde{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{D}_w^{(3)} \Phi(., t_0, \tilde{x})$$

skoro všude. (4.13)

Pomocnou větu 13.1.2 dokážeme pomocí Věty 18.4.9. Větu 13.1.3 upravíme takto:

Nechť jsou splněny předpoklady vyslovené v (4.13). *Potom existuje derivace $\mathrm{D}_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x})$ a je*

$$\mathrm{D}_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = A(t, t_0, \tilde{x}, w)\,. \tag{4.14}$$

Důkaz je obdobný důkazu Věty 13.1.3. Při odvození odhadu (13.1.24) ze vzorce (13.1.23) je nutné jednak využít toho, že pro kompaktní množinu V existuje [na vhodném intervalu] integrovatelná funkce $\varkappa_1$ taková, že je

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leqq \varkappa_1(t)\, \|u - v\| \quad \text{pro} \quad (t, u), (t, v) \in V\,,$$

jednak Gronwallovy nerovnosti [viz Poznámku 18.3.2]. Také funkce Γ není spojitá, má však tyto vlastnosti:

$\Gamma(\sigma, \lambda) \to 0$ pro $\lambda \to 0$ při pevném σ [to plyne ze spojitosti funkce $f(\sigma, .)$]. (4.15)

Funkce $\Gamma(., \lambda)$ je měřitelná pro $|\lambda| \leqq \delta$ [položíme-li

$$\Gamma_k(\sigma, \lambda) = k^{-1} \sum_{i=0}^{k} [D^{(2)} f(\sigma, [1 - i/k]\, \tilde{\Phi}(\sigma, 0) + [i/k]\, \tilde{\Phi}(\sigma, \lambda)) -$$

$$- D^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))],$$

pak částečné součty $\Gamma_k(\sigma, \lambda)$ jsou měřitelné vzhledem k σ při pevném λ a je $\Gamma_k(\sigma, \lambda) \to \Gamma(\sigma, \lambda)$ pro $k \to \infty$]. (4.16)

Existuje taková funkce $\zeta \in L(\langle t_0, t \rangle \to R)$, že je
$\|\Gamma(\sigma, \lambda)\| \leqq \zeta(\sigma)$ pro $\sigma \in \langle t_0, t \rangle$, $|\lambda| \leqq \delta$
[to lze odvodit z podmínky (4.5) pro $D^{(2)} f_p$]. (4.17)

Podle Věty 18.1.17 [viz též (13.1.24)] je

$$\int_{t_0}^{\tau} \Gamma(\sigma, \lambda)\, [\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)]\, \lambda^{-1}\, d\sigma \to 0 \quad \text{pro} \quad \lambda \to 0$$

stejnoměrně vzhledem k $\tau \in \langle t_0, t \rangle$ a tak (13.1.18) plyne z (13.1.27) stejně jako v odst. 13.

Místo Věty 13.1.4 platí

18.4.13. Věta: *Je-li splněno* (4.13), *potom funkce* Φ *má diferenciál* $D^{(3)} \Phi$; *diferenciál* $D^{(3)} \Phi$ *závisí spojitě na* $(t, t_0, \tilde{x})$.

18.4.14. Poznámka: Kap. 14 se zachovává v obdobném rozsahu jako kap. 13. Ve Větě 14.1.1 podmínku (14.1.2) nahradíme touto podmínkou:

Množina $G \subset R \times K^n \times K^m$ je otevřená a funkce $f: G \to K^n$ splňuje Carathéodoryovy podmínky; při formulaci Carathéodoryových podmínek považujeme dvojici (x, q) za jedinou prostorovou proměnnou. (4.18)

Pomocná věta 14.1.2 se dokáže stejně jako v kap. 14. Také Věta 14.1.3 zůstane v platnosti. Přitom místo spojitosti funkcí f, f_k, $k = 1, 2, \ldots$, předpokládáme, že tyto funkce splňují Carathéodoryovy podmínky stejnoměrně vzhledem ke k, to znamená, že funkce f i f_k, $k = 1, 2, \ldots$, splňují (4.3), (4.4) a že ke každému $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla δ_1, δ_2 a funkce $\varrho \in L(\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle, R)$ tak, že platí:

$$\|f_k(t, x)\| \leqq \varrho(t) \quad \text{pro} \quad (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.19}$$

Také předpoklady o konvergenci $f_k \to f$ zeslabíme a předpokládáme pouze, že platí:

Je-li $t \in R$, $Z \subset K^n$ kompaktní, $(t, z) \in G$ pro $z \in Z$, pak $f_k(t, .) \to f(t, .)$ stejnoměrně na množině Z.

Ve Větě 14.2.1 provedeme obdobné změny, jako jsme provedli ve Větě 13.1.1 [viz Poznámku 18.4.12]. Dostáváme tak tvrzení:

Nechť pro funkci f platí (4.2)–(4.5). Nechť $p^{[1]}, p^{[2]}, \ldots, p^{[n]}$ je báze v K^n, nechť $q^{[1]}, q^{[2]}, \ldots, q^{[m]}$ je báze v K^m a nechť (4.3)–(4.5) platí, píšeme-li $D_p^{(2)} f$, $p = p^{[1]}, \ldots, p^{[n]}$ nebo $D_q^{(3)} f$, $q = q^{[1]}, \ldots, q^{[m]}$ místo f. Potom jsou definovány funkce Φ, $D_p^{(3)} \Phi$, $D_q^{(4)} \Phi$ pro všechna $p \in K^n$, $q \in K^m$, funkce $\Phi(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q})$, $D_p^{(3)} \Phi(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q})$, $D_q^{(4)}(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q})$ jsou absolutně spojité a je

$$D_p^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial t} D_p^{(3)} \Phi(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q}),$$

$$D_q^{(4)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial t} D_q^{(4)} \Phi(., t_0, \tilde{x}, \tilde{q})$$

skoro všude (4.20)

18.4.15. Poznámka: Obdobné výsledky, zejména věty o existenci a jednoznačnosti, lze dokázat i pro jiné třídy rovnic než jsou rovnice (4.1), kde funkce f splňuje Carathéodoryovy podmínky. Viz např. [45]–[48], [79], [34].

Na závěr tohoto odstavce uvedeme jednu zajímavou vlastnost, kterou mají funkce f takové, že platí (4.2), (4.3) a (4.4). (Viz [68], [27].) Protože v odst. 18.6 budeme potřebovat tutéž vlastnost pro reálné funkce, budeme ji formulovat ve větě o funkcích s hodnotami v R^k $(k = 1, 2, \ldots)$.

18.4.16. Věta: *Nechť je $\Delta_1, \Delta_2 > 0$, $t_0 \in R$, $\tilde{x} \in R^n$, k přirozené číslo, h: $Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2) \to R^k$ a nechť platí:*

Funkce $h(., x)$ je měřitelná pro $x \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2, R^n)$. (4.21)

Funkce $h(t, .)$ je spojitá pro $t \in \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle$. (4.22)

Potom ke každému $\zeta > 0$ existuje měřitelná množina $A_\zeta \subset \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle$ tak, že platí:

$$m(\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle - A_\zeta) < \zeta . \quad (4.23)$$

Funkce $h|_{A_\zeta \times B(\tilde{x}, \Delta_2)}$ je spojitá. (4.24)

Důkaz této věty najde čtenář v Dodatku 18.2.

18.4.17. Poznámka: Funkce h: $Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2) \to R^n$, která splňuje tvrzení Věty 18.4.16, zřejmě splňuje (4.21) [a také platí, že funkce $h(t, .)$ je spojitá pro skoro všechna $t \in \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle$]. Věta 18.4.16 připomíná větu Luzinovu (viz [28], kap. II, § 4).

18.4.18. Poznámka: Nechť je f: $G \to R^n$ a nechť platí (4.2), (4.3) a (4.4). Užitím Věty

18.4.16 lze dokázat, že ke každému číslu $\eta > 0$ existuje měřitelná množina $C_\eta \subset R$ taková, že je $m(R - C_\eta) < \eta$ a že funkce $f|_{G \cap (C_\eta \times R^n)}$ je spojitá.

18.5. Přirozeným zobecněním diferenciálních rovnic jsou diferenciální relace. Nechť $\mathfrak{S}_n$ je množina neprázdných podmnožin v R^n, $G \subset R \times R^n$, F: $G \to \mathfrak{S}_n$; je tedy $\emptyset \neq F(t, x) \subset R^n$ pro $(t, x) \in G$. *Diferenciální relace* se nazývá vztah

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) . \tag{5.1}$$

Relace (5.1) se často píše ve tvaru $\dot{x} \in F(t, x)$. Abychom mohli s diferenciálními relacemi pracovat, musíme definovat, co je řešení relace (5.1).

18.5.1. Definice: Nechť $\mathscr{I} \subset R$ je interval. Funkce $u: \mathscr{I} \to R^n$ se nazývá *řešení diferenciální relace* (5.1), je-li $u \in AC_{lok}(\mathscr{I}, R^n)$ a platí-li (5.1) skoro všude v $\mathscr{I}$, dosadíme-li u za x.

V případě, že pro každé $(\bar{t}, \tilde{x}) \in G$ množina $F(\bar{t}, \tilde{x})$ je jednobodová, $F(\bar{t}, \tilde{x}) = \{f(\bar{t}, \tilde{x})\}$, diferenciální relace (5.1) přechází v diferenciální rovnici (2.1) a u je řešením diferenciální relace (5.1) právě tehdy, je-li řešením diferenciální rovnice (2.1).

Rovnice v kontingencích a rovnice v paratingencích, které vyšetřovali francouzský matematik Marchaud a polský matematik Zaremba ve třicátých letech (viz [53], [81]), jsou velmi blízké diferenciálním relacím. Mohutný impuls k rozvoji teorie diferenciálních relací dala teorie regulace. V teorii regulace se řeší problémy tohoto typu: Je dána funkce f: $R \times R^n \times R^m \to R^n$ a pro $t \in R$ je dána množina $U(t) \subset R^m$; hledají se funkce $x \in \mathrm{AC}_{lok}(\mathscr{I}, R^n)$ a funkce u: $\mathscr{I} \to R^n$ tak, aby platilo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) , \quad u(t) \in U(t) \tag{5.2}$$

skoro všude v $\mathscr{I}$ a aby byly splněny některé další podmínky. [Interval $\mathscr{I}$ je někdy předem dán, jindy se též hledá; např. jsou dány body $y^{[1]}, y^{[2]} \in R^n$, čísla $t_1 < t_2$ a mají být splněny podmínky $\mathscr{I} = \langle t_1, t_2 \rangle$, $x(t_1) = y^{[1]}$, $x(t_2) = y^{[2]}$.] Základní poučení o teorii regulace lze najít v [78], viz též [3], [44], [49], [61], [41].

Položíme $F(t, x) = \{f(t, x, v) | \, v \in U(t)\}$; (5.2) zřejmě platí právě tehdy, jestliže platí (5.1). Ovšem v teorii regulace se často požaduje, aby funkce u patřila do nějaké třídy funkcí [např. aby u byla po částech spojitá nebo měřitelná a omezená] a takovou podmínku nelze zachytit relací (5.1). Mezi diferenciální relace patří též diferenciální nerovnosti a jejich soustavy. Např. nerovnost $|\dot{x}(t)| \leqq 1$ můžeme zapsat jako diferenciální relaci (5.1), kde $F(\bar{t}, \tilde{x}) = \langle -1, 1 \rangle$ pro $\bar{t}, \tilde{x} \in R$. Řešení této nerovnosti, resp. relace jsou právě všechny takové funkce $u: \mathscr{I} \to R$, kde $\mathscr{I} \subset R$ je interval, že platí $|u(t) - u(s)| \leqq |t - s|$ pro $t, s \in \mathscr{I}$; u je maximální řešení, je-li $\mathscr{I} = R$. Souvislost diferenciálních relací s diferenciálními rovnicemi, jejichž pravá strana $f(t, x)$ může být nespojitá v proměnné x, bude vyložena v následujícím odstavci.

Pojmy „prodloužení daného řešení“ a maximální řešení se zavedou zcela stejným způsobem jako v odst. 1.8. Také Věta 3.4.1 (o existenci maximálních řešení) platí pro diferenciální relace (5.1) a její důkaz se přenáší beze změny.

Naším nejbližším cílem je dokázat pro diferenciální relace existenční větu, jejímž speciálním případem je Věta 18.4.2. Je-li $\emptyset \neq D \subset R^k$, $x \in R^k$, pak $d(x, D)$ je vzdálenost bodu x od množiny D, tj. $d(x, D) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in D\}$. Pro $\varepsilon > 0$, $D \subset K^k$ položme $\bar{\Omega}(D, \varepsilon) = \{x \in R^n \mid d(x, D) \leqq \varepsilon\}$. Množina $D \subset R^k$ je konvexní, platí-li $\alpha u + \beta v \in D$, jakmile je $u, v \in D$, $\alpha, \beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

18.5.2. Definice: Nechť je $H \subset R^k$, $\Gamma: H \to \mathfrak{S}_n$. *Funkce* Γ *se nazývá* *polospojitá shora v bodě* $y \in H$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je $\Gamma(z) \subset \bar{\Omega}(\Gamma(y), \varepsilon)$ pro $z \in B(y, \delta, R^k)$. *Funkce* Γ *se nazývá* *polospojitá shora*, je-li polospojitá shora v každém bodě $y \in H$.

Všimněme si, že platí: Je-li množina $\Gamma(x)$ jednobodová pro $x \in H$, $\Gamma(x) = \{g(x)\}$, pak funkce Γ je polospojitá shora v bodě y právě tehdy, je-li funkce g spojitá v bodě y, a funkce Γ je polospojitá shora právě tehdy, je-li funkce g spojitá. [Polospojitost množinové funkce Γ je odlišný pojem od polospojitosti funkcí s hodnotami v R (viz např. Poznámku 12.2.7), oba pojmy spolu ovšem souvisí.]

Abychom mohli vyslovit větu o existenci řešení diferenciální relace (5.1), musíme zavést vhodné předpoklady o funkci F. Nechť $\mathscr{K}_k$ je množina neprázdných kompaktních konvexních podmnožin v R^k.

18.5.3. Definice: Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená. Symbolem USC(G) budeme značit množinu takových funkcí $F: G \to \mathscr{K}_n$, že platí:

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje množina $A_\varepsilon \subset R$ tak, že

(i) $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$,

(ii) $F|_{G \cap (A_\varepsilon \times R^n)}$ je polospojitá shora. (5.3)

Funkce $F(t, .)$ je polospojitá shora pro každé $t \in R$. (5.4)

18.5.4. Příklad: Položme $\varphi(t, x) = \operatorname{sgn}(x \sin t)$ pro $t, x \in R$, $F(t, x) = \{\varphi(t, x)\}$ pro $t \in R$, $x \neq 0$, $F(t, x) = \langle -1, 1\rangle$ pro $t \in R$, $x = 0$. Pro každé celé k platí: Funkce F je polospojitá shora v každém bodě (τ, y), kde $k\pi < \tau < (k + 1)\pi$, $y \in R$. Proto platí $F \in$ USC$(R \times R)$ [neboť můžeme položit $A_\varepsilon = \{k\pi \mid k = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ nezávisle na ε].

18.5.5. Věta (o lokální existenci řešení): *Nechť platí:*

$F \in$ USC(G). (5.5)

Ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují taková čísla* $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ *a funkce*

$\varrho \in L(\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1\rangle, R)$,

že je $F(t, x) \subset B(0, \varrho(t), R^n)$ *pro* $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2)$. (5.6)

Potom ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují taková čísla* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *že platí:*

$Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \subset G$. (5.7)

Je-li $u: \mathscr{I} \to K^n$ *řešení relace* (5.1) *a existuje-li*

$\tau \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ tak, že je $(\tau, u(\tau)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$,
pak je $(t, u(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2)$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \cap \mathscr{I}$. (5.8)

Ke každému bodu $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ existuje řešení
$w_{(s,y)}: \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to R^n$
relace (5.1) tak, že je $w_{(s,y)}(s) = y$. (5.9)

Důkaz Věty 18.5.5 závisí na několika pomocných větách a je stručně proveden v Dodatku 18.3.

18.5.6. Poznámka: Obdobně jako Větu 18.4.2 můžeme i Větu 18.5.5 doplnit informací o tom, jak lze volit čísla δ_1, δ_2: Nechť je

$$\delta_1, \delta_2 > 0\,, \quad \varrho \in L(\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle, R)\,,$$

nechť platí (5.7),

$$F(t, x) \subset B(0, \varrho(t), R^n) \quad \text{pro} \quad (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2)\,,$$

$$\int_{t_0 - \delta_1}^{t_0 + \delta_1} \varrho(t)\, dt < \delta_2\,.$$

Potom platí (5.8) a (5.9). To bude dokázáno v důkazu Věty 18.5.5.

18.5.7. Poznámka: Nechť funkce $u: \mathscr{I} \to R^n$ je řešení diferenciální relace (5.1), $A \subset R$, $m(A) = 0$. Funkce u zůstane řešením, i když funkci F změníme v takových bodech $(t, x) \in G$, že je $t \in A$. To je zcela obdobné jako v Poznámce 18.4.6. Obdobně i definice řešení má smysl i v tom případě, že funkce F není definována ve všech bodech $(t, x) \in G$, ale že platí:

Existuje množina $C_1 \subset R$ taková, že je $m(C_1) = 0$ a že $F(t, x)$ je definováno a je $F(t, x) \in \mathscr{K}_n$, jakmile je $(t, x) \in G$ pro $t \in R - C_1$. (5.10)

Obdobně jako v Poznámce 18.4.6 lze modifikovat větu o lokální existenci řešení pro funkce F, které splňují (5.10) tímto způsobem:

Splňuje-li funkce F podmínky (5.10), (5.3) a (5.6) [v (5.3) můžeme předpokládat, že je $A_\varepsilon \cap C_1 = \emptyset$ pro $\varepsilon > 0$ a podmínku (5.6) pozměníme tím způsobem, že $F(t, x) \subset B(0, \varrho(t), R^n)$ má platit pro $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2)$ pro $t \notin C_1$], potom platí tvrzení Věty 18.5.5. (5.11)

Můžeme totiž položit $\tilde{F}(t, x) = F(t, x)$ pro $(t, x) \in G$, $t \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2^{-j}}$, $\tilde{F}(t, x) = \{0\}$ pro $(t, x) \in G$, $t \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2^{-j}}$. Protože je $m(R - \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2^{-j}}) = 0$, každé řešení diferenciální relace $\dot{x} \in \tilde{F}(t, x)$ je současně řešením diferenciální relace $\dot{x} \in F(t, x)$ a naopak. Funkce $\tilde{F}$ splňuje předpoklady Věty 18.5.5, a proto (5.11) plyne z Věty 18.5.5. Podmínka (5.10) je pouze formálně obecnější než podmínka $F: G \to \mathscr{K}_n$, a proto budeme pracovat s podmínkou $F: G \to \mathscr{K}_n$.

18.5.8. Poznámka: Nechť je $H \subset R^n$, $V\colon H \to \mathcal{K}_n$. *Diferenciální relace*

$$\dot{x}(t) \in V(x(t)) \tag{5.12}$$

se nazývá *autonomní*, relace (5.12) je zřejmě speciálním případem relace (5.1) [obdobně jako v případě diferenciálních rovnic položíme $G = R \times H$, $F(t, x) = V(x)$]. Pro autonomní diferenciální relaci (5.12) platí věta o posunutí řešení v čase [obdobná Větě 12.3.1]. Podmínky (5.3), (5.4) pro relaci (5.12) se redukují na tuto podmínku:

Množina $H \subset R^n$ je otevřená a funkce $V\colon H \to \mathcal{K}_n$ je polospojitá shora. (5.13)

Platí-li tedy (5.13), pak pro diferenciální relaci (5.12) můžeme užít Věty 18.5.5.

Spojitou závislost řešení na počáteční podmínce pro diferenciální relace je účelné formulovat tak, abychom se vyhnuli pojmu jednoznačnost řešení.

18.5.9. Věta (o spojité závislosti na počáteční podmínce): *Nechť funkce $F\colon G \to \mathcal{K}_n$ splňuje* (5.3) *a* (5.4). *Nechť $\mathcal{J} \subset R$ je interval, $u\colon \mathcal{J} \to R^n$, $u^{[k]}\colon \mathcal{J} \to R^n$, $k = 1, 2, \ldots$, $(t, u(t)) \in G$, $\lim\limits_{k\to\infty} u^{[k]}(t) = u(t)$ pro $t \in \mathcal{J}$. Nechť $u^{[k]}$ je řešení diferenciální relace* (5.1) *pro $k = 1, 2, 3, \ldots$. Potom také u je řešení diferenciální relace* (5.1).

Důkaz Věty 18.5.9 je naznačen v Dodatku 18.4. Jiné tvrzení o spojité závislosti na počáteční podmínce je obsaženo v následující poznámce.

18.5.10. Poznámka: Nechť $F\colon G \to \mathcal{K}_n$ splňuje (5.5) a (5.6), $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Nechť čísla δ_1, δ_2 jsou určena podle Poznámky 18.5.6 a nechť je $(\tau, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$, $y^{[k]} \in R^n$, $\|y^{[k]} - \tilde{x}\| \leqq \delta_2$ *pro* $k = 1, 2, \ldots$, $y = \lim\limits_{k\to\infty} y^{[k]}$. Položme $u^{[k]} = w(\tau, y^{[k]})$ [viz (5.9)]. Je $F(s, u^{[k]}(s)) \subset \bar{B}(0, \varrho(s), R^n)$ pro $s \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$. Proto je

$$\|u^{[k]}(\tau) - u^{[k]}(\sigma)\| \leqq \int_\sigma^\tau \varrho(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad t_0 - \delta_1 \leqq \sigma < \tau \leqq t_0 + \delta_1\,,$$
$$k = 1, 2, \ldots,$$

a tedy podle Arzelàovy-Ascoliovy věty lze vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnost $u^{[k_j]}$. Položme $u(t) = \lim\limits_{j\to\infty} u^{[k_j]}(t)$. Podle Věty 18.5.9 u je řešení relace (5.1).

Současnou závislost řešení na počáteční podmínce a parametru zachycuje

18.5.11. Věta: *Nechť funkce F_k, $F\colon G \to \mathcal{K}_n$ splňují* (5.5). *Nechť podmínka* (5.6) *je splněna stejnoměrně, tj. nechť ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ a funkce $\varrho \in L(\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle, R)$ tak, že je $F(t, x)$, $F_k(t, x) \subset B(0, \varrho(t), R^n)$ pro $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_1, \Delta_2)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť posloupnost F_k konverguje k F v tom smyslu, že platí: Ke každým $\varepsilon > 0$, $t \in R$ a kompaktní množině $Z \subset R^n$ takové, že je $(t, z) \in G$ pro $z \in Z$, existuje l tak, že je $F_k(t, z) \subset \bar{\Omega}(F(t, z), \varepsilon)$ pro $z \in Z$, $k > l$. Nechť $\mathcal{J} \subset R$ je interval, $u, u^{[k]}\colon \mathcal{J} \to K^n$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} u^{[k]}(t) =$*

$= u(t)$, $(t, u(t)) \in G$ *pro* $t \in \mathscr{I}$. *Nechť* $u^{[k]}$ *je řešení diferenciální relace* $\dot{x}(t) \in F_k(t, x(t))$ *pro* $k = 1, 2, 3, \ldots$. *Potom* u *je řešení diferenciální relace* (5.1).

Větu 18.5.11 lze dokázat obdobným postupem jako Větu 18.5.9.

18.5.12. Poznámka: Ukážeme, že Věta 18.4.2 plyne z Věty 18.5.5. Nechť funkce $f: G \to R^n$ splňuje Carathéodoryovy podmínky. Položme $F(t, x) = \{f(t, x)\}$ pro $(t, x) \in G$. Je $F: G \to \mathscr{K}_n$ a zřejmě platí (5.4) a (5.6). Podle Poznámky 18.4.18 platí také (5.3). Podle poznámky za Definicí 18.5.2 platí tvrzení Věty 18.4.2.

18.5.13. Poznámka: V literatuře se ve větě o lokální existenci řešení (Věta 18.5.5) místo podmínky (5.5) užívá jiných podmínek, které kladou menší omezení na funkci F; věty, které tak vzniknou, jsou však pouze zdánlivě obecnější než Věta 18.5.5. Abychom této poznámce mohli dát přesný význam, zavedeme některé definice:

18.5.14. Definice: Nechť množina $A \subset R$ je měřitelná, $H: A \to \mathfrak{S}_n$. *Funkce* H se nazývá *měřitelná,* jestliže pro každou uzavřenou množinu $E \subset R^n$ množina $\{t \in A \mid H(t) \cap E \neq \emptyset\}$ je měřitelná.

18.5.15. Definice: Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená. Symbolem $\mathrm{M}(G)$ budeme značit množinu funkcí $F: G \to \mathscr{K}_n$ takových, že platí:

Funkce $F(., x)$ je měřitelná pro $x \in R^n$. (5.14)

Funkce $F(t, .)$ je polospojitá shora pro $t \in R^n$. (5.15)

18.5.16. Definice: Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená. Symbolem $\mathrm{Sel}(G)$ označíme množinu funkcí $F: G \to \mathscr{K}_n$ takových, že platí (5.15) a tato podmínka:

Je-li $\mathscr{I}$ interval, je-li funkce $u: \mathscr{I} \to R^n$ spojitá a je-li $(t, u(t)) \in G$ pro $t \in \mathscr{I}$, pak existuje měřitelná funkce $v: \mathscr{I} \to R^n$ taková, že je $v(t) \in F(t, u(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$ [pro každé t vybíráme hodnotu $v(t)$ tak, aby funkce v byla měřitelná; funkce v se nazývá selekce, odtud označení $\mathrm{Sel}(G)$]. (5.16)

Nyní již můžeme vyslovit věty, o nichž byla zmínka v Poznámce 18.5.13:

18.5.17. Věta: *Nechť je* $F \in \mathrm{M}(G)$ *a nechť platí* (5.6). *Potom ke každému bodu* $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují čísla* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tak, že platí* (5.7), (5.8) *a* (5.9).

Věta 18.5.17 plyne z Věty 2 dokázané v [59].

18.5.18. Věta: *Nechť je* $F \in \mathrm{Sel}(G)$ *a nechť platí* (5.6). *Potom ke každému bodu* $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují čísla* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tak, že platí* (5.7), (5.8) *a* (5.9).

Věta 18.5.18 plyne z výsledků dokázaných v [11].

Čísla δ_1, δ_2 ve Větách 18.5.17 a 18.5.18 můžeme volit stejně jako v Poznámce 18.5.6. Z Věty D18.3.12 plyne, že je $\mathrm{USC}(G) \subset \mathrm{M}(G)$. Proto Věta 18.5.5 je speciálním případem Věty 18.5.17. V [39] bylo dokázáno, že platí $\mathrm{M}(G) \subset \mathrm{Sel}(G)$; je tedy Věta 18.5.17 speciálním případem Věty 18.5.18. Dokonce je vždy $\mathrm{ASC}(G) \neq$

$\neq M(G) \neq \mathrm{Sel}(G)$. Přesto Věty 18.5.17 a 18.5.18 nepřinášejí mnoho nového ve srovnání s Větou 18.5.5; z Vět 0.1 a 3.1 dokázaných v [27] a z Poznámky 18.5.7 plyne, že platí

18.5.19. Věta: *Ke každé funkci $F \in \mathrm{Sel}(G)$ splňující (5.6) existuje funkce $\hat{F} \in \mathrm{USC}(G)$ tak, že platí*

$$\hat{F}(t, x) \subset F(t, x) \quad pro \quad (t\ x) \in G\,. \tag{5.17}$$

Každé řešení diferenciální relace $\dot{x} \in F(t, x)$ je současně řešením diferenciální relace $\dot{x} \in \hat{F}(t, x)$. (5.18)

Z (5.17) ovšem bezprostředně plyne, že $\hat{F}$ splňuje (5.6) a že každé řešení diferenciální relace $\dot{x} \in \hat{F}(t, x)$ je současně řešenım diferenciální relace $\dot{x} \in F(t, x)$. Při vyšetřování diferenciální relace (5.1) lze tedy bez ztráty na obecnosti předpokládat, že je $F \in \mathrm{USC}(G)$ a že platí (5.6), místo toho, abychom předpokládali, že je $F \in \mathrm{Sel}(G)$ a že platí (5.6); zejména Věty 18.5.17 a 18.5.18 plynou z Vět 18.5.5 a 18.5.19.

Pro diferenciální relace platí věty obdobné Větám 10.2.1 a 10.2.4. Všimneme si jich podrobněji. Nechť je $G \subset R \times R^n$, $F: G \to \mathfrak{S}_n$. Pro $\zeta > s$ nechť $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je množina takových $v \in R^n$, že existuje řešení $w: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$ diferenciální relace (5.1) splňující podmínku $w(s) = y$, $w(\zeta) = v$. Obdobně pro $\zeta < s$ nechť $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je množina takových $v \in R^n$, že existuje řešení w relace (5.1) splňující podmínku $w(\zeta) = v$, $w(s) = y$. Položme ještě $\mathscr{V}(s, s, y) = y$ pro $(s,y) \in G$. Budeme říkat, že diferenciální relace (5.1) má *vlastnost Kneserovu v bodě* $(\zeta, s, y) \in R \times G$, jestliže množina $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je kompaktní a souvislá. Budeme říkat, že diferenciální relace (5.1) má *vlastnost Fukuharovu v bodě* $(\zeta, s, y) \in R \times G$, $\zeta > s$, je-li $\partial\mathscr{V}(\zeta, s, y) \neq \emptyset$ a existuje-li ke každému $v \in \partial\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ řešení $w: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$ diferenciální relace (5.1) takové, že je $w(s) = y$, $w(\zeta) = v$ a $v(t) \in \partial\mathscr{V}(t, s, y)$ pro $t \in \langle s, \zeta \rangle$. Obdobný význam dáme výroku, že relace (5.1) má vlastnost Fukuharovu v bodě $(\zeta, s, y) \in R \times G$, $\zeta < s$. Platí tyto věty [srovnej Věty 10.2.1 a 10.2.4]:

18.5.20. Věta: *Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená, nechť je $F \in \mathrm{USC}(G)$ a nechť platí (5.6). Potom ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že relace (5.1) má Kneserovu vlastnost v bodě (ζ, s, y), jakmile je*

$$(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)\,, \quad \zeta \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,. \tag{5.19}$$

18.5.21. Věta: *Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená, nechť je $F \in \mathrm{USC}(G)$ a nechť platí (5.6). Potom ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že relace (5.1) má Fukuharovu vlastnost v bodě (ζ, s, y), jakmile platí (5.19), $\zeta \neq s$.*

Podle Věty 18.5.19 můžeme podmínku $F \in \mathrm{USC}(G)$ v předcházejících větách nahradit podmínkou $F \in \mathrm{Sel}(G)$ [nebo podmínkou $F \in M(G)$, protože je $M(G) \subset \subset \mathrm{Sel}(G)$].

Věty 18.5.20 a 18.5.21 plynou z výsledků, které byly dokázány v [11]. Důkaz Věty 18.5.20 je stručně proveden v Dodatku 18.7. Větu 18.5.21 lze dokázat stejným postupem, jako byla v Dodatku 10.3 dokázána Věta 10.2.4, místo Věty 10.2.1 užijeme ovšem Věty 18.5.20. Přirozené zobecnění Věty 18.5.20 je

18.5.22. Věta: *Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená, nechť je $F \in \mathrm{USC}(G)$ a nechť platí (5.6). Potom ke každému bodu $(t_0\ \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že platí: Nechť je $s \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ a nechť $W \subset B(\tilde{x}\ \delta_2, R^n)$ je kontinuum. Nechť $\mathscr{W}$ je množina takových řešení $w: \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to R^n$ diferenciální relace (5.1), že $w(s) \in W$. Potom $\mathscr{W}$ je kontinuum [podrobněji: $\mathscr{W}$ je metrický prostor s metrikou*

$$d(w^{[1]}, w^{[2]}) = \sup \{ \|w^{[2]}(t) - w^{[1]}(t)\| \mid t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \} ;$$

při této metrice $\mathscr{W}$ je neprázdná, kompaktní a souvislá množina].

Také Větu 18.5.22 lze odvodit z výsledků obsažených v [11]; lze ji ovšem též dokázat obměnou postupu užitého v Dodatku 18.7.

18.5.23. Poznámka: Všimněme si ještě případu, kdy se o pravé straně F diferenciální relace (5.1) nepředpokládá, že množina $F(t, x)$ je konvexní pro všechny body $(t, x) \in G$. Jsou-li množiny $A, B \subset R^n$ neprázdné, pak

$$d(A, B) = \max \{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \}$$

nazýváme *vzdáleností množin* A, B [$d(y, A)$ je vzdálenost bodu y od množiny A zavedená před Definicí 18.5.2]. Je $0 \leqq d(A, B) \leqq \infty$ a platí:

$$\textit{Nechť je } d(A, B) < \varepsilon < \infty. \textit{ Pak je } B \subset \Omega(A, \varepsilon),\ A \subset \Omega(B, \varepsilon). \tag{5.20}$$

$$\textit{Nechť je } 0 < \varepsilon < \infty,\ B \subset \Omega(A, \varepsilon),\ A \subset \Omega(B, \varepsilon). \textit{ Pak je } d(A, B) \leqq \varepsilon. \tag{5.21}$$

Nechť je $H \subset R^k$. Funkce $P: H \to \mathfrak{S}_n$ se nazývá spojitá v bodě $y \in H$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že je $d(H(x), H(y)) < \varepsilon$ pro $\|x - y\| < \delta$. Funkce H se nazývá spojitá, je-li spojitá v každém bodě $z \in H$.

V práci [32] byla dokázána existence řešení diferenciální relace (5.1) za předpokladu, že množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená, že funkce $F: G \to \mathfrak{S}_n$ je spojitá a že

$$F(t, x) \text{ je kompaktní pro } (t, x) \in G. \tag{5.22}$$

V práci [57] byl tento výsledek uveden v souvislost s Větou 18.5.17. Existence řešení diferenciální relace (5.1) byla dokázána za předpokladu, že množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená a že funkce $F: G \to \mathfrak{S}_n$ splňuje (5.6), (5.14), (5.15), (5.22) a platí:

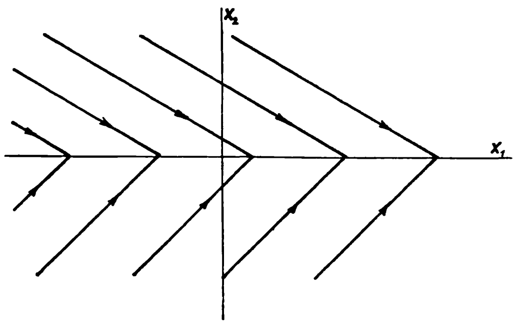
Je-li $(s, y) \in G$, pak buď je množina $F(s, y)$ konvexní nebo funkce F je spojitá v bodě (s, y). (5.23)

18.6. Nechť je $a_1, a_2 \in R$ a nechť funkce $g_1, g_2: R^2 \to R$ jsou určeny rovnicemi $g_1(x_1, x_2) = 2$, $g_2(x_1, x_2) = -1$ pro $x_1 \in R$, $x_2 > 0$, $g_1(x_1, 0) = a_1$, $g_2(x_1, 0) = a_2$ pro $x_1 \in R$, $g_1(x_1, x_2) = 1$, $g_2(x_1, x_2) = 1$ pro $x_1 \in R$, $x_2 < 0$.

Hledejme absolutně spojitá řešení rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Trajektorie této rovnice ležící v polorovinách $x_2 > 0$ a $x_2 < 0$ jsou naznačeny na obr. 42. Je-li $a_2 = 0$, pak rovnice má maximální řešení $u_1(t) = a_1 t + c$, $u_2(t) = 0$ (kde $c \in R$) nebo řešení $v_1(t)$, $v_2(t)$ taková, že pro $t < \tau$ se bod $(v_1(t), v_2(t))$ pohybuje po některé z trajektorií ležících v polorovině $x_2 > 0$ nebo $x_2 < 0$; přitom je $v_2(\tau) = 0$



Obr. 42

a pro $t > \tau$ je $v_2(t) = 0$, $v_1(t) = a_1(t - \tau) + v_1(\tau)$. Je-li $a_2 \neq 0$, nastane zcela jiná situace; ukážeme, že např. $w = (w_1, w_2): (-\infty, 0\rangle \to R^2$, kde $w_1(t) = t = w_2(t)$, je maximální řešení rovnice (6.1). Nechť $z = (z_1, z_2): (-\infty, \alpha\rangle \to R^2$ je vlastní prodloužení řešení w. Je-li $z_2(\tau) > 0$ pro nějaké $\tau \in (0, \alpha\rangle$, pak vzhledem ke spojitosti funkce z_2 existuje takové $\sigma \in \langle 0, \alpha\rangle$, že je $z_2(\sigma) = 0$, $z_2(t) > 0$ pro $t \in (\sigma, \tau\rangle$. To však není možné, neboť by muselo být $\dot{z}_2(t) = -1$ skoro všude v $\langle \sigma, \tau\rangle$. Je tedy $z_2(t) \leqq 0$ pro $t \in (0, \alpha\rangle$. Obdobně se ukáže, že je $z_2(t) \geqq 0$ pro $t \in (0, \alpha\rangle$. Tedy je $z_2(t) = 0$ pro $t \in (0, \alpha\rangle$; to však také není možné, neboť by muselo platit $\dot{z}_2(t) = a_2 \neq 0$ skoro všude v $\langle 0, \alpha\rangle$. Je tedy (w_1, w_2) maximální řešení. Trajektorie rovnice (6.1) jsou naznačeny na obr. 42.

V tomto odstavci zavedeme užitím diferenciálních relací nový pojem řešení diferenciální rovnice

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{6.2}$$

kde $f: G \to R^n$, $G \subset R \times R^n$. Tato nově zavedená řešení budeme nazývat *Filippovovými řešeními* [viz Poznámku 18.6.7]. K dříve zavedeným pojmům řešení mají Filippovova řešení tyto vztahy:

Pojmu „Filippovovo řešení" nelze užít pro libovolnou funkci f, ale jen v tom případě, že jsou splněny jisté slabé předpoklady o ohraničenosti. (6.3)

Splňuje-li funkce f Carathéodoryovy podmínky, pak každé Filippovovo řešení je „absolutně spojité řešení" a naopak. (6.4)

Za podstatně slabších podmínek, než jsou Carathéodoryovy podmínky, platí o Filippovových řešeních existenční věta obdobná Větě 18.4.2 [viz Větu 18.6.4.] (6.5)

Filippovova řešení rovnice (6.2) zůstanou beze změny, jestliže funkci f změníme na takové množině $D \subset G$, že Lebesgueova [$(n + 1)$-rozměrná] míra množiny D je rovna nule. (6.6)

[Rovnici (6.1) zapišme ve tvaru $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2)$, kde $f_i(t, x_1, x_2) = g_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, a položme $D = \{(t, x_1, 0) | \, t, x_1 \in R\}$. Lebesgueova míra v R^3 množiny D je rovna nule, a proto Filippovova řešení rovnice (6.1) nezávisí na číslech a_1, a_2.]

Pro jednoduchost budeme se rovnicí (6.2) zabývat pouze v případě, že množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená. Základem pro definici Filippovova řešení je

18.6.1. Věta: *Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená, $g: H \to R^n$. Nechť je splněna tato podmínka:*

Ke každému $\tilde{x} \in H$ existují čísla $\delta_1, \varkappa > 0$ tak, že je $\|g(x)\| \leqq \varkappa$ pro skoro všechna $x \in B(\tilde{x}, \delta_1, R^n)$. (6.7)

Potom existuje funkce $V_g: H \to \mathcal{K}_n$ taková, že platí:

$g(x) \in V_g(x)$ skoro všude v H. (6.8)

Funkce V_g je polospojitá shora. (6.9)

Je-li $S: H \to \mathcal{K}_n$ funkce polospojitá shora taková, že je $g(x) \in S(x)$ skoro všude v H, pak platí $V_g(x) \subset S(x)$ pro $x \in H$. (6.10)

Lze říci, že V_g je „nejmenší funkce" splňující (6.8) a (6.9). Důkaz Věty 18.6.1 je stručně proveden v Dodatku 18.5. Z Věty 18.6.1 plyne, že platí tato tvrzení:

Funkce V_g je určena jednoznačně [jestliže funkce $\tilde{V}: H \to \mathcal{K}_n$ splňuje (6.8) až (6.10), je $V_g(x) \subset \tilde{V}(x)$ i $\tilde{V}(x) \subset V_g(x)$ pro $x \in H$]. (6.11)

Je-li $\tilde{x} \in H$ a jsou-li čísla $\delta_1, \varkappa > 0$ určena z podmínky (6.7), je $V_g(x) \subset B(0, \varkappa)$ pro $x \in B(\tilde{x}, \delta_1, R^n)$ (6.12)

[položme $\tilde{V}(x) = \bar{B}(0, \varkappa) \cap V_g(x)$ pro $x \in B(\tilde{x}, \delta_1, R^n)$, $\tilde{V}(x) = V_g(x)$ pro $x \in H - \bar{B}(\tilde{x}, \delta_1)$; funkce $\tilde{V}$ splňuje (6.8), (6.9), tedy podle (6.10) je $\tilde{V}(x) \supset V_g(x)$ pro $x \in H$].

Změníme-li funkci g na množině míry nula, funkce V_g zůstane beze změny [je-li $\tilde{g}: H \to R^n$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ skoro všude v H, pak také $\tilde{g}$ splňuje (6.7), a tedy existuje $V_{\tilde{g}}$; je $g(x) \in V_{\tilde{g}}(x)$ skoro všude v H, funkce $V_{\tilde{g}}$ je polospojitá a podle (6.10) je $V_g(x) \subset V_{\tilde{g}}(x)$ pro $x \in H$. Obdobně je $V_{\tilde{g}}(x) \subset V_g(x)$ pro $x \in H$]. (6.13)

Je-li funkce $g: H \to R^n$ spojitá, pak $V_g(x) = \{g(x)\}$ pro $x \in H$. (6.14)

18.6.2. Definice: Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená a nechť funkce $f\colon G \to R^n$ splňuje tuto slabou podmínku ohraničenosti:

Je-li $(t, \tilde{x}) \in G$, pak existují čísla $\zeta, \varkappa > 0$ tak, že je $\|f(t, x)\| \leqq \varkappa$ pro skoro všechna $x \in B(\tilde{x}, \zeta, R^n)$. (6.15)

Zaveďme funkci $E\colon G \to \mathscr{K}_n$ tímto předpisem: Položme $E(t, x) = V_{f(t,.)}(x)$ pro $(t, x) \in G$. *Filippovovým řešením rovnice* (6.2) nazveme každou funkci $u\colon \mathscr{I} \to R^n$, která je řešením diferenciální relace

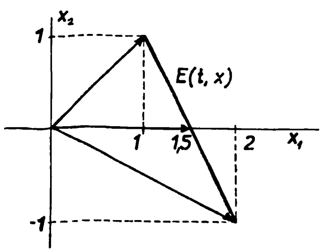
$$\dot{x}(t) \in E(t, x(t)) .$$

Tam, kde nehrozí nedorozumění, budeme mluvit jenom o řešení rovnice (6.2).

V případě rovnice (6.1) [kterou zapíšeme ve tvaru $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2)$, $f_i(t, x_1, x_2) = g_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$] je zřejmě $E(t, x) = \{(2, -1)\}$ pro $x = (x_1, x_2)$, $x_2 > 0$, $t \in R$, $x_1 \in R$, $E(t, x) = \{(1, 1)\}$ pro $x_2 < 0$ a pro $x_2 = 0$ je $E(t, x)$ úsečka spojující body $(2, -1)$, $(1, 1)$, tj.

$$E(t, x) = \{(1 + \beta, 1 - 2\beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq 1\} .$$

Pro $\beta = \frac{1}{2}$ je speciálně $(\frac{3}{2}, 0) \in E(t, x)$, $x = (x_1, 0)$ [viz obr. 43]. Nechť je $\alpha > 0$



Obr. 43

a nechť $s = (s_1, s_2)\colon (-\infty, \alpha) \to R^2$ je Filippovovo řešení rovnice (6.1) takové, že je $s_1(t) = t = s_2(t)$ pro $t \leqq 0$. Stejně jako jsme dokázali na začátku tohoto odstavce, že pro absolutně spojité řešení $z = (z_1, z_2)$ platí $z_2(t) = 0$ pro $t \in \langle 0, \alpha)$, lze dokázat, že je $s_2(t) = 0$ pro $t \in \langle 0, \alpha)$. Protože má platit $(\dot{s}_1(t), \dot{s}_2(t)) \in E(t, s(t))$ pro skoro všechna $t \in \langle 0, \alpha \rangle$, musí být $\dot{s}_1(t) = \frac{3}{2}$, $\dot{s}_2(t) = 0$ pro skoro všechna $t \in \langle 0, \alpha)$. Je tedy $s_1(t) = \frac{3}{2}t$, $s_2(t) = 0$ pro $t \in \langle 0, \alpha)$.

Z tvrzení (6.14) plyne, že platí (6.4). Nechť je $D \subset G$ a nechť T_D je množina takových $t \in R$, že množina $D_{(t,.)} \subset R^n$ má Lebesgueovu míru rovnou nule. Nechť D má míru rovnou nule. Potom Lebesgueova míra množiny $R - T_D$ je rovna nule a změníme-li funkci f na množině D, pak podle (6.13) množina $E(t, x)$ se může změnit pouze v tom případě, je-li $t \in R - T_D$. Vzhledem k Definicím 18.6.2 a 18.5.1 funkce $u\colon \mathscr{I} \to R^n$ je řešením rovnice (6.2) před změnou funkce f tehdy a jen tehdy, je-li řešením rovnice (6.2) po změně funkce f. Tedy platí (6.6).

18.6.3. Věta: *Nechť jsou splněny tyto podmínky:*

Množina $G \subset R \times R^n$ *je otevřená.* (6.16)

Funkce $f: G \to R^n$ *je měřitelná.* (6.17)

Ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují taková čísla* $\Delta_3, \Delta_4 > 0$ *a funkce* $\varrho: \langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3 \rangle \to R$ *že je*

$$\|f(t, x)\| \leqq \varrho(t) \quad \textit{pro} \quad (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_3, \Delta_4)\,. \tag{6.18}$$

Potom funkce E splňuje (5.3), (5.4).

Důkaz Věty 18.6.3 je proveden v Dodatku 18.6. Z Vět 18.6.3 a 18.5.5 plyne, že platí

18.6.4. Věta: *Nechť platí* (6.16), (6.17) *a tato podmínka:*

Ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují taková čísla* $\Delta_3, \Delta_4 > 0$ *a funkce* $\varrho \in L(\langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3 \rangle \to R)$ *že je*

$$\|f(t, x)\| \leqq \varrho(t) \quad \textit{pro} \quad (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_3, \Delta_4)\,. \tag{6.19}$$

Potom ke každému bodu $(t_0, \tilde{x})$ *existují čísla* δ_1, δ_2 *tak, že platí* (5.7) *a že* (5.8) *a* (5.9) *platí s tou změnou, že u a* $w_{(s,y)}$ *jsou Filippovova řešení rovnice* (6.2).

18.6.5. Poznámka: Čísla δ_1, δ_2 z předcházející věty můžeme určit obdobně jako v Poznámce 18.5.6.

Z Vět 18.6.3 a 18.5.9 plyne, že platí

18.6.6. Věta: *Nechť platí* (6.16) *až* (6.19). *Nechť* $\mathscr{I} \subset R$ *je interval,* $u^{[k]}: \mathscr{I} \to R^n$ *pro* $k = 1, 2, \ldots$, $u: \mathscr{I} \to R^n$, $\lim_{k \to \infty} u^{[k]}(t) = u(t)$, $(t, u(t)) \in G$ *pro* $t \in \mathscr{I}$. *Nechť* $u^{[k]}$ *je Filippovovo řešení diferenciální rovnice* (6.2). *Potom také u je Filippovovo řešení diferenciální rovnice* (6.2).

18.6.7. Poznámka: Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená a nechť funkce $g: H \to R^n$ splňuje (6.7). Potom podle Definice 18.6.2 funkce u je řešením diferenciální rovnice

$$\dot{x} = g(x)\,, \tag{6.20}$$

je-li řešením diferenciální relace

$$\dot{x} \in V_g(x) \tag{6.21}$$

[viz Poznámku 18.5.8]. Podle Věty 18.6.1 funkce V_g splňuje (5.4) [a není nutné předpokládat, že funkce g je měřitelná, srovnej Větu 18.6.3].

18.6.8. Poznámka: Řešení, která jsme zde nazvali Filippovovými řešeními, zavedl A. F. Filippov v [15]; výklad v tomto odstavci i v Dodatku 18.4 a v Dodatku 18.5 se však liší od postupu, kterého užil Filippov. V [15] se neužívá explicitně pojmu diferenciální relace a není vyslovena Věta 18.6.1. Užijeme-li označení z tohoto odstavce a z Dodatků 18.4 a 18.5, můžeme postup užitý v [15] stručně popsat takto: Filippov zavádí funkci V_g rovnicemi (D18.5.15) a (D18.5.17). Předpokládá, že platí (6.16), (6.17) a že je splněna podmínka, která je ekvivalentní podmínce (6.19), a pojem řešení rovnice (6.2) zavádí stejným způsobem jako v Definici 18.6.2. Vyšetřuje existenci řešeni, existenci a vlastnosti maximálních řešení, jednoznačnost, spojitou závislost na počáteční podmínce a na pravé straně, autonomní soustavu dvou diferenciálních rovnic aj. Aby dokázal existenci řešení, zavádí funkce $f^{[k]}$ tímto způsobem: $f^{[k]}(t, x)$ je průměr funkce $f(t, .)$ na množině

$$B_2(x, 2^{-k}) = \{z \mid \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 < 2^{-2k}\}.$$

Funkce $f^{[k]}$ jsou spojité v proměnne x a splňují stejnoměrně Carathéodoryovy podmínky [viz (4.19)] Existují řešení $u^{[k]}$ rovnice $\dot{x} = f^{[k]}(t, x)$ splňující podmínku $u^{[k]}(s) = y$ taková, že jsou definovaná na intervalu $\mathscr{I}$ (který nezávisí na k) a jsou stejně spojitá. Limita vybrané konvergentní posloupnosti je řešením rovnice (6.2).