16. První integrály. Parciální diferenciální rovnice

16.1. Znalost tzv. prvního integrálu nebo několika prvních integrálů dává cennou informaci o vlastnostech dané autonomní soustavy. Umožňuje snížit počet rovnic v soustavě.

Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená a nechť funkce $g: H \to R^n$ je spojitá.

16.1.1. Definice: Nechť množina $U \subset H$ je otevřená, nechť funkce $\xi: U \to R$ má v každém bodě $x \in U$ diferenciál $\mathrm{D}\,\xi(x)$ a nechť $\mathrm{D}\,\xi(x)$ spojitě závisí na x. Funkce ξ se nazývá *první integrál rovnice*

$$\dot{x} = g(x)\,, \tag{1.1}$$

platí-li v každém bodě $x \in U$

$$\mathrm{D}\,\xi(x)\,g(x) = 0\,. \tag{1.2}$$

16.1.2. Poznámka: $\mathrm{D}\,\xi(x)\,g(x)$ je derivace funkce ξ v bodě x ve směru $g(x)$, $g = \mathrm{col}\,(g_1, g_2, \ldots, g_n)$; rovnici (1.2) můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\,g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\,. \tag{1.3}$$

16.1.3. Věta: *Nechť $\xi: U \to R$ je první integrál rovnice* (1.1) *a nechť $v: \mathscr{I} \to U$ je řešení rovnice* (1.1). *Potom funkce $\xi(v(t))$ je konstantní.*

Důkaz: Je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\xi(v(t)) = \mathrm{D}\,\xi(v(t))\,\dot{v}(t) = \mathrm{D}\,\xi(v(t))\,g(v(t)) = 0$$

a Věta 16.1.3 platí.

16.1.4. Poznámka: Nechť funkce $q: (0, \infty) \to R$ je spojitá a nechť Q je k ní funkce primitivní. Nechť v rovině se pohybují body X, Y, které mají hmotnosti m_X, m_Y a na které nepůsobí jiné síly než jejich vzájemná přitažlivost (odpudivost). Nechť síla, kterou hmotný bod X působí na hmotný bod Y, má velikost $m_X m_Y\,q(\varrho)$, kde ϱ je vzdálenost bodů X, Y, a nechť směřuje od bodu Y k bodu X, je-li $q(\varrho) > 0$ [od bodu X k bodu Y, je-li $q(\varrho) < 0$]. Nechť hmotný bod Y působí na bod X silou, která má stejnou velikost a opačný směr. Nechť x_1, x_2 jsou souřadnice polohy bodu X, nechť u_1, u_2 jsou souřadnice vektoru rychlosti bodu X a obdobný význam nechť mají symboly y_1, y_2, v_1, v_2 ve vztahu k bodu Y. Tato situace je popsána soustavou

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1 , \\
\dot{u}_1 &= -m_Y\, q(\|x - y\|)\,(x_1 - y_1)\,\|x - y\|^{-1} , \\
\dot{x}_2 &= u_2 , \\
\dot{u}_2 &= -m_Y\, q(\|x - y\|)\,(x_2 - y_2)\,\|x - y\|^{-1} , \\
\dot{y}_1 &= v_1 , \\
\dot{v}_1 &= -m_X\, q(\|x - y\|)\,(y_1 - x_1)\,\|x - y\|^{-1} , \\
\dot{y}_2 &= v_2 , \\
\dot{v}_2 &= -m_X\, q(\|x - y\|)\,(y_2 - x_2)\,\|x - y\|^{-1} ,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

kde $\|x - y\| = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$; ovšem soustavu (1.4) vyšetřujeme na množině

$$H = \{(x_1, x_2, u_1, u_2, y_1, y_2, v_1, v_2) \in R^8 \mid (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 > 0\} .$$

Výpočtem se lze přesvědčit, že funkce

$$m_X u_1 + m_Y v_1 , \tag{1.5}$$

$$m_X u_2 + m_Y v_2 , \tag{1.6}$$

$$\tfrac{1}{2} m_X(u_1^2 + u_2^2) + \tfrac{1}{2} m_Y(v_1^2 + v_2^2) + m_X m_Y\, Q(\|x - y\|) , \tag{1.7}$$

$$m_X(u_1 x_2 - x_1 u_2) + m_Y(v_1 y_2 - y_1 v_2) \tag{1.8}$$

jsou první integrály soustavy (1.4); všechny jsou definovány na množině H.

Podle Věty 16.1.2 funkce (1.5) až (1.8) jsou konstantní, je-li $x_1, x_2, u_1, u_2, y_1, y_2, v_1, v_2$ řešení soustavy (1.4). Tak je pro případ prvních integrálů (1.5), (1.6) vyjádřen zákon zachování hybnosti, pro případ prvního integrálu (1.7) zákon zachování energie a pro případ prvního integrálu (1.8) zákon zachování momentu hybnosti. Prvních integrálů (1.5) až (1.8) lze využít k integraci soustavy (1.4). Nechť $x_1, x_2, u_1, u_2, y_1, y_2, v_1, v_2$ je hledané řešení a nechť platí

$$m_X\, u_1(t) + m_Y\, v_1(t) = \gamma_1 , \quad m_X\, u_2(t) + m_Y\, v_2(t) = \gamma_2 .$$

Položme $\delta_1 = \gamma_1(m_X + m_Y)^{-1}$, $\delta_2 = \gamma_2(m_X + m_Y)^{-1}$. Substitucí

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 - \delta_1 t , \quad x_2' = x_2 - \delta_2 t , \quad u_1' = u_1 - \delta_1 , \quad u_2' = u_2 - \delta_2 , \\
y_1' &= y_1 - \delta_1 t , \quad y_2' = y_2 - \delta_2 t , \quad v_1' = v_1 - \delta_1 , \quad v_2' = v_2 - \delta_2
\end{aligned}$$

se tvar rovnic (1.4) nezmění; přitom je

$$m_X u_1' + m_Y v_1' = 0 , \quad m_X u_2' + m_Y v_2' = 0 .$$

Je tedy $m_X x_1' + m_Y y_1' = \varepsilon_1$, $m_X x_2' + m_Y y_2' = \varepsilon_2$, kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ jsou konstanty. Položíme-li ještě $\eta_1 = \varepsilon_1(m_X + m_Y)^{-1}$, $\eta_2 = \varepsilon_2(m_X + m_Y)^{-1}$,

$$x_1'' = x_1' - \eta_1\,, \quad x_2'' = x_2' - \eta_2\,, \quad u_1'' = u_1'\,, \quad u_2'' = u_2'\,,$$
$$y_1'' = y_1' - \eta_1\,, \quad y_2'' = y_2 - \eta_2\,, \quad v_1'' = v_1'\,, \quad v_2'' = v_2'\,,$$

platí

$$m_X x_1'' + m_X y_1'' = 0 = m_X x_2'' + m_Y y_2''\,.$$

Můžeme tedy (bez ztráty na obecnosti) předpokládat, že pro hledané řešení platí

$$m_X x_1 + m_Y y_1 = 0\,, \quad m_X x_2 + m_Y y_2 = 0\,, \tag{1.9}$$

a tedy i

$$m_X u_1 + m_Y v_1 = 0\,, \quad m_X u_2 + m_Y v_2 = 0\,. \tag{1.10}$$

Dále je

$$\tfrac{1}{2} m_X(u_1^2 + u_2^2) + \tfrac{1}{2} m_Y(v_1^2 + v_2^2) + m_X m_Y\, Q(\|x - y\|) = \mu\,,$$
$$m_X(u_1 x_2 - x_1 u_2) + m_Y(v_1 y_2 - y_1 v_2) = \gamma\,.$$

Z těchto rovnic lze užitím (1.9) a (1.10) vyloučit y_1, y_2, v_1, v_2 a rovnice, které takto vzniknou, lze integrovat zavedením polárních souřadnic v rovině (tj. položíme

$$x_1 = r\cos\varphi\,, \quad x_2 = r\sin\varphi\,, \quad u_1 = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,.\,\dot{\varphi}\,,$$
$$u_2 = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,.\,\dot{\varphi}\,.$$

16.1.5. Poznámka: Nechť funkce $\vartheta_i\colon U \to R$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $1 \leqq k < n$, jsou první integrály rovnice (1.1). Nechť je $y \in U$ a nechť vektory $D\,\vartheta_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou lineárně nezávislé. Ukážeme, jak v okolí bodu y lze snížit počet rovnic v soustavě (1.1) právě o k.

Najděme funkce $\vartheta_{k+1}, \ldots, \vartheta_n\colon U \to R$ tak, aby diferenciály $D\,\vartheta_j(x)$ existovaly v každém bodě $x \in U$ a závisely spojitě na x a aby diferenciály $D\,\vartheta_j(y)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, byly lineárně nezávislé (funkce $\vartheta_{k+1}, \ldots, \vartheta_n$ můžeme volit např. lineární). Zobrazení $\Theta\colon U \to R^n$ definujme rovnicemi

$$\Theta(x) = (\vartheta_1(x), \vartheta_2(x), \ldots, \vartheta_n(x))\,.$$

Podle věty o implicitních funkcích existuje otevřená množina $U_0 \subset U$, $y \in U_0$ tak, že platí:

$$\text{Zobrazení } \tilde{\Theta} = \Theta|_{U_0} \text{ je prosté.} \tag{1.11}$$

$$D\,\tilde{\Theta}(x) \text{ je regulární pro } x \in U_0. \tag{1.12}$$

$$\text{Množina } V_0 = \{\tilde{\Theta}(x) \mid x \in U_0\} \subset R^n \text{ je otevřená.} \tag{1.13}$$

Inverzní zobrazení $\tilde{\Theta}^{-1}\colon U_0 \to V_0$ má diferenciál $D\,\tilde{\Theta}^{-1}(z)$ v každém bodě $z \in V_0$ a $D\,\tilde{\Theta}^{-1}(z)$ závisí spojitě na z. (1.14)

Rovnici (1.1) vyšetřujme na množině U_0; proveďme substituci $x = \tilde{\Theta}^{-1}(z)$. Rovnice (1.1) přejde v rovnici

$$\dot{z} = h(z)\,, \tag{1.15}$$

kde $h(z) = \mathrm{D}\,\tilde{\Theta}(\tilde{\Theta}^{-1}(z))\,g(\tilde{\Theta}^{-1}(z))$. Platí toto tvrzení:

Je-li $v\colon \mathscr{J} \to V_0$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, řešení rovnice (1.15), pak funkce $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou konstantní. (1.16)

Důkaz: Je-li funkce $v(t)$ řešením rovnice (1.15), je funkce $u(t) = \tilde{\Theta}^{-1}(v(t))$ řešením rovnice (1.1). Podle Věty 16.1.3 funkce $\vartheta_1(u(t)), \vartheta_2(u(t)), \ldots, \vartheta_k(u(t))$ jsou konstantní. Je ovšem $\tilde{\Theta}(u(t)) = v(t)$, $\vartheta_i(u(t)) = v_i(t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a tvrzení (1.16) platí.

Zapišme rovnici (1.15) jako soustavu

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= h_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,,\\ \dot{z}_2 &= h_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot{z}_n &= h_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Z tvrzení (1.16) plyne, že je

$$h_i(z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k\,, \quad (z_1, \ldots, z_n) \in V_0\,.$$

Hledáme-li řešení $w_1, \ldots, w_n$ soustavy (1.17) splňující podmínky $w_j(\bar{t}) = \xi_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, je $w_i(t) = \xi_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a zbývá řešit soustavu $n - k$ rovnic

$$\begin{aligned} \dot{z}_{k+1} &= h_{k+1}(\xi_1, \ldots, \xi_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot{z}_n &= h_n(\xi_1, \ldots, \xi_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Funkce $u(t) = \tilde{\Theta}^{-1}(w(t))$ je řešení rovnice (1.1).

Všimněme si ještě té okolnosti, že v této poznámce nejde jen o to, že zobrazení $\tilde{\Theta}$ existuje na jistém okolí bodu y, ale spíše o to, jak lze využít znalosti prvních integrálů $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$; v některých případech může být např. $U_0 = U$.

16.1.6. Poznámka: Nechť funkce $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\colon U \to R^n$ jsou první integrály rovnice (1.1), nechť je $y \in U$ a nechť vektory $\mathrm{D}\,\vartheta_1(y), \ldots, \mathrm{D}\,\vartheta_n(y)$ jsou lineárně nezávislé. Potom existuje takové okolí U_1 bodu y, že vektory $\mathrm{D}\,\vartheta_1(x), \ldots, \mathrm{D}\,\vartheta_n(x)$ jsou lineárně nezávislé pro $x \in U_1$. Z (1.2) plyne, že je $g(x) = 0$ pro $x \in U_1$. Proto v Poznámce 16.1.5 předpokládáme, že je $k < n$.

16.1.7. Poznámka: Nechť množina $\Omega \subset R^l$ je otevřená, nechť funkce $\xi_i\colon U \to R$, $i = 1, 2, \ldots, l$, jsou první integrály rovnice (1.1) a nechť je $(\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_l(x)) \in \Omega$ pro $x \in U$. Nechť funkce $\omega\colon \Omega \to R$ má diferenciál $\mathrm{D}\,\omega(z)$ v každém bodě $z \in \Omega$

a nechť $D\,\omega(z)$ spojitě závisí na z. Položme $\xi(x) = \omega(\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_l(x))$. Potom funkce ξ je první integrál rovnice (1.1). To plyne přímo z rovnice

$$D\,\xi(x)\,g(x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \omega}{\partial z_i}(\xi_1(x), \dots, \xi_l(x))\,D\,\xi_i(x)\,g(x)\,.$$

Říkáme, že první integrál ξ je závislý na prvních integrálech $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$. První integrál ξ nám ovšem nepřináší novou informaci ve srovnání s prvními integrály $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$. Nechť je $y \in U$ a hledejme řešení u rovnice (1.1) takové, aby bylo $u(t) \in U$, $u(0) = y$. Znalost prvního integrálu ξ nám dává informaci, že je

$$u(t) \in \{x \in U \mid \xi(x) = \xi(y)\}\,.$$

V prvních integrálech $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ je obsažena informace, že je

$$u(t) \in \{x \in U \mid \xi_i(x) = \xi_i(y)\,,\quad i = 1, 2, \dots, l\}\,,$$

Přitom zřejmě platí

$$\{x \in U \mid \xi_i(x) = \xi_i(y)\,,\ i = 1, 2, \dots, l\} \subset \{x \in U \mid \xi(x) = \xi(y)\}\,.$$

Nechť funkce $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1} \colon U \to R$ jsou první integrály rovnice (1.1), nechť je $y \in U$, $g(y) \neq 0$, a nechť vektory $D\,\vartheta_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, jsou lineárně nezávislé. Nechť $\zeta \colon U \to R$ je také první integrál rovnice (1.1). Existuje okolí U_0 bodu y tak, že vektory $D\,\vartheta_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, jsou lineárně nezávislé pro $x \in U_0$ a že je $g(x) \neq 0$ pro $x \in U_0$. Protože je $D\,\vartheta_i(x)\,g(x) = 0 = D\,\xi(x)\,g(x)$, $g(x) \neq 0$ pro $x \in U_0$, jsou vektory $D\,\vartheta_1(x), \dots, D\,\vartheta_{n-1}(x), D\,\xi(x)$ lineárně závislé pro $x \in U_0$, a tedy platí

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial x_1}(x), \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial x_n}(x), \dots, \dfrac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial x_n}(x), \dfrac{\partial \xi}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = 0$$

pro $x \in U_0$. Podle věty o závislosti funkcí (viz [28], kap. VIII, Větu 213, tvrzení IV) existují čísla $\delta, \Delta > 0$ a funkce $\Xi(z_1, \dots, z_{n-1})$ definovaná pro $|z_i - \vartheta_i(y)| < \Delta$ s hodnotami v R tak, že platí

$$\zeta(x) = \Xi(\vartheta_1(x), \dots, \vartheta_{n-1}(x)) \quad \text{pro} \quad x \in B(y, \delta, R^{n-1})\,.$$

Je tedy první integrál ζ v okolí bodu y závislý na prvních integrálech $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}$.

16.2. V tomto odstavci vyšetříme rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\,g_j(x_1, \dots, x_n, \xi) - g_{n+1}(x_1, \dots, x_n, \xi) = 0\,. \tag{2.1}$$

[Protože rovnici (2.1) vyšetřujeme v souvislosti s rovnicí (2.3), kde proměnná t je podle předpokladu reálná, je v důkazu Věty 16.2.3 podstatné, že i proměnné $x_1, \ldots, x_n, \xi$ jsou reálné.] Tato rovnice přechází v rovnici (1.3), je-li $g_{n+1} = 0$ a jestliže funkce g_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, nezávisejí na ξ. Rovnice (2.1) se nazývá *kvazilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu.* Budeme předpokládat, že:

Množina $W \subset R^{n+1}$ je otevřená, funkce g_j: $W \to R$ mají spojité parciální derivace pro $j = 1, 2, \ldots, n + 1$. (2.2)

16.2.1. Definice: Nechť množina $U \in R^n$ je otevřená a nechť funkce $\xi: U \to R$ má spojité parciální derivace. Funkci ξ nazveme ***řešením rovnice*** (2.1), je-li

$$(x_1, \ldots, x_n, \xi(x_1, \ldots, x_n)) \in W \quad \text{pro} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in U$$

a platí-li rovnice (2.1) v každém bodě $(x_1, \ldots, x_n) \in U$.

S rovnicí (2.1) souvisí obyčejná diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n &= g_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta)\,, \\ \dot{\eta} &= g_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

16.2.2. Věta: *Nechť množina $U \subset R^n$ je otevřená a nechť funkce $\xi: U \to R$ má spojité parciální derivace. Nechť je $(x_1, \ldots, x_n, \xi(x_1, \ldots, x_n)) \in W$ pro $(x_1, \ldots, x_n) \in U$. Označme Ξ graf funkce ξ [tj. $\Xi = \{(x_1, \ldots, x_n, \xi(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in U\}$]. Potom tato dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

ξ je řešení rovnice (2.1). (2.4)

Nechť $(y_1, \ldots, y_n, \eta): \mathscr{J} \to R^{n+1}$ je řešení rovnice (2.3) *a nechť je $(y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau)) \in U$ pro $\tau \in \mathscr{J}$. Nechť existuje takové $\sigma \in \mathscr{J}$, že je $(y_1(\sigma), \ldots, y_n(\sigma), \eta(\sigma)) \in \Xi$. Potom je $(y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau), \eta(\tau)) \in \Xi$ pro $\tau \in \mathscr{J}$.* (2.5)

Důkaz: Nechť ξ je řešení rovnice (2.1) a nechť $(y_1, \ldots, y_n, \eta)$ splňuje předpoklady tvrzení (2.5).

Je

$$\dot{\eta}(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} (y_1(t), \ldots, y_n(t))\, \dot{y}_j(t) =$$

$$= g_{n+1}(y_1(t), \ldots, y_n(t), \eta(t)) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} (y_1(t), \ldots, y_n(t))\, g_j(y_1(t), \ldots, y_n(t), \eta(t))\,.$$

Položme $\lambda(t) = \eta(t) - \xi(y_1(t), \ldots, y_n(t))$. Tak dostáváme

$$\dot{\lambda}(t) = g_{n+1}(y_1(t), \ldots, y_n(t), \lambda(t) + \xi(y_1(t), \ldots, y_n(t))) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} (y_1(t), \ldots, y_n(t)) \,.$$
$$. \, g_j(y_1(t), \ldots, y_n(t), \lambda(t) + \xi(y_1(t), \ldots, y_n(t)))\,.$$

λ je tedy řešení rovnice

$$\dot{\vartheta} = g_{n+1}(y_1(t), \ldots, y_n(t), \vartheta + \xi(y_1(t), \ldots, y_n(t))) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} (y_1(t), \ldots, y_n(t))\, g_j(y_1(t), \ldots, y_n(t), \vartheta + \xi(y_1(t), \ldots, y_n(t))) \tag{2.6}$$

a splňuje počáteční podmínku $\lambda(\sigma) = 0$. Protože funkce g_j, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$, mají spojité parciální derivace, je rovnice (2.6) jednoznačná. Protože ξ je řešení rovnice (2.1), je funkce $\vartheta(t) = 0$ pro $t \in \mathcal{J}$ řešením rovnice (2.6). Proto je $\lambda(t) = 0$ pro $t \in \mathcal{J}$ a z tvrzení (2.4) plyne tvrzení (2.5).

Nechť naopak platí (2.5) a nechť je $(x_1, \ldots, x_n) \in U$. Položme $\tilde{y}_i = x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{\eta} = \xi(x_1, \ldots, x_n)$. Nechť $y_1, \ldots, y_n, \eta$ je takové řešení rovnice (2.3), že je $y_i(0) = \tilde{y}_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $\eta(0) = \tilde{\eta}$. Protože platí (2.5), je $\eta(t) = \xi(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ pro dosti malá t. Derivujeme-li tuto rovnici a užijeme-li (2.3), odvodíme, že je

$$g_{n+1}(y_1(t), \ldots, y_n(t), \eta(t)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} (y_1(t), \ldots, y_n(t)) \,.\, g_j(y_1(t), \ldots, y_n(t), \eta(t))\,.$$

Pro $t = 0$ dostaneme odtud, že rovnice (2.1) platí v bodě $(x_1, \ldots, x_n)$. To znamená, že (2.1) platí v U; tvrzení (2.4) plyne z tvrzení (2.5). Věta 16.2.2 je dokázána.

Pro rovnici (2.1) budeme nyní řešit tzv. *Cauchyovu úlohu*. K tomu cíli zavedeme pojem $(n - 1)$-rozměrné plochy. $(n - 1)$-*rozměrnou plochou* rozumíme takovou množinu $\mathcal{U} \subset R^n$, že platí:

> Ke každému bodu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{U}$ existují čísla $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, index j, funkce ω_u proměnných $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ definovaná pro $|v_i - u_i| < \varepsilon$, $i \neq j$, tak, že je
>
> $|\omega_u(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) - u_j| < \varepsilon'$
>
> a platí: Nechť je $v = (v_1, \ldots, v_n) \in R^n$, $|v_i - u_i| < \varepsilon$ pro $i \neq j$, $|v_j - u_j| < \varepsilon'$. Pak je $v \in \mathcal{U}$ právě tehdy, je-li
>
> $v_j = \omega_u(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)\,.$
>
> Přitom ještě předpokládáme, že funkce ω_u má spojité parciální derivace. (2.7)

Lze tedy plochu $\mathcal{U}$ v okolí každého jejího bodu u popsat tak, že jedna souřadnice bodu v ležícího na ploše je funkcí ostatních souřadnic. Nechť je dána plocha $\mathscr{U}$ a funkce $\lambda: \mathscr{U} \to R$; nechť je

$$(u, \lambda(u)) \in W \tag{2.8}$$

[viz (2.2)] pro $u \in \mathscr{U}$. Cauchyova úloha spočívá v tom, že se hledá takové řešení $\xi: U \to R$ rovnice (2.1), aby platilo $\xi(u) = \lambda(u)$ pro $u \in \mathscr{U}$.

Geometrická interpretace nás přivádí k cestě, jak Cauchyovu úlohu řešit. Podle Věty 2.2 funkce $\xi: U \to R$ je řešením rovnice (2.1) právě tehdy, je-li její graf Ξ vyplněn trajektoriemi rovnice (2.3). Můžeme tedy zkusit ke každému bodu $u \in \mathscr{U}$ přiřadit maximální trajektorii Q_u rovnice (2.3) procházející bodem $(u, \lambda(u))$ a definovat množinu Λ jako sjednocení trajektorií Q_u pro $u \in \mathscr{U}$. Podaří-li se dokázat, že Λ je graf funkce $\xi: U \to R$, kde $U \in R^n$ je otevřená množina, a že funkce ξ má spojité parciální derivace, bude funkce ξ řešením rovnice (2.1). Příklady 16.2.5, 16.2.6 ukazují, že množina Λ nemusí být grafem nějaké funkce ξ. Omezíme-li se na vhodné okolí $V \subset R^n$ množiny $\mathscr{U}$ (a jsou-li ještě splněny jisté podmínky), pak ze zmenšených trajektorií Q_u, $u \in \mathscr{U}$, můžeme sestavit množinu $\Lambda(V)$, která je grafem řešení ξ rovnice (2.1).

Nechť množina $V \subset R^n$ je otevřená, $\mathscr{U} \subset V$. Nechť funkce Ψ má obvyklý význam ve vztahu k rovnici (2.3) (viz odst. 12.3). Množinu $\Lambda(V)$ definujme rovnicí

$$\begin{aligned}&\Lambda(V) = \{\Psi(t, (u, \lambda(u)) \mid u \in \mathscr{U}\,,\\&(\Psi_1(\tau, (u, \lambda(u))), \ldots, \Psi_n(\tau, (u, \lambda(u)))) \in V\\&\text{pro} \quad \tau \in \langle 0, t\rangle \quad \text{nebo pro} \quad \tau \in \langle t, 0\rangle\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

[tedy $\Lambda(V)$ je množina takových bodů $z \in R^{n+1}$, které lze spojit s vhodným bodem $(u, \lambda(u))$ trajektorií rovnice (2.3) tak, že projekce této trajektorie do prostoru prvních n souřadnic leží v množině V].

Abychom dokázali existenci řešení Cauchyovy úlohy, budeme potřebovat, aby v každém bodě $u \in \mathscr{U}$ byla splněna podmínka:

Vektor $(g_1(u, \lambda(u)), \ldots, g_n(u, \lambda(u)))$ není tečný k ploše $\mathscr{U}$ v bodě u. Užijeme-li vyjádření plochy $\mathscr{U}$ pomocí funkce ω_u z (2.7), můžeme tuto podmínku zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}&g_j(u, \lambda(u)) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\partial \omega_u}{\partial x_i}(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n)\, g_i(u, \lambda(u)) \neq 0\\&\text{pro} \quad u \in \mathscr{U}\,.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dále budeme předpokládat, že pro každé $u \in \mathscr{U}$ složená funkce

$$\lambda(v_1, \ldots, v_{j-1}, \omega_u(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n), v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

má spojité parciální derivace. Tato podmínka se stručně vyjádří rčením:

$$\text{Funkce } \lambda: \mathscr{U} \to R \text{ má spojité parciální derivace.} \tag{2.11}$$

16.2.3. Věta: *Nechť platí* (2.2), (2.7), (2.8), (2.10), (2.11). *Potom existuje otevřená množina* $U \subset R^n$ *a řešení* $\xi: U \to R$ *rovnice* (2.1) *tak, že platí* $\mathscr{U} \subset U$, $\xi(u) = \vartheta(u)$ *pro* $u \in \mathscr{U}$.

Důkaz Věty 16.2.3 je stručně proveden v Dodatku 16.1.

16.2.4. Příklad: Hledejme řešení rovnice

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = \xi + 1 \tag{2.12}$$

splňující podmínku $\xi(0, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_2^2$ pro $\tilde{x}_2 \in R$. Příslušná obyčejná diferenciální rovnice je

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1\,, \\ \dot{y}_2 &= y_2\,, \\ \dot{\eta} &= \eta + 1\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Plocha $\mathscr{U}$ je osa x_2 a body $(u, \lambda(u))$, kde $u \in \mathscr{U}$, lze zapsat jako $(0, \tilde{x}_2, \tilde{x}_2^2)$, $\tilde{x}_2 \in R$. Řešení y_1, y_2, η rovnice (2.13) splňující počáteční podmínku $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = \tilde{x}_2$, $\eta(0) = \tilde{x}_2^2$ je $y_1(t) = t$, $y_2(t) = \tilde{x}_2\, e^t$, $\eta(t) = (\tilde{x}_2^2 + 1)\, e^t - 1$. Pro $(x_1, x_2) \in R^2$ hledejme $\tilde{x}_2$ a t tak, aby platilo $x_1 = y_1(t)$, $x_2 = y_2(t)$, a položme $\xi(x_1, x_2) = \eta(t)$. Je $t = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2\, e^{-x_1}$, $\xi(x_1, x_2) = x_2^2\, e^{-x_1} + e^{x_1} - 1$. Funkce $\xi: R^2 \to R$ je řešením dané Cauchyovy úlohy. Je zřejmé, že funkce ξ má spojité derivace; ze způsobu, jak byla sestrojena, plyne, že její graf je vyplněn trajektoriemi rovnice (2.13); funkce ξ je tedy řešením rovnice (2.12) podle Věty 16.2.2. Lze se o tom též přesvědčit výpočtem. V tomto případě množina $\Lambda = \Lambda(R^2)$ je graf funkce ξ.

16.2.5. Příklad: Hledejme řešení rovnice

$$-\frac{\partial \xi}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} x_1 = 1 \tag{2.14}$$

splňující podmínku $\xi(\tilde{x}_1, 0) = \tilde{x}_1$ pro $\tilde{x}_1 \in R$, $\tilde{x}_1 > 0$. Příslušná obyčejná diferenciální rovnice je

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2\,, \\ \dot{y}_2 &= y_1\,, \\ \dot{\eta} &= 1\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Plocha $\mathscr{U}$ je kladná poloosa X_1, body $(u, \lambda(u))$, kde $u \in \mathscr{U}$, lze zapsat jako $(\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_1)$, $\tilde{x}_1 \in R$, $\tilde{x}_1 > 0$. Řešení y_1, y_2, η rovnice (2.15) splňující počáteční podmínku $y_1(0) = \tilde{x}_1$, $y_2(0) = 0$, $\eta(0) = \tilde{x}_1$ je $y_1(t) = \tilde{x}_1 \cos t$, $y_2(t) = \tilde{x}_1 \sin t$, $\eta(t) = t + \tilde{x}_1$. Nechť $X_1^{(-)}$ znamená uzavřenou zápornou poloosu x_1, tj. $X_1^{(-)} = \{(x_1, 0) \mid x_1 \leqq 0\}$, a položme $Q = R^2 - X_1^{(-)}$. Je-li $(x_1, x_2) \in Q$, nechť číslo $\varphi(x_1, x_2) \in (-\pi, \pi)$ je úhel, který svírá s kladnou poloosou X_1 polopřímka vycházející z počátku a procházející bodem (x_1, x_2). Pro bod $(x_1, x_2) \in Q$ hledejme $\tilde{x}_1 > 0$ a $t \in (-\pi, \pi)$ tak, aby platilo $x_1 = y_1(t)$, $x_2 = y_2(t)$, a položme $\xi(x_1, x_2) = \eta(t)$. Je $\tilde{x}_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $t = \varphi(x_1, x_2)$, $\xi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Obdobně jako v Příkladu 16.2.4 funkce ξ je řešením Cauchyovy úlohy. Množina Λ není grafem žádné funkce ξ. Jiná řešení Cauchyovy úlohy můžeme získat tím, že místo poloosy $X_1^{(-)}$ vynecháme z roviny křivku $\Omega = \{(\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma)) | \sigma \geqq 0\}$; přitom funkce ω_i: $\langle 0, \infty) \to R$ jsou spojité, platí $\omega_1^2(\sigma) + \omega_2^2(\sigma) = \sigma^2$ pro $\sigma \geqq 0$ a $(\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma)) \neq (\zeta, 0)$ pro $\sigma \geqq 0$, $\zeta > 0$.

16.2.6. Příklad: Hledejme řešení rovnice

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + (\xi^2 + 1) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = 0 \tag{2.16}$$

splňující podmínku $\xi(0, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_2$ pro $\tilde{x}_2 \in R$. Příslušná obyčejná rovnice je

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1\,, \\ \dot{y}_2 &= \eta^2 + 1\,, \\ \dot{\eta} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Plocha $\mathscr{U}$ je osa X_2, body $(u, \lambda(u))$, kde $u \in \mathscr{U}$, lze zapsat jako $(0, \tilde{x}_2, \tilde{x}_2)$, $\tilde{x}_2 \in R$. Řešení y_1, y_2, η rovnice (2.17) splňující počáteční podmínky $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = \tilde{x}_2$, $\eta(0) = \tilde{x}_2$ je

$$y_1(t) = t\,, \quad y_2(t) = \tilde{x}_2 + (\tilde{x}_2^2 + 1)\,t\,, \quad \eta(t) = \tilde{x}_2\,. \tag{2.18}$$

K bodu $(x_1, x_2) \in R^2$ hledejme $t, \tilde{x}_2 \in R$ tak, aby platilo $x_1 = y_1(t)$, $x_2 = y_2(t)$. Je

$$\begin{aligned} &t = x_1\,, \quad \tilde{x}_2 = x_2 \quad \text{pro} \quad x_1 = 0\,, \\ &\tilde{x}_2 = \frac{1}{2x_1}(-1 \pm [1 - 4(x_1 - x_2)\,x_1]^{1/2}) \quad \text{pro} \quad x_1 \neq 0\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aby $\tilde{x}_2$ bylo reálné, musí být $1 - 4(x_1 - x_2)\,x_1 \geqq 0$, tj.

$$\tfrac{1}{2}[x_2 - (1 + x_2^2)^{1/2}] \leqq x_1 \leqq \tfrac{1}{2}[x_2 + (1 + x_2^2)^{1/2}]\,. \tag{2.20}$$

Položme

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \{(x_1, x_2) \in R^2 |\ \tfrac{1}{2}[x_2 - (1 + x_2^2)^{1/2}] \leqq x_1 \leqq \tfrac{1}{2}[x_2 + (1 + x_2^2)^{1/2}]\}\,, \\ V &= \{(x_1, x_2) \in R^2 |\ \tfrac{1}{2}[x_2 - (1 + x_2^2)^{1/2}] < x_1 < \tfrac{1}{2}[x_2 + (1 + x_2^2)^{1/2}]\}\,. \end{aligned}$$

Podle (2.18), (2.19) a (2.20) je

$$\begin{aligned} \Lambda = \{(x_1, x_2, x_3) |\ &(x_1, x_2) \in \bar{V},\ x_3 = x_2 \quad \text{pro} \quad x_1 = 0\,, \\ &x_3 = \frac{1}{2x_1}[-1 \pm (1 - 4[x_1 - x_2]\,x_1)^{1/2}] \quad \text{pro} \quad x_1 \neq 0\}\,. \end{aligned}$$

Množina Λ není grafem žádné funkce. Výpočtem se však zjistí, že je $(y_1(\tau), y_2(\tau)) \in V$

pro $\tau \in \langle 0, t\rangle$ nebo $\tau \in \langle t, 0\rangle$ právě tehdy, je-li $\tilde{x}_2 > 0$, $t > -1/(2\tilde{x}_2)$ nebo $\tilde{x}_2 = 0$, $t \in R$, nebo $\tilde{x}_2 < 0$, $t < -1/(2\tilde{x}_2)$, a že je

$$\begin{aligned} \Lambda(V) = \{(x_1, x_2, x_3) | & (x_1, x_2) \in V,\ x_3 = x_2 \quad \text{pro} \quad x_1 = 0\,, \\ & x_3 = \tfrac{1}{2}x_1 \left[-1 + (1 - 4[x_1 - x_2]\, x_1)^{1/2}\right] \quad \text{pro} \quad x_1 \neq 0\}\,. \end{aligned}$$

$\Lambda(V)$ je graf funkce $\xi\colon V \to R$, kde $\xi(0, x_2) = x_2$,

$$\xi(x_1, x_2) = \frac{1}{2x_1}\left[-1 + (1 - 4[x_1 - x_2]\, x_1)^{1/2}\right] \quad \text{pro} \quad x_1 \neq 0$$

a ξ je řešení Cauchyovy úlohy.

16.2.7. Poznámka: Vraťme se k rovnici (1.1). Předpokládejme, že funkce $g\colon H \to R^n$ má spojité derivace. Nechť $y \in H$ je takový bod, že je $g(y) \neq 0$. Potom, jak ukážeme, existuje takové okolí U bodu y a první integrály $\vartheta_i\colon U \to R$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, rovnice (1.1) tak, že funkční matice $(\partial\vartheta_i/\partial x_j)$ má hodnost $n - 1$ v každém bodě $x \in U$. Nechť je pro určitost $g_n(y) \neq 0$. Položme

$$\mathcal{U} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) | \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^2 < \delta^2\}\,,$$

kde číslo $\delta > 0$ je tak malé, že je $g_n(x) \neq 0$ pro $x \in \mathcal{U}$. Položme ještě $\lambda_i(x) = x_i$ pro $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) \in \mathcal{U}$. Důkaz snadno dokončíme užitím Věty 16.2.3 na rovnici (1.3).

Víme-li již, že existují funkcionálně nezávislé první integrály $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$, můžeme užít postupu z Poznámky 16.1.5 a v okolí bodu y rovnici (1.1) transformovat v rovnici

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 0\,, \\ &\cdots\cdots \\ \dot{z}_{n-1} &= 0\,, \\ \dot{z}_n &= h_n(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{aligned} \tag{2.21}$$

[kterou vyšetřujeme v okolí $\Theta(U)$ bodu $\Theta(y)$]. Případným zmenšením množiny U dosáhneme toho, že je $g(x) \neq 0$ pro $x \in U$, tedy

$$h_n(z_1, \dots, z_n) \neq 0 \quad \text{pro} \quad (z_1, \dots, z_n) \in \Theta(U)\,.$$

Položme $\Theta(y) = \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$. Nechť $p(z_1, \dots, z_{n-1}, t)$ je při pevných $z_1, \dots, z_{n-1}$ řešení rovnice

$$\dot{\zeta} = h_n(z_1, z_2, \dots, \zeta)\,,$$

splňující počáteční podmínku $p(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) = \tilde{y}_n$. Funkce p má spojité derivace prvního řádu a je

$$\frac{\partial}{\partial t}\, p(z_1, \dots, z_{n-1}, t) \neq 0\,,$$

je-li $(z_1, \ldots, z_{n-1}, t)$ dosti blízko k $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}, 0)$. Zobrazení P zaveďme rovnicí $z = P(w)$, kde

$$z_1 = w_1 + \tilde{y}_1, \ldots, z_{n-1} = w_{n-1} + \tilde{y}_{n-1}, \quad z_n = p(w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Zobrazení P je regulární v okolí bodu 0 [je $P(0) = \tilde{y}$] a rovnice (2.21) přechází (v okolí bodu $\tilde{y}$) substitucí $z = P(w)$ v rovnici

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \dot{w}_{n-1} &= 0, \\ \dot{w}_n &= 1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Tedy rovnici (1.1) lze složenou transformací $x = \Theta(P(z))$ převést v rovnici (2.22) [ovšem pouze lokálně; rovnici (1.1) vyšetřujeme na vhodném okolí bodu y – je $g(y) \neq 0$ – a rovnici (2.22) na vhodném okolí bodu 0].

Naproti tomu, v okolí bodu $z \in H$, kde $g(z) = 0$, mohou nastat rozmanité případy. Např. rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= 0 \end{aligned}$$

má $n - 1$ funkcionálně nezávislých prvních integrálů $\xi_i: R^n \to R$ [např. funkce $\xi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$], zatímco pro rovnici

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= -x_n \end{aligned}$$

platí: Je-li $\delta > 0$ a $\xi: B(0, \delta) \to R$ první integrál, pak ξ je konstantní funkce [neboť funkce ξ je konstantní na každé trajektorii $\{\sigma w \mid 0 < \sigma < \delta\}$, kde $w \in R^n$, $\|w\| = 1$, a má na ní hodnotu $\xi(0)$].

16.2.8. Poznámka: Větu 16.2.3 lze rozšířit i na nelineární parciální rovnici prvního řádu

$$g\left(x_1, \ldots, x_n, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right) = 0$$

(viz např. [58], § 64).