15. Exponenciální stabilita. Hyberbolický bod, nestabilní a stabilní varieta

15.1. Vyšetříme některé otázky závislosti řešení na počáteční podmínce. Zvlášť se budeme zabývat případem, kdy malá změna počáteční podmínky se projeví jen málo na dalším průběhu řešení tak, že rozdíl původního řešení a řešení se změněnou počáteční podmínkou se pro $t \to \infty$ zmenšuje k nule rychleji než funkce $e^{-\varrho t}$, kde ϱ je vhodné kladné číslo. Bude též popsán průběh všech řešení autonomní nelineární rovnice v nějakém okolí množiny hodnot periodického řešení nebo konstantního řešení.

15.1.1. Definice: Řešení $v: R \to K^n$ rovnice

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

se nazývá *exponenciálně stabilní řešení*, existují-li taková čísla $\delta > 0$, $\eta > 0$, $\varrho > 0$, že platí: Je-li u maximální řešení rovnice (1.1) a existuje-li takové $\bar{t} \in R$, že je $\|u(\bar{t}) - v(\bar{t})\| \leqq \delta$, potom u je definováno pro všechna $t \geqq \bar{t}$ a splňuje nerovnost

$$\|u(t) - v(t)\| \leqq \eta\, e^{-\varrho(t-\bar{t})}\|u(\bar{t}) - v(\bar{t})\| \quad \text{pro} \quad t \geqq \bar{t}\,.$$

Nechť je $A \in M_n$. Z Věty 5.3.3 plyne, že triviální řešení rovnice $\dot{x} = Ax$ je exponenciálně stabilní právě tehdy, je-li $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice A. Má-li funkce $g: K^n \to K^n$ diferenciál $\mathrm{D}\, g$ a je-li $g(\tilde{x}) = 0$, pak v okolí bodu $\tilde{x}$ je $g(x)$ přibližně rovno $\mathrm{D}\, g(\tilde{x})(x - \tilde{x})$. Můžeme očekávat, že konstantní řešení v, $v(t) = \tilde{x}$ pro $t \in R$, rovnice

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.2}$$

je exponenciálně stabilní, je-li $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathrm{D}\, g(\tilde{x})$.

15.1.2. Věta: *Nechť jsou splněny tyto podmínky:*

$$\textit{Množina } H \subset K^n \textit{ je otevřená, } g: H \to K^n\,. \tag{1.3}$$

$$\tilde{x} \in H\,, \quad g(\tilde{x}) = 0\,. \tag{1.4}$$

V každém bodě $x \in H$ existuje diferenciál $\mathrm{D}\, g(x)$ a závisí spojitě na x. (1.5)

$$\operatorname{Re}\lambda < 0 \text{ pro každé vlastní číslo } \lambda \text{ matice } \mathrm{D}\, g(\tilde{x}). \tag{1.6}$$

Položme $\varrho_2 = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda$ *je vlastní číslo matice* $\mathrm{D}\, g(\tilde{x})\}$ [*je ovšem* $\varrho_2 < 0$]. *Potom ke každému* ϱ, $\varrho_2 < -\varrho < 0$, *existují taková čísla* $\delta(\varrho)$, $\eta(\varrho) > 0$, *že platí:*

Je-li u maximální řešení rovnice (1.2) *a existuje-li takové* $\bar{t} \in R$, *že je* $\|u(\bar{t}) - \tilde{x}\| \leqq \delta(\varrho)$, *potom u je definováno pro všechna* $t \geqq \bar{t}$ *a splňuje nerovnost*

$$\|u(t) - \tilde{x}\| \leqq \eta(\varrho)\, e^{-\varrho(t-\bar{t})} \| u(\bar{t}) - \tilde{x}\| \quad \text{pro} \quad t \geqq \bar{t}\,. \tag{1.7}$$

V důkazu užijeme této pomocné věty:

15.1.3. Pomocná věta: *Nechť je* $r > 0$, $0 < \mu < 1$, $\tilde{x} \in K^n$, $\Theta: B(\tilde{x}, r) \to K^n$, $\Theta(\tilde{x}) = \tilde{x}$. *Nechť zobrazení* Θ *má v každém bodě* $x \in B(\tilde{x}, r)$ *diferenciál* $\mathrm{D}\,\Theta(x)$ *a nechť* $\mathrm{D}\,\Theta(x)$ *spojitě závisí na x. Nechť je* $\|\mathrm{D}\,\Theta(\tilde{x})\| < \mu$. *Potom existuje* δ_1, $0 < \delta_1 \leqq r$, *tak, že platí*

$$\|\Theta(x) - \tilde{x}\| \leqq \mu\|x - \tilde{x}\|\,, \tag{1.8}$$

$$\|\Theta(x) - \Theta(y)\| \leqq \mu\|x - y\|\,, \tag{1.9}$$

$$\|\Theta^j(x) - \tilde{x}\| \leqq \mu^j\|x - \tilde{x}\|\,, \tag{1.10}$$

$$\|\Theta^j(x) - \Theta^j(y)\| \leqq \mu^j\|x - y\| \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots,\ x, y \in B(\tilde{x}, \delta_1) \tag{1.11}$$

[*je ovšem* $\Theta^2(x) = \Theta(\Theta(x))$, $\Theta^{j+1}(x) = \Theta(\Theta^j(x))$].

Důkaz: Je (viz Dodatek 11.1)

$$\Theta(x) - \tilde{x} = \Theta(x) - \Theta(\tilde{x}) = \int_0^1 \mathrm{D}\,\Theta(\tilde{x} + \sigma(x - \tilde{x}))\, \mathrm{d}\sigma(x - \tilde{x})\,. \tag{1.12}$$

Zvolíme-li δ_1, $0 < \delta_1 \leqq r$, tak, aby bylo $\|\mathrm{D}\,\Theta(z)\| < \mu$ pro $z \in B(\tilde{x}, \delta_1)$, pak z (1.12) plyne, že platí (1.8). Nerovnost (1.9) se dokáže obdobně. (1.10), (1.11) přejde v (1.8), (1.9), položíme-li $j = 1$; indukcí se dokáže, že (1.10), (1.11) platí pro $j = 1, 2, 3, \ldots$. Pomocná věta 15.1.3 je dokázána.

Důkaz Věty 15.1.2: Rovnice (1.2) je jednoznačná podle Věty 11.1.6. Položme $A = \mathrm{D}\, g(\tilde{x})$. Nechť Φ a Ψ mají stejný význam jako v odst. 12.3 a 12.4. Je $\Psi(t, \tilde{y}) = \Phi(t, 0, \tilde{y})$ (viz Definici 12.3.4) a podle Poznámky 13.1.5 je $\mathrm{D}^{(2)}\, \Psi(., \tilde{x})$ fundamentální matice rovnice

$$\dot{x} = Ax\,, \tag{1.13}$$

$\mathrm{D}^{(2)}\, \Psi(0, \tilde{x}) = I$. Je tedy $\mathrm{D}^{(2)}\, \Psi(t, \tilde{x}) = \exp(At)$ (viz Poznámku 5.6.2) a platí

$$\|\mathrm{D}^{(2)}\, \Psi(t, \tilde{x})\| \leqq \varkappa_4(1 + t^{\mu_2})\, e^{\varrho_2 t} \quad \text{pro} \quad t \geqq 0\,, \tag{1.14}$$

kde $\varkappa_4$ je kladné číslo a $\mu_2 \geqq 0$ je celé číslo.

Nechť je $\varrho_2 < -\varrho < 0$. Zvolme číslo $T > 0$ tak, aby platilo

$$\varkappa_4(1 + T^{\mu_2})\, e^{\varrho_2 T} < e^{-\varrho T}\,. \tag{1.15}$$

Funkce Ψ a $D^{[2]}\,\Psi$ jsou definovány na otevřené podmnožině $\hat{H} \subset R \times K^n$, která obsahuje množinu $\{(t, \tilde{x}) \mid t \in R\}$. Proto existuje takové $r > 0$, že

$$Q = \{(t, x) \mid 0 \leqq t \leqq T, \|x - \tilde{x}\| \leqq r\} \subset \hat{H}.$$

Položíme $\Theta(x) = \Psi(T, x)$ pro $x \in \bar{B}(\tilde{x}, r)$, $\mu = e^{-\varrho T}$. Vzhledem k (1.15) a (1.14) je $\|D\,\Theta(\tilde{x})\| < \mu$ a podle Pomocné věty 15.1.3 existuje δ_1, $0 < \delta_1 \leqq r$, tak, že platí (1.10). Je $\Theta^k(x) = \Psi(kT, x)$ [viz (12.3.7)], tedy platí

$$\|\Psi(kT, x) - \tilde{x}\| \leqq e^{-\varrho kT}\|x - \tilde{x}\| \quad \text{pro} \quad x \in \bar{B}_1(\tilde{x}, \delta_1). \tag{1.16}$$

Protože funkce $D^{[2]}\,\Psi$ je spojitá na Q a Q je kompaktní množina, existuje $\varkappa \in R$ tak, že je $\|D^{[2]}\,\Psi(t, x)\| \leqq \varkappa$ pro $(t, x) \in Q$. Je

$$\Psi(t, x) - \tilde{x} = \Psi(t, x) - \Psi(t, \tilde{x}) = \int_0^1 D^{[2]}\,\Psi(t, \tilde{x} + \sigma(x - \tilde{x}))\,d\sigma(x - \tilde{x})$$

pro $(t, x) \in Q$. Tedy je

$$\|\Psi(t, x) - \tilde{x}\| \leqq \varkappa\|x - \tilde{x}\| \quad \text{pro} \quad (t, x) \in Q. \tag{1.17}$$

Nechť je $t > 0$, $x \in B(\tilde{x}, \delta_1)$. Existuje celé nezáporné k tak, že je $kT \leqq t < (k + 1)\,T$. Je $\Psi(t, x) = \Psi(t - kT, \Psi(kT, x))$ a podle (1.16) a (1.17) je

$$\|\Psi(t - kT, \Psi(kT, x)) - \tilde{x}\| \leqq \varkappa\|\Psi(kT, x) - \tilde{x}\| \leqq \varkappa\, e^{-\varrho kT}\|x - \tilde{x}\|,$$

tedy platí

$$\|\Psi(t, x) - \tilde{x}\| \leqq \varkappa\, e^{\varrho T}\, e^{-\varrho t}\|x - \tilde{x}\| \quad \text{pro} \quad t \geqq 0, \quad x \in \bar{B}(\tilde{x}, \delta_1).$$

Protože je $u(t) = \Psi(t - \bar{t}, \tilde{x})$, platí (1.7), položíme-li $\eta(\varrho) = \varkappa\, e^{\varrho T}$, $\delta(\varrho) = \delta_1$. Věta 15.1.2 je dokázána.

15.1.4. Poznámka: Z Věty 15.1.2 speciálně plyne, že řešení v, $v(t) = \tilde{x}$ pro $t \in R$, rovnice (1.2) je exponenciálně stabilní.

15.1.5. Poznámka: Větu 15.1.2 můžeme doplnit tímto tvrzením: Jsou-li u, w maximální řešení rovnice (1.2) a existuje-li $\bar{t} \in R$ tak, že je $\|u(\bar{t}) - \tilde{x}\| \leqq \delta(\varrho)$, $\|w(\bar{t}) - \tilde{x}\| \leqq \delta(\varrho)$, pak je

$$\|u(t) - w(t)\| \leqq \eta(\varrho)\, e^{-\varrho(t - \bar{t})}\|u(\bar{t}) - w(\bar{t})\|.$$

Důkaz lze provést obdobně jako v případě nerovnosti (1.7); přitom se využije nerovnosti (1.11).

15.1.6. Poznámka: Nechť platí (1.4), (1.5) a

$$\operatorname{Re}\lambda > 0 \quad \text{pro každé vlastní číslo } \lambda \text{ matice} \quad D\,g(\tilde{x}). \tag{1.18}$$

Položme $h(x) = -g(x)$ pro $x \in H$. Funkce h splňuje podmínky (1.4), (1.5) a (1.6). Položme $\varrho_3 = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \text{ je vlastní číslo matice } D\,h(\tilde{x})\}$. Je $\varrho_3 < 0$.

Funkce $u: I \to K^n$ je řešením rovnice

$$\dot{x} = h(x) \tag{1.19}$$

právě tehdy, je-li funkce $\hat{u}$ definovaná rovnicí $\hat{u}(t) = u(-t)$ řešením rovnice (1.2); řešení u je maximální právě tehdy, je-li řešení $\hat{u}$ maximální. Proto z Věty 15.1.2 užité na rovnici (1.19) plyne, že platí toto tvrzení:

Ke každému $\varrho, 0 < \varrho < -\varrho_3$, existují čísla $\delta_1(\varrho) > 0$, $\eta_1(\varrho) > 0$ a platí: Je-li $\hat{u}$ maximální řešení rovnice (1.2) a existuje-li takové $\bar{t} \in R$, že je $\|\hat{u}(\bar{t}) - \tilde{x}\| \leqq \delta_1(\varrho)$, potom $\hat{u}$ je definováno pro všechna $t \leqq \bar{t}$ a splňuje nerovnost

$$\|\hat{u}(t) - \tilde{x}\| \leqq \eta_1(\varrho)\, e^{\varrho(t-\bar{t})} \|\hat{u}(\bar{t}) - \tilde{x}\| \quad \text{pro} \quad t \leqq \bar{t}\,.$$

Obdobným způsobem lze pozměnit tvrzení obsažená v Poznámce 15.1.5.

15.2. Nechť je $g: H \to K^n$, $\tilde{x} \in H \subset K^n$, $g(\tilde{x}) = 0$. Jak z teoretického, tak z praktického hlediska mají zvláštní význam takové body $z \in H$, že pro maximální řešení x rovnice (1.2), které v okamžiku $t = 0$ nabývá hodnoty z, platí $\lim_{t \to \infty} x(t) = \tilde{x}$. Říká se též, že řešení x rovnice (1.2) je přitahováno z bodu z k bodu $\tilde{x}$ a že bod z leží v oblasti přitažlivosti bodu $\tilde{x}$.

15.2.1. Definice: Nechť

(i) $Y_{st}(g, \tilde{x})$ je množina takových $z \in H$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice (1.2), $x(0) = z$, pak $\lim_{t \to \infty} x(t) = \tilde{x}$.

(ii) $Y_{nest}(g, \tilde{x})$ je množina takových $z \in H$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice (1.2), $x(0) = z$, pak $\lim_{t \to -\infty} x(t) = \tilde{x}$.

Definice množiny $Y_{st}(g, \tilde{x})$ je přímým zobecněním definice množiny $Y_{st}(B)$ (viz Definici 5.3.7). Je-li totiž $B \in M_n(C)$, $H = C^n$, $g(x) = Bx$ pro $x \in C^n$, $\tilde{x} = 0$, pak je $Y_{st}(g, \tilde{x}) = Y_{st}(B)$. Obdobně je v takovém případě $Y_{nest}(g, \tilde{x}) = Y_{nest}(B)$. Cílem tohoto a následujícího odstavce je vyšetřit množiny $Y_{st}(g, \tilde{x})$, $Y_{nest}(g, \tilde{x})$ za předpokladu, že platí (1.3), (1.4), (1.5) a že platí:

$$\operatorname{Re} \lambda \neq 0 \quad \text{pro každé vlastní číslo } \lambda \text{ matice } \mathrm{D}\, g(\tilde{x})\,. \tag{2.1}$$

15.2.2. Věta: *Nechť platí* (1.3) *až* (1.6). *Potom množina* $Y_{st}(g, \tilde{x})$ *je otevřená a je* $\tilde{x} \in Y_{st}(g, \tilde{x})$.

Důkaz: Podle Věty 15.1.2 je $\bar{B}(\tilde{x}, \delta(\varrho)) \subset Y_{st}(g, \tilde{x})$ pro $\varrho = -\varrho_2/2$ a speciálně je $\tilde{x} \in Y_{st}(g, \tilde{x})$. Nechť je $y \in Y_{st}(g, \tilde{x})$. Existuje $s > 0$ tak, že je

$$\Psi(s, y) \in B(\tilde{x}, \delta(\varrho)/2)\,.$$

Protože Ψ je spojitá funkce, existuje číslo $\xi > 0$ takové, že je

$$\Psi(s, z) \in B(\tilde{x}, \delta(\varrho))\,,$$

jakmile je $z \in B(y, \xi)$. Je

$$\Psi(t, z) = \Psi(t - s, \Psi(s, z))\,,$$

a proto je $\lim_{t \to \infty} \Psi(t, z) = \tilde{x}$, tedy $B(y, \xi) \subset Y_{st}(g, \tilde{x})$; množina $Y_{st}(g, \tilde{x})$ je otevřená a Věta 15.2.2 je dokázána.

15.2.3. Poznámka: Množinu $Y_{st}(g, \tilde{x})$ lze interpretovat jako množinu takových počátečních poloh z, že řešení, je-li vychýleno z polohy $\tilde{x}$ do polohy z, se vrátí (pro $t \to \infty$) do polohy $\tilde{x}$. Proto je v některých případech užitečné a důležité mít přesnější informace o množině $Y_{st}(g, \tilde{x})$. K tomu je ovšem nutné užít podrobnějších informací o g (ve srovnání s Větou 15.1.2), což je vidět z tohoto příkladu: Nechť je $\beta > 0$ a nechť funkce $g_\beta: R \to R$ je definována rovnicí $g_\beta(x) = -x + \beta x^3$. V případě rovnice

$$\dot{x} = g_\beta(x)$$

můžeme položit $\tilde{x} = -\beta^{-1/2}, 0, \beta^{-1/2}$. Je

$$Y_{st}(g_\beta, 0) = (-\beta^{-1/2}, \beta^{-1/2}), \quad Y_{st}(g_\beta, -\beta^{-1/2}) = \{-\beta^{-1/2}\},$$
$$Y_{st}(g_\beta, \beta^{1/2}) = \{\beta^{1/2}\}.$$

V obecném případě obvykle nelze explicitně udat množinu $Y_{st}(g, \tilde{x})$. Za dosti obecných podmínek lze ovšem udat kouli nebo jinou množinu, která je obsažena v $Y_{st}(g, \tilde{x})$, a v konkrétních případech lze množinu $Y_{st}(g, \tilde{x})$ hledat přibližnými metodami.

15.2.4. Věta: *Nechť platí* (1.3) *až* (1.5) *a* (1.18). *Potom množina* $Y_{nest}(g, \tilde{x})$ *je otevřená a je* $\tilde{x} \in Y_{nest}(g, \tilde{x})$.

Věta 15.2.4 plyne z Věty 15.2.2 postupem, kterého jsme užili v Poznámce 15.1.6.

15.3. Nechť je

$$\tilde{x} = 0, \tag{3.1}$$

nechť platí (1.3), (1.4), (1.5) a nechť

$$\text{Re}\,\lambda \neq 0 \text{ pro každé vlastní číslo } \lambda \text{ matice } \mathrm{D}\,g(0)\text{; přitom existují vlastní čísla } \lambda \text{ taková, že je } \text{Re}\,\lambda > 0, \text{ i taková, že je } \text{Re}\,\lambda < 0. \tag{3.2}$$

Tento případ je podstatně obtížnější. Podmínka (3.1) je zavedena pro zjednodušení některých formulací (a nevede ke ztrátě na obecnosti). Výsledek bude vysloven ve Větě 15.3.2 bez důkazu a doplněn několika poznámkami. Důkaz Věty 15.3.2 je naznačen v Dodatku 15.1.

15.3.1. Definice: Nechť X je lineární podprostor v K^n, $0 < m = \dim X$. Množina $U \subset X$ se nazývá *elipsoid* (v X se středem 0), existuje-li báze $u^{[1]}, \ldots, u^{[m]}$ v X a kvadratická forma $\xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tak, že je

$$U = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^{[i]},\ \xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \leqq 1\};$$

je-li $K = R$, pak předpokládáme, že forma ξ je *symetrická a pozitivně definitní* [tj. $\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i,j} \xi_{ij}\alpha_i\alpha_j$, $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ a $\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) > 0$ pro $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, m$], je-li $K = C$, pak předpokládáme, že forma ξ je *hermitovská* [tj. $\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i,j} \xi_{ij}\alpha_i\bar{\alpha}_j$, $\xi_{ij} = \bar{\xi}_{ji}$] a *pozitivně definitní.*

Položme $X_+ = Y_{\mathrm{nest}}(\mathrm{D}\, g(0))$, $X_- = Y_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}\, g(0))$. Je $K^n = X_+ \dotplus X_-$, $\dim X_+ > 0$, $\dim X_- > 0$ (viz Definici 5.3.7, Větu 5.3.10 a Poznámku 5.3.12).

15.3.2. Věta: *Nechť platí* (3.1), (1.3) *až* (1.5) *a* (3.2). *Potom existují kladná čísla* $\eta_+, \eta_-, \varrho_+, \varrho_-$, *elipsoidy* $U_+ \subset X_+$, $U_- \subset X_-$ (*se středy v bodě* 0) *a zobrazení* $q\colon U_+ \to U_-$, $p\colon U_- \to U_+$ *tak, že jsou splněny tyto podmínky*:

Existují diferenciály $\mathrm{D}\, q(u)$, $\mathrm{D}\, p(v)$ *a spojitě závisejí na* $u \in U_+$, $v \in U_-$. (3.3)

$$q(0) = 0\,, \quad \mathrm{D}\, q(0) = 0\,, \quad p(0) = 0\,, \quad \mathrm{D}\, q(0) = 0\,. \tag{3.4}$$

Položme $Q = \{u + q(u) \mid u \in U_+\}$, $P = \{v + p(v) \mid v \in U_-\}$. *Potom platí:*

$$Q \cap P = \{0\}\,. \tag{3.5}$$

Je-li y *maximální řešení rovnice* (1.2) *a existuje-li* $\bar{t} \in R$ *tak, že je* $y(\bar{t}) \in P$, *pak* y *je definováno pro všechna* $t > \bar{t}$ *a platí*
$$y(t) \in P\,, \quad \|y(t)\| \leqq \eta\, \mathrm{e}^{-\varrho_-(t-\bar{t})}\|y(\bar{t})\| \quad pro \quad t \geqq \bar{t}\,. \tag{3.6}$$

Je-li y *maximální řešení a existuje-li* $\bar{t} \in R$ *takové, že je* $y(t) \in U_+ \dotplus U_-$ *pro* $t \geqq \bar{t}$, *pak je* $y(\bar{t}) \in P$. (3.7)

Je-li y *maximální řešení rovnice* (1.2) *a existuje-li* $\bar{t} \in R$ *tak, že je* $y(\bar{t}) \in Q$, *pak* w *je definováno pro všechna* $t \leqq \bar{t}$ *a platí* $y(t) \in Q$,
$$\|y(t)\| \leqq \eta_+\, \mathrm{e}^{-\varrho_+(\bar{t}-t)}\|y(\bar{t})\| \quad pro \quad t \leqq \bar{t}\,. \tag{3.8}$$

Je-li y *maximální řešení a existuje-li* $\bar{t} \in R$ *takové, že je* $y(t) \in U_+ \dotplus U_-$ *pro* $t \leqq \bar{t}$, *pak je* $y(\bar{t}) \in Q$. (3.9)

15.3.3. Poznámka: Lze říci, že P je plocha a že X_- je její tečný prostor v bodě 0. Maximální řešení y, které v okamžiku t leží v P, zůstane v P pro $t \geqq \bar{t}$ a blíží se k nule pro $t \to \infty$. Naopak, je-li y takové řešení, že platí $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$, pak existuje takové $\bar{t}$, že je $y(t) \in P$ pro $t \geqq \bar{t}$. Obdobná tvrzení platí i pro množinu Q.

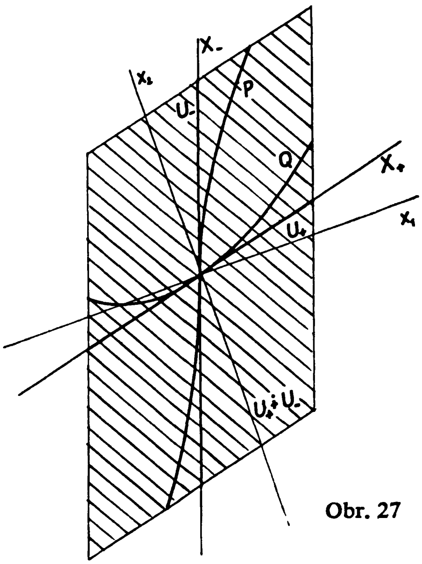
15.3.4. Poznámka: Případ $n = 2$, $\dim X_+ = \dim X_- = 1$ je znázorněn na obr. 27. U_+, U_- jsou úsečky, $U_+ \dotplus U_-$ je rovnoběžník. Speciální tvar množiny $U_+ \dotplus U_-$ je výhodný jak pro formulaci Věty 15.3.2, tak pro její důkaz. Kdybychom množinu $U_+ \dotplus U_-$ nahradili např. koulí $B(0, \delta, K^n)$ takovou, že by bylo $B(0, \delta) \subset U_+ \dotplus U_-$ museli bychom pracovat s množinou $B(0, \delta) \cap Q$ místo s množinou Q. To by bylo obtížné, neboť množina $B(0, \delta) \cap Q$ je sice grafem vhodné funkce, bylo by však obtížné, určit definiční obor této funkce.

15.3.5. Poznámka: Čísla ϱ_+, ϱ_- ve Větě 15.3.2 mohou být libovolná kladná čísla, pro něž platí

(i) $\varrho_+ < \operatorname{Re} \lambda$ pro každé takové vlastní číslo λ matice $\mathrm{D}\, g(0)$, že je $0 < \operatorname{Re} \lambda$,

(ii) $\operatorname{Re} \lambda < -\varrho_-$ pro každé takové vlastní číslo λ matice $\mathrm{D}\, g(0)$, že je $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

V obecném případě číslo η_+ závisí též na ϱ_+ a číslo η_- na ϱ_-.



Obr. 27

15.3.6. Poznámka: Vlastnosti rovnice (1.2) popsané ve Větě 15.3.2 a v Poznámce 15.3.3 připomínají vlastnosti rovnice $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = -x_2$; trajektorie této rovnice (které neleží v osách x_1, x_2) jsou rovnoosé hyperboly ($x_1 x_2 = c \neq 0$). Proto bod 0 se nazývá *hyperbolický bod rovnice* (1.2).

15.3.7. Poznámka: Nechť je $K = R$, $n = 2$, $h: R^2 \to R^2$ a nechť rovnice

$$\dot{x} = h(x) \tag{3.10}$$

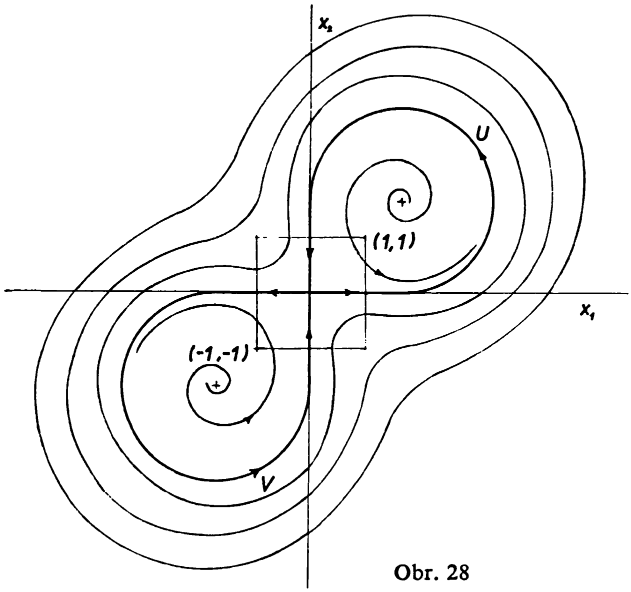
má trajektorie, jak je naznačeno na obr. 28. Nechť je $h_1(x_1, x_2) = x_1$, $h_2(x_1, x_2) = -x_2$ pro $|x_1|, |x_2| \leqq 1$. Nechť u je maximální řešení rovnice (3.10) splňující podmínku $u(0) = (0, 1)$ a nechť v je maximální řešení rovnice (3.10) splňující podmínku $v(0) = (0, -1)$. Řešení u se pro $t \to -\infty$ blíží k počátku po ose x_1, pro $t \to \infty$ přejde na osu x_2 a blíží se po ní k počátku. Totéž lze říci i o řešení v. Nechť U, V jsou příslušné trajektorie, tj. $U = \{u(t) \mid t \in R\}$, $V = \{v(t) \mid t \in R\}$. Snadno se zjistí, že je $Y_{st}(0, h) = U \cup V \cup \{0\} = Y_{nest}(0, h)$. Tvrzení Věty 15.3.2 jsou splněna např. tak, že je

$$U_+ = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqq 1, x_2 = 0\},$$
$$U_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, |x_2| \leqq 1\},$$

$q_+(x_1) = 0$ pro $|x_1| \leqq 1$, $p(x_2) = 0$ pro $|x_2| \leqq 1$. Je tedy $Q = U_+$, $P = U_-$ a zřejmě je

$$Q \neq Y_{\text{nest}}(0, h) \cap (U_+ + U_-), \quad P \neq Y_{\text{st}}(0, h) \cap (U_+ + U_-).$$

Pro množinu $Y_{\text{st}}(\tilde{x}, g)$ se ujal název ***stabilní varieta bodu*** $\tilde{x}$ a pro množinu $Y_{\text{nest}}(\tilde{x}, g)$ název ***nestabilní varieta bodu*** $\tilde{x}$, i když množiny $Y_{\text{st}}(0, h)$, $Y_{\text{nest}}(0, h)$ nemusejí být varietami ve smyslu definice, obvyklé v diferenciální geometrii.



Obr. 28

15.3.8. Poznámka: Množina $Y_{\text{st}}(\tilde{x}, g)$ se skládá z trajektorií takových maximálních řešení w rovnice (1.2), že je $\lim_{t \to \infty} w(t) = \tilde{x}$. Lze též vyšetřovat množiny složené z trajektorií takových řešení u, že je např. $(u(t) - \tilde{x})\,e^{-\alpha t} \to 0$ pro $t \to \infty$, kde α je pevné kladné číslo (viz [21], kap. IX). Velmi zajímavá je též otázka, zda existují transformace převádějící rovnici (1.2) v rovnici $\dot{y} = By$ (v nějakém okolí počátku) a jaké vlastnosti mají takové transformace. Také v této otázce odkazujeme na monografii [21], kap. IX.

15.4. V tomto odstavci ukážeme, jak Věty 15.2.2 a 15.3.2 lze přenést na případ, kdy rovnici (1.2) vyšetřujeme v okolí množiny hodnot jejího periodického řešení. Budeme se zabývat případem, že všechny proměnné jsou reálné, tj. budeme psát R místo K. To je podstatné např. v důkazu Věty 15.4.1 (viz Dodatek 15.2), neboť řešení ω rovnice (D15.2.6) musí být reálné. Nechť platí:

Množina $H \subset R^n$ je otevřená, $g: H \to R^n$. (4.1)

V každém bodě $x \in H$ existuje diferenciál $\mathrm{D}\,g(x)$ a závisí spojitě na x. (4.2)

Nechť $s: R \to H$ je periodické (nekonstantní) řešení rovnice (1.2). Potom existuje číslo $T > 0$ tak, že je $s(t + T) = s(t)$ pro $t \in R$; $s(t) \neq s(\tau)$ pro $|t - \tau| < T$ (srovnej Větu 12.3.7). Rovnice (1.2) je jednoznačná; kdyby bylo $g(s(t_0)) = 0$ pro nějaké $t_0 \in R$, bylo by $s(t) = s(t_0)$ pro $t \in R$; je tedy $g(s(t)) \neq 0$ pro $t \in R$ a také $\dot{s}(t) \neq 0$ pro $t \in R$. Řešení s nemůže ovšem být exponenciálně stabilní, neboť pro každé $\sigma \in R$ funkce

$$v_\sigma(t) = s(t + \sigma) \quad \text{pro} \quad t \in R\,, \tag{4.3}$$

je také řešením rovnice (1.2). Nechť S je trajektorie řešení s, tj. $S = \{s(t) \mid t \in R\}$. Množina S je současně trajektorií řešení v_σ pro $\sigma \in R$. Budeme vyšetřovat průběh řešení rovnice (1.2) v nějakém okolí množiny S. Protože funkce g je spojitá, má každé řešení v rovnice (1.2) spojitou derivaci; protože diferenciál $\mathrm{D}\, g(x)$ spojitě závisí na x, můžeme pravou stranu rovnice $\dot{v}(t) = g(v(t))$ derivovat, a proto každé řešení v rovnice (1.2) má spojitou derivaci druhého řádu. Derivujeme-li rovnici $\dot{s}(t) = g(s(t))$, dostáváme, že platí $\ddot{s}(t) = \mathrm{D}\, g(s(t))\, \dot{s}(t)$. To znamená, že periodická funkce $\dot{s}$ je řešením rovnice ve variacích

$$\dot{w}(t) = \mathrm{D}\, g(s(t))\, w(t)\,. \tag{4.4}$$

Rovnice (4.4) je periodická s periodou T. Nechť W je fundamentální matice rovnice (4.4). Připomeňme si, že vlastní čísla matice $W^{-1}(0)\, W(T)$ se nazývají multiplikátory rovnice (4.4) a že multiplikátory ani jejich násobnosti nezávisejí na volbě matice W (viz odst. 6.2). Je $\dot{s}(t) = W(t)\, c$, kde $0 \neq c \in K^n$. Protože funkce $\dot{s}$ má periodu T, je $[W(T) - W(0)]\, c = 0$ a číslo 1 je jeden z multiplikátorů rovnice (4.4). Rovnice (4.4) má úlohu obdobnou jako rovnice (1.13); průběh jejích řešení je do značné míry určen jejími multiplikátory. Ukážeme, že vlastnosti rovnice (1.2) v okolí množiny S jsou obdobné vlastnostem rovnice (4.4).

Nechť $\varrho(x, S)$ znamená vzdálenost bodu $x \in R^n$ od množiny S [tj. $\varrho(x, S) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in S\}$]. Půjde nám zejména o to, zda dané řešení v rovnice (1.2) se blíží k S pro $t \to \infty$, tj. zda platí $\lim_{t \to \infty} \varrho(v(t), S) = 0$. Nechť $Y_{st}(g, S)$ je množina takových $y \in H$, že existuje řešení v rovnice (1.2) a číslo $t_0 \in R$ tak, že je $v(t_0) = y$, $\lim_{t \to \infty} \varrho(v(t), S) = 0$. [Je ovšem $v(t) = \Psi(t - t_0, y)$, kde Ψ má stejný význam jako v odst. 12.3.] Zřejmě platí $S \subset Y_{st}(g, S)$.

15.4.1. Věta: *Nechť multiplikátor* 1 *rovnice* (4.4) *je jednoduchý a nechť pro ostatní multiplikátory* μ *je* $|\mu| < 1$. *Potom množina* $Y_{st}(g, S)$ *je otevřená.*

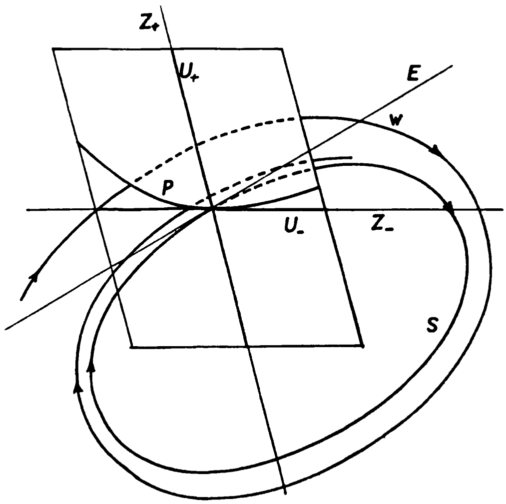
Důkaz Věty 15.4.1, jakož i tvrzení z Poznámky 15.4.2, je obsažen v Dodatku 15.2.

15.4.2. Poznámka: Z Věty 15.4.1 plyne, že existuje takové číslo $\alpha > 0$, že platí: Jestliže w je maximální řešení rovnice (1.2), $\tilde{x} \in S$, $\tilde{t} \in R$, a je-li $\|w(\tilde{t}) - \tilde{x}\| \leqq \alpha$, pak w je definováno pro všechna $t \geqq t_0$ a platí $\lim_{t \to \infty} \varrho(w(t), S) = 0$. Dokonce lze dokázat, že existuje číslo σ tak, že je $\lim_{t \to \infty} \|w(t) - v_\sigma(t)\| = 0$, [viz (4.3)], tedy řešení w se blíží k řešení v_σ.

15.4.3. Poznámka: Všimneme si ještě situace, jaká nastane v případě, že platí:

Je-li μ multiplikátor, $|\mu| = 1$, pak je $\mu = 1$; multiplikátor 1 rovnice (4.2) je jednoduchý. Existují multiplikátory μ takové, že je $|\mu| < 1$, i takové, že je $|\mu| > 1$. (4.5)

Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je $s(0) = 0$. Zvolme lineární podprostor $Z \subset R^n$, $\dim Z = n - 1$ tak, aby platilo $\dot{s}(0) \notin Z$. Každé řešení w rovnice (1.2), pokud je v blízkosti trajektorie S, chová se podobně jako některé řešení v_σ a protne prostor Z v blízkosti bodu 0. Zajímáme-li se o taková řešení w, která se blíží k S pro $t \to \infty$, stačí, budeme-li se zabývat těmi body, v nichž w protne Z. Lze



Obr. 29

dokázat, že existují podprostory Z_-, Z_+ v Z, elipsoidy $U_- \subset Z_-$, $U_+ \subset Z_+$ a zobrazení $p: U_- \to U_+$ tak, že je $\dim Z_- > 0$, $\dim Z_+ > 0$, $Z = Z_+ \dotplus Z_-$, $Z_+ \cap Z_- = \{0\}$. Zobrazení p má spojitý diferenciál, $p(0) = 0$. Položme $P = \{x_- + p(x_-) | x_- \in U_-\}$.

Platí:

Je-li w maximální řešení rovnice (1.2) *a existuje-li $\bar{t} \in R$ tak, že je $w(\bar{t}) \in P$, pak w je definováno pro všechna $t \geqq \bar{t}$ a platí $\lim_{t \to \infty} \varrho(w(t), S) = 0$; existuje posloupnost $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots$ taková, že je $\bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \ldots$, $w(\bar{t}_i) \in P$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots$, $w(t) \notin U_+ \dotplus U_-$ pro $\bar{t}_i < t < \bar{t}_{i+1}$, $\lim_{t \to \infty} \bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i = T$ (viz obr. 29).* (4.6)

Je-li w maximální řešení rovnice (1.2) *a platí-li* $\lim_{t \to \infty} \varrho(w(t), S) = 0$, *pak existuje $\bar{t} \in R$ tak, že je $w(\bar{t}) \in P$.* (4.7)

Řešení w, pro něž je $w(\bar{t}_0) \in P$, se tedy pro $t \geqq \bar{t}_0$ pohybuje v blízkosti množiny S, protíná postupně množinu $U_+ + U_-$ v bodech $w(\bar{t}_1), w(\bar{t}_2), \ldots$ a přitom se blíží k množině S. Existuje též zobrazení $q: U_+ \to U_-$ a platí obdobná tvrzení pro řešení w taková, že je $\lim_{t \to -\infty} \varrho(w(t), S) = 0$. Hlavní myšlenka důkazů těchto tvrzení je naznačena v Dodatku 15.3.

15.4.4. Poznámka: Limitní vztah $\lim_{t \to \infty} \varrho(w(t), S) = 0$ v (4.6) lze nahradit tímto silnějším tvrzením:

Existují taková čísla $\varrho_-, \eta > 0$, že ke každému bodu $z \in P$ existuje $\sigma \in R$ tak, že je

$$\|\psi(t, z) - v_\sigma(t)\| \leqq \eta \, e^{-\varrho_- t} \|z\| \quad \text{pro} \quad t \geqq 0 \, .$$

Přitom ϱ_- je libovolné kladné číslo takové, že je $|\mu| < e^{-\varrho_- T}$, jakmile μ je multiplikátor rovnice (4.4) *a je $|\mu| < 1$; η může záviset na ϱ_-.*