13. Diferencovatelnost řešení vzhledem k počátečním podmínkám

13.1. V předcházející kapitole jsme dokázali, že funkce Φ je spojitá, je-li funkce f spojitá a je-li rovnice (10.1.1) jednoznačná. Přirozeně z definice funkce Φ plyne, že existuje parciální derivace $\partial\Phi/\partial t$ a že platí

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, t_0, \tilde{x}) = f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x}))\,, \tag{1.1}$$

tedy funkce $\partial\Phi/\partial t$: $\hat{G} \to K^n$ je spojitá. V této kapitole ukážeme, že funkce Φ má spojité derivace, má-li funkce f spojité derivace. Pojem derivace ve směru a diferenciálu je zaveden v Dodatku 11.1; diferenciál vzhledem k některé z proměnných je zaveden v Dodatku 11.2. Hlavní výsledek je obsažen ve Větě 13.1.1. Z ní je odvozena tzv. „rovnice ve variacích" [(1.11)], z níž lze počítat derivace funkce Φ. V případě, že $K = C$, plyne z Věty 13.1.1, že funkce Φ má spojité derivace v komplexním oboru podle složek $\tilde{x}_i$ vektoru $\tilde{x}$, a je tedy vzhledem k těmto proměnným holomorfní; tato situace je vyložena v odst. 13.3.

13.1.1. Věta (o diferencovatelnosti řešení podle počátečních podmínek): *Nechť je splněna podmínka*

> *Funkce* f: $G \to K^n$ *je spojitá a pro každý vektor* $w \in K^n$ *existuje derivace* $\mathrm{D}^{2}_{(w)}f$: $G \to K^n$ *funkce* f *ve směru* w *a je spojitá.* (1.2)

Potom je definována funkce Φ *a existují derivace*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_0}\,, \quad \mathrm{D}_w^{(3)}\Phi \quad (\textit{pro každé } w \in K^n)\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t_0}\Phi\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial t_0\,\partial t}\Phi\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{D}_w^{(3)}\Phi\,, \quad \mathrm{D}_w^{(3)}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\,,$$

všechny zobrazují spojitě $\hat{G}$ *do* K^n *a platí*

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0\,\partial t}\Phi = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t_0}\Phi\,, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{D}_w^{(3)}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{D}_w^{(3)}\Phi\,. \tag{1.4}$$

Větu 13.1.1 dokážeme později (viz str. 237). Podmínka (1.2) je splněna právě tehdy, jestliže platí jedna z podmínek:

(i) Funkce f má spojité parciální derivace $\partial f / \partial x_i : G \to K^n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) V každém bodě $(t, x) \in G$ existuje diferenciál $D^{(2)} f(t, x)$ a závisí spojitě na (t, x).

(Viz Dodatky 11.1 a 11.2.)

Z Věty 13.1.1 plyne, že rovnici (1.1) můžeme derivovat vzhledem k třetí proměnné v libovolném směru $w \in K^n$ nebo podle druhé proměnné; v obou případech můžeme zaměnit pořadí derivací na levé straně. Tedy je

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = D^{(2)} f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x})) \frac{\partial}{\partial t_0} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) , \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = D^{(2)} f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x})) \, D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) . \tag{1.6}$$

Místo $\partial / \partial t$, $\partial / \partial t_0$ můžeme psát $D_1^{(1)}$, $D_1^{(2)}$. Je

$$\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x} \quad \text{pro} \quad (t_0, \tilde{x}) \in G . \tag{1.7}$$

Derivováním podle t_0 plyne

$$0 = \frac{d}{dt_0} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = D_1^{(1)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) + D_1^{(2)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) .$$

Podle (1.1) je $D_1^{(1)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = f(t_0, \tilde{x})$, tedy

$$D_1^{(2)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = -f(t_0, \tilde{x}) . \tag{1.8}$$

Aplikujeme-li na rovnici (1.7) operátor derivace $D_w^{(3)}$, dostáváme

$$D_w^{(3)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = w . \tag{1.9}$$

Při pevných t_0, $\tilde{x}$, w položme $u = \Phi(., t_0, \tilde{x})$, $v = D_1^{(2)} \Phi(., t_0, \tilde{x})$, $D_w^{(3)} \Phi(., t_0, x) = z$. Podle (1.5) a (1.8) platí

$$\dot{v}(t) = D^{(2)} f(t, u(t)) \, v(t) , \quad v(t_0) = -f(t_0, \tilde{x}) , \tag{1.10}$$

a podle (1.6) a (1.9) je

$$\dot{z}(t) = D^{(2)} f(t, u(t)) \, z(t) , \quad z(t_0) = w . \tag{1.11}$$

Rovnice (1.11) se nazývá *rovnice ve variacích*. Rovnice (1.10) a (1.11) umožňují vypočítat pro některé $(t, t_0, \tilde{x})$ hodnoty

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \Phi(t, t_0, \tilde{x}), \; D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) ,$$

aniž derivujeme funkci Φ [tu pro všechny body $(t, t_0, \tilde{x})$ nemusíme ani znát]. Ukážeme to na příkladech:

Příklad 1: Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x} = a(t)\, x + b(t)\, x^2\,, \tag{1.12}$$

kde funkce a, b: $R \to R$ jsou spojité. Nechť je $\tilde{x} = 0$, $t_0 \in R$. Je $\Phi(t, t_0, 0) = u(t) = 0$, $D^{(2)} f(t, x) = D_1^{(2)} f(t, x) = a(t) + 2b(t)\, x$, $D^{(2)} f(t, u(t)) = a(t)$, tedy podle (1.11) je $\dot{z}(t) = a(t)\, z(t)$, $z(t_0) = w$; odtud plyne

$$D_w^{(3)}\, \Phi(t, t_0, 0) = z(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\right] w\,,$$

$$D^{(3)}\, \Phi(t, t_0, 0) = D_1^{(3)}\, \Phi(t, t_0, 0) = \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\,.$$

Z rovnice $\Phi(t, t_0, 0) = 0$ bezprostředně plyne, že je $D_1^{(2)}\, \Phi(t, t_0, 0) = 0$.

Příklad 2: Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x} = x^3(x - \sin 2t) + 2 \cos 2t\,. \tag{1.13}$$

Nechť je $\tilde{x} = t_0 = 0$. Je $\Phi(t, 0, 0) = u(t) = \sin 2t$,

$$D^{(2)} f(t, x) = x^3 + 3x^2(x - \sin 2t)\,, \quad D^{(2)} f(t, u(t)) = u^3(t) = \sin^3 2t\,.$$

Podle (1.10) je $\dot{v}(t) = (\sin^3 2t)\, v(t)$, $v(0) = -2$, tedy

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\, \Phi(t, 0, 0) = D_1^{(2)}\, \Phi(t, 0, 0) = -2 \exp \int_0^t \sin^3 2\tau\, d\tau\,.$$

Podle (1.11) je $\dot{z}(t) = (\sin^3 2t)\, z(t)$, $z(0) = w$, tedy

$$D^{(3)}\, \Phi(t, 0, 0) = D_1^{(3)}\, \Phi(t, 0, 0) = \exp \int_0^t \sin^3 2\tau\, d\tau\,.$$

Příklad 3: Vyšetřujme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 - 1\,, \\ \dot{x}_2 &= 1 - x_1^3\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Nechť je

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0\,, \quad w \in R^2\,.$$

Je

$$\Phi(t, 0, \tilde{x}) = u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad t \in R\,,$$

$$D^{(2)} f(t, x) = \begin{pmatrix} 0, & 3x_2^2 \\ -3x_1^2, & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(2)} f(t, u(t)) = \begin{pmatrix} 0, & 3 \\ -3, & 0 \end{pmatrix} = A\,.$$

Podle (1.11) je $\dot{z}(t) = A\, z(t)$, $z(0) = w$, tedy

$$D_w^{(3)}\, \Phi(t, 0, \tilde{x}) = e^{At} w \quad \left[\text{je ovšem } e^{At} = \begin{pmatrix} \cos 3t, & \sin 3t \\ -\sin 3t, & \cos 3t \end{pmatrix}\right].$$

Vyšetřujme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ \dot{y} &= D^{(2)} f(t, x)\, y. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Pravá strana soustavy (1.15) zobrazuje spojitě $G \times K^n$ do K^{2n}.

13.1.2. Pomocná věta: *Nechť platí* (1.2). *Pak soustava* (1.15) *je jednoznačná.*

Důkaz: Nechť $\mathscr{J}_i$ je interval v R, $x^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^n$, $y^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^n$, a nechť funkce $\mathrm{col}\,(x^{[i]}, y^{[i]}): \mathscr{J}_i \to K^{2n}$ je řešení soustavy (1.15), $i = 1, 2$. Nechť existuje $t_0 \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$ takové, že $x^{[1]}(t_0) = x^{[2]}(t_0)$, $y^{[1]}(t_0) = y^{[2]}(t_0)$. Rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ je jednoznačná podle Věty 11.1.6. Je tedy $x^{[1]}(t) = x^{[2]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$. Proto $y^{[1]}$ i $y^{[2]}$ splňují (na $\mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$) lineární diferenciální rovnici $\dot{y} = D^{(2)} f(t, x^{[1]}(t))\, y$ a tak je $y^{[1]}(t) = y^{[2]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$ podle Věty 4.3.2. Pomocná věta 13.1.2 je dokázána.

Vzhledem k Pomocné větě 13.1.2 existuje funkce Θ taková, že

$$\Theta\left(., t_0, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right)$$

je maximální řešení soustavy (1.15),

$$\Theta\left(t_0, t_0, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad (t_0, \tilde{x}) \in G,\ \tilde{y} \in K^n.$$

[Viz Větu 12.1.1 a Definici 12.2.1.] Podle Věty 12.2.6 funkce Θ je spojitá. Nechť $\Phi: \hat{G} \to K^n$ má obvyklý význam, tj. nechť $\Phi(., t_0, \tilde{x})$ je maximální řešení rovnice $\dot{x} = f(t, x)$, $\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x}$. Z tvaru soustavy (1.15) plyne, že je

$$\Theta\left(t, t_0, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) \\ \Lambda(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix},$$

kde $\Lambda(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{y})$ znamená posledních n řádků vektoru na levé straně. Také odtud plyne, že definiční obor funkcí Λ i Θ je $\hat{G} \times K^n$ a že funkce $\Lambda: \hat{G} \times K^n \to K^n$ je spojitá. Z následující Věty 13.1.3 lze již jednoduše dokázat Větu 13.1.1.

13.1.3. Věta: *Nechť je splněna podmínka* (1.2). *Potom existují derivace*

$$D_w^{(3)}\, \Phi(t, t_0, \tilde{x}), \quad D_1^{(2)}\, \Phi(t, t_0, \tilde{x})$$

a platí rovnice

$$D_w^{(3)}\, \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \Lambda(t, t_0, \tilde{x}, w), \tag{1.16}$$

$$D_1^{(2)}\, \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \Lambda(t, t_0, \tilde{x}, -f(t_0, \tilde{x})). \tag{1.17}$$

Důkaz: (1.16) znamená, že platí

$$\lim_{\lambda \to 0, \lambda \in K} \lambda^{-1}[\Phi(t, t_0, \tilde{x} + \lambda w) - \Phi(t, t_0, \tilde{x})] = \Lambda(t, t_0, \tilde{x}, w) \tag{1.18}$$

pro $(t, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$, $w \in K^n$. Protože $t_0, \tilde{x}, w$ budou v této úvaze pevné, budeme psát $\Phi(t, t_0, \tilde{x} + \lambda w) = \tilde{\Phi}(t, \lambda)$, $\Lambda(t, t_0, \tilde{x}, w) = \tilde{\Lambda}(t)$. Nechť je pro určitost $t > t_0$. Funkce $\tilde{\Phi}$ je definovaná a spojitá na otevřené množině v $R \times K$, která obsahuje všechny body $(\tau, 0)$, $t_0 \leqq \tau \leqq t$. Je $(\tau, \tilde{\Phi}(\tau, 0)) \in G$ pro $t_0 \leqq \tau \leqq t$. Proto existují čísla $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tak, že

$$V = \{(\tau, v) \in R \times K^n | \; t_0 \leqq \tau \leqq t, \; \|v - \tilde{\Phi}(\tau, 0)\| \leqq \varepsilon\} \subset G$$

a že $(\tau, \tilde{\Phi}(\tau, \lambda)) \in V$ pro $t_0 \leqq \tau \leqq t$, $|\lambda| \leqq \delta$. Množina V je kompaktní, tedy existuje $\varkappa_1 \in R$ tak, že je $\|D^{(2)} f(t, x)\| \leqq \varkappa_1$ pro $(t, x) \in V$. Je [viz (D11.1.3)]

$$f(t, u) - f(t, v) = \int_0^1 D^{(2)} f(t, v + \vartheta[u - v]) \, d\vartheta \, (u - v) \tag{1.19}$$

pro (t, u), $(t, v) \in V$, tedy

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leqq \varkappa_1 \|u - v\| \tag{1.20}$$

pro (t, u), $(t, v) \in V$. Dále je

$$\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) = \tilde{x} + \lambda w + \int_{t_0}^{\tau} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, \lambda)) \, d\sigma, \tag{1.21}$$

$$\tilde{\Phi}(\tau, 0) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{\tau} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0)) \, d\sigma, \tag{1.22}$$

$$\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0) = \lambda w + \int_{t_0}^{\tau} [f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, \lambda)) - f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))] \, d\sigma \tag{1.23}$$

pro $|\lambda| \leqq \delta$, $t_0 \leqq \tau \leqq t$. Podle (1.20) je

$$\|\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)\| \leqq |\lambda| \, \|w\| + \int_{t_0}^{\tau} \varkappa_1 \|\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)\| \, d\sigma,$$

podle Věty 4.3.1 je

$$\|\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)\| \leqq |\lambda| \, \|w\| \exp[\varkappa_1(\tau - t_0)],$$

tedy

$$\|\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)\| \leqq \varkappa_2 |\lambda| \, \|w\|, \tag{1.24}$$

kde $\varkappa_2 = \exp[\varkappa_1(t - t_0)]$.

Dále je

$$\Lambda(\tau) = w + \int_{t_0}^{\tau} D^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0)) \, \Lambda(\sigma) \, d\sigma. \tag{1.25}$$

Pro $|\lambda| \leqq \delta$, $\lambda \neq 0$ z (1.23) a (1.24) dostáváme

$$[\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)]\, \lambda^{-1} - \Lambda(\tau) =$$
$$= \lambda^{-1} \int_{t_0}^{\tau} [f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, \lambda)) - f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))]\, \mathrm{d}\sigma -$$
$$- \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{D}^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))\, \Lambda(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,. \tag{1.26}$$

Podle (1.19) je

$$f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, \lambda)) - f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0)) =$$
$$= \mathrm{D}^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))\, [\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)] + \Gamma(\sigma, \lambda)\, [\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)]\,,$$

kde

$$\Gamma(\sigma, \lambda) = \int_0^1 [\mathrm{D}^{(2)} f(\sigma, [1 - \vartheta]\, \tilde{\Phi}(\sigma, 0) + \vartheta\, \tilde{\Phi}(\sigma, \lambda)) - \mathrm{D}^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))]\, \mathrm{d}\vartheta\,.$$

Po dosazení do (1.26) dostáváme

$$[\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)]\, \lambda^{-1} - \Lambda(\tau) =$$
$$= \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{D}^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))\, \{[\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \Phi(\sigma, 0)]\, \lambda^{-1} - \Lambda(\sigma)\}\, \mathrm{d}\sigma +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau} \Gamma(\sigma, \lambda)\, [\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)]\, \lambda^{-1}\, \mathrm{d}\sigma\,. \tag{1.27}$$

Funkce Γ je spojitá na kompaktní množině $\{(\sigma, \lambda) |\ t_0 \leqq \sigma \leqq t, |\lambda| \leqq \delta\}$, $\Gamma(\sigma, 0) = 0$. Pro $0 < \nu \leqq \delta$ položme $\varrho(\nu) = \max\, \{\|\Gamma(\sigma, \lambda)\| \mid t_0 \leqq \sigma \leqq t, |\lambda| \leqq \nu\}$. Snadno lze dokázat, že je

$$\lim_{\nu \to 0+} \varrho(\nu) = 0\,. \tag{1.28}$$

Je (viz též (1.24)]

$$\left\| \int_{t_0}^{\tau} \Gamma(\sigma, \lambda)\, [\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)]\, \lambda^{-1}\, \mathrm{d}\sigma \right\| \leqq (t - t_0)\, \varrho(|\lambda|)\, \varkappa_2 \|w\|\,.$$

Je $\|\mathrm{D}^{(2)} f(\sigma, \tilde{\Phi}(\sigma, 0))\| \leqq \varkappa_1$ a tak z (1.27) plyne

$$\|[\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)]\, \lambda^{-1} - \Lambda(\tau)\| \leqq \int_{t_0}^{\tau} \varkappa_1 \|[\tilde{\Phi}(\sigma, \lambda) - \tilde{\Phi}(\sigma, 0)]\, \lambda^{-1} -$$
$$- \Lambda(\sigma)\|\, \mathrm{d}\sigma + (t - t_0)\, \varrho(|\lambda|)\, \varkappa_2 \|w\|$$

pro $t_0 \leqq \tau \leqq t$, $0 < |\lambda| \leqq \delta$. Podle Věty 4.3.1 je

$$\|[\tilde{\Phi}(\tau, \lambda) - \tilde{\Phi}(\tau, 0)]\, \lambda^{-1} - \Lambda(\tau)\| \leqq \varrho(|\lambda|)\, (t - t_0)\, \varkappa_2 \|w\|\, \mathrm{e}^{\varkappa_1 (t - t_0)}\,.$$

Vzhledem k (1.28) je

$$\lim_{\lambda \to 0_+, \lambda \in K} \left[\tilde{\Phi}(t, \lambda) - \Phi(t, 0)\right] \lambda^{-1} = \Lambda(t)$$

a tak platí (1.18), tedy i (1.16). Rovnice (1.17) se dokáže obdobně. Věta 13.1.3 je dokázána.

Důkaz Věty 13.1.1: Z (1.17) a (1.16) plyne, že derivace $\partial\Phi/\partial t_0$, $D_w^{(3)} \Phi$ existují a že jsou spojité. Z definice funkce Λ a z (1.16) plyne, že existuje derivace

$$\frac{\partial}{\partial t} D_w^{(3)} \Phi ,$$

že platí

$$\frac{\partial}{\partial t} D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = D^{(2)} f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x}))\, D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) ,$$

tedy derivace

$$\frac{\partial}{\partial t} D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x})$$

závisí spojitě na $(t, t_0, \tilde{x})$. Na pravou stranu rovnice (1.1) můžeme aplikovat operátor $D_w^{(3)}$; je

$$D_w^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = D^{(2)} f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x})\, D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x})) ,$$

derivace $D_w^{(3)} \partial\Phi/\partial t$ je spojitá a platí (1.4). Zcela obdobným způsobem se dokáže, že existují derivace

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t_0} \Phi , \quad \frac{\partial^2}{\partial t_0\, \partial t} \Phi ,$$

že jsou spojité a že platí (1.3). Věta 13.1.1 je dokázána.

13.1.4. Věta: *Platí-li* (1.2), *pak funkce* Φ *má diferenciál* $D\,\Phi$ (*vzhledem ke všem proměnným dohromady*) *a* $D\,\Phi(t, x)$ *závisí spojitě na* (t, x).

Věta 13.1.4 plyne z Věty 13.1.1 (viz Dodatek 11.1). Platí-li (1.2), pak tedy speciálně existuje diferenciál $D^{(3)} \Phi$ a $D^{(3)} \Phi(t, x)$ závisí spojitě na (t, x).

13.1.5. Poznámka: Nechť platí (1.2), $(t_0, x, \tilde{x}) \in G$, $u(t) = \Phi(t, t_0, \tilde{x})$ a nechť Y je fundamentální matice rovnice

$$\dot{y} = D^{(2)} f(t, u(t))\, y(t) , \tag{1.29}$$

$Y(t_0) = I$. Vzhledem k (1.11) je $D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = Y(t)\, w$ pro $w \in K^n$. Protože existuje $D^{(3)} \Phi$, je $D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = D^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x})\, w$ pro $w \in K^n$ (viz Dodatek 11.2). Je tedy $D^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = Y(t)$. Jinými slovy $D^{(3)} \Phi(., t_0, \tilde{x})$ je fundamentální matice rovnice (1.29) splňující podmínku $D^{(3)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = I$.

13.1.6. Poznámka: Nechť U je fundamentální matice rovnice $x = A(t)\,x$, kde funkce $A\colon \mathscr{J} \to M_n$ je spojitá. Je $\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = U(t)\,U^{-1}(t_0)\,\tilde{x}$; odtud plyne $\mathrm{D}_w^{(3)}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = U(t)\,U^{-1}(t_0)\,w$, $\mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = U(t)\,U^{-1}(t_0)$.

Je $U(t)\,U^{-1}(t) = I$, derivováním plyne $(U^{(-1)})^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = -U^{-1}(t)\,A(t)$, tedy

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = -U(t)\,U^{-1}(t_0)\,A(t_0)\,\tilde{x}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t_0}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = -A(t)\,U(t)\,U^{-1}(t_0)\,A(t_0)\,\tilde{x}\,.$$

13.1.7. Poznámka: Nechť množina $H \subset K^n$ je otevřená, $0 \in H$, nechť funkce $b\colon H \to K^n$ je spojitá a má spojitý diferenciál $\mathrm{D}b$ a nechť $b(0) = 0$, $\mathrm{D}b(0) = 0$, $A \in M_n$. V případě rovnice $\dot{x} = f(x)$, kde $f(x) = Ax + b(x)$, je $\mathrm{D}f(0) = A$ a podle Věty 13.1.3 je

$$\mathrm{D}_w^{(3)}\,\Phi(t, t_0, 0) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}w\,, \quad \mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(t, t_0, 0) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,,$$

$$\mathrm{D}_1^{(2)}\,\Phi(t, t_0, 0) = 0\,.$$

13.1.8. Poznámka: Nechť platí (1.2). Protože $\mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(., t_0, \tilde{x})$ je fundamentální matice rovnice (1.29) a protože je $\mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = I$ (viz Poznámku 13.1.5), z (1.10) plyne, že je

$$\mathrm{D}_1^{(2)}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = -\mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x})\,f(t_0, \tilde{x})\,. \tag{1.30}$$

Rovnici (1.30) lze též odvodit přímo. Zřejmě je $\mathrm{D}_1^{(1)}\,\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = f(t_0, \tilde{x})$. Derivováním rovnice $\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x}$ podle t_0 dostáváme, že je $\mathrm{D}_1^{(1)}\,\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) + \mathrm{D}_1^{(2)}\,\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = 0$, tj.

$$\mathrm{D}_1^{(2)}\,\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = -f(t_0, \tilde{x})\,. \tag{1.31}$$

Derivujme rovnici $\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \Phi(t, s, \Phi(s, t_0, \tilde{x}))$ podle t_0. Dostáváme

$$\mathrm{D}_1^{(2)}\,\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(t, s, \Phi(s, t_0, \tilde{x}))\,\mathrm{D}_1^{(2)}\,\Phi(s, t_0, \tilde{x})\,.$$

Dosadíme-li sem $s = t_0$ a užijeme-li rovnice (1.31), dostáváme (1.30).

13.2. Všimněme si případu, kdy $K = C$. Nechť platí (1.2). Pro

$$x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \in C^n\,, \quad w = \operatorname{col}(\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn})\,,$$

kde $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kl} = 0$ pro $k \neq l$, $j, k, l = 1, 2, \ldots, n$, je $\mathrm{D}_w^{(2)} f = \partial f/\partial x_j$; přitom na pravé straně je parciální derivace podle komplexní proměnné x_j [neboť v limitě, kterou je v Dodatku 11.1 definováno $\mathrm{D}_w\,h(x)$, se požaduje $\lambda \in K$]. Je tedy funkce $f(t, .)$ holomorfní (viz Větu D13.1.2). Z Věty 13.1.1 plyne obdobnou úvahou, že funkce $\Phi(t, t_0, .)$ je holomorfní.

Nechť $\mathscr{J}, \mathscr{J}_0$ jsou otevřené intervaly v R, $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$, $w \in C^n$, a nechť je $(t, t_0, z) \in \hat{G}$, jakmile je $t \in \mathscr{J}$, $t_0 \in \mathscr{J}_0$, $|z_i - w_i| \leqq r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom podle (D13.1.3) (viz též Poznámku D13.1.4) platí pro $t \in \mathscr{J}$, $t_0 \in \mathscr{J}_0$, $|z_j - w_j| < r_j$,

$j = 1, 2, \ldots, n,$

$$\Phi(t, t_0, z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{S_1} \ldots \int_{S_n} \frac{\Phi(t, t_0, y)}{(y_1 - z_1) \ldots (y_n - z_n)} \, dy_n \ldots dy_1 \,, \tag{2.1}$$

kde $S_j = \{y \in C \,|\, |y - w_j| = r_j\}, j = 1, 2, \ldots, n$.

Z rovnice (1.1) plyne, že funkce $\partial\Phi/\partial t$ je spojitá a že funkce $\partial\Phi(t, t_0, .)/\partial t$ je holomorfní. Na vzorec (2.1) lze aplikovat (se zachováním rovnosti) operátory $D_u^{(3)}, D_v^{(3)}, \ldots$, kde $u, v \in C^r$; tak lze dokázat, že funkce $D_u^{(3)} \Phi$, $D_v^{(3)} D_u^{(3)} \Phi, \ldots$, jsou spojité. Protože podle Věty 13.1.1 funkce

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial t \, \partial t_0}, \frac{\partial}{\partial t} D_u^{(3)} \Phi$$

jsou spojité, můžeme na vzorec (2.1) aplikovat operátory

$$\frac{\partial}{\partial t_0}, \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial t_0}, \frac{\partial}{\partial t} D_u^{(3)}$$

a tak odvodit, že funkce

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \Phi(t, t_0, .) \,, \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial t_0} \Phi(t, t_0, .) \,, \frac{\partial}{\partial t} D_u^{(3)} \Phi(t, t_0, .)$$

jsou holomorfní. Obdobně lze zjistit, že funkce

$$D_u^{(3)} \frac{\partial}{\partial t_0} \Phi \,, \; D_v^{(3)} D_u^{(3)} \frac{\partial}{\partial t_0} \Phi$$

jsou spojité. Snadno se však sestrojí příklad, že např. funkce $\partial^2\Phi/\partial t^2$ nemusí existovat, pokud nezavedeme silnější předpoklady o f (srovnej Poznámku 13.1.5).

13.3. Nechť je $K = R$. Vyšetříme případ, kdy pro každé $v, w \in R^n$ existuje derivace druhého řádu $D_v^{(3)} D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x})$ (tento symbol je definován v Dodatku 13.2). Abychom dokázali, že existuje derivace $D_v^{(3)} D_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x})$, postačí, dokážeme-li, že existuje derivace $D_v^{(4)} \Theta(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{y})$ [viz (1.15)]. [Zde si dovolujeme malou licenci v označení a píšeme $(\tilde{x}, \tilde{y})$ místo $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$.] K tomu cíli budeme aplikovat Větu 13.1.1 na rovnici (1.15). Proto musí mít pravá strana rovnice (1.15) spojitou derivaci v libovolném směru $(w, z) \in R^n \times R^n$ vzhledem k dvojici proměnných (x, y). Je

$$D^{(2)} f(t, x) \, y = D_y^{(2)} f(t, x) \,,$$

a proto bude tato podmínka splněna, bude-li platit (1.2) a jestliže

$$\text{pro každou dvojici } v, w \in R^n \text{ existuje derivace } D_v^{(2)} D_w^{(2)} f \colon G \to R^n \text{ a je spojitá.} \tag{3.1}$$

Z Věty 13.1.1 plyne, že platí

13.3.1. Věta: *Nechť platí* (1.2) *a* (3.1). *Potom existují derivace* $D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi: \hat{G} \to R^n$ *a jsou spojité.*

13.3.2. Poznámka: Podrobným využitím Věty 13.1.1 lze za předpokladů Věty 13.3.1 dokázat existenci a spojitost řady smíšených derivací [např. derivace

$$\frac{\partial}{\partial t_0} D_w^{(3)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi, \quad D_v^{(3)}\frac{\partial}{\partial t} D_w^{(3)}\,\Phi$$

atd.]. Nemusí však existovat např. derivace $\partial^2/\partial t^2$. Lze však ukázat, že existují všechny derivace druhého řádu funkce Φ a že jsou spojité, připojíme-li předpoklad: Existuje derivace $\partial f/\partial t$ a je spojitá.

13.3.3. Poznámka: Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená a funkce $g: H \to R$ (nebo $g: H \to R^n$) spojitá. V matematické analýze se dokazuje, že existují-li derivace $D_w g$, $D_v g$, $D_v D_w g$, $D_w D_v g$ a jsou-li spojité, pak $D_v D_w g = D_w D_v g$. Odtud plyne, že Větu 13.3.1 můžeme doplnit tvrzením

$$D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi = D_w^{(3)}D_v^{(3)}\,\Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi = D_v^{(3)}\frac{\partial}{\partial t} D_w^{(3)}\,\Phi = D_v^{(3)}D_w^{(3)}\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi.$$

Vícenásobným derivováním rovnice (1.1) a rovnice $\Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x}$ a využíváním záměnnosti derivací můžeme odvodit diferenciální rovnice pro derivace druhého řádu $D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi$ a počáteční podmínku $D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = 0$. Pro $D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi$ dostáváme lineární nehomogenní diferenciální rovnici, jíž v některých případech můžeme užít k výpočtu funkce $D_v^{(3)}D_w^{(3)}\,\Phi$.

Dále platí, že funkce $\Phi(t, t_0, \tilde{x})$ má diferenciál druhého řádu při pevných t, t_0 vzhledem k $\tilde{x}$ [a tento diferenciál druhého řádu spojitě závisí na $(t, t_0, \tilde{x})$, viz Dotatek 13.3].

13.3.4. Poznámka: Obdobným způsobem lze vyšetřit derivace funkce Φ řádu třetího a vyšších.