10. Lokální existence řešení nelineárních diferenciálních rovnic. Kneserova věta. Fukuharova věta

10.1. Abychom dokázali, že existují maximální řešení nelineárních diferenciálních rovnic, musíme překonat tu obtíž, že definiční interval maximálního řešení není předem znám. Předpokládáme-li pouze, že pravá strana f diferenciální rovnice

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

je spojitá, nemusí konvergovat metoda postupných aproximací.

V tomto odstavci ukážeme jenom, že existují řešení splňující danou počáteční podmínku; tato řešení jsou ovšem definována jen na krátkých intervalech.

Pro $(t_0, \tilde{x}) \in R \times K^n$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ označme

$$Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2) = \{(t, x) \in R \times K^n \,|\, |t - t_0| \leqq \delta_1, \|x - \tilde{x}\| \leqq \delta_2\}\,. \tag{1.2}$$

Připomeňme, že *množina* $G \subset R \times K^n$ je *otevřená*, jestliže ke každému bodu $(t', x') \in G$ existuje takové číslo δ, že je $Q(t', x', \delta, \delta) \subset G$. *Množina* $H \subset R \times K^n$ je *kompaktní*, jestliže ke každé posloupnosti $(t_1, x^{[1]}), (t_2, x^{[2]}), \ldots$ takové, že je $(t_i, x^{[i]}) \in H$ pro $i = 1, 2, \ldots$, existuje bod $(s, y) \in H$ a vybraná posloupnost $(t_{i_j}, x^{[i_j]})$ tak, že je

$$s = \lim_{j\to\infty} t_{i_j}\,, \quad y = \lim_{j\to\infty} x^{[i_j]}\,.$$

10.1.1. Věta (o lokální existenci řešení): *Nechť množina $G \subset R \times K^n$ je otevřená, nechť funkce f: $G \to K^n$ je spojitá, $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Potom existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že platí:*

$$Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \subset G. \tag{1.3}$$

Nechť $\mathscr{J}$ je interval, $\mathscr{J} \subset \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$, nechť u: $\mathscr{J} \to K^n$ je řešení rovnice (1.1) a nechť pro nějaké $\tau \in \mathscr{J}$ je $\|u(\tau) - \tilde{x}\| \leqq \delta_2$. Potom je $\|u(t) - \tilde{x}\| < 2\delta_2$ pro $t \in \mathscr{J}$. (1.4)

Ke každému bodu $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ existuje řešení
$w_{(s,y)}$: $\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle \to K^n$
takové, že je splněna počáteční podmínka
$w_{(s,y)}(s) = y\,.$ (1.5)

10.1.2. Poznámka: Věta 10.1.1 zaručuje existenci čísel δ_1, δ_2, neobsahuje však žádnou informaci, jak tato čísla v daném případě volit. Z důkazu Věty 10.1.1 je patrné, že platí toto tvrzení:

Nechť množina $G \subset R \times K^n$ je otevřená a nechť funkce f: $G \to K^n$ je spojitá, $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Nechť $\delta_1, \delta_2, \varkappa$ jsou taková kladná čísla, že platí (1.3), $2\delta_1\varkappa < \delta_2$, $\|f(t, x)\| \leqq \varkappa$ pro $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2)$. Potom platí (1.4) a (1.5).

Důkaz Věty 10.1.1: Protože G je otevřená množina, existují čísla $\delta_1' > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že $Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1', 2\delta_2) \in G$. Nechť je

$$\varkappa \geqq \sup \{\|f(t, x)\| \mid (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1', 2\delta_2)\} .$$

Zvolme $\delta_1 > 0$ tak, aby bylo $\delta_1 \leqq \delta_1'$, $2\delta_1\varkappa < \delta_2$. Je zřejmé, že platí (1.3).

Kdyby neplatilo (1.4), existovalo by takové řešení u: $\mathscr{J} \to K^n$ a čísla τ, $t_1 \in \mathscr{J} \subset \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$, že by bylo $\|u(\tau) - \tilde{x}\| \leqq \delta_2$, $\|u(t_1) - \tilde{x}\| \geqq 2\delta_2$. Pro určitost budeme předpokládat, že je $t_1 > \tau$ (v případě $t_1 < \tau$ bychom postupovali obdobným způsobem). Protože funkce $\|u(t) - \tilde{x}\|$ je spojitá, existuje takové t_2, $\tau < t_2 \leqq t_1$, že je

$$\|u(t) - \tilde{x}\| < 2\delta_2 \quad \text{pro} \quad \tau \leqq t < t_2 , \quad \|u(t_2) - \tilde{x}\| = 2\delta_2 , \tag{1.6}$$

a tedy $\|f(\sigma, u(\sigma))\| \leqq \varkappa$ pro $\tau \leqq \sigma \leqq t_2$. Je

$$u(t_2) - u(\tau) = \int_\tau^{t_2} f(\sigma, u(\sigma))\, d\sigma ,$$

a proto

$$\|u(t_2) - u(\tau)\| \leqq |t_2 - \tau|\, \varkappa \leqq 2\delta_1\varkappa < \delta_2 ,$$
$$\|u(t_2) - \tilde{x}\| \leqq \|u(t_2) - u(\tau)\| + \|u(\tau) - \tilde{x}\| < 2\delta_2$$

a to odporuje rovnosti (1.6). Proto platí (1.4).

Funkce f je spojitá, a proto je na kompaktní množině $Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ *stejnoměrně spojitá.* Stejnoměrnou spojitost funkce f na $Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ můžeme popsat takto: Existuje funkce ω: $\langle 0, 2\delta_1 + 2\delta_2 \rangle \to R$ neklesající a platí $\lim\limits_{\xi \to 0+} \omega(\xi) = 0$,

$$\|f(t_2, x^{[2]}) - f(t_1, x^{[1]})\| \leqq \omega(|t_2 - t_1| + \|x^{[2]} - x^{[1]}\|) \tag{1.7}$$

pro

$$(t_2, x^{[2]}) , \quad (t_1, x^{[1]}) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2) .$$

Řešení $w_{(s,y)}$ najdeme jako limitu posloupnosti tzv. „Eulerových lomených čar".

Eulerova lomená čára Z je graf přibližného řešení z: $\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to K^n$, k němuž lze dospět na základě úvah odst. 1.11. Graf W hledaného řešení $w_{(s,y)}$ má v bodě (s, y) tečnu, jejíž směr je dán vektorem $(1, f(s, y))$. Nechť je $t_0 - \delta_1 < s < t_0 + \delta_1$ a nechť $0 < \varrho < \min\{t_0 + \delta_1 - s, s - t_0 + \delta_1\}$. Čáru Z sestrojíme tak, že z bodu (s, y) jdeme ve směru vektoru $(1, f(s, y))$, dokud první souřadnice t

je menší nebo rovna než $s + \varrho$. V bodě $(s + \varrho, z(s + \varrho))$ opravíme směr a dále postupujeme ve směru určeném vektorem $(1, f(s + \varrho, z(s + \varrho)))$, dokud je $t \leqq \leqq \min \{t_0 + \delta_1, s + 2\varrho\}$. Je-li $s + 2\varrho < t_0 + \delta_1$, v bodě $(s + 2\varrho, z(s + 2\varrho))$ opět opravíme směr a pokračujeme ve směru určeném vektorem $(1, f(s + 2\varrho, z(s + 2\varrho)))$. Obdobně postupujeme pro $t < s$.

Tento postup popíšeme podrobněji. Nechť je tedy $t_0 - \delta_1 < s < t_0 + \delta_1$ (v případě $s = t_0 - \delta_1$ nebo $s = t_0 + \delta_1$ postupujeme obdobně). Nechť k je přirozené číslo. Položme

$$
\begin{aligned}
& s_j = s + j(t_0 + \delta_1 - s)\, k^{-1} \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, k\,, \\
& s_j = s + j(s - t_0 + \delta_1)\, k^{-1} \quad \text{pro} \quad j = -1, -2, \ldots, -k\,, \\
& z^{[k]}(t) = y + (t - s) f(s, y) \quad \text{pro} \quad s_{-1} \leqq t \leqq s_1\,, \\
& z^{[k]}(t) = z^{[k]}(s_j) + (t - s_j) f(s_j, z^{[k]}(s_j)) \\
& \text{pro} \quad s_j < t \leqq s_{j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k - 1\,, \\
& \text{a pro} \quad s_{j-1} \leqq t < s_j\,, \quad j = -1, -2, \ldots, -k + 1\,.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Aby vzorec (1.8) měl smysl, musí ovšem být $(s_j, z^{[k]}(s_j)) \in G$ pro

$$
j = -k + 1, -k + 2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k - 1\,.
$$

Ukážeme, že je dokonce

$$
(t, z^{[k]}(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,, \tag{1.9}
$$

tj. že platí

$$
\|z^{[k]}(t) - \tilde{x}\| \leqq 2\delta_2 \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,. \tag{1.10}
$$

Nerovnost (1.10) dokážeme indukcí. Je $\|z^{[k]}(s_0) - \tilde{x}\| \leqq \delta_2$. Předpokládejme, že známe číslo l, $0 \leqq l \leqq k - 1$, takové, že je $\|z^{[k]}(t) - \tilde{x}\| \leqq 2\delta_2$ pro $s_0 \leqq t \leqq s_l$. Potom je $\|f(s_j, z^{[k]}(s_j))\| \leqq \varkappa$ pro $j = 0, 1, 2, \ldots, l$, tedy

$$
\begin{aligned}
& \|z^{[k]}(s_j) - z^{[k]}(s_{j-1})\| \leqq \varkappa(t_0 - \delta_1 - s)\, k^{-1} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, l\,, \\
& \|z^{[k]}(t) - z^{[k]}(s_l)\| \leqq \varkappa(t - s_l) \quad \text{pro} \quad s_l \leqq t \leqq s_{l+1}\,.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne

$$
\begin{aligned}
& \|z^{[k]}(t) - \tilde{x}\| \leqq \|z^{[k]}(t) - z^{[k]}(s_l)\| + \\
& + \sum_{j=1}^{l} \|z^{[k]}(s_j) - z^{[k]}(s_{j-1})\| + \|z^{[k]}(s_0) - \tilde{x}\| \leqq \varkappa(t - s_l) + \\
& + \varkappa(t_0 + \delta_1 - s)\, l\, k^{-1} + \delta_2 \leqq \varkappa(t_0 + \delta_1 - s) + \delta_2 \leqq 2\delta_2
\end{aligned}
$$

pro $s_l \leqq t \leqq s_{l+1}$. Platí tedy $\|z^{[k]}(t) - \tilde{x}\| \leqq 2\delta_2$ pro $s_0 \leqq t \leqq s_{l+1}$; tak platí (1.10) pro $s \leqq t \leqq t_0 + \delta_1$. Obdobně se dokáže, že platí (1.10) pro $t_0 - \delta_1 \leqq t \leqq s$.

Z (1.8) a (1.9) plyne, že platí

$$\|z^{[k]}(\tau_2) - z^{[k]}(\tau_1)\| \leqq \varkappa|\tau_2 - \tau_1| \tag{1.11}$$

pro $s_j \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq s_{j+1}, j = -k, -k+1, \ldots, k-1$.

Z (1.8) dále plyne, že je

$$z^{[k]}(\tau_2) - z^{[k]}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, z^{[k]}(t))\,\mathrm{d}t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f(s_j, z^{[k]}(s_j)) - $$
$$- f(t, z^{[k]}(t))]\,\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

pro $s_j \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq s_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ a pro $s_{j-1} \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq s_j$, $j = 0, -1, \ldots, -k+1$. Pro člen v lomené závorce ve vzorci (1.12) platí vzhledem k (1.7) a (1.11)

$$\|f(s_j, z^{[k]}(s_j)) - f(t, z^{[k]}(t))\| \leqq \omega((1 + \varkappa)\,|t - s_j|)\,.$$

Nechť je $t_0 - \delta_1 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_0 + \delta_1$. Existují čísla $l, m \in \{-k, -k+1, \ldots, k\}$ tak, že je

$$s_l \leqq t_1 \leqq s_{l+1} \leqq \ldots \leqq s_{m-1} \leqq t_2 \leqq s_m\,.$$

V (1.12) můžeme položit $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = s_{l+1}$, dále $\tau_1 = s_{l+1}$, $\tau_2 = s_{l+2}, \ldots, \tau_1 = s_{m-1}$, $\tau_2 = t_2$. Sečtením těchto rovnic dostaneme, že platí

$$z^{[k]}(t_2) - z^{[k]}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, z^{[k]}(t))\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} h^{[k]}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle\,, \tag{1.13}$$

kde funkce $h^{[k]}\colon \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle \to K^n$ je po částech spojitá a platí

$$\|h^{[k]}(t)\| \leqq \omega((1 + \varkappa)\,2\delta_1 k^{-1}) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle\,. \tag{1.14}$$

Z (1.11) plyne, že platí

$$\|z^{[k]}(t_2) - z^{[k]}(t_1)\| \leqq \varkappa|t_2 - t_1| \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle\,.$$

Funkce $z^{[k]}$ jsou tedy stejně spojité a zřejmě jsou i stejně omezené. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty (viz Dodatek 10.1, Větu 2) lze vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnost $z^{[k_i]}$.

Položme $w(t) = \lim_{i \to \infty} z^{[k_i]}(t)$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$. Funkce w je spojitá. Je

$$\|f(t, z^{[k_i]}(t)) - f(t, w(t))\| \leqq \omega(\|z^{[k_i]}(t) - w(t)\|)\,,$$

proto posloupnost funkcí $f(t, z^{[k_i]}(t))$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(t, w(t))$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$ a

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, z^{[k_i]}(t))\,\mathrm{d}t \to \int_{t_1}^{t_2} f(t, w(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad i \to \infty\,.$$

Z (1.14) plyne, že

$$\int_{t_1}^{t_2} h^{[k_i]}(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{pro} \quad i \to \infty\,.$$

Píšeme-li v (1.13) k_i místo k, dostaneme limitním přechodem pro $i \to \infty$

$$w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, w(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Podle Věty 3.3.4 je w řešení rovnice (1.1). Je $z^{[k]}(s) = y$, tedy je i $w(s) = y$ a $w = w_{(s,y)}$ je hledané řešení rovnice (1.1). Obdobně sestrojíme řešení w, je-li $s = t_0 - \delta_1$ nebo $s = t_0 + \delta_1$. (1.5) platí a Věta 10.1.1 je dokázána.

10.1.3. Poznámka: Je-li

$$\|f(t_1, x^{[1]}) - f(t_2, x^{[2]})\| \leqq L(|t_1 - t_2| + \|x^{[1]} - x^{[2]}\|)$$

pro $(t_1, x^{[1]}), (t_2, x^{[2]}) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$, pak řešení $w_{(s,y)}$ je určeno jednoznačně (viz kap. 11) a lze dokázat, že platí odhad

$$\|z^{[k]}(t) - w(t)\| \leqq \gamma/k \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle\,,$$

kde γ je kladná konstanta.

10.2. Jak víme z odst. 2.11, 2.12, 2.14, může existovat více než jedno řešení rovnice (1.1) splňující danou počáteční podmínku. Vlastnosti takových řešení jsou vyšetřeny v tomto odstavci. Pro zjednodušení některých formulací budeme pracovat s reálnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$, tj. položíme $K = R$. Užitím Poznámky 3.1.4 se lze přesvědčit, že výsledky z tohoto odstavce platí i v případě $K = C$. Připomeňme, že *množina* $A \subset R^n$ je *uzavřená*, jestliže platí: Je-li $x^{[i]} \in A$ pro $i = 1, 2, \ldots, x \in R^n$ a $\lim_{i\to\infty} x^{[i]} = x$, pak je také $x \in A$. Uzavřená množina $A \subset R^n$ je *souvislá*, nelze-li ji rozdělit na dvě neprázdné, uzavřené, disjunktní části. Množina $A \subset R^n$ je *kompaktní*, jestliže platí: Je-li $x^{[i]} \in A$ pro $i = 1, 2, \ldots$, pak existuje $y \in A$ a vybraná posloupnost $x^{[i_j]}$ tak, že je $y = \lim_{j\to\infty} x^{[i_j]}$. Jak známo, každá kompaktní množina je uzavřená. Množina A se nazývá *kontinuum*, je-li neprázdná, kompaktní a souvislá.

Nechť je $G \subset R \times R^n$, f: $G \to R^n$, $(s, y) \in G$ (nepředpokládáme, že množina G je otevřená a že funkce f je spojitá). Pro $\zeta > s$ nechť $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je množina takových $v \in R^n$, že existuje řešení w: $\langle s, \zeta\rangle \to R^n$ rovnice (1.1) splňující podmínku $w(s) = y$, $w(\zeta) = v$. Obdobně pro $\zeta < s$ nechť $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je množina takových $v \in R^n$, že existuje takové řešení w: $\langle \zeta, s\rangle \to R^n$ rovnice (1.1), splňující podmínku $w(\zeta) = v$, $w(s) = y$. Položme ještě $\mathscr{V}(s, s, y) = \{y\}$. Množina $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ má názorný význam; je to množina takových bodů v, kterých můžeme dosáhnout v okamžiku ζ, vyjdeme-li v okamžiku s z bodu y a sledujeme-li řešení rovnice (1.1). Množiny $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ vyšetřoval H. Kneser (viz [40]).

Dokázal, že platí

10.2.1. Věta (Kneserova): *Nechť množina* $G \subset R \times R^n$ *je otevřená a nechť funkce* $f\colon G \to R^n$ *je spojitá. Potom ke každému bodu* $(t_0, \tilde{x}) \in G$ *existují čísla* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tak, že množina* $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ *je kontinuum pro*

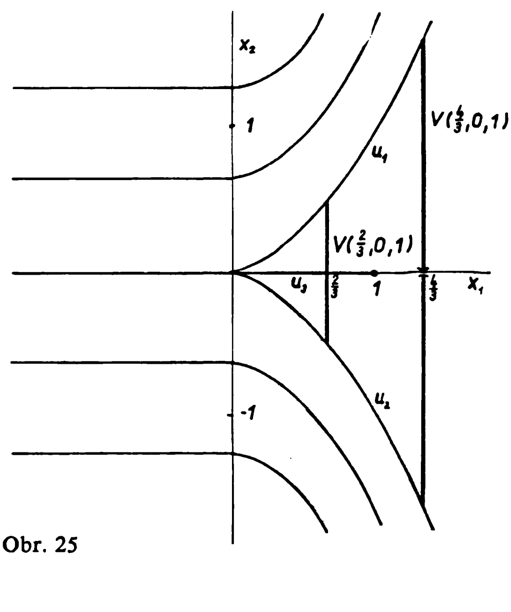
$$(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)\,, \quad \zeta \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,.$$

Důkaz Věty 10.2.1 je obsažen v Dodatku 10.1.

10.2.2. Poznámka: Čísla δ_1, δ_2 ve Větě 10.2.1 můžeme volit stejně jako v Poznámce 10.1.2; k důkazu tohoto tvrzení postačí nevelká změna v důkazu Věty 10.2.1 v Dodatku 10.1.

10.2.3. Příklad: Nechť funkce $f\colon R^2 - \{(0, 1)\} \to R$ je definována předpisem

$$f(t, x) = 0 \quad \text{pro} \quad t \leqq 0\,, \quad x \in R\,,$$
$$f(t, x) = \tfrac{3}{2} t^{1/2} \quad \text{pro} \quad t > 0\,, \quad x \geqq t^{3/2}\,,$$
$$f(t, x) = -\tfrac{3}{2} t^{1/2} \quad \text{pro} \quad t > 0\,, \quad x \leqq -t^{3/2}\,,$$
$$f(t, x) = 3x(2t)^{-1}\,[(t-1)^2 + t^3]\,[(t-1)^2 + x^2]^{-1}$$
$$\text{pro} \quad t > 0\,, \; -t^{3/2} < x < t^{3/2}\,.$$



Obr. 25

Funkce f je spojitá. Charakteristiky řešení rovnice (1.1) jsou naznačeny na obr. 25. Mezi řešení rovnice (1.1) patří funkce u_1, u_2, u_3 definované rovnicemi $u_1(t) = 0$ pro $t \leqq 0$, $u_1(t) = t^{3/2}$ pro $t > 0$, $u_2(t) = 0$ pro $t \leqq 0$, $u_2(t) = -t^{3/2}$ pro $t > 0$,

$u_3(t) = 0$ pro $t < 1$. Není těžké dokázat, že je $\mathscr{V}(t, 0, 0) = \langle -t^{3/2}, t^{3/2}\rangle$ pro $t \in \langle 0, 1)$, $\mathscr{V}(t, 0, 0) = \langle -t^{3/2}, 0) \cup (0, t^{3/2}\rangle$ pro $t \geqq 1$.

10.2.4. Poznámka: Je-li množina $A \subset R$ kontinuum, pak existují čísla a, b tak, že je $a \leqq b$, $A = \langle a, b\rangle$. Odtud plyne, že v případě $n = 1$ můžeme Větu 10.2.1 doplnit takto:

Pro $\zeta, s \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$, $y \in B(y, \delta_2)$ existují čísla $\varphi(\zeta, s, y)$, $\psi(\zeta, s, y)$ tak, že je $\varphi(\zeta, s, y) \leqq \psi(\zeta, s, y)$, $\mathscr{V}(\zeta, s, y) = \langle \varphi(\zeta, s, y), \psi(\zeta, s, y)\rangle$.

Protože je $\mathscr{V}(s, s, y) = \{y\}$, je $\varphi(s, s, y) = y = \psi(s, s, y)$. Lze dokázat [a to buď elementárně, nebo s využitím Věty 10.2.5], že funkce $\varphi(\zeta, s, y)$, $\psi(\zeta, s, y)$ jako funkce proměnné ζ [tj. při pevných s, y] jsou řešení rovnice (1.1). Dále lze dokázat, že k bodu $(s, y) \in G$ existují maximální řešení $\hat{\varphi}: (\alpha_1, \beta_1) \to R$, $\hat{\psi}: (\alpha_2, \beta_2) \to R$ taková, že je $\hat{\varphi}(s) = y = \hat{\psi}(s)$ a že platí:

Nechť funkce $u: (\alpha, \beta) \to R$ je řešení rovnice (1.1), $u(s) = y$. Je-li $t \in (\alpha, \beta) \cap (\alpha_1, \beta_1)$, pak je $\hat{\varphi}(t) \leqq u(t)$; je-li $t \in (\alpha, \beta) \cap (\alpha_2, \beta_2)$, pak je $u(t) \leqq \hat{\psi}(t)$. (2.1)

Řešení $\hat{\varphi}$, resp. $\hat{\psi}$ jsou určena jednoznačně a nazývají se *dolní*, resp. *horní řešení* splňující podmínku $x(s) = y$. Je-li $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ (viz Větu 10.2.1), pak zřejmě platí $\hat{\varphi}(\zeta) = \varphi(\zeta, s, y)$, $\hat{\psi}(\zeta) = \psi(\zeta, s, y)$ pro $\zeta \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$.

Nechť je $\mathscr{A} \in R^k$. Bod $x \in R^k$ se nazývá *vnitřní bod množiny* $\mathscr{A}$, existuje-li číslo $\delta > 0$ takové, že je $B(x, \delta, R^k) \subset \mathscr{A}$. Není-li x vnitřním bodem žádné z množin $\mathscr{A}$, $R^k - \mathscr{A}$, nazývá se *hraniční bod množiny* $\mathscr{A}$. Množinu hraničních bodů množiny $\mathscr{A}$ budeme značit $\partial\mathscr{A}$. [Je-li $\emptyset \neq \mathscr{A} \neq R^k$, pak je $\partial\mathscr{A} \neq \emptyset$.] Nechť je $(s, y) \in G$, $\zeta > s$. Budeme říkat, že *rovnice* (1.1) *má Fukuharovu vlastnost v bodě* $(\zeta, s, y) \in R \times G$, je-li $\partial\mathscr{V}(\zeta, s, y) \neq \emptyset$ a existuje-li ke každému $v \in \partial\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ řešení $w: \langle s, \zeta\rangle \to R^n$ rovnice (1.1) takové, že je $w(s) = y$, $w(\zeta) = v$ a $w(t) \in \partial\mathscr{V}(t, s, y)$ pro $t \in \langle s, \zeta\rangle$. Obdobný význam dáme výroku, že rovnice (1.1) má Fukuharovu vlastnost v bodě $(\zeta, s, y) \in R \times G$ v případě, že je $\zeta < s$. Jde tedy o to, abychom body (s, y), (ζ, v) spojili křivkou $\{(\sigma, w(\sigma)) \mid s \leqq \sigma \leqq \zeta\}$, kde w je řešení rovnice (1.1), a to tak, aby bylo $w(\sigma) \in \partial\mathscr{V}(\sigma, s, y)$ pro $\sigma \in \langle s, \zeta\rangle$.

10.2.5. Věta (Fukuharova): *Nechť množina $G \subset R \times R^n$ je otevřená a nechť funkce $f: G \to R^n$ je spojitá. Potom ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že rovnice (1.1) má Fukuharovu vlastnost v bodě (ζ, s, y), je-li $(s, y) \in Q\ (t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$, $\zeta \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle$, $\zeta \neq s$.*

Důkaz je obsažen v Dodatku 10.1; věta byla původně dokázána v [16]. Také v případě Věty 10.2.5 platí obdobné tvrzení jako v Poznámce 10.2.2.

Nechť je $(s, y) \in G$, $\zeta > s$. Položme

$$\mathscr{W}(\zeta, s, y) = \{(t, v) \in R \times R^n \mid s \leqq t \leqq \zeta,\ v \in \mathscr{V}(t, s, y)\}\ .$$

Množinu $\mathscr{W}(\zeta, s, y) \subset R^{n+1}$ si můžeme představit jako trubici, která je na jednom svém konci zaškrcena do bodu (s, y) a která je vyplněna charakteristikami řešení rovnice (1.1) vycházejícími z bodu (s, y). Snadno lze ukázat, že platí toto tvrzení: Je-li (t, v) vnitřní bod množiny $\mathscr{W}(\zeta, s, y)$, je $s < t < \zeta$ a v je vnitřní bod množiny $\mathscr{V}(t, s, y)$. Odtud plyne: Je-li $s < t < \zeta$, $v \in \partial\mathscr{V}(t, s, y)$, potom je $(t, v) \in \partial\mathscr{W}(\zeta, s, y)$. Je-li tedy $w: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$, $w(t) \in \partial\mathscr{V}(t, s, y)$ pro $t \in (s, \zeta)$, je $(t, w(t)) \in \partial\mathscr{W}(\zeta, s, y)$ pro $t \in (s, \zeta)$ [je ovšem i $(t, w(t)) \in \partial\mathscr{W}(\zeta, s, y)$ pro $t = s$ i pro $t = \zeta$].