Obyčejné diferenciální rovnice

9. Okrajové úlohy pro lineární diferenciální rovnice

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 169--201.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402087

9. Okrajové úlohy pro lineární diferenciální rovnice

9.1. Nechť $\langle\alpha, \beta\rangle \subset R$ je kompaktní interval, nechť jsou dána čísla $M_{ij}, N_{ij}, c_i \in K$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, n$, a funkce h, a_j: $\langle\alpha, \beta\rangle \to K$ a nechť platí:

$$\text{Funkce } a_j,\ h \text{ jsou spojité, } j = 0, 1, \ldots, n,\ a_0(t) \neq 0 \ \text{ pro } \ t \in \langle\alpha, \beta\rangle. \tag{1.1}$$

Úloha najít řešení u_1 rovnice

$$a_0(t)\, u_1^{(n)} + a_1(t)\, u_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, u_1 = h(t) \tag{1.2}$$

tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, u_1^{(j-1)}(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} N_{ij}\, u_1^{(j-1)}(\beta) = c_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,, \tag{1.3}$$

se nazývá *okrajová úloha. Okrajové podmínky* (1.3) budeme obvykle zapisovat ve vektorovém tvaru. Položme

$$u(t) = \operatorname{col}\left(u_1(t), \dot{u}_1(t), \ldots, u_1^{(n-1)}(t)\right) \in K^n\,,$$

$$M = (M_{ij})\,, \quad N = (N_{ij}) \ [M, N \text{ jsou matice typu } (r, n)]\,,$$

$$c = \operatorname{col}\left(c_1, c_2, \ldots, c_r\right) \in K^r\,. \tag{1.4}$$

Okrajové podmínky zapíšeme ve tvaru

$$M\, u(\alpha) + N\, u(\beta) = c\,. \tag{1.5}$$

[Připouštíme i případ $r = 0$; v takovém případě nejsou dána čísla M_{ij}, N_{ij}, c_i ani okrajové podmínky (1.3).]

Rovnici (1.2) můžeme dělit funkcí a_0 a tak ji uvést na tvar, jehož jsme užívali v odst. 4.8. Tvaru (1.2) užíváme z tohoto důvodu: Označme $C^{(0)} = C^{(0)}\left(\langle\alpha, \beta\rangle \to K\right)$ prostor spojitých funkcí, které zobrazují interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ do K a nechť $C^{(n)} = C^{(n)}\left(\langle\alpha, \beta\rangle \to K\right)$ je prostor takových funkcí z $C^{(0)}$, které mají spojité derivace do řádu n.

Levými stranami rovnic (1.2), (1.5) je určen operátor L: $C^{(n)} \to C^{(0)} \times K^r$ [operátor L zobrazuje funkci u_1 na dvojici skládající se z funkce na levé straně v (1.2) a z vektoru na levé straně v (1.5)].

Je třeba popsat množinu hodnot operátoru L a tak zodpovědět otázku, pro které dvojice (h, c) má úloha (1.2), (1.5) řešení.

9.1.1. Poznámka: Speciálním případem úlohy (1.2), (1.5) pro $r = n$, $M = I$, $N = 0$ je počáteční úloha pro rovnici (1.2), která byla vyšetřena v odst. 4.8.

9.1.2. Poznámka: Okrajové úlohy lze vyšetřovat pro vektorové rovnice. Úvahy z této kapitoly lze např. přenést na případ, že

$$u_1(t),\ h(t),\ c_i \in K^k\,, \quad a_j(t),\ M_{ij},\ N_{ij} \in M_k\,,$$

kde k je přirozené číslo.

9.1.3. Poznámka: Okrajová úloha zavedená v tomto odstavci se někdy nazývá dvoubodová [protože v okrajových podmínkách (1.3) se vyskytují pouze dvě hodnoty α, β pro argument funkce u_1] na rozdíl od úloh, kde se vyšetřují obecnější okrajové podmínky. Nechť je $\alpha \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqq \beta$, $M_{ijk} \in R$, $c_i \in R$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$ a nechť funkce ζ_i: $\langle\alpha, \beta\rangle \to R$, $i = 1, 2, \ldots, r$, jsou spojité. Podmínky (1.3) můžeme nahradit např. podmínkami

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ijk}\, u_1^{(j-1)}(t_k) + \int_\alpha^\beta \zeta_i(t)\, u_1(t)\, dt = c_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Okrajové úlohy s podmínkami takového typu jsou studovány např. v pracích [77], [73], [74] a [75]. Tzv. samoadjungované úlohy na nekompaktním intervalu jsou vyšetřovány v [55]. Poučení o okrajových úlohách pro nelineární rovnice lze nalézt v [66].

9.2. V celé kap. 9 budeme předpokládat, že platí (1.1), a kromě toho, že platí:

Funkce a_j má spojité derivace do řádu $n - j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ [funkce a_n je spojitá]. (2.1)

Zaveďme operátory l, l^*: $C^{(n)} \to C^{(0)}$ rovnicemi

$$l(u_1) = a_0(t)\, u_1^{(n)} + a_1(t)\, u_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, u_1\,, \tag{2.2}$$

$$l^*(v_1) = (-1)^n (\bar{a}_0(t)\, v_1)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\bar{a}_1(t)\, v_1)^{(n-1)} + \ldots + \bar{a}_n(t)\, v_1\,. \tag{2.3}$$

Pravou stranu v (2.3) lze ovšem upravit tak, aby měla stejný tvar jako pravá strana v (2.2).

Pro $v_1 \in C^{(n)}$ položme

$$v(t) = \mathrm{col}\,(v_1(t), \dot{v}_1(t), \ldots, v_1^{(n-1)}(t))\,. \tag{2.4}$$

Opakovanou integrací per partes zjistíme, že pro libovolné funkce u_1, $v_1 \in C^{(n)}$ platí

$$\int_{t_1}^{t_2} a_j\, u_1^{(n-j)} \bar{v}_1\, dt = \sum_{i=0}^{n-j-1} (-1)^i\, u_1^{(n-j-1-i)}(t_2)\, (a_j \bar{v}_1)^{(i)}\, (t_2) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-j-1} (-1)^i u_1^{(n-j-1-i)}(t_1)\,(a_j \bar{v}_1)^{(i)}(t_1) +$$

$$+ (-1)^{n-j} \int_{t_1}^{t_2} u_1 (a_j \bar{v}_1)^{(n-j)}\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Sčítáním podle j a úpravou výrazů $(a_j \bar{v}_1)^{(i)}$ v součtu na pravé straně odvodíme, že platí

$$\int_{t_1}^{t_2} l(u_1)\,\bar{v}_1\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} u_1\,\overline{l^*}(v_1)\,\mathrm{d}t + \sum_{i,k=1}^{n} \Theta_{ik}(t_2)\,u_1^{(k-1)}(t_2)\,\bar{v}_1^{(i-1)}(t_2) -$$

$$- \sum_{i,k=1}^{n} \Theta_{ik}(t_1)\,u_1^{(k-1)}(t_1)\,\bar{v}_1^{(i-1)}(t_1) ,$$

kde $\Theta_{ik}(t) = 0$ pro $i + k > n + 1$, $\Theta_{ik}(t) = (-1)^{i-1}\,a_0(t)$ pro $i + k = n + 1$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Jsou tedy matice $\Theta(t) = (\Theta_{ik}(t))$ i $\Theta^*(t) = (\Theta^*_{ik}(t))$, $\Theta^*_{ik}(t) = \bar{\Theta}_{ki}(t)$, regulární pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Označme $\tilde{\Theta}_{ki}(t)$ prvky matice $\Theta^{-1}(t)$; snadno se spočítá, že je

$$\begin{aligned} &\tilde{\Theta}_{ik}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad k + i < n + 1 , \\ &\tilde{\Theta}_{ik}(t) = (-1)^{k+1}\,(a_0(t))^{-1} \quad \text{pro} \ . \ t \in \langle \alpha, \beta \rangle , \quad k + i = n + 1 . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Vzhledem k vzorcům (3.2.10) a (3.2.19b) je

$$\sum_{i,k=1}^{n} \Theta_{ik}(t)\,u_1^{(k-1)}(t)\,\bar{v}_1^{(i-1)}(t) = (\Theta(t) u(t), v(t)) = (u(t), \Theta^*(t)\,v(t))$$

a tak jsme odvodili, že platí

9.2.1. Pomocná věta: *Je-li $u_1, v_1 \in C^{(n)}$, pak je*

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} l(u_1)\,\bar{v}_1\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} u_1\,\overline{l^*}(v_1)\,\mathrm{d}t + (u(t_2), \Theta^*(t_2)\,v(t_2)) - \\ - (u(t_1), \Theta^*(t_1)\,v(t_1)) \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle , \end{aligned} \tag{2.6}$$

kde u a v je definováno v (1.4) *a* (2.4).

Nechť u_1 je řešení úlohy (1.2), (1.5). Vynásobme rovnici (1.2) funkcí $\bar{v}_1 \in C^{(n)}$ a integrujme ji od α do β, rovnici (1.5) vynásobme skalárně vektorem $w \in K^r$ a obě rovnice sečtěme. Užitím vzorce (2.6) dostaneme po úpravě [je $(Nu(\beta), w) = (u(\beta), N^* w)$ atd.]

$$\int_{\alpha}^{\beta} u_1\,\overline{l^*}(v_1)\,\mathrm{d}t + (u(\beta), N^* w + \Theta^*(\beta)\,v(\beta)) - (u(\alpha), M^* w - \Theta^*(\alpha)\,v(\alpha)) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} h(t)\,\bar{v}_1(t)\,\mathrm{d}t + (c, w) .$$

Odtud plyne, že platí

9.2.2. Věta: *Nechť úloha* (1.2), (1.5) *má řešení. Nechť je* $v_1 \in C^{(n)}$, $w \in K^r$ *a nechť je*

$$l^*(v_1) = 0\,, \tag{2.7}$$

$$M^*w - \Theta^*(\alpha)\, v(\alpha) = 0\,, \quad N^*w + \Theta^*(\beta)\, v(\beta) = 0\,. \tag{2.8}$$

Potom

$$\int_\alpha^\beta h(t)\, \bar{v}_1(t)\, \mathrm{d}t + (c, w) = 0\,. \tag{2.9}$$

[*Je-li* $r = 0$, *interpretujeme* (2.8) *jako* $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$ *a* (2.9) *jako*

$$\int_\alpha^\beta h(t)\, \bar{v}_1(t)\, \mathrm{d}t = 0\,.]$$

Dvojici (v_1, w), kde $v_1 \in C^{(n)}$ a $w \in K^r$, a pro niž platí rovnice (2.7), (2.8), nazýváme řešením úlohy (2.7), (2.8). Množina řešení úlohy (2.7), (2.8) je zřejmě lineární podprostor v $C^{(n)} \times K^r$. O rovnicích (2.8) se mluví jako o tzv. *parametrických okrajových podmínkách*; parametrem je vektor $w \in K^r$.

Cílem tohoto odstavce je dokázat, že Větu 9.2.2 lze obrátit, tj. dokázat, že platí

9.2.3. Věta: *Nechť platí* (2.9) *pro každé řešení* (v_1, w) *úlohy* (2.7), (2.8). *Potom úloha* (1.2), (1.5) *má řešení.*

Větu 9.2.3 dokážeme později.

Nechť $u_1^{[1]}, u_1^{[2]}, \ldots, u_1^{[n]}$ je fundamentální soustava rovnice

$$l(u_1) = 0\,. \tag{2.10}$$

Položme

$$u^{[i]}(t) = \mathrm{col}\,(u_1^{[i]}(t), (u_1^{[i]})'(t), \ldots, (u_1^{[i]})^{(n-1)}(t))\,.$$

$$U(t) = ((u^{[1]}(t), u^{[2]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)))\,. \tag{2.11}$$

Protože matice $\Theta(\alpha)$ je regulární, existují a jsou určeny jednoznačně vektory $p^{[i]} = \mathrm{col}\,(p_1^{[i]}, \ldots, p_n^{[i]}) \in K^n$ takové, že

$$(u^{[i]}(\alpha)\,, \quad \Theta^*(\alpha)\, p^{[j]}) = \delta_{ij}\,,$$

kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j\,, \\ 1 & \text{pro} \quad i = j\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Nechť $v_1^{[i]}$ je maximální řešení rovnice (2.7) určené podmínkami

$$(v_1^{[i]})^{(k-1)}(\alpha) = p_k^{[i]}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Položme

$$v^{[i]}(t) = \mathrm{col}\,(v_1^{[i]}(t), (v_1^{[i]})'(t), \ldots, (v_1^{[i]})^{(n-1)}(t))\,,$$

$$V(t) = ((v^{[1]}(t), v^{[2]}(t), \ldots, v^{[n]}(t)))\,. \tag{2.12}$$

Podle Pomocné věty 9.2.1 platí

$$(\Theta(t)\, u^{[i]}(t), v^{[j]}(t)) = \delta_{ij} \quad \text{pro} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle\,. \tag{2.13}$$

Skalární součin v (2.13) je součin j-tého řádku matice $V^*(t)$ a sloupcového vektoru $\Theta(t)\, u^{[i]}(t)$. Proto (2.13) můžeme zapsat jako

$$V^*(t)\, \Theta(t)\, U(t) = I \quad \text{pro} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle\,. \tag{2.14}$$

Položme

$$\Gamma(t, \tau) = (\Gamma_{ij}(t, \tau)) = U(t)\, V^*(\tau)\,. \tag{2.15}$$

Uveďme některé důležité vlastnosti funkce Γ:

$$\Gamma_{11}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} u_1^{[i]}(t)\, \bar{v}_1^{[i]}(\tau)\,. \tag{2.16}$$

Funkce Γ_{11} má spojité derivace

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial t^i\, \partial \tau^k} \Gamma_{11}\,, \quad i, k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

a je

$$\frac{\partial^{i+k} \Gamma_{11}}{\partial t^i\, \partial \tau^k} = \Gamma_{i+1,k+1}\,, \quad i, k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{2.17}$$

Funkce $\Gamma_{11}(., \tau)$ je pro $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$ řešením rovnice (2.10). (z def.) (2.18)

Funkce $\Gamma_{11}(\tau, .)$ je pro $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$ řešením rovnice (2.7). (Plyne z 9.2.1) (2.19)

Vlastnosti (2.16) až (2.19) plynou přímo z (2.15). Násobíme-li rovnici (2.14) zleva maticí $U(t)$ a zprava maticí $U^{-1}(t)\, \Theta^{-1}(t)$, dostaneme

$$\Gamma(t, t) = \Theta^{-1}(t) \tag{2.20}$$

a z (2.17), (2.5) plyne

$$\frac{\partial^{i+k} \Gamma_{11}}{\partial t^i\, \partial \tau^k}(s, s) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i + k < n - 1\,, \\ (-1)^k\, [a_0(s)]^{-1} & \text{pro} \quad i + k = n - 1\,, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle\,. \end{cases} \tag{2.21}$$

Podle (2.21) funkce $w_1(t) = \Gamma_{11}(t, \tau)$ splňuje podmínky

$$\begin{aligned} w_1^{(i)}(\tau) &= 0 \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, n-2\,, \\ w_1^{(n-1)}(\tau) &= [a_0(\tau)]^{-1}\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

9.2.4. Věta: *Nechť $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Funkce*

$$u_1(t) = \int_\gamma^t \Gamma_{11}(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

splňuje rovnici

$$l(u_1) = h(t). \tag{2.23}$$

Platnost Věty 9.2.4 se ověří výpočtem; přitom se využije toho, že funkce $\Gamma_{11}(.,\tau)$ je řešením rovnice (2.10) splňujícím podmínky (2.22).

Množinu řešení úlohy (2.10)

$$M\,u(\alpha) + N\,u(\beta) = 0 \tag{2.24}$$

označme $\mathscr{S}((2.10), (2.24))$; $\mathscr{S}((2.7), (2.8))$ nechť má obdobný význam.

9.2.5. Věta: *Nechť* u_1 *je řešení úlohy* (2.23), (1.5) *a nechť* z_1 *je řešení úlohy* (2.10), (2.24). *Potom* $u_1 + z_1$ *je řešení úlohy* (2.23), (1.5).

Nechť u_1, y_1 *jsou řešení úlohy* (2.23), (1.5). *Potom* $u_1 - y_1$ *je řešení úlohy* (2.10), (2.24).

Důkaz Věty 9.2.5 je zřejmý.

9.2.6. Věta: $\mathscr{S}((2.10), (2.24))$ *a* $\mathscr{S}((2.7), (2.8))$ *jsou lineární prostory konečné dimenze a platí*

$$\dim \mathscr{S}((2.10), (2.24)) + r = \dim \mathscr{S}((2.7), (2.8)) + n. \tag{2.25}$$

Důkaz Vět 9.2.3 a 9.2.6: Je zřejmé, že $\mathscr{S}((2.10), (2.24))$ a $\mathscr{S}((2.7), (2.8))$ jsou lineární prostory.

Nechť $u_1^{[i]}, u^{[i]}, U, v_1^{[j]}, v^{[j]}, V$ má stejný význam jako v (2.10), (2.11), (2.12). Podle Vět 9.2.4 a 4.8.8 každé řešení u_1 rovnice (2.23) má tvar

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i u_1^{[i]}(t) + \int_\alpha^t \Gamma_{11}(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau, \tag{2.26}$$

kde $b_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zbývá určit čísla b_i tak, aby funkce u_1 splňovala (1.5). Položme $b = \operatorname{col}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Po dosazení a úpravě dostáváme pro b rovnici

$$[M\,U(\alpha) + N\,U(\beta)]\,b = c - N\int_\alpha^\beta \Gamma_{.,1}(\beta,\tau)\,h(\tau)\,d\tau, \tag{2.27}$$

kde $\Gamma_{.,1}(\beta,\tau)$ je první sloupec matice $\Gamma(\beta,\tau)$. Tedy platí tvrzení:

u_1 *je řešením úlohy* (2.23), (1.5) *právě tehdy, jestliže platí* (2.26) *a je-li b řešením rovnice* (2.27). (2.28)

Odtud plyne (pro $h = 0$, $c = 0$): $\dim \mathscr{S}((2.10), (2.24))$ je rovna dimenzi množiny řešení rovnice $Sb = 0$, kde

$$S = M\,U(\alpha) + N\,U(\beta). \tag{2.29}$$

Podle známé věty z lineární algebry (viz např. [43], Větu 28.2) je

$$\dim \mathscr{S}((2.10), (2.24)) = n - \operatorname{rank} S \tag{2.30}$$

[rank S znamená hodnost matice S].

Každé řešení v_1 rovnice (2.7) lze psát ve tvaru

$$v_1(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i \, v_1^{[i]}(t), \tag{2.31}$$

kde $d_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zbývá určit čísla d_i tak, aby funkce v_1 splňovala (2.8). Položme $d = \operatorname{col}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Má tedy platit

$$M^* w - \Theta^*(\alpha) \, V(\alpha) \, d = 0 \,, \quad N^* w + \Theta^*(\beta) \, V(\beta) \, d = 0 \,. \tag{2.32}$$

Matice $\Theta^*(\alpha) \, V(\alpha)$, $\Theta^*(\beta) \, V(\beta)$ jsou regulární. Proto z (2.32) vypočteme

$$\left(V^{-1}(\alpha) \left[\Theta^*(\alpha)\right]^{-1} M^* + V^{-1}(\beta) \left[\Theta^*(\beta)\right]^{-1} N^*\right) w = 0 \,.$$

Podle (2.14) je $V^{-1}(t) \left[\Theta^*(t)\right]^{-1} = U^*(t)$. Platí tedy tvrzení

$$\text{v_1 \textit{je řešením úlohy} (2.7), (2.8) \textit{právě tehdy, jestliže platí} (2.31), \textit{je-li}}$$
$$\text{w \textit{řešením rovnice} $S^* w = 0$ \textit{a je-li} d \textit{určeno z první z rovnic} (2.32).} \tag{2.33}$$

Odtud plyne:

$$\dim \mathscr{S}((2.7), (2.8)) = r - \operatorname{rank} S \,. \tag{2.34}$$

Z (2.30) a (2.34) plyne, že platí Věta 9.2.6.

Podle známé věty z lineární algebry (viz Dodatek 9.1) rovnice (2.27) má řešení právě tehdy, je-li vektor na pravé straně rovnice (2.27) ortogonální ke každému řešení w rovnice $S^* w = 0$; to zapíšeme

$$(c, w) - \left(N \int_\alpha^\beta \Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau) \, h(\tau) \, \mathrm{d}\tau, w\right) = 0 \,. \tag{2.35}$$

Vezmeme-li v úvahu druhou z rovnic (2.32), můžeme psát

$$- \left(N \int_\alpha^\beta \Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau) \, h(\tau) \, \mathrm{d}\tau, w\right) = - \int_\alpha^\beta (N \, \Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau) \, h(\tau), w) \, \mathrm{d}\tau =$$

$$= - \int_\alpha^\beta h(\tau) \, (\Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau), N^* w) \, \mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta h(\tau) \, (\Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau), \Theta^*(\beta) \, V(\beta) \, d) \, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta h(\tau) \, (V^*(\beta) \, \Theta(\beta) \, \Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau), d) \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Je $\Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau) = U(\beta) \operatorname{col}(\bar{v}_1^{[1]}(\tau), \bar{v}_1^{[2]}(\tau), \ldots, \bar{v}_1^{[n]}(\tau))$, a proto vzhledem k (2.14), (2.31) je

$$(V^*(\beta) \, \Theta(\beta) \, \Gamma_{\cdot,1}(\beta, \tau), d) = \bar{v}_1(\tau) \,.$$

Tedy podmínku (2.35) můžeme zapsat ve tvaru (2.9). Protože platí (2.28), je důkaz Věty 9.2.3 dokončen.

9.2.7. Poznámka: Obdobně můžeme postupovat i v případě, že okrajovou podmínku (1.5) nahradíme podmínkou

$$M\,u(\alpha) + \int_\alpha^\beta u_1(\tau)\,p(\tau)\,\mathrm{d}\tau + N\,u(\beta) = c\,, \tag{2.36}$$

kde p: $\langle\alpha, \beta\rangle \to K^r$ je daná spojitá funkce. Platí věta obdobná Větě 9.2.3; přitom ovšem rovnici (2.7) je třeba nahradit rovnicí $l^*(v_1) + (p(t), w) = 0$.

9.2.8. Poznámka: Abychom mohli podle Vět 9.2.2 a 9.2.3 rozhodnout, zda úloha (2.23), (1.5) má řešení, najdeme všechna řešení (v_1, w) úlohy (2.7), (2.8) [tj. lineární prostor $\mathscr{S}((2.7), (2.8))$]. Nechť $v_1^{[1]}, \ldots, v_1^{[n]}$ je fundamentální soustava řešení rovnice (2.7), $v^{[i]} = \operatorname{col}(v_1^{[i]}, (v_1^{[i]})', \ldots, (v_1^{[i]})^{(n-1)})$, $V = ((v^{[1]}, \ldots, v^{[n]}))$. Položme $v(t) = V(t)\,b$, $b \in K^n$, $v = \operatorname{col}(v_1, \ldots, v_n)$. Dvojice (v_1, w) je řešením úlohy (2.7), (2.8) právě tehdy, je-li

$$\begin{pmatrix} -\Theta(\alpha)\,V(\alpha), & M^* \\ \Theta(\beta)\,V(\beta), & N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ w \end{pmatrix} = 0\,. \tag{2.37}$$

Je-li

$$\begin{pmatrix} b^{[i]} \\ w^{[i]} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,,$$

báze v lineárním prostoru řešení rovnice (2.37), $b^{[i]} = \operatorname{col}(b_1^{[i]}, \ldots, b_n^{[i]})$, je

$$\Big(\sum_{j=1}^n v_1^{[j]} b_j^{[i]}, w^{[i]}\Big)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,,$$

báze v prostoru $\mathscr{S}((2.7), (2.8))$. Podle Vět 9.2.2 a 9.2.3 úloha (2.23), (1.5) má řešení právě tehdy, je-li

$$\int_\alpha^\beta h(t) \sum_{j=1}^n \bar{v}_1^{[j]}(t)\,\bar{b}_j^{[i]}\,\mathrm{d}t + (c, w^{[i]}) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{2.38}$$

Má-li rovnice (2.37) pouze triviální řešení, pak při pevných l, M, N úloha (2.23), (1.5) má řešení pro libovolné $h \in C^{(0)}$, $c \in K^r$. Tento případ může nastat jen pro $r \leqq n$, neboť pro $r > n$ je počet sloupců matice soustavy (2.37) větší než počet jejích řádků o $r - n$, a tedy rovnice (2.37) má alespoň $r - n$ lineárně nezávislých řešení. Také podle (2.25) je $\dim \mathscr{S}((2.7), (2.8)) \geqq r - n$.

Příklad (i): Vyšetřujme úlohu

$$t^2\ddot{u}_1 + 6t\dot{u}_1 + 6u_1 = h(t)\,, \tag{2.39}$$

$$u_1(1) - u_1(3) + 2\dot{u}_1(3) = 0\,, \tag{2.40}$$

kde funkce h: $\langle 1, 3 \rangle \to R$ je spojitá a kde $c \in R$. Položíme $l(u_1) = t^2\ddot{u}_1 + 6t\dot{u}_1 + 6u_1$, $M = (1, 0)$, $N = (-1, 2)$ a vypočteme, že je $l^*(v_1) = t^2\ddot{v}_1 - 2t\dot{v}_1 + 2v_1$,

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} 4t, & t^2 \\ -t^2, & 0 \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} t^{-2}, & -t^{-3} \\ -2t^{-3}, & 3t^{-9} \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} t, & t^2 \\ 1, & 2t \end{pmatrix},$$

$$\Theta^*(t)\, V(t) = \begin{pmatrix} 3t^2, & 2t^3 \\ t^3, & t^4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\Theta^*(1)\, V(1), & M^* \\ \Theta^*(3)\, V(3), & N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3, & -2, & 1 \\ -1, & -1, & 0 \\ 27, & 54, & -1 \\ 27, & 81, & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Protože matice (2.41) má hodnost 3, má rovnice (2.37) pouze triviální řešení, tedy úloha (2.7), (2.8) má pouze triviální řešení a úloha (2.39), (2.40) má řešení pro každou spojitou funkci h a pro každé $c \in R$.

Příklad (ii): Vyšetřujme úlohu (2.39),

$$-4u_1(1) - \dot{u}_1(1) - 27\dot{u}_1(3) = c\,. \tag{2.42}$$

l, l^*, Θ a V jsou tytéž jako v Příkladě (i) a je

$$\begin{pmatrix} -\Theta^*(1)\, V(1), & M^* \\ \Theta^*(3)\, V(3), & N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3, & -2, & -4 \\ -1, & -1, & -1 \\ 27, & 54, & 0 \\ 27, & 81, & -27 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Matice (2.43) má hodnost 2, rovnice (2.37) má řešení $\operatorname{col}(-2, 1, 1)$, úloha (2.7), (2.8) má řešení $\tilde{v}_1(t) = -2t + t^2$, $\tilde{w} = 1$ a každé řešení (v_1, w) úlohy (2.7), (2.8) je násobkem řešení $(\tilde{v}_1, \tilde{w})$. Proto úloha (2.39), (2.42) má řešení tehdy a jen tehdy, je-li

$$\int_1^3 h(t)\,(-2t + t^2)\,dt + c = 0\,.$$

9.3. Budeme se zabývat úlohou (2.23), (2.24). Jako obvykle, vektory v K^l, $l = 1, 2, 3, \ldots$, zapisujeme jako sloupcové vektory; je-li $d = \operatorname{col}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $e = \operatorname{col}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in K^n$, položíme

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \operatorname{col}(d_1, d_2, \ldots, d_n, e_1, e_2, \ldots, e_n) \in K^{2n}\,.$$

Je-li $d, e, f, g \in K^n$, znamená (d, f) skalární součin v K^n; skalární součin v K^{2n} budeme psát

$$\left(\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right);$$

je ovšem

$$\left(\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = (d, f) + (e, g) \quad [\text{viz } (3.2.19\text{a}), (3.2.19\text{b})] .$$

Nechť (M, N) znamená matici typu $(r, 2n)$, která vznikne tím, že matici N napíšeme napravo vedle matice M; nechť $\begin{pmatrix} M^* \\ N^* \end{pmatrix}$ je matice typu $(2n, r)$, která vznikne tím, že matici N^* napíšeme pod matici M^*. Pokud některá z rovnic (1.4), kde $c_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$, je lineární kombinací ostatních, můžeme ji vynechat, aniž se tím změní množina řešení úlohy (2.23), (2.24). Proto budeme v tomto odstavci bez ztráty na obecnosti předpokládat, že

$$\operatorname{rank}(M, N) = r . \tag{3.1}$$

Odtud plyne $0 \leqq r \leqq 2n$. Položme

$$\mathscr{X}(M, N) = \left\{ \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \middle| \, d, e \in K^n, (M, N) \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = 0 \right\} . \tag{3.2}$$

[Je-li $r = 0$, klademe $\mathscr{X}(M, N) = K^{2n}$.]

Je zřejmé, že podmínka (2.24) platí právě tehdy, je-li

$$\begin{pmatrix} u(\alpha) \\ u(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{X}(M, N) . \tag{3.3}$$

Zřejmě je $\dim \mathscr{X}(M, N) = 2n - r$. Nechť je dán lineární podprostor $\mathscr{X}$ v K^{2n}, $\dim \mathscr{X} = 2n - r$. Úlohu (2.23),

$$\begin{pmatrix} u(\alpha) \\ u(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{X} \tag{3.4}$$

převedeme na úlohu (2.23), (2.24) tím, že najdeme matice M, N typu (r, n) tak, aby platilo (3.1) a

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}(M, N) \tag{3.5}$$

(takové matice M, N existují pro $r > 0$, nejsou ovšem určeny jednoznačně.)

Můžeme tedy tutéž úlohu studovat jako úlohu (2.23), (2.24) nebo jako úlohu (2.23), (3.4). Obojí postup má své přednosti. Zápisu (2.23), (2.24) se převážně užívá při řešení konkrétních okrajových úloh, zápis (2.23), (3.4) je výhodnější v některých teoretických úvahách.

Lineární podprostor $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)$ v K^{2n} definujme vztahem

$$\mathscr{Y} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{pmatrix} \Theta(\alpha)\, d \\ -\Theta(\beta)\, e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{pro každé} \quad \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathscr{X} \right\} . \tag{3.6}$$

Lineární podprostor $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}(M, N, l)$ v K^{2n} definujme vztahem

$$\mathscr{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \middle| \; M^* w - \Theta^*(\alpha) f = 0 \,, \quad N^* w + \Theta^*(\beta)\, g = 0 \right.$$

$$\left. \text{pro vhodné} \quad w \in K^r \right\}, \quad r \geqq 1 \,,$$

$$\mathscr{Z} = \{0\} \quad \text{v případě, že} \quad r = 0 \,. \tag{3.7}$$

9.3.1. Věta: *Platí*

$$\mathscr{Y}(\mathscr{X}(M, N), l) = \mathscr{Z}(M, N, l) \,, \tag{3.8}$$

$$\dim \mathscr{Z}(M, N, l) = r \,. \tag{3.9}$$

Důkaz: Je-li $r = 0$, je $\mathscr{X}(M, N) = K^{2n}$, $\mathscr{Y} = \{0\}$, $\mathscr{Z} = \{0\}$ a Věta 9.3.1 platí. Nechť je tedy $0 < r \leqq 2n$. Nechť Z je blokově diagonální matice, na jejíž diagonále jsou matice

$$(\Theta^*(\alpha))^{-1} \,, \quad -(\Theta^*(\beta))^{-1} \,,$$

tj.

$$Z = \begin{pmatrix} (\Theta^*(\alpha))^{-1}, & 0 \\ 0, & -(\Theta^*(\beta))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Matice Z je regulární a zřejmě je

$$\mathscr{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} M^* \\ N^* \end{pmatrix} w, \; w \in K^r \right\}.$$

Protože matice $\begin{pmatrix} M^* \\ N^* \end{pmatrix}$ má hodnost r [viz (3.1)], platí (3.9).

Nechť W je blokově diagonální matice, na jejíž diagonále jsou matice $\Theta(\alpha)$, $-\Theta(\beta)$, tj.

$$W = \begin{pmatrix} \Theta(\alpha), & 0 \\ 0, & -\Theta(\beta) \end{pmatrix}.$$

Položme

$$\mathscr{W} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ p \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b \\ p \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathscr{X}(M, N) \right\}.$$

Matice W je regulární, $\dim \mathscr{X}(M, N) = 2n - r$, je tedy $\dim \mathscr{W} = 2n - r$. $\mathscr{Y}$ je ortogonální doplněk prostoru $\mathscr{W}$ v K^{2n}, je tedy

$$\dim \mathscr{Y} = r \,. \tag{3.10}$$

Je-li

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{Z} \,, \quad \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathscr{X}(M, N) \,,$$

je

$$\left(\begin{pmatrix} \Theta(\alpha)\, d \\ -\Theta(\beta)\, e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = \left(\Theta(\alpha)\, d, (\Theta^*(\alpha))^{-1} M^* w\right) +$$
$$+ \left(-\Theta(\beta)\, e, -(\Theta^*(\beta))^{-1} N^* w\right) = (Md + Ne, w) = 0\,,$$

tedy je $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$. Odtud, z (3.9) a (3.10) plyne, že platí (3.8). Věta 9.3.1 je dokázána.

Z Věty 9.3.1 a z (3.1) plyne, že platí

9.3.2. Pomocná věta: *Je-li* (v_1, w) *řešením úlohy* (2.7), (2.8), *pak* v_1 *je řešením úlohy* (2.7),

$$\begin{pmatrix} v(\alpha) \\ v(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{Y}(\mathscr{X}(M, N), l)\,. \tag{3.11}$$

Je-li v_1 *řešením úlohy* (2.7), (3.11), *pak existuje jediné* $w \in K^r$ *tak, že* (v_1, w) *je řešením úlohy* (2.7), (2.8).

Z Vět 9.2.2, 9.2.3 a z Pomocné věty 9.3.2 plyne

9.3.3. Věta: *Úloha* (2.23), (3.3) *má řešení právě tehdy, jestliže platí*

$$\int_\alpha^\beta h(t)\, \bar{v}_1(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

pro každé řešení v_1 *úlohy* (2.7), (3.11).

Protože k lineárnímu podprostoru $\mathscr{X}$ v K^{2n}, dim $\mathscr{X} = 2n - r$, existují matice M, N tak, že platí (3.5) a (3.1), lze z Vět 9.3.3 a 9.3.1 odvodit, že platí

9.3.4. Věta: *Úloha* (2.23), (3.4) *má řešení právě tehdy, jestliže platí*

$$\int_\alpha^\beta h(t)\, \bar{v}_1(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

pro každé řešení v_1 *úlohy* (2.7),

$$\begin{pmatrix} v(\alpha) \\ v(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)\,. \tag{3.12}$$

9.3.5. Poznámka: K operátoru l, který je zapsán vzorcem (2.2), je přiřazen operátor l^* vzorcem (2.3). Zapíšeme-li l^* ve tvaru

$$l^*(u_1) = b_0(t)\, u_1^{(n)} + b_1(t)\, u_1^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)\, u_1\,,$$

můžeme týmž postupem definovat operátor $(l^*)^*$.

Snadno se zjistí, že koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_n$ splňují podmínky (1.1), (2.1). Místo $(l^*)^*$ se obvykle píše l^{**}.

9.3.6. Věta: $l^{**} = l$.

Důkaz: Proveďme důkaz nejdříve pro speciální případ, že je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Je tedy

$$l(u_1) = a_0 u_1^{(n)}, \quad l^*(v_1) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overline{a_0^{(n-i)}} v_1^{(i)},$$

$$\begin{aligned} l^{**}(w_1) &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \left(a_0^{(n-i)} w_1\right)^{(i)} = \\ &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_0^{(n-j)} w_1^{(j)} = \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} a_0^{(n-j)} w_1^{(j)} P(n, j), \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde

$$P(n, j) = \sum_{i=j}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{j}.$$

Je

$$\binom{n}{i} \binom{i}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j},$$

tedy

$$P(n, j) = \sum_{i=j}^{n} (-1)^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k}.$$

Zřejmě je $P(n, n) = (-1)^n$. Pro $l = 1, 2, \ldots$ je

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} = 0$$

[to plyne ze vzorce

$$(a + b)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l-k} b^k \quad \text{pro} \quad a = 1,\ b = -1,$$

tedy $P(n, j) = 0$ pro $j = 0, 1, \ldots, n - 1$].

Z (3.13) tedy plyne, že je $l^{**}(w_1) = l(w_1)$ ve speciálním případě, že je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. V obecném případě nejdříve dokážeme, že platí

$$l^{**}(w_1) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i \left(a_{n-m}^{(m-i)} w_1\right)^{(i)}$$

a výraz

$$(-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i \left(a_{n-m}^{(m-i)} w_1\right)^{(i)}$$

upravíme obdobně jako v (3.13).

9.3.7. Věta: *Nechť $\mathscr{X}$ je lineární podprostor v K^{2n},* $\dim \mathscr{X} = 2n - r$. *Potom $\mathscr{Y}(\mathscr{Y}(\mathscr{X}, l), l^*) = \mathscr{X}$.*

Důkaz: Nechť funkce $\Xi: \langle \alpha, \beta \rangle \to M_n$ je odvozena z operátoru l^* stejným způsobem, jako byla odvozena funkce Θ z operátoru l. Můžeme tedy v (2.6) psát $l^*, l^{**}, \Xi^*, v_1, u_1, v, u$ místo $l, l^*, \Theta^*, u_1, v_1, u, v$; protože je $l^{**} = l$ (podle Věty 9.3.6), je

$$\int_{t_1}^{t_2} l^*(v_1)\, \bar{u}_1 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} v_1 \overline{l(u_1)} \, dt + (v(t_2), \Xi^*(t_2)\, u(t_2)) - (v(t_1), \Xi^*(t_1)\, u(t_1))$$

pro libovolné funkce $u_1, v_1 \in C^{(n)}$ a pro libovolné $t_1, t_2 \in R$. K této rovnici přičtěme rovnici komplexně sdruženou s (2.6). Dostáváme

$$(v(t_1), \Theta(t_1)\, u(t_1)) + (v(t_1), \Xi^*(t_1)\, u(t_1)) =$$
$$= (v(t_2), \Theta(t_2)\, u(t_2)) + (v(t_2), \Xi^*(t_2)\, u(t_2)),$$

tedy je

$$(v(t_1), [\Theta(t_1) + \Xi^*(t_1)]\, u(t_1)) = (v(t_2), [\Theta(t_2) + \Xi^*(t_2)]\, u(t_2)) \tag{3.14}$$

pro libovolné funkce $u_1, v_1 \in C^{(n)}$ a libovolné $t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Dokážeme, že platí

$$\Xi^*(t) = -\Theta(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{3.15}$$

Nechť pro nějaké $t_1 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $\Theta(t_1) + \Xi^*(t_1) \neq 0$. Existuje vektor $q \in K^n$, $q = \operatorname{col}(q_1, \ldots, q_n)$, tak, že je $[\Theta(t_1) + \Xi^*(t_1)]\, q \neq 0$. Položme $p = [\Theta(t_1) + \Xi^*(t_1)]\, q$, $p = \operatorname{col}(p_1, \ldots, p_n)$. Zvolme $t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $t_2 \neq t_1$. Existují funkce $u_1 \in C^{(n)}$, $v_1 \in C^{(n)}$ tak, že je

$$u_1^{(i)}(t_1) = q_{i+1} \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$v_1^{(i)}(t_1) = p_{i+1}, \quad v_1^{(i)}(t_2) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Funkci u_1 můžeme najít jako polynom stupně n, funkci v_1 můžeme najít jako polynom stupně $2n$.) Je $u(t_1) = q$, $v(t_1) = p$, $v(t_2) = 0$, tedy

$$(v(t_1), [\Theta(t_1) + \Xi^*(t_1)]\, u(t_1)) = (p, p) \neq 0,$$
$$(v(t_2), [\Theta(t_2) + \Xi^*(t_2)]\, u(t_2)) = 0$$

a to odporuje rovnici (3.14), tedy platí (3.15). Podle (3.6) a (3.15) je

$$\mathscr{Y}(\mathscr{Y}(\mathscr{X}, l), l^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{pmatrix} -\Theta^*(\alpha) f \\ \Theta^*(\beta)\, g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \right) = 0 \right.$$
$$\left. \text{pro každé} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l) \right\}.$$

Je-li $\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathscr{X}$, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{Y}$, je

$$\left(\begin{pmatrix}-\Theta^*(\alpha)\,f\\ \Theta^*(\beta)\,g\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\ e\end{pmatrix}\right) = -\left(\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Theta(\alpha)\,d\\ -\Theta(\beta)\,e\end{pmatrix}\right) = 0$$

a tak je $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}(\mathscr{Y}(\mathscr{X}, l), l^*)$. Podle (3.10) je $\dim \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l) = r$ a obdobně je $\dim \mathscr{Y}(\mathscr{Y}(\mathscr{X}, l), l^*) = 2n - r$. Je tedy $\mathscr{X} = \mathscr{Y}(\mathscr{Y}(\mathscr{X}, l), l^*)$ a Věta 9.3.7 je dokázána.

Nechť $q\colon \langle\alpha, \beta\rangle \to K$ je spojitá funkce. Aplikujeme-li Větu 9.3.4 na úlohu

$$l^*(v_1) = q \tag{3.16}$$

(3.12) a užijeme-li Vět 9.3.6, 9.3.7, odvodíme, že platí

9.3.8. Věta: *Úloha* (3.16), (3.12) *má řešení právě tehdy, je-li*

$$\int_\alpha^\beta q(t)\,\bar{u}_1(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pro každé řešení u_1 úlohy (2.10), (3.4).

9.3.9. Poznámka: Úloha (2.7), (3.12) se nazývá *adjungovaná úloha k úloze* (2.23), (3.4). Adjungovanou úlohou k úloze (3.16), (3.12) je úloha (2.10), (3.4). Věty 9.3.4, 9.3.8 lze stručně vyslovit takto: Okrajová úloha má řešení, je-li její pravá strana ortogonální ke každému řešení adjungované úlohy.

9.3.10. Poznámka: Nechť je $r < 2n$, $\dim \mathscr{X} = 2n - r$. Prostor $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)$ můžeme popsat pomocí okrajových podmínek. K tomu stačí vybrat bázi

$$\begin{pmatrix}d^{[i]}\\ e^{[i]}\end{pmatrix} \text{ v } \mathscr{X}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix} \in \mathscr{Y}$$

právě tehdy, je-li

$$(\Theta(\alpha)\,d^{[i]}, f) - (\Theta(\beta)\,e^{[i]}, g) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, 2n - r. \tag{3.17}$$

Píšeme-li v (3.17) $v(\alpha)$, $v(\beta)$ místo f, g, dostaneme okrajové podmínky, které popisují prostor $\mathscr{Y}$.

Můžeme též postupovat jiným způsobem. Nechť je $\mathscr{X} = \mathscr{X}(M, N)$, $\dim \mathscr{X} = 2n - r > 0$. Matici (M, N) doplníme maticemi $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ typu $(2n - r, n)$ tak, aby matice

$$\begin{pmatrix}M, & N\\ \tilde{M}, & \tilde{N}\end{pmatrix}$$

typu $(2n, 2n)$ byla regulární. Matici Z typu $(2n, 2n)$ určeme z rovnice

$$Z\begin{pmatrix}M, & N\\ \tilde{M}, & \tilde{N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Theta(\alpha), & 0\\ 0, & -\Theta(\beta)\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

a rozdělme ji na pole P, T typu (n, r), $\tilde{P}$, $\tilde{T}$ typu $(n, 2n - r)$, takže

$$Z = \begin{pmatrix} P, & \tilde{P} \\ T, & \tilde{T} \end{pmatrix}.$$

Z (3.18) plyne, že platí

$$\left(\begin{pmatrix} M, & N \\ \tilde{M}, & \tilde{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P^*, & T^* \\ \tilde{P}^*, & \tilde{T}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \Theta(\alpha), & 0, \\ 0, & -\Theta(\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right). \tag{3.19}$$

Položme

$$\mathscr{V} = \left\{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \middle| \tilde{P}^* f + \tilde{T}^* g = 0\right\}.$$

Z (3.19) plyne, že je $\mathscr{V} \subset \mathscr{Y}$. Protože matice Z je regulární a protože matice $\tilde{P}^*$, $\tilde{T}^*$ jsou typu $(2n - r, n)$, je $\dim \mathscr{V} = r$. Podle (3.10) je $\dim \mathscr{Y} = r$, a proto je $\mathscr{V} = \mathscr{Y}$. Proto

$$\tilde{P}^* v(\alpha) + \tilde{T}^* v(\beta) = 0 \tag{3.20}$$

jsou okrajové podmínky, které popisují prostor $\mathscr{Y}$.

Nechť $v_1^{[1]}, \ldots, v_1^{[n]}$ je fundamentální soustava řešení rovnice (2.7), $v^{[i]} = \operatorname{col}(v_1^{[i]}, (v_1^{[i]})', \ldots, (v_1^{[i]})^{n-1})$, $V = ((v^{[1]}, \ldots, v^{[n]}))$. Položme $v(t) = V(t)\, b$, kde $b \in K^n$, $v = \operatorname{col}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Řešení v_1 rovnice (2.7) splňuje (3.20) právě tehdy, je-li

$$(\tilde{P}^* V(\alpha) + \tilde{T}^* V(\beta))\, b = 0.$$

9.3.11. Definice: *Úloha* (2.23), (3.4) [nebo též úloha (2.23), (3.3)] se nazývá *samoadjungovaná,* jestliže $l^* = l$ (po úpravě l^* na obvyklý tvar) a $\mathscr{Y}(\mathscr{X}, l) = \mathscr{X}$ [tj. $\mathscr{Y}(\mathscr{X}(M, N), l) = \mathscr{X}(M, N)$]. Úloha (2.23), (2.24) se nazývá samoadjungovaná, je-li úloha (2.23), (3.3) samoadjungovaná.

9.3.12. Poznámka: Je-li úloha (2.23), (3.4) samoadjungovaná, $\dim \mathscr{X} = 2n - r$, pak je $r = n$, neboť podle (3.10) je $\dim \mathscr{Y} = r$.

9.3.13. Věta: *Rovnice*

$$\mathscr{Y}(\mathscr{X}(M, N), l) = \mathscr{X}(M, N) \tag{3.21}$$

je splněna právě tehdy, jestliže platí $r = n$ a

$$M\, \Theta^{-1}(\alpha)\, M^* - N\, \Theta^{-1}(\beta)\, N^* = 0. \tag{3.22}$$

Důkaz: Nechť platí (3.21). Podle Poznámky 9.3.12 je $r = n$ a podle (3.2) a Věty 9.3.1 je $Mf + Ng = 0$ pro $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{X}$, tedy

$$[M(\Theta^*(\alpha))^{-1} M^* - N(\Theta^*(\beta))^{-1} N^*]\, w = 0$$

pro $w \in K^n$. Proto matice v lomené závorce je rovna nule a také adjungovaná matice se rovná nule, tedy platí (3.22).

Platí-li (3.22), dostaneme obdobně, že je $\mathscr{X} \subset \mathscr{X}(M, N)$. Je-li ještě $\dim \mathscr{X} = r = n = \dim \mathscr{X}(M, N)$, platí (3.21). Věta 9.3.13 je dokázána.

Naším nejbližším cílem je vyšetřit, za jakých podmínek platí $l^* = l$. Rovnost $l^* = l$ můžeme chápat ve dvojím smyslu:

(i) $l^*(u_1) = l(u_1)$ pro každé $u_1 \in C^{(n)}$.

(ii) Upravíme-li pravou stranu v (2.3) tak, aby měla stejný tvar jako pravá strana v (2.2), pak koeficienty u $u_1^{(j)}$ jsou si rovny pro $j = 0, 1, \ldots, n$.

Snadno se lze přesvědčit, že obě interpretace rovnosti $l^* = l$ jsou ekvivalentní.

Interpretujeme-li rovnost $l^* = l$ podle (ii), snadno zjistíme, že platí:

$$\text{Je-li } l^* = l, \text{ pak je } (-1)^n \bar{a}_0(t) = a_0(t) \text{ pro } t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{3.23}$$

Nejdříve dokážeme některé pomocné výsledky. Zřejmě platí

9.3.14. Pomocná věta: *Nechť funkce* $b_i, e_i: \langle \alpha, \beta \rangle \to K$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, *mají spojité derivace do řádu* $n - i$. *Nechť diferenciální operátory* g, f *jsou zapsány vzorci*

$$g(u_1) = b_0(t)\, u_1^{(n)} + b_1(t)\, u_1^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)\, u_1\,,$$

$$f(u_1) = e_0(t)\, u_1^{(n)} + e_1(t)\, u_1^{(n-1)} + \ldots + e_n(t)\, u_1\,.$$

Nechť je $g(u_1)(t) = f(u_1)(t)$ *pro každou funkci* $u_1 \in C^{(n)}$ *a každé* $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. *Potom je* $e_i(t) = b_i(t)$ *pro* $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Dokážeme, že platí

9.3.15. Pomocná věta: *Nechť funkce* $a_i: \langle \alpha, \beta \rangle \to R$ *má spojité derivace do řádu* $n - i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *a nechť operátor* l *je zapsán vzorcem* (2.2). *Operátor* l^* [*který je určen vzorcem* (2.3)] *zapišme ve tvaru*

$$l^*(v_1) = b_0(t)\, v_1^{(n)} + b_1(t)\, v_1^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)\, v_1\,.$$

Nechť funkce $e_i: \langle \alpha, \beta \rangle \to K$ *jsou spojité a nechť je*

$$\int_\alpha^\beta l(u_1)\, \bar{v}_1 \, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta u_1 \bar{f}(v_1)\, \mathrm{d}t \tag{3.24}$$

pro každou funkci $v_1 \in C^{(n)}$ *a každou funkci* $u_1 \in C^{(n)}$ *takovou, že je*

$$u_1(\alpha) = \dot{u}_1(\alpha) = \ldots = u_1^{(n-1)}(\alpha) = 0 = u_1(\beta) =$$
$$= \dot{u}_1(\beta) = \ldots = u_1^{(n-1)}(\beta)\,. \tag{3.25}$$

Potom je

$$e_i(t) = b_i(t) \quad pro \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3.26}$$

Důkaz: Podle (2.6), (3.24) a (3.25) je

$$\int_\alpha^\beta u_1[\bar{f}(v_1) - \overline{l^*}(v_1)]\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3.27}$$

pro každou funkci $v_1 \in C^{(n)}$ a každou funkci $u_1 \in C^{(n)}$ splňující (3.24). Nechť existuje funkce $v_1 \in C^{(n)}$ a číslo $\tau \in \langle\alpha, \beta\rangle$ tak, že je $\bar{f}(v_1)(\tau) - \overline{l^*}(v_1)(\tau) \neq 0$. Položme $\zeta = f(v_1)(\tau) - l^*(v_1)(\tau)$. Protože funkce $\bar{f}(v_1)$ i $\overline{l^*}(v_1)$ jsou spojité, existují čísla α_1, β_1 tak, že je $\alpha \leqq \alpha_1 \leqq \tau \leqq \beta_1 \leqq \beta$, $\alpha_1 < \beta_1$, a že platí

$$\operatorname{Re} \zeta(\bar{f}(v_1)(t) - \overline{l^*}(v_1)(t)) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in \langle\alpha_1, \beta_1\rangle\,.$$

Položme

$$w_1(t) = \exp\left[-(\beta_1 - t)^{-2}(t - \alpha_1)^{-2}\right] \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha_1, \beta_1)\,,$$

$$w_1(t) = 0\,, \quad \text{je-li} \quad \alpha \leqq t \leqq \alpha_1 \quad \text{nebo} \quad \beta_1 \leqq t \leqq \beta\,.$$

Není těžké dokázat, že funkce w_1 má spojité derivace všech řádů a že splňuje (3.25).

Je

$$\operatorname{Re} \zeta\, w_1(t)(\bar{f}(v_1)(t) - \overline{l^*}(v_1)(t)) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha_1, \beta_1)\,,$$

tedy (3.27) neplatí, dosadíme-li $u_1 = \zeta\, w_1$ a to je spor. Proto je $f(v_1)(t) = l^*(v_1)(t)$ pro každou funkci $v_1 \in C^{(n)}$ a každé $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. (3.26) platí podle Pomocné věty 9.3.14. Pomocná věta 9.3.15 je dokázána.

9.3.16. Pomocná věta: *Nechť k je celé nezáporné a nechť funkce p_{2k}: $\langle\alpha, \beta\rangle \to K$ má spojité derivace do řádu $2k$. V případě, že je $K = C$, nechť funkce p_{2k} je reálná. Nechť operátor g_{2k}: $C^{(2k)} \to C^{(0)}$ je popsán vzorcem*

$$g_{2k}(u_1) = [p_{2k}(t)\, u_1^{(k)}]^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p_{2k}^{(k-j)}(t) u_1^{(k+j)}\,. \tag{3.28}$$

Potom je definován operátor g_{2k}^* a je $g_{2k}^* = g_{2k}$.

Důkaz: Protože funkce $p_{2k}^{(k-j)}$ mají spojité derivace do řádu $k + j$, je definován operátor g_{2k}^*. Opakovanou integrací per partes se snadno přesvědčíme, že je

$$\int_\alpha^\beta g_{2k}(u_1)\, \bar{v}_1\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta u_1\, \bar{g}_{2k}(v_1)\, \mathrm{d}t\,,$$

pro $v_1 \in C^{(2k)}$ a pro funkce $u_1 \in C^{(2k)}$ splňující podmínku

$$u_1(\alpha) = \dot{u}_1(\alpha) = \ldots = u_1^{(2k-1)}(\alpha) = 0 = u_1(\beta) = \dot{u}_1(\beta) = \ldots = u^{(2k-1)}(\beta)\,.$$

Podle Pomocné věty 9.3.15 platí $g_{2k}^* = g_{2k}$. Pomocná věta 9.3.16 je dokázána.

Obdobným způsobem se dokáže, že platí

9.3.17. Pomocná věta: *Nechť je $K = C$, k celé nezáporné a nechť funkce p_{2k+1}: $\langle\alpha, \beta\rangle \to C$ je reálná a má spojité derivace do řádu $2k + 1$. Nechť operátor*

g_{2k+1}: $C^{(2k+1)} \to C^{(0)}$ *je popsán vzorcem*

$$g_{2k+1}(u_1) = \mathrm{i}[p_{2k+1}(t)\, u_1^{(k+1)}]^{(k)} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}[\dot{p}_{2k+1}(t)\, u_1^{(k)}]^{(k)} =$$

$$= \mathrm{i}p_{2k+1}(t)\, u_1^{(2k+1)} + \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{i} \left[\binom{k}{j} + \tfrac{1}{2}\binom{k}{j+1}\right] p_{2k+1}^{(k-j)}(t) u_1^{(k+1+j)} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, \mathrm{i} p_{2k+1}^{(k+1)}(t)\, u_1^{(k)} . \tag{3.29}$$

Potom je definován operátor g^*_{2k+1} *a je* $g^*_{2k+1} = g_{2k+1}$.

Z Pomocných vět 9.3.16 a 9.3.17 přímo plyne, že platí

9.3.18. Věta: *Nechť je* $K = C$, *nechť funkce* p_j: $\langle \alpha, \beta \rangle \to C$ *jsou reálné a mají spojité derivace do řádu* j, $j = 0, 1, \ldots, n$. *Nechť operátory* g_j *jsou definovány vzorci* (3.28), *resp.* (3.29). *Pro* $u_1 \in C^{(n)}$ *položme*

$$l(u_1) = \sum_{j=0}^{n} g_j(u_1) .$$

Potom je definován operátor l^* *a je* $l^* = l$.

Větu 9.3.18 lze obrátit. Platí

9.3.19. Věta: *Nechť funkce* a_j: $\langle \alpha, \beta \rangle \to C$ *mají spojité derivace do řádu* $n - j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *nechť operátor* l *je definován vzorcem* (2.2) *a nechť je* $l^* = l$. *Potom existují funkce* p_j: $\langle \alpha, \beta \rangle \to C$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, *takové, že*:

Funkce p_j *jsou reálné a mají spojité derivace do řádu* j, $j = 0, 1, \ldots, n$. (3.30)

Pro $u_1 \in C^{(n)}$ *je* $l(u_1) = \sum_{j=0}^{n} g_j(u_1)$, *kde* $g_j(u_1)$ *je určeno vzorci* (3.28), *resp.* (3.29). (3.31)

Důkaz: Větu 9.3.19 dokážeme indukcí podle řádu n operátoru l. Věta 9.3.19 zřejmě platí, je-li $n = 0$. Předpokládejme, že známe celé nezáporné číslo m a že již víme, že Věta 9.3.19 platí i v případě, že $n = m$. Dokážeme, že platí i v případě $n = m + 1$. Budeme rozlišovat dva případy:

(i) m je sudé. To znamená, že n je liché a podle (3.23) je $a_0(t) = -\bar{a}_0(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Položme $p_n(t) = -\mathrm{i}\, a_0(t)$ a definujme $g_n(u_1)$ vzorcem (3.29). Je $g_n = g_n^*$, tedy $l_n - g_n = l_n^* - g_n^* = (l_n - g_n)^*$. Avšak $l_n - g_n$ je lineární diferenciální operátor řádu m a podle indukčního předpokladu existují takové reálné funkce p_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, že p_j má spojité derivace do řádu j a je $l - g_n = g_0 + g_1 + \ldots = g_m$, kde operátory $g_1, \ldots, g_m$ jsou dány vzorci (3.28), resp. (3.29).

(ii) m je liché. V tomto případě je n sudé a podle (3.23) je $a_0(t) = \bar{a}_0(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Položíme $p_n(t) = a_0(t)$, operátor g_n definujeme vzorcem (3.28) a dále postupujeme jako v případě (i). Věta 9.3.19 je dokázána.

Je-li $K = R$, nelze užívat vzorce (3.29). Z Pomocné věty 9.3.16 plyne, že platí

9.3.20. Věta: *Nechť je $K = R$ a nechť funkce p_j: $\langle\alpha, \beta\rangle \to R$ mají spojité derivace do řádu j, $j = 0, 2, 4, \ldots, 2r$ (r celé, nezáporné). Nechť operátory g_j jsou definovány vzorcem (3.28). Pro $u_1 \in C^{(2r)}$ položme*

$$l(u_1) = \sum_{k=0}^{r} g_{2k}(u_1). \tag{3.32}$$

Potom je definován operátor l^* a je $l^* = l$.

Také Větu 9.3.20 lze obrátit. Platí

9.3.21. Věta: *Nechť funkce a_j: $\langle\alpha, \beta\rangle \to R$ mají spojité derivace do řádu $n - j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, nechť operátor l je definován vzorcem (2.2) a nechť je $l^* = l$. Potom je $n = 2r$, r celé nezáporné, a existují funkce p_{2k}: $\langle\alpha, \beta\rangle \to R$, $k = 0, 1, \ldots, r$, takové, že platí:*

Funkce p_{2k} má spojité derivace do řádu $2k$, $k = 0, 1, \ldots, r$. (3.33)

Pro $u_1 \in C^{(n)}$ je $l(u_1) = \sum_{k=0}^{r} g_{2k}(u_1)$, kde $g_{2k}(u_1)$ je určeno vzorcem (3.28). (3.34)

Důkaz je obdobný jako v případě Věty 9.3.19.

9.3.22. Poznámka: Chceme-li rozhodnout podle Věty 9.3.4, zda úloha (2.23), (3.3) má řešení, můžeme prostor $\mathcal{Y}(\mathcal{X}(M, N), l)$ vyjádřit pomocí (3.8), (3.7). Je

$$\mathcal{Y}(\mathcal{X}(M, N), l) = \left\{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \,\middle|\, \Theta^*(\alpha) f + M^* w = 0, \quad \Theta^*(\beta) g + N^* w = 0 \right.$$
$$\left. \text{pro vhodné} \quad w \in K^r \right\}.$$

Nechť $v_1^{[1]}, \ldots, v_1^{[n]}$ je fundamentální soustava řešení rovnice (2.7),

$$v^{[i]} = \operatorname{col}\left(v_1^{[i]}, (v_1^{[i]})', \ldots, (v_1^{[i]})^{n-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad V = \left((v^{[1]}, \ldots, v^{[n]})\right).$$

Položme $v(t) = V(t)\, b$, $b \in K^n$, $v = \operatorname{col}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Pak v_1 je řešením úlohy (2.7), (3.12) $[\mathcal{X} = \mathcal{X}(M, N)]$ právě tehdy, jestliže platí (2.37). Obdobně jako v Poznámce 9.2.8 se odvodí, že úloha (2.23), (3.3) má řešení právě tehdy, je-li

$$\int_\alpha^\beta h(t) \sum_{j=1}^{m} \bar{v}_1^{[j]}(t)\, b_j^{[i]} \, dt = 0\,;$$

přitom

$$\begin{pmatrix} b^{[i]} \\ w^{[i]} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,,$$

je báze v prostoru řešení rovnice (2.37) a $b^{[i]} = \operatorname{col}(b_1^{[i]} \ldots, b_n^{[i]})$.

Příklad (i): Vyšetřujme úlohu (2.39),

$$u_1(1) + 4u_1(2) = 0\,,$$
$$\dot{u}_1(2) = 0\,. \tag{3.35}$$

l, l^*, $\Theta(t)$, $V(t)$ je definováno stejnými vzorci jako v Příkladu (i) z Poznámky 9.2.8,

$$M = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Je

$$\begin{pmatrix} -\Theta^*(1)\,V(1), & M^* \\ \Theta^*(2)\,V(2), & N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3, & -2, & 1, & 0 \\ -1, & -1, & 0, & 0 \\ 12, & 16, & 4, & 0 \\ 8, & 16, & 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Matice (3.36) má hodnost 3, rovnice (2.37) má řešení $\operatorname{col}(-1, 1, -1, -8)$ a při pevně daných l, M, N úloha (2.39), (3.35) má řešení právě tehdy, je-li

$$\int_1^2 h(t)\,(-t + t^2)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Při vyšetřování úlohy (2.23), (3.3) můžeme Větu 9.3.4 kombinovat s postupem popsaným v Poznámce 9.3.10.

Příklad (ii): Vyšetřujme úlohu (2.39),

$$u_1(1) - u_1(2) = 0\,,$$
$$\dot{u}_1(2) = 0\,, \tag{3.37}$$

kde funkce $h\colon \langle 1, 2\rangle \to R$ je spojitá. Je

$$(M, N) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix};$$

l, l^*, Θ, V jsou dány týmiž vzorci jako v Poznámce 9.2.8, Příkladu (i).

$$\text{Zvolme } (\tilde{M}, \tilde{N}) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Je

$$\begin{pmatrix} M, N \\ \tilde{M}, \tilde{N} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ -1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 4, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} -8, & 0 \\ 4, & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}^*\,V(1) + \tilde{T}^*\,V(2) = \begin{pmatrix} -9, & -14 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Poslední matice je regulární, a proto rovnice $[\tilde{P}^* V(1) + \tilde{T}^* V(2)]\, b = 0$ má pouze triviální řešení. Tedy také úloha (2.7), (3.20) má pouze triviální řešení a úloha (2.39), (3.37) má řešení pro každou spojitou funkci $h: \langle 1, 2 \rangle \to R$.

9.3.23. Poznámka: Máme-li zjistit, zda úloha (2.23), (3.3) je samoadjungovaná, přesvědčíme se, zda platí $l^* = l$ a (3.22).

V této poznámce upozorníme na dva případy okrajových podmínek, které vedou k samoadjungovaným úlohám pro široké třídy operátorů l (takových, že $l^* = l$).

Nechť l je diferenciální operátor [viz (2.2)] a nechť Θ má stejný význam jako v odst. 9.2. Z (3.6) plyne, že platí toto tvrzení:

Nechť $\mathscr{X}$ a $\mathscr{V}$ jsou lineární podprostory v K^{2n}. Nechť platí

$$(\Theta(\alpha)\, d, f) - (\Theta(\beta)\, e, g) = 0$$

pro

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathscr{X}\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{V}\,.$$

$$\textit{Potom } \mathscr{V} \subset \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l). \tag{3.38}$$

Je-li ještě $\dim \mathscr{X} = 2n - r$, $\dim \mathscr{V} = r$, pak je $\mathscr{V} = \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)$ [neboť $\dim \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l) = r$ podle Věty 9.3.1].

Odtud plyne, že platí toto tvrzení:

Nechť $\mathscr{X}$ je lineární podprostor v K^{2n}, $\dim \mathscr{X} = n$ *a nechť platí*

$$(\Theta(\alpha)\, d, f) - (\Theta(\beta)\, e, g) = 0$$

pro

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{X}\,.$$

$$\textit{Potom } \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l) = \mathscr{X}\,. \tag{3.39}$$

Příklad (i): Nechť je $l^* = l$ [viz (2.3), (2.2), (2.1)] a nechť platí

$$a_k^{(j)}(\beta) = a_k^{(j)}(\alpha) \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n - k\,. \tag{3.40}$$

Potom úloha (2.23),

$$u_1^{(i)}(\alpha) = u_1^{(i)}(\beta) \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1\,, \tag{3.41}$$

je samoadjungovaná.

Abychom to dokázali, položme

$$\mathscr{X} = \left\{ \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \middle|\, d \in K^n \right\}.$$

Úlohu (2.23), (3.41) můžeme zapsat jako úlohu (2.23)

$$\begin{pmatrix} u(\alpha) \\ u(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{X} \tag{3.42}$$

[(3.41) můžeme zapsat jako $I\,u(\alpha) - I\,u(\beta) = 0$ a je $\mathscr{X} = \mathscr{X}(I, -I)$]. Z podmínek (3.40) plyne, že je $\Theta(\beta) = \Theta(\alpha)$. Proto je

$$(\Theta(\alpha)\,d, f) - (\Theta(\beta)\,d, f) = 0 \quad \text{pro} \quad \operatorname{col}(d, d), \operatorname{col}(e, e) \in \mathscr{X}$$

a podle tvrzení (3.39) je $\mathscr{X} = \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)$. Úloha (2.23), (3.42) je tedy samoadjungovaná. Podmínky (3.41) se někdy nazývají „*periodické okrajové podmínky*". Jsou-li totiž funkce b_i: $R \to K$, $i = 0, 1, \ldots, n$, spojité, mají-li periodu $\beta - \alpha$, je-li u_1 řešení rovnice $b_0(t)\,u_1^{(n)}(t) + b_1(t)\,u_1^{(n-1)}(t) + \ldots + b_n(t)\,u_1(t) = 0$ a platí-li (3.41), pak – jak lze snadno dokázat – funkce u_1 je periodická s periodou $\beta - \alpha$.

Příklad (ii): Nechť je $l^* = l$ a nechť funkce a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, jsou reálné. Potom $n = 2k$ a úloha (2.23),

$$\begin{aligned} &u_1(\alpha) = \dot{u}_1(\alpha) = \ldots = u_1^{(k)}(\alpha) = 0\,, \\ &u_1(\beta) = \dot{u}_1(\beta) = \ldots = u_1^{(k)}(\beta) = 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

je samoadjungovaná.

Důkaz tohoto tvrzení pouze naznačíme. Podle Věty 9.3.21 je n sudé, $n = 2k$, a existují funkce p_{2i}: $\langle\alpha, \beta\rangle \to R$, které mají spojité derivace do řádu $2i$ tak, že výraz

$$(p_{2k}u_1^{(k)})^{(k)} + (p_{2k-2}u_1^{(k-1)})^{(k-1)} + \ldots + p_0 u_1$$

lze obvyklým způsobem upravit na

$$a_0 u_1^{(n)} + a_1 u_1^{(n-1)} + \ldots + a_n u_1 = l(u_1)\,.$$

Odtud lze dokázat, že matice $\Theta(t) = (\Theta_{ij}(t))$, která přísluší k operátoru l podle odst. 9.2, má tuto vlastnost:

$$\Theta_{ij}(t) = 0\,, \quad \text{je-li} \quad i > k \quad \text{nebo} \quad j > k\,. \tag{3.44}$$

Opět užijeme tvrzení (3.39). Položíme

$$\mathscr{X} = \left\{ \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \;\middle|\; d = \operatorname{col}(d_1, \ldots, d_n)\,, \quad e = \operatorname{col}(e_1, \ldots, e_n)\,, \right.$$
$$\left. d_1 = d_2 = \ldots = d_k = 0 = e_1 = e_2 = \ldots = e_k \right\}.$$

Úlohu (2.23), (3.43) můžeme zapsat jako úlohu (2.23),

$$\begin{pmatrix} u(\alpha) \\ u(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{X}\,. \tag{3.45}$$

Nechť je

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathscr{X}. \tag{3.46}$$

Je

$$(\Theta(\alpha)\, d, f) = \sum_{i,j=1}^{n} \Theta_{ij}(\alpha)\, d_j \bar{f}_i .$$

Je $\Theta_{ij}(\alpha)\, d_j \bar{f}_i = 0$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ podle (3.44) a (3.46). Je tedy $(\Theta(\alpha)\, d, f) = 0$ a obdobně je $(\Theta(\beta)\, e, g) = 0$. Podle tvrzení (3.39) je $\mathscr{X} = \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)$ a úloha (2.23), (3.45) je samoadjungovaná.

9.4. Vyšetřujme úlohu (2.23), (3.3) za předpokladu, že má řešení u_1 pro každou spojitou funkci h: $\langle\alpha, \beta\rangle \to K$ a že toto řešení je určeno jednoznačně. Cílem je najít vzorce pro u_1.

Podle Věty 9.3.3 má úloha (2.23), (3.3) řešení pro každou spojitou funkci h právě tehdy, má-li úloha (2.7), (3.11) pouze triviální řešení. Řešení úlohy (2.23), (3.3) je určeno jednoznačně, má-li úloha (2.10), (3.3) pouze triviální řešení. Budeme tedy v tomto odstavci předpokládat, že je

$$\mathscr{S}((2.7), (3.11)) = \{0\} = \mathscr{S}((2.10), (3.3)), \tag{4.1}$$

kde $\mathscr{S}((2.7), (3.11))$ je množina řešení úlohy (2.7), (3.11) a $\mathscr{S}((2.10), (3.3))$ má analogický význam. Jako v odst. 9.3 budeme předpokládat, že platí (3.1).

Je ovšem $\mathscr{S}((2.7),\ (3.11)) = \mathscr{S}((2.7),\ (2.8))$, $\mathscr{S}((2.10),\ (3.3)) = \mathscr{S}((2.10), (2.24))$ a z (2.25) plyne

$$r = n. \tag{4.2}$$

Nechť U má stejný význam jako v (2.11). Podle (4.1) úloha (2.10), (3.3) má pouze triviální řešení. Hledáme-li je ve tvaru $U(t)p$, kde $p \in K^n$, odvodíme, že matice

$$S = M\, U(\alpha) + N\, U(\beta) \tag{4.3}$$

je regulární [je $S \in M_n$ vzhledem k (4.2)].

9.4.1. Poznámka: Podle (2.25) je každá z podmínek

$$r = n, \quad \dim \mathscr{S}((2.10), (3.3)) = 0, \tag{4.4}$$

$$r = n, \quad \dim \mathscr{S}((2.7), (2.8)) = 0 \tag{4.5}$$

ekvivalentní s podmínkou (4.1).

Podmínka

$$r = n, \quad \text{matice } S \text{ je regulární} \tag{4.6}$$

je ekvivalentní s (4.4), a tedy i s (4.1).

9.4.2. Definice: Funkce $g_1: \langle\alpha, \beta\rangle \times \langle\alpha, \beta\rangle \to K$ se nazývá *Greenova funkce úlohy* (2.23), (3.3), jsou-li splněny tyto podmínky:

Funkce $g_1 = g_1(t, \tau), \partial g_1/\partial t, \ldots, \partial^{n-2} g_1/\partial t^{n-2}$ jsou spojité, funkce $\partial^{n-1} g_1/\partial t^{n-1}$ je spojitá na množině $\Delta_1 = \{(t, \tau) | \alpha \leqq t < \tau \leqq \beta\}$ a na množině $\Delta_2 = \{(t, \tau) | \alpha \leqq \tau < t \leqq \beta\}$, tj. funkce $\partial^{n-1} g_1/\partial t^{n-1}$ je definována a je spojitá ve všech bodech čtverce $\langle\alpha, \beta\rangle \times \langle\alpha, \beta\rangle$ kromě diagonály $\{(\tau, \tau) | \alpha \leqq \tau \leqq \beta\}$. (4.7)

Nechť je

$$\bar{\Delta}_1 = \{(t, \tau) | \alpha \leqq t \leqq \tau \leqq \beta\},$$
$$\bar{\Delta}_2 = \{(t, \tau) | \alpha \leqq \tau \leqq t \leqq \beta\}.$$

Existují spojité funkce $f_1: \bar{\Delta}_1 \to K$, $f_2: \bar{\Delta}_2 \to K$, takové, že je

$$f_1(t, \tau) = \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau) \quad \text{pro} \quad (t, \tau) \in \Delta_1,\ f_2(t, \tau) = \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau)$$

pro $(t, \tau) \in \Delta_2$. (4.8)

Jinými slovy: Nechť funkce $\tilde{f}_1: \Delta_1 \to K$ je definována rovnicí

$$\tilde{f}_1(t, \tau) = \frac{\partial^{n-1} g_1(t, \tau)}{\partial t^{n-1}}$$

($\tilde{f}_1$ je restrikce funkce $\partial^{n-1} g_1/\partial t^{n-1}$ na Δ_1); pak $\tilde{f}_1$ má spojité rozšíření na $\bar{\Delta}_1$. Obdobně restrikce funkce $\partial^{n-1} g_1/\partial t^{n-1}$ na Δ_2 má spojité rozšíření na $\bar{\Delta}_2$.

$$\lim_{t \to \tau+} \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau) = \lim_{t \to \tau-} \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau) + [a_0(\tau)]^{-1}\,; \quad \alpha < \tau < \beta\,. \tag{4.9}$$

Derivace

$$\frac{\partial^n g_1}{\partial t^n}(t, \tau)$$

existuje pro $(t, \tau) \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ a je spojitá; restrikce funkce $\partial^n g_1/\partial t^n$ na Δ_1 má spojité rozšíření na $\bar{\Delta}_1$, restrikce funkce $\partial^n g_1/\partial t^n$ na Δ_2 má spojité rozšíření na $\bar{\Delta}_2$. (4.10)

Nechť je $\tau \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Funkce $g_1(., \tau): \langle\alpha, \beta\rangle \to K$ splňuje v každém bodě $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $t \neq \tau$, rovnici (2.10). (4.11)

$$\begin{pmatrix} g(\alpha, \tau) \\ g(\beta, \tau) \end{pmatrix} \in \mathscr{X}(M, N) \tag{4.12}$$

[jako obvykle,

$$g(t, \tau) = \operatorname{col}\left(g_1(t, \tau), \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, \tau), \ldots, \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau)\right)].$$

9.4.3. Poznámka: V případě $n = 1$ se v podmínce (4.7) požaduje jen tolik, aby funkce g_1 byla spojitá na množinách

$$\{(t, \tau) \mid \alpha \leqq t < \tau \leqq \beta\} \quad \text{a} \quad \{(t, \tau) \mid \alpha \leqq \tau < t \leqq \beta\}.$$

Funkce g_1 není v tomto případě žádnou z podmínek (4.7) až (4.10) stanovena na množině $\{(\tau, \tau) \mid \alpha \leqq \tau \leqq \beta\}$; pro určitost můžeme např. přidat podmínku $g_1(\tau, \tau) = 0$ pro $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$.

9.4.4. Věta: *Existuje nejvýše jedna Greenova funkce úlohy* (2.23), (3.3). [Tak jako v celém odst. 9.4. předpokládáme, že platí (4.1).]

Důkaz: Nechť $g_1, \tilde{g}_1$ jsou Greenovy funkce úlohy (2.23), (3.3). Zvolme $\tau \in (\alpha, \beta\rangle$ a položme $u_1(t) = g_1(t, \tau) - \tilde{g}_1(t, \tau)$. Z (4.7), (4.8) a (4.9) plyne, že u_1 má spojité derivace do řádu $n - 1$ na $\langle\alpha, \beta\rangle$. Tedy funkce

$$a_1(t)\, u_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\, u_1(t)$$

je spojitá na $\langle\alpha, \beta\rangle$. Odtud a z (4.11) plyne, že existuje $\lim_{t \to \tau} u_1^{(n)}(t)$, a proto funkce $u_1^{(n)}$ existuje a je spojitá na $\langle\alpha, \beta\rangle$; u_1 je řešením rovnice (2.10) na $\langle\alpha, \beta\rangle$. Podle (4.12) u_1 je řešením úlohy (2.10), (3.3) a podle (4.1) je $u_1 = 0$. Je tedy $g_1(t, \tau) = \tilde{g}_1(t, \tau)$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\tau \in (\alpha, \beta)$ a vzhledem k (4.7) je $g_1 = \tilde{g}_1$. Věta 9.4.4 je dokázána.

Užitím Greenovy funkce lze napsat vzorec pro řešení úlohy (2.23), (3.3); v tom je její význam.

9.4.5. Věta: *Nechť g_1 je Greenova funkce úlohy* (2.23), (3.3). *Potom funkce*

$$u_1(t) = \int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

je řešením úlohy (2.23), (3.3).

Důkaz se provede výpočtem. Z (4.7) a (4.8) plyne, že

$$u_1^{(j)}(t) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^j g_1}{\partial t^j}(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n - 1\,. \tag{4.13}$$

Pišme

$$u_1^{(n-1)}(t) = \left(\int_\alpha^t + \int_t^\beta\right) \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau\,. \tag{4.14}$$

Podmínky (4.7), (4.8) a (4.10) zaručují, že integrály

$$\int_\alpha^t \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau)\, d\tau\,, \quad \int_t^\beta \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau)\, d\tau$$

lze derivovat podle t, tedy existuje funkce $u_1^{(n)}$ a je spojitá. Vzhledem k (4.9) je

$$u_1^{(n)}(t) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^n g_1}{\partial t^n}(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau + [a_0(t)]^{-1}\, h(t) \quad \text{pro} \quad \alpha < t < \beta\,.$$

Odtud, z (4.14), (4.13) a (4.11) plyne, že u_1 splňuje rovnici (2.23) pro $\alpha < t < \beta$. Ze spojitosti plyne, že u_1 splňuje rovnici (2.23) na $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Vzhledem k (4.13), (4.14) je

$$u(t) = \int_\alpha^\beta g(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau\,,$$

a protože je $M\, g(\alpha, \tau) + N\, g(\beta, \tau) = 0$ pro $\tau \in (\alpha, \beta)$, je též $M\, u(\alpha) + N\, u(\beta) = 0$. Je tedy u řešení úlohy (2.23), (3.3) a Věta 9.4.5 je dokázána.

Příklad: Hledejme Greenovu funkci g_1 pro úlohu

$$\ddot{u}_1 \quad = h\,,$$
$$u_1(0) = u_1(1) = 0\,;$$

funkce h: $\langle 0, 1\rangle \to R$ je spojitá. Podle Definice 9.4.2 se spočítá, že je

$$g_1(t, \tau) = \begin{cases} -(1-\tau)\, t & \text{pro} \quad t \leqq \tau\,, \\ -\tau(1-t) & \text{pro} \quad \tau \leqq t\,. \end{cases}$$

Podle Věty 9.4.5 funkce w_1 definovaná rovnicí

$$w_1(t) = \int_0^1 g_1(t, \tau)\, h(\tau)\, d\tau = -\int_0^t (1-t)\, \tau\, h(\tau)\, d\tau - \int_t^1 t(1-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

splňuje rovnici $\ddot{w}_1(t) = h(t)$ a podmínky $w_1(0) = 0 = w_1(1)$; to lze též snadno ověřit výpočtem.

Zbývá dokázat, že Greenova funkce úlohy (2.23), (3.3) existuje. To lze ukázat přímým postupem: Aby platilo (4.11), hledá se $g_1(t, \tau)$ ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \delta_i(\tau)\, u_1^{[i]}(t) \quad \text{pro} \quad \alpha \leqq t < \tau \leqq \beta$$

a ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\tau)\, u_1^{[i]}(t) \quad \text{pro} \quad \alpha \leqq \tau < t \leqq \beta$$

[$u_1^{[i]}$ má stejný význam jako v (2.11)]. Ukáže se, že podmínkami (4.9), (4.12) jsou čísla $\delta_i(\tau)$, $\varepsilon_i(\tau)$ jednoznačně určena pro $\alpha < \tau < \beta$ a takto nalezenou funkci g_1 lze rozšířit na čtverec $\langle\alpha, \beta\rangle \times \langle\alpha, \beta\rangle$ tak, že platí i (4.7), (4.8) a (4.10). Protože potřebujeme vyšetřit ještě další vlastnosti Greenovy funkce, odvodíme její existenci jiným způsobem.

Nechť U, V mají stejný význam jako v (2.11), (2.12). Položme

$$\Psi = -S^{-1} N\, U(\beta)\,, \tag{4.15}$$

kde S je definováno v (4.3),

$$G(t, \tau) = \begin{cases} U(t)\, \Psi\, V^*(\tau) + U(t)\, V^*(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq \tau < t \leqq \beta\,, \\ U(t)\, \Psi\, V^*(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq t \leqq \tau \leqq \beta\,. \end{cases} \tag{4.16}$$

[V případě $n = 1$ v posledním řádku píšeme $\alpha \leqq t < \tau \leqq \beta$ a položíme $G(\tau, \tau) = 0$ pro $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$.]

9.4.6. Věta: *Funkce* $g_1(t, \tau) = G_{11}(t, \tau)$ *je Greenova funkce úlohy* (2.23), (3.3).

Důkaz: Budeme se zabývat případem $n > 1$ a nebudeme uvádět nepatrné změny pro případ $n = 1$. Položme

$$z_1(t, \tau) = \sum_{i,j=1}^{n} u_1^{[i]}(t)\, \Psi_{ij}\, v_1^{[j]}(\tau)\,.$$

Je

$$g_1(t, \tau) = \begin{cases} z_1(t, \tau) + \Gamma_{11}(t, \tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq \tau < t \leqq \beta\,, \\ z_1(t, \tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq t \leqq \tau \leqq \beta\,. \end{cases}$$

Odtud a z vlastností funkce Γ_{11} [viz (2.17) až (2.21)] plyne, že jsou splněny podmínky (4.7) až (4.11). Nechť $V^*_{.,1}(\tau)$ znamená první sloupec matice $V^*(\tau)$. Je

$$g(t, \tau) = \begin{cases} U(t)\, \Psi\, V^*_{.,1}(\tau) + U(t)\, V^*_{.,1}(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq \tau < t \leqq \beta\,, \\ U(t)\, \Psi\, V^*_{.,1}(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq t \leqq \tau \leqq \beta\,. \end{cases}$$

Odtud

$$M\, g(\alpha, \tau) + N\, g(\beta, \tau) = M\, U(\alpha)\, \Psi\, V^*_{.,1}(\tau) + N\, U(\beta)\, \Psi\, V^*_{.,1}(\tau) +$$
$$+ N\, U(\beta) V^*_{.,1}(\tau) = 0$$

vzhledem k (4.15) a (4.3). Podmínka (4.12) je splněna a Věta 9.4.6 dokázána.

9.4.7. Věta: *Nechť* g_1 *je Greenova funkce úlohy* (2.23), (3.3). *Položme*

$$q_1(t, \tau) = \bar{g}_1(\tau, t) \quad \textit{pro} \quad t, \tau \in \langle \alpha, \beta \rangle\,.$$

Potom q_1 *je Greenova funkce úlohy* (3.16), (3.11).

Důkaz: Položme

$$Q(t, \tau) = \begin{cases} V(t)\, \Psi^*\, U^*(\tau) + V(t)\, U^*(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq t < \tau \leqq \beta\,, \\ V(t)\, \Psi^*\, U^*(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq \tau \leqq t \leqq \beta\,. \end{cases}$$

Je

$$q_1(t, \tau) = Q_{11}(t, \tau)\,,$$

$$q(t, \tau) = \begin{cases} V(t)\, \Psi^*\, U^*_{.,1}(\tau) + V(t)\, U^*_{.,1}(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq t < \tau \leqq \beta\,, \\ V(t)\, \Psi^*\, U^*_{.,1}(\tau) & \text{pro} \quad \alpha \leqq \tau \leqq t \leqq \beta\,. \end{cases} \tag{4.17}$$

Funkce q_1 zřejmě splňuje podmínky (4.7), (4.8) a (4.10). Podmínku (4.11) splňuje funkce q_1 s tou změnou, že rovnici (2.10) nahradíme rovnicí (2.7). Podmínce (4.9) odpovídá podmínka

$$\lim_{t \to \tau+} \frac{\partial^{n-1} q_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau) = \lim_{t \to \tau-} \frac{\partial^{n-1} q_1}{\partial t^{n-1}}(t, \tau) + (-1)^n \left(\bar{a}_0(\tau)\right)^{-1}$$
$$\text{pro} \quad \alpha < \tau < \beta\,. \tag{4.18}$$

Označíme-li $V_{n,.}(t)$ n-tý řádek matice $V(t)$, je $V_{n,.}(t)\, U^*_{.,1}(\tau) = \bar{\Gamma}_{1n}(\tau, t)$ a (4.18) platí vzhledem k (2.20) a (2.5). Zbývá dokázat, že platí

$$\begin{pmatrix} q(\alpha, \tau) \\ q(\beta, \tau) \end{pmatrix} \in \mathscr{Y}(\mathscr{X}(M, N), l) \quad \text{pro} \quad \alpha < \tau < \beta \,. \tag{4.19}$$

Vzhledem k Větě 9.3.1 stačí dokázat, že pro každé $\tau \in (\alpha, \beta)$ existuje $w(\tau) \in K^n$ tak, že je

$$\begin{aligned} M^* \, w(\tau) - \Theta^*(\alpha)\, q(\alpha, \tau) &= 0 \,, \\ N^* \, w(\tau) + \Theta^*(\beta)\, q(\beta, \tau) &= 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

a užitím rovnic (4.15), (4.17), (4.3), (2.14) se ověří, že (4.20) je splněno pro $w(\tau) = (S^*)^{-1}\, U^*_{.,1}(\tau)$.

Ukážeme, že platí první z rovnic (4.20). Dosadíme za $q(\alpha, \tau)$ a $w(\tau)$. Má tedy platit

$$M^*(S^*)^{-1}\, U^*_{.,1}(\tau) - \Theta^*(\alpha)\, V(\alpha)\, (\Psi^* + I)\, U^*_{.,1}(\tau) = 0 \,. \tag{4.21}$$

Násobíme-li zleva regulární maticí $U^*(\alpha)$ a užijeme-li rovnice (2.14), zjistíme, že má platit

$$[U^*(\alpha)\, M^*(S^*)^{-1} - \Psi^* - I]\, U^*_{.,1}(\tau) = 0 \,. \tag{4.22}$$

Dosazením za Ψ^* (4.22) přejde v

$$[(U^*(\alpha)\, M^* + U^*(\beta)\, N^*)\, (S^*)^{-1} - I]\, U^*_{.,1}(\tau) = 0 \tag{4.23}$$

a (4.23) platí, neboť S splňuje (4.3) a je regulární. Proto platí první z rovnic (4.20). Obdobně se dokáže, že platí i druhá z rovnic (4.20). Věta 9.4.7 je dokázána.

9.4.8. Věta: *Nechť úloha* (2.23), (3.3) *je samoadjungovaná a nechť ovšem platí některá z podmínek* (4.1), (4.4), (4.5), (4.6). *Nechť g_1 je Greenova funkce úlohy* (2.23), (3.3). *Potom platí*

$$g_1(t, \tau) = \bar{g}_1(\tau, t) \quad \textit{pro} \quad t, \tau \in \langle \alpha, \beta \rangle \,. \tag{4.24}$$

Důkaz: Protože úloha (2.23), (3.3) je samoadjungovaná, je její Greenova funkce g_1 vzhledem k Větě 9.4.4 totožná s Greenovou funkcí q_1 úlohy (3.16), (3.11); (4.24) plyne z Věty 9.4.7. Věta 9.4.8 je dokázána.

9.5. Samoadjungované okrajové úlohy mají tu důležitou vlastnost, že mají dostatečně bohatou soustavu vlastních čísel i vlastních funkcí. Budeme předpokládat, že $K = C$ a že jsou dány funkce a_i: $\langle \alpha, \beta \rangle \to C$ splňující podmínky (1.1), (2.1). Dále předpokládáme, že jsou dány matice $M, N \in M_n(C)$ a že platí (3.1).

9.5.1. Definice: Číslo $\vartheta \in C$ se nazývá *vlastní číslo* a funkce u_1 se nazývá *vlastní funkce úlohy* (2.10), (3.3), je-li u_1 netriviální řešení rovnice

$$l(u_1) = \vartheta\, u_1 \tag{5.1}$$

a je-li splněno (3.3). Říká se též, že vlastní funkce u_1 přísluší (je příslušná) k vlastnímu číslu ϑ.

9.5.2. Věta: *Nechť úloha* (2.23), (3.3) *je samoadjungovaná. Nechť* ϑ *je vlastní číslo a* u_1 *je příslušná vlastní funkce úlohy* (2.10), (3.3). *Potom* ϑ *je reálné číslo.*

Důkaz: Rovnici (5.1) vynásobme funkcí $\bar{u}_1$, integrujme od α do β a užijme vzorce (2.5). Dostáváme

$$\vartheta \int_\alpha^\beta u_1 \bar{u}_1 \, dt = \int_\alpha^\beta l(u_1) \bar{u}_1 \, dt = \int_\alpha^\beta u_1 \overline{l^*}(u_1) \, dt + \\ + (u(\beta), \Theta^*(\beta) u(\beta)) - (u(\alpha), \Theta^*(\alpha) u(\alpha)) . \tag{5.2}$$

Protože úloha (2.10), (3.3) je samoadjungovaná, je

$$\begin{pmatrix} u(\alpha) \\ u(\beta) \end{pmatrix} \in \mathscr{X}(M, N) = \mathscr{Y}(\mathscr{X}(M, N), l)$$

a podle (3.6) je $(u(\beta), \Theta^*(\beta) u(\beta)) - (u(\alpha), \Theta^*(\alpha) u(\alpha)) = 0$. Dále je $l^* = l$ a z rovnosti

$$\int_\alpha^\beta l(u_1) \bar{u}_1 \, dt = \int_\alpha^\beta u_1 \bar{l}(u_1) \, dt$$

plyne, že

$$\int_\alpha^\beta l(u_1) \bar{u}_1 \, dt$$

je číslo reálné. Vzhledem k (5.2) je i ϑ reálné. Věta 9.5.2 je dokázána.

Pro $\vartheta \in C$ nechť $u_1^{[i]}(., \vartheta)$ je maximální řešení rovnice (5.1) takové, že

$$u_1^{[i](j-1)}(\alpha, \vartheta) = \delta_{ij}, \quad \text{kde} \quad \delta_{ij} = 0 , \quad i \neq j , \quad \delta_{ii} = 1 , \quad i, j = , 1, 2, \ldots, n .$$

Jako obvykle položíme

$$u^{[i]}(t, \vartheta) = \operatorname{col}\left(u_1^{[i]}(t, \vartheta), \frac{\partial}{\partial t} u_1^{[i]}(t, \vartheta), \ldots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} u_1^{[i]}(t, \vartheta) \right),$$

$$U(t, \vartheta) = ((u^{[1]}(t, \vartheta), u^{[2]}(t, \vartheta), \ldots, u^{[n]}(t, \vartheta))) .$$

Řešení u_1 rovnice (5.1) má tvar

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i u_1^{[i]}(t, \vartheta) , \tag{5.3}$$

kde $d = \operatorname{col}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in C^n$, a splňuje podmínku (3.3) právě tehdy, je-li

$$(M\, U(\alpha, \vartheta) + N\, U(\beta, \vartheta))\, d = 0 . \tag{5.4}$$

u_1 je netriviální řešení právě tehdy, je-li $d \neq 0$, a tak platí

9.5.3. Věta: *Číslo ϑ je vlastním číslem úlohy* (2.10), (3.3) *právě tehdy, je-li*

$$\det(M\, U(\alpha, \vartheta) + N\, U(\beta, \vartheta)) = 0 . \tag{5.5}$$

Funkce u_1 je vlastní funkce příslušná k vlastnímu číslu ϑ právě tehdy, jestliže platí (5.3), (5.4) *a* $d \neq 0$.

Do konce tohoto odstavce budeme předpokládat, že platí:

Úloha (2.23), (3.3) je samoadjungovaná. (5.6)

Funkce $u_1^{[i](j-1)}(t, \vartheta)$ je při pevném $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ celistvá funkce proměnné ϑ. (Viz odst. 14.3.) Je tedy i

$$v(\vartheta) = \det(M\, U(\alpha, \vartheta) + N\, U(\beta, \vartheta))$$

celistvá funkce proměnné ϑ, a protože podle Vět 9.5.2, 9.5.3 každý nulový bod funkce v je reálný, není v rovna nule identicky. Z teorie funkcí komplexní proměnné je známé, že celistvá funkce, která není identicky rovna nule, má v každé omezené podmnožině komplexní roviny nejvýše konečný počet nulových bodů. Proto existuje reálné číslo ξ takové, že úloha

$$m(u_1) = 0 , \tag{5.7}$$

(3.3) má pouze triviální řešení. Přitom

$$m(u_1) = l(u_1) + \xi\, u_1 \quad \text{pro} \quad u_1 \in C^{(n)} . \tag{5.8}$$

Snadno se přesvědčíme, že matice Θ, která odpovídá operátoru m, je rovna matici Θ, která odpovídá operátoru l, tedy $\mathscr{Y}(\mathscr{X}, m) = \mathscr{Y}(\mathscr{X}, l)$ pro každý lineární podprostor $\mathscr{X} \subset C^{2n}$. Proto úloha

$$m(u_1) = h(t) . \tag{5.9}$$

3.3) je samoadjungovaná. Dále úloha (5.7), (3.3) má pouze triviální řešení. Podle Poznámky 9.4.1 a Věty 9.4.6 existuje Greenova funkce g_1 úlohy (5.9), (3.3), a protože tato úloha je samoadjungovaná, platí (4.24).

Nechť ζ je vlastní číslo úlohy (5.7), (3.3) a u_1 je příslušná vlastní funkce. Podle Věty 9.4.5 funkce

$$v_1(t) = \zeta \int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, u_1(\tau)\, d\tau$$

je řešením úlohy $m(v_1) = \zeta\, u_1$, (3.3), a protože úloha (5.7), (3.3) má pouze triviální řešení, je

$$u_1(t) = \zeta \int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, u_1(\tau)\, d\tau . \tag{5.10}$$

Naopak, splňuje-li spojitá funkce $u_1 : \langle\alpha, \beta\rangle \to C$ integrální rovnici (5.10), pak podle Věty 9.4.5 je ζ vlastní číslo a u_1 příslušná vlastní funkce úlohy (5.7), (3.3).

9.5.4. Věta: *Nechť $\mathcal{J} = \langle\alpha, \beta\rangle \times \langle\alpha, \beta\rangle$ a nechť funkce $\varkappa$: $\mathcal{J} \to C$ splňuje tyto podmínky:*

Funkce $\varkappa$ je spojitá v každém bodě $(t, \tau) \in \mathcal{J}$, $t \neq \tau$, a je omezená. (5.11)

$$\varkappa(t, \tau) = \bar{\varkappa}(\tau, t) \quad \textit{pro} \quad (t, \tau) \in \mathcal{J} . \tag{5.12}$$

Je-li funkce φ: $\langle\alpha, \beta\rangle \to C$ spojitá a je-li

$$\int_\alpha^\beta \varkappa(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0 \quad \textit{pro} \quad \tau \in \langle\alpha, \beta\rangle ,$$

pak $\varphi = 0$. (5.13)

Potom existuje nekonečná posloupnost (λ_i, ψ_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, kde λ_i je reálné číslo, $\lambda_i \neq 0$, ψ_i: $\langle\alpha, \beta\rangle \to C$ je spojitá funkce a platí

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0 . \tag{5.14}$$

$$\int_\alpha^\beta \psi_i(\tau)\, \bar{\psi}_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \delta_{ij} ,$$

kde $\delta_{ij} = 0$ *pro* $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$. (5.15)

$$\lambda_i\, \psi_i(t) = \int_\alpha^\beta \varkappa(t, \tau)\, \psi_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \textit{pro} \quad t \in \langle\alpha, \beta\rangle , \quad i = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5.16}$$

Systém funkcí ψ_i je úplný. (5.17)

Důkaz Věty 9.5.4 je naznačen v Dodatku 9.2.

9.5.5. Poznámka: Nechť je $\psi_i \in C^{(0)}$ pro $i = 1, 2, \ldots$ (viz odst. 9.1) a nechť platí (5.15). *Systém ψ_i, $i = 1, 2, \ldots$,* se nazývá *úplný*, platí-li toto tvrzení:

Je-li $\varphi \in C^{(0)}$ a je-li

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\, \bar{\psi}_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3, \ldots ,$$

pak $\varphi = 0$.

Je-li systém funkcí ψ_i úplný, pak platí: Fourierova řada

$$\sum_{i=1}^\infty \psi_i \int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\, \bar{\psi}_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

konverguje k funkci φ vzhledem k normě definované pomocí skalárního součinu pro každou funkci $\varphi \in C^{(0)}$. [To plyne ze známých výsledků o prostoru $L^2\,(L^2_V(M, \mu))$, viz např. [29], Větu 206.]

9.5.6. Věta: *Nechť úloha* (2.23), (3.3) *je samoadjungovaná. Potom existuje nekonečná posloupnost (ϑ_i, ψ_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, kde ϑ_i je vlastní číslo úlohy* (2.10), (3.3);

ψ_i je příslušná vlastní funkce a platí:

$$\lim_{i \to \infty} |\vartheta_i| = \infty\,, \tag{5.18}$$

$$\int_\alpha^\beta \psi_i(\tau)\, \bar{\psi}_j(\tau)\, d\tau = \delta_{ij} \quad \textit{pro} \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{5.19}$$

Systém funkcí ψ_i je úplný. (5.20)

Důkaz: Položme $\varkappa = g_1$. Ukážeme, že v tomto případě můžeme použít Věty 9.5.4.

Podle Definice 9.4.2 je splněno (5.11) [dokonce funkce g_1 je spojitá, je-li $n > 1$] a (5.12) platí podle Věty 9.4.8, neboť úloha (5.9), (3.3) je samoadjungovaná.

Nechť je $\varphi \in C^{(0)}$. Položme

$$\varrho(t) = \int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau\,.$$

Podle Věty 9.4.5 funkce ϱ splňuje rovnici $m(\varrho) = \varphi$; je-li $\varrho = 0$, je i $\varphi = 0$, a proto je splněna podmínka (5.13).

Podle Věty 9.5.4 existuje nekonečná posloupnost (λ_i, ψ_i), $i = 1, 2, \ldots$, tak, že platí (5.14) až (5.17), přitom ovšem v (5.16) píšeme g_1 místo $\varkappa$. Položme $\zeta_i = 1/\lambda_i$; rovnici (5.16) zapíšeme ve tvaru

$$\psi_i(t) = \zeta_i \int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, \psi_i(\tau)\, d\tau\,.$$

Podle Věty 9.4.5 funkce ψ_i je řešením úlohy $m(u_1) = \zeta_i u_1$, (3.3), tedy ζ_i je vlastní číslo úlohy (5.7), (5.3) a ψ_i je příslušná vlastní funkce. Vzhledem k (5.8) je $\vartheta_i = \zeta_i - \xi$ vlastním číslem úlohy (2.10), (3.3) a ψ_i je příslušnou vlastní funkcí. Věta 9.5.6 je dokázána.