6. Periodické lineární diferenciální rovnice

6.1. *Lineární diferenciální rovnice*

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{1.1}$$

se nazývá *periodická*, je-li funkce $A: R \to M_n$ periodická, tj. existuje číslo $\tau > 0$ tak, že platí $A(t + \tau) = A(t)$ pro $t \in R$. Tak jako v kap. 4 budeme předpokládat, že funkce A je spojitá. Periodické diferenciální rovnice mají obdobné vlastnosti jako diferenciální autonomní rovnice, na něž mohou být převedeny regulární lineární periodickou transformací. Základem této transformace je

6.1.1. Věta: *Nechť matice $X \in M_n(C)$ je regulární. Potom existuje matice $Y \in M_n(C)$ tak, že platí $X = \exp Y$.*

Důkaz provedeme v několika krocích. Nechť I_k je jednotková matice řádu k a nechť P_k je matice řádu k,

$$P_k = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix}.$$

Je

$$P_k^2 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_k^l = 0 \; [\in M_n(C)] \quad \text{pro} \quad l = k\,, \quad k + 1, \dots . \tag{1.2}$$

Pro $\mu \in C$ položme

$$W_k(\mu) = \mu P_k - \tfrac{1}{2}\mu^2 P_k^2 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k-1} \mu^{k-1} P_k^{k-1} .$$

Dokázeme, že platí

$$I_k + \mu P_k = \exp W_k(\mu) \quad \text{pro} \quad \mu \in C . \tag{1.3}$$

Abychom dokázali (1.3), vyjdeme z rovnosti

$$1 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 - \ldots \right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 - \ldots \right)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\left(\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 - \ldots \right)^3 + \ldots = 1 + \lambda , \tag{1.4}$$

která platí pro $\lambda \in C$, $|\lambda| < 1$, neboť $\lambda - \lambda^2/2 + \lambda^3/3 - \ldots$ je pro $|\lambda| < 1$ tzv. hlavní větev funkce $\ln (1 + \lambda)$ a $\exp [\ln (1 + \lambda)] = 1 + \lambda$. Řada, která vznikne z řady na levé straně v (1.4) tím, že provedeme naznačená umocňování (tj. odstraníme závorky), konverguje absolutně pro $|\lambda| < 1$. Proto je možné členy řady přerovnat tak, aby vznikla mocninná řada, aniž se změní součet. Proto popsanou úpravou řady na levé straně v (1.4) vznikne výraz na pravé straně v (1.4). Provedeme-li stejné úpravy s řadou pro $\exp W_k(\mu)$, tj. s řadou

$$I + (\mu P_k - \tfrac{1}{2}\mu^2 P_k^2 + \ldots) + \frac{1}{2!}(\mu P_k - \tfrac{1}{2}\mu^2 P_k^2 + \ldots)^2 + \ldots , \tag{1.5}$$

dostaneme $I + \mu P_k$. Přitom se nemusíme zabývat otázkami konvergence, neboť vzhledem k (1.2) je pouze konečný počet členů řady (1.5) různý od nuly. Tedy (1.3) platí. Větu 6.1.1 odvodíme užitím této pomocné věty:

6.1.2. Pomocná věta: *Nechť regulární matice $Q \in M_n(C)$ je v Jordanově tvaru, tj. ve tvaru* (5.1.4). *Potom existuje matice $Z \in M_n(C)$ tak, že je $Q = \exp Z$.*

Důkaz: Protože je Q regulární, je v (5.1.4) $\lambda_j \neq 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$ a tak existují čísla $\zeta_j \in C$ tak, že je $\exp \zeta_j = \lambda_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$. Je [viz (5.6.7) a (1.3)]

$$\exp [\zeta_j I_{k_j} + W_{k_j}(\lambda_j^{-1})] = \exp (\zeta_j I_{k_j}) \exp W_{k_j}(\lambda_j^{-1}) = \\ = \lambda_j I_{k_j}\left(I_{k_j} + \frac{1}{\lambda_j} P_{k_j} \right) = \lambda_j I_{k_j} + P_{k_j} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, r ,$$

a podle Poznámky 5.6.7 je $Q = \exp Z$, kde

$$Z = \begin{pmatrix} \zeta_1 I_{k_1} + W_{k_1}(\lambda_1^{-1}) & & & \\ & \zeta_2 I_{k_2} + W_{k_2}(\lambda_2^{-1}) & & \\ & & \dots & \\ & & & \zeta_r I_{k_r} + W_{k_r}(\lambda_r^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Pomocná věta 6.1.2 je dokázána.

Důkaz Věty 6.1.1: Podle věty o Jordanově kanonickém tvaru existuje regulární matice $E \in M_n(C)$ tak, že je $Q = E^{-1}XE$, tj. $X = EQE^{-1}$, kde Q má tvar (5.1.4). Protože X je regulární, je i Q regulární. Podle Pomocné věty 6.1.2 existuje matice Z tak, že je $Q = \exp Z$. Z definice matice $\exp A$ v odst. 5.6 plyne, že je

$$\exp(EZE^{-1}) = I + EZE^{-1} + \frac{1}{2!}(EZE^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(EZE^{-1})^3 + \dots =$$

$$= I + EZE^{-1} + \frac{1}{2!}EZ^2E^{-1} + \frac{1}{3!}EZ^3E^{-1} + \dots =$$

$$= E\left(I + Z + \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{1}{3!}Z^3 + \dots\right)E^{-1} = E(\exp Z)\,E^{-1}.$$

Je tedy $\exp(EZE^{-1}) = EQE^{-1} = X$ a Věta 6.1.1 je dokázána. Hlavním výsledkem tohoto odstavce je

6.1.3. Věta: *Nechť je $\tau > 0$ a nechť V je fundamentální matice rovnice* (1.1), *kde funkce A: $R \to M_n(C)$ je spojitá a splňuje $A(t + \tau) = A(t)$ pro $t \in R$.*

Potom existují funkce P: $R \to M_n(C)$ a matice $B \in M_n(C)$ tak, že platí

$$P(t + \tau) = P(t) \quad pro \quad t \in R\,, \tag{1.6}$$

$$V(t) = P(t)\exp(tB) \quad pro \quad t \in R\,. \tag{1.7}$$

Důkaz: Matice $D = V^{-1}(0)\,V(\tau)$ je regulární, a tak podle Věty 6.1.1 existuje taková matice $B \in M_n(C)$, že je $V^{-1}(0)\,V(\tau) = \exp(\tau B)$. Je $\dot{V}(t + \tau) = A(t + \tau)\,V(t + \tau) = A(t)\,V(t + \tau)$, podle Věty 4.5.1 je funkce $W(t) = V(t + \tau)$ fundamentální matice rovnice (1.1).

Podle Věty 4.5.2 je $W(t) = V(t)\,D$ pro $t \in R$, kde $D \in M_n(C)$ je regulární matice; zřejmě je $D = V^{-1}(0)\,V(\tau)$, $V(t + \tau) = V(t)\,D$ pro $t \in R$. Položme $P(t) = V(t)\exp(-tB)$ pro $t \in R$. Zřejmě platí (1.7) a je [viz (5.6.8)]

$$P(t + \tau) = V(t + \tau)\exp[-(t + \tau)B] =$$
$$= V(t)\,D\exp(-\tau B)\exp(-tB) = V(t)\exp(-tB) = P(t)$$

a tak platí i (1.6). Věta 6.1.3 je dokázána.

6.1.4. Poznámka: Z rovnice (1.7) plyne, že $P(t)$ je regulární matice pro $t \in R$ a že funkce P: $R \to M_n(C)$ má spojitou derivaci. Proto v rovnici (1.1) můžeme provést transformaci $x = P(t)\,y$ a dostáváme rovnici

$$\dot{y} = P^{-1}(t)\,[A(t)\,P(t) - \dot{P}(t)]\,y\,. \tag{1.8}$$

Protože V je fundamentální matice rovnice (1.1), je funkce $P^{-1}(t)\,V(t) = \exp(tB)$ fundamentální matice rovnice (1.8). Jediná rovnice, jejíž fundamentální matice je funkce $\exp(tB)$, je rovnice

$$\dot{y} = By \tag{1.9}$$

(viz odst. 4.10). Platí tedy

$$\dot{P}(t) = A(t)\,P(t) - P(t)\,B \quad \text{pro} \quad t \in R$$

a rovnice (1.1) přechází transformací $x = P(t)\,y$ v rovnici (1.9).

6.1.5. Poznámka: Podle Poznámky 6.1.4 můžeme výpovědi o rovnici (1.9) přenášet na rovnici (1.1). Nechť např. pro $t_0 \in R$:

(i) $Z_{st}(t_0, A)$ je množina takových $z \in C^n$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice (1.1) splňující podmínku $x(t_0) = z$, pak $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

(ii) $Z_0(t_0, A)$ je množina takových $z \in C^n$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice (1.1) splňující podmínku $x(t_0) = z$, pak funkce $(1 + |t|^n)^{-1}\,\|x(t)\|$ je omezená.

(iii) $Z_{nest}(t_0, A)$ je množina takových $z \in C^n$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice (1.1) splňující podmínku $x(t_0) = z$, pak $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

Ukážeme, že $Z_{st}(t_0, A)$, $Z_0(t_0, A)$, $Z_{nest}(t_0, A)$ jsou lineární podprostory v C^n a že platí

$$\begin{aligned} &Z_{st}(t_0, A) = P(t_0)\,Y_{st}(B)\,, \quad Z_0(t_0) = P(t_0)\,Y_0(B)\,,\\ &Z_{nest}(t_0, A) = P(t_0)\,Y_{nest}(B) \end{aligned} \tag{1.10}$$

(viz Definici 5.3.7),

$$C^n = Z_{st}(t_0, A) \dotplus Z_0(t_0, A) \dotplus Z_{nest}(t_0, A)\,. \tag{1.11}$$

Nechť x je maximální řešení rovnice (1.1) takové, že je $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$. Podle Poznámky 6.1.3 je $x(t) = P(t)\,y(t)$, kde y je maximální řešení rovnice (1.9), a protože $P(t)$ je regulární pro $t \in R$ a funkce P je spojitá a periodická, platí $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$, tedy $y(0) \in Y_{st}(B)$, a $Z_{st}(t_0, A) \subset P(t_0)\,Y_{st}(b)$. Podobně $P(t_0)\,Y_{st}(B) \subset Z_{st}(t_0, A)$, tedy platí první ze vztahů (1.10) a $Z_{st}(t_0, A)$ je lineární podprostor v C^n. Obdobně platí i druhý a třetí vztah v (1.10) a $Z_0(t_0, A)$, $Z_{nest}(t_0, A)$ jsou lineární podprostory v C^n. (1.11) plyne z Věty 5.3.10 a z (1.10).

6.2. Matice B a funkce P nejsou rovnicemi (1.6) a (1.7) určeny jednoznačně [můžeme je např. nahradit maticí $\tilde{B} = B + \tau^{-1}\,2\pi i I$ a funkcí $\tilde{P}(t) =$

$= P(t) \exp(-\tau^{-1} t\, 2\pi i I)]$. Také fundamentální matice V není jednoznačně určena funkcí A (viz Větu 4.5.2); místo s fundamentální maticí $V(t)$ můžeme pracovat s fundamentální maticí $\tilde{V}(t) = V(t) F$, kde $F \in M_n(C)$ je regulární. Uveďme matici $D = V^{-1}(0) V(\tau)$ na Jordanův kanonický tvar Q, tj. nechť je $E^{-1}DE = Q$, kde Q má tvar (5.1.4) a $E \in M_n(C)$ je regulární. Podle Poznámky 5.1.1 je matice Q určena maticí D jednoznačně až na pořádek matic $\lambda_j I_{k_j} + P_{k_j}$ v zápise (5.1.4). Pracujeme-li však s maticí $\tilde{V}$, dostáváme místo D matici $\tilde{D} = \tilde{V}^{-1}(0) \tilde{V}(\tau)$ a zřejmě je $\tilde{D} = F^{-1}DF$. Odtud plyne

$$(F^{-1}E)^{-1} \tilde{D} F^{-1} E = Q \tag{2.1}$$

a tak matice Q (až na pořádek matic $\lambda_j I_{k_j} + P_{k_j}$) je určena jednoznačně funkcí A (viz Poznámku 5.1.1). Proto je účelné vyšetřit rovnici (1.1) v závislosti na vlastnostech matice Q.

6.2.1. Definice: Vlastní čísla matice $D = V^{-1}(0) V(\tau)$ [kde V je fundamentální matice rovnice (1.1)] se nazývají *multiplikátory periodické lineární diferenciální rovnice* (1.1).

Je-li $D = V^{-1}(0) V(\tau)$, $Q = E^{-1}DE$ a má-li matice Q tvar (5.1.4), pak každé z čísel λ_j je multiplikátorem rovnice (1.1) a rovnice (1.1) jiné multiplikátory nemá.

Protože matice D je regulární, je

$$\lambda_j \neq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, r\,. \tag{2.2}$$

Ukážeme, jak lze popsat průběh řešení rovnice (1.1) pro $t \to \infty$ a pro $t \to -\infty$, známe-li chování mocnin matice Q. Platí

$$\begin{gathered}(\lambda I_k + P_k)^l = \lambda^l I_k + \binom{l}{1} \lambda^{l-1} P_k + \\ + \binom{l}{2} \lambda^{l-2} P_k^2 + \ldots + \binom{l}{k-1} \lambda^{l-k+1} P_k^{k-1} \\ \text{pro } l = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lambda \in C, \quad \lambda \neq 0\,.\end{gathered} \tag{2.3}$$

[Kombinační čísla jsou definována rovnicemi

$$\binom{l}{j} = \frac{l(l-1)(l-2)\ldots(l-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot j}, \quad \binom{l}{0} = 1$$
$$\text{pro } j = 1, 2, \ldots, \quad l = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots]$$

D ů k a z v z t a h u (2.3): V případě $l = 0, 1$ je vztah (2.3) zřejmý, v případě $l = 2, 3, \ldots$ (2.3) plyne ze vzorce

$$(\alpha + \beta)^l = \alpha^l + \binom{l}{1} \alpha^{l-1} \beta + \binom{l}{2} \alpha^{l-2} \beta^2 + \ldots + \binom{l}{l} \beta^l$$

[který platí jak pro $\alpha, \beta \in C$, tak i v případě, že $\alpha, \beta \in M_n(C)$, $\alpha\beta = \beta\alpha$] a z (1.2).

V případě $l = -1, -2, \dots$ vyjdeme z rovnice

$$(1+\zeta)^{-l}\left[1 + \binom{l}{1}\zeta + \binom{l}{2}\zeta^2 + \dots\right] = 1,$$

která platí pro $\zeta \in C$, $|\zeta| < 1$, a obdobnou úvahou jako v případě rovnice (1.4) odvodíme, že platí

$$(I_k + \lambda^{-1}P_k)^{-l}\left[I_k + \binom{l}{1}\lambda^{-1}P_k + \binom{l}{2}\lambda^{-2}P_k^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{l}{k-1}\lambda^{-k+1}P_k^{k-1}\right] = I_k,$$

tedy

$$(\lambda I_k + P_k)^{-l}\left[\lambda^l I_k + \binom{l}{1}\lambda^{l-1}P_k + \binom{l}{2}\lambda^{l-2}P_k^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{l}{k-1}\lambda^{l-k+1}P_k^{k-1}\right] = I_k$$

a (2.3) platí.

Z (2.3) plyne

6.2.2. Pomocná věta: *Každý prvek matice $(\lambda I_k + P_k)^l$ je v absolutní hodnotě menší než*

$$|\lambda|^l\, |l|^{k-1}\,(1 + |\lambda|^{1-k}).$$

Je

$$Q^l = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{k_1} + P_{k_1})^l & & & \\ & (\lambda_2 I_{k_2} + P_{k_2})^l & & \\ & & \dots & \\ & & & (\lambda_r I_{k_r} + P_{k_r})^l \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

pro $l = \dots, -1, 0, 1, \dots$.

Při pevném Q budeme odhadovat $\|Q^l\|$ v závislosti na l. Z Pomocné věty 6.2.2, z (2.4) a (3.2.8) plyne, že je

$$\|Q^l\| \leqq \varkappa_1 \sum_{j=1}^{r} k_j^2 |\lambda_j|^l\, |l|^{k_j-1}\,(1 + |\lambda_j|^{1-k_j}) \leqq \varrho_1 \sum_{j=1}^{r} |\lambda_j|^l\, |l|^{k_j-1}, \tag{2.5}$$

kde

$$\varrho_1 = \varkappa_1 \max\left\{k_j^2(1 + |\lambda_j|^{1-k_j}) \;\middle|\; j = 1, 2, \dots, r\right\}.$$

Zaveďme označení

$$\vartheta_1 = \min\left\{|\lambda_i| \;\middle|\; i = 1, 2, \dots, r\right\},$$

$$\vartheta_2 = \max\left\{|\lambda_i| \;\middle|\; i = 1, 2, \dots, r\right\}.$$

Nechť ν_1 je největší z takových čísel k_j, že $|\lambda_j| = \vartheta_1$, nechť ν_2 je největší z takových čísel k_j, že $|\lambda_j| = \vartheta_2$. Je

$$\sum_{j=1}^{r} |\lambda_j|^l \, |l|^{k_j-1} = |\vartheta_2|^l \, |l|^{\nu_2-1} \sum_{j=1}^{r} \left|\frac{\lambda_j}{\vartheta_2}\right|^l |l|^{k_j-\nu_2}.$$

Pro každé $j = 1, 2, \ldots, r$ je buď $\lambda_j/\vartheta_2 < 1$, nebo $k_j \leqq \nu_2$. Proto existuje $\varrho_2 > 0$ tak, že je

$$\left|\frac{\lambda_j}{\vartheta_2}\right|^l |l|^{k_j-\nu_2} \leqq \varrho_2 \quad \text{pro} \quad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Je tedy

$$\sum_{j=1}^{r} |\lambda_j|^l \, |l|^{k_j-1} \leqq |\vartheta_2|^l \, l^{\nu_2-1} r \varrho_2 \quad \text{pro} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

a z (2.5) dostáváme, že platí

$$\|Q^l\| \leqq \varrho_3 \, \vartheta_2^l l^{\nu_2-1} \text{ pro } \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

kde $\varrho_3 = r \, \varrho_1 \varrho_2$. Obdobně existuje ϱ_4 tak, že platí

$$\|Q^l\| \leqq \varrho_4 \, \vartheta_1^l |l|^{\nu_1-1} \text{ pro } \quad l = -1, -2, \ldots. \tag{2.7}$$

6.2.3. Pomocná věta. *Nechť k je celé číslo.*

(i) *Nechť $v : R \to C^n$ je řešení rovnice* (1.1). *Položme $w(t) = v(t + k\tau)$ pro $t \in R$. Potom w je řešení rovnice* (1.1).

(ii) *Nechť V je fundamentální matice rovnice* (1.1). *Položme $W(t) = V(t + k\tau)$ pro $t \in R$. Potom W je fundamentální matice rovnice* (1.1).

Důkaz: Je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t + k\tau) = A(t + k\tau) \, v(t + k\tau) = A(t) \, v(t + k\tau) = A(t) \, w(t) \, .$$

Část (i) je dokázána. Část (ii) plyne z části (i).

Nechť $V : R \to M_n(C)$ je fundamentální matice rovnice (1.1). Potom platí

$$V(t + \tau) = V(t) \, D \quad \text{pro} \quad t \in R \, . \tag{2.8}$$

Podle Pomocné věty 6.2.3 funkce na levé straně v (2.8) je fundamentální matice rovnice (1.1); funkce na pravé straně je zřejmě také fundamentální matice rovnice (1.1). Protože rovnost v (2.8) platí pro $t = 0$, platí pro každé $t \in R$.

Z (2.8) plyne

$$V(s + 2\tau) = V(s + \tau) \, D = V(s) \, D^2 \quad \text{pro} \quad s \in R$$

a dále indukcí

$$V(s + l\tau) = V(s)\, D^l \quad \text{pro} \quad S \in R \tag{2.9}$$

a pro každé přirozené l. Protože matice D je regulární, platí (2.9) pro každé celé l.

Je-li $t \in R$, najdeme celé číslo l tak, že je $l\tau \leqq t < (l + 1)\,\tau$. Podle (2.9) je

$$V(t) = V(t - l\tau)\, D^l = V(t - l\tau)\, EQ^l E^{-1}\,. \tag{2.10}$$

Je $0 \leqq t - l\tau < \tau$, tedy $\|V(t - l\tau)\| \leqq \max\{\|V(\sigma)\| \mid \sigma \in \langle 0, \tau\rangle\}$. Odtud, z (2.10), (2.7) a (2.6) lze odvodit, že platí

6.2.4. Věta: *K fundamentální matici V rovnice* (1.1) *existují konstanty $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ tak, že platí*

$$\|V(t)\| \leqq \varkappa_3[1 + |t/\tau|^{\nu_1 - 1}] \exp\,[(t/\tau) \ln \vartheta_1] \quad \textit{pro} \quad t \leqq 0\,, \tag{2.11}$$

$$\|V(t)\| \leqq \varkappa_4[1 + (t/\tau)^{\nu_2 - 1}] \exp\,[(t/\tau) \ln \vartheta_2] \quad \textit{pro} \quad t \geqq 0\,. \tag{2.12}$$

Věta 6.2.4 je obdobná Větě 5.3.1 a lze z ní odvodit věty obdobné Větám 5.3.2, 5.3.3, 5.3.5 a 5.3.6. Tyto věty nebudeme formulovat; spokojíme se jen tímto tvrzením: *Pro všechna maximální řešení x rovnice* (1.1) *platí* $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ *právě tehdy, jsou-li všechny multiplikátory rovnice* (1.1) *v absolutní hodnotě menší než* 1.

6.3. Je zřejmé, že Věta 6.1.1 neplatí v reálném oboru, tj. nahradíme-li množinu C množinou R [stačí položit $n = 1$; záporné číslo nemá reálný logaritmus]. Přirozeně vzniká otázka, zda přece jen neplatí Věta 6.1.3 v reálném oboru. [Snadno se např. ukáže, že Věta 6.1.3 platí v reálném oboru v případě $n = 1$.]

Vyšetřujme diferenciální rovnici tvaru (1.1), jejíž fundamentální matice je

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos \pi t, & -\sin \pi t \\ e^t \sin \pi t, & \cos \pi t \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Podle odst. 4.10 spočteme, že je

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi t), & -\pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi t \\ \pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi t, & \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi t) \end{pmatrix}$$

a tak můžeme položit $\tau = 1$.

Z (1.6) a (1.7) plyne

$$V^{-1}(0)\, V(\tau) = \exp(\tau B)\,. \tag{3.2}$$

Z (3.1) dostáváme

$$V^{-1}(0)\, V(1) = \begin{pmatrix} -e, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Podle Poznámky 5.6.5 má matice $\exp B$ vlastní čísla e^{λ_1}, e^{λ_2}, jestliže matice B má vlastní čísla λ_1, λ_2.

Kdyby tedy pro reálnou matici B platilo (3.2) a (3.3) (je $\tau = 1$), pak by pro vlastní čísla λ_1, λ_2 matice B platilo $e^{\lambda_1} = -e$, $e^{\lambda_2} = -1$ (viz Poznámku 5.6.3). To však není možné, neboť vlastní čísla reálné matice řádu 2 jsou buď reálná, nebo komplexně družená. Proto Věta 6.1.3 v reálném oboru neplatí. V reálném oboru však platí věta, která vznikne z Věty 6.1.3 malou úpravou:

6.3.1. Věta: *Nechť je $\tau > 0$ a nechť V je fundamentální matice rovnice* (1.1), *kde funkce A: $R \to M_n(R)$ je spojitá a splňuje $A(t + \tau) = A(t)$ pro $t \in R$.*

Potom existují funkce P: $R \to M_n(R)$ a matice $B \in M_n(R)$ tak, že platí

$$P(t + 2\tau) = P(t) \quad \textit{pro} \quad t \in R\,, \tag{3.4}$$

$$V(t) = P(t) \exp(tB) \quad \textit{pro} \quad t \in R\,. \tag{3.5}$$

Větu 6.3.1 nebudeme dokazovat; ukážeme jen, jak se její důkaz liší od důkazu Věty 6.1.3. Jde o to, abychom ukázali, že existuje matice $B \in M_n(R)$ tak, že je

$$V^{-1}(0)\, V(2\tau) = \exp(2\tau B)\,. \tag{3.6}$$

Podle Poznámky 5.2.1 užijeme modifikace věty o Jordanově kanonickém tvaru na matici $V^{-1}(0)\, V(\tau)$, tj. najdeme regulární matici $E \in M_n(R)$ tak, aby matice $\tilde{Q} = E^{-1}\, V^{-1}(0)\, V(\tau)\, E$ měla tvar (5.2.3).

Budeme rozlišovat tři případy:

(i) Matice D_j má tvar (5.2.4), přičemž $\lambda > 0$,

(ii) matice D_j má tvar (5.2.4), přičemž $\lambda < 0$,

(iii) matice D_j má tvar (5.2.5), přičemž $v_j \neq 0$.

[Případ, že matice D_j má tvar (5.2.4) a $\lambda = 0$, nemůže nastat, protože $\tilde{Q}$ je regulární matice.]

Označme k_j řád matice D_j. V případě (i) z (1.3) plyne

$$D_j = \exp Z_j\,, \tag{3.7}$$

kde $Z_j = I_{k_j} \ln \lambda + W_{k_j}(\lambda^{-1})$ a $\ln \lambda \in R$.

V případě (ii) z (1.3) plyne

$$D_j = \exp(\pi i I_{k_j} + Z_j)\,, \tag{3.8}$$

kde $Z_j = I_{k_j} \lg |\lambda| + W_{k_j}(\lambda^{-1})$ a $\lg |\lambda| \in R$.

V případě (iii) platí

6.3.2. Pomocná věta: *Má-li matice D_j tvar* (5.2.5), *pak existuje reálná matice Z_j tak, že platí* (3.7).

Důkaz Pomocné věty 6.3.2 naznačíme na konci tohoto odstavce. Nejdříve však sestrojíme matici $B \in M_n(R)$ tak, aby platilo (3.6).

Z (3.7) i z (3.8) plyne $D_j^2 = \exp 2Z_j$ a podle Poznámky 5.6.7 platí

$$\tilde{Q}^2 = \exp X\,, \tag{3.9}$$

kde

$$X = \begin{pmatrix} 2Z_1 & & & \\ & 2Z_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2Z_s \end{pmatrix} \in M_n(R)\,.$$

[Kdybychom ve vyjádření matice $\tilde{Q}_j$ v (5.2.3) vystačili pouze s maticemi D_j z případů (i) a (iii), mohli bychom místo (3.9) odvodit vztah $\tilde{Q} = \exp X_1$, kde

$$X_1 = \begin{pmatrix} Z_1 & & & \\ & Z_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & Z_s \end{pmatrix} \in M_n(R)\,,$$

a sestrojit matici $B_1 \in M_n(R)$ tak, že by platilo $V^{-1}(0)\, V(\tau) = \exp(\tau B_1)$, a nakonec bychom dokázali, že platí Věta 6.1.3.] Platí

$$E(\exp X)\, E^{-1} = E\left(I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots\right)E^{-1} =$$

$$= I + EXE^{-1} + \frac{1}{2!}(EXE^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(EXE^{-1})^3 + \dots = \exp(EXE^{-1})\,.$$

Odtud a z (3.9) dostáváme

$$(V^{-1}(0)\, V(\tau))^2 = (E\tilde{Q}E^{-1})^2 = E\tilde{Q}^2E^{-1} = E(\exp X)E^{-1} = \exp(EXE^{-1})\,. \tag{3.10}$$

Je $V(t + \tau) = V(t)\, V^{-1}(0)\, V(\tau)$ pro $t \in R$ [neboť funkce na obou stranách jsou fundamentální matice rovnice (1.1) a rovnost platí pro $t = 0$], speciálně pro $t = 2\tau$ je $V(2\tau) = V(\tau)\, V^{-1}(0)\, V(\tau)$, tedy $V^{-1}(0)\, V(2\tau) = [V^{-1}(0)\, V(\tau)]^2$. Položme $B = (2\tau)^{-1}\, EXE^{-1}$; z (3.10) plyne, že platí (3.6).

Když již máme k dispozici vzorec (3.6), provedeme důkaz Věty 6.3.1 obdobným způsobem jako důkaz Věty 6.1.3.

Zbývá naznačit důkaz Pomocné věty 6.3.2. Položme

$$\mu_1 = \mu(\mu^2 + \nu^2)^{-1}\,, \quad \nu_1 = \nu(\mu^2 + \nu^2)^{-1}\,,$$

$$G = \begin{pmatrix} \mu, \nu & & & & & & \\ -\nu, \mu & & & & & & \\ & & \mu, \nu & & & & \\ & & -\nu, \mu & & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & \mu, \nu \\ & & & & & & -\nu, \mu \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \mu_1, & -\nu_1 & & & & & \\ \nu_1, & \mu_1 & & & & & \\ & & \mu_1, & -\nu_1 & & & \\ & & \nu_1, & \mu_1 & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & \mu_1, & -\nu_1 \\ & & & & & \nu_1, & \mu_1 \end{pmatrix},$$

kde matice G, H mají řád $k_j = 2l$.

Je

$$GI_{k_j} + P_{k_j}^2 = D_j\,, \quad GH = HG = I_{k_j}\,, \quad D_j = G(I_{k_j} + HP_{k_j}^2)\,,$$
$$HP_{k_j}^2 = P_{k_j}^2 H\,.$$

Proto obdobně jako (1.3) platí

$$I_{k_j} + HP_{k_j}^2 = \exp F\,, \tag{3.11}$$

kde

$$F = HP_{k_j}^2 - \tfrac{1}{2}H^2P_{k_j}^4 + \ldots + (-1)^l \frac{1}{l-1} H^{(l-1)}P_{k_j}^{2(l-1)}\,.$$

Nechť čísla $\alpha, \beta \in R$ splňují $\mu = e^\alpha \cos \beta$, $\nu = e^\alpha \sin \beta$. Čísla α, β existují: α je určeno jednoznačně, β je určeno až na celistvý násobek 2π. Položme

$$L = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta & & & & & \\ -\beta, & \alpha & & & & & \\ & & \alpha, & \beta & & & \\ & & -\beta, & \alpha & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & \alpha, & \beta \\ & & & & & -\beta, & \alpha \end{pmatrix} \in M_{k_j}(R)\,.$$

Je $\exp L = G$. Protože je $LP_{k_j}^2 = P_{k_j}^2 L$, $LH = HL$, je $LF = FL$, a podle Poznámky 5.6.3 je

$$\exp(L + F) = \exp L \exp F = G(I_{k_j} + HP_{k_j}^2) = GI_{k_j} + P_{k_j}^2 = D_j$$

a (3.7) platí, položíme-li $Z_j = L + F$. To znamená, že platí Pomocná věta 6.3.2.