3. Soustavy diferenciálních rovnic, vektorový zápis

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 73--83.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402081

3. Soustavy diferenciálních rovnic, vektorový zápis

3.1. Základním objektem, který budeme vyšetřovat, bude soustava diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Přitom proměnná t bude vždy reálná, proměnné $x_1, \ldots, x_n$ mohou být buď reálné, nebo komplexní. Většina výsledků platí v témže znění jak pro případ reálných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tak pro případ komplexních $x_1, x_2, \ldots, x_n$; v některých případech budeme s výhodou pracovat s komplexními $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nechť R znamená množinu reálných čísel, C množinu komplexních čísel. K bude znamenat buď R, nebo C; každý výrok, který obsahuje K, můžeme číst jedním ze dvou způsobů: Místo K čteme všude R nebo všude C. Intervalem budeme rozumět nedegenerovaný interval (tj. jakýkoliv interval, který obsahuje více než jeden bod).

Pojem řešení soustavy (1.1) zavedeme obdobně jako v Definici 1.2.1:

3.1.1. Definice: Nechť G je podmnožina prostoru $R \times K^n$ a nechť je $f_j: G \to K$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\mathscr{I}$ je interval a nechť funkce $u_i: \mathscr{I} \to K$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mají spojité derivace $\dot{u}_i: \mathscr{I} \to K$. Nechť platí

$$(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in G \tag{1.2}$$

pro $t \in \mathscr{I}$ a

$$\dot{u}_i(t) = f_i(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) \tag{1.3}$$

v každém bodě $t \in \mathscr{I}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom soustavu funkcí $u_1, \ldots, u_n$ nazýváme *řešením soustavy* (1.1).

Definice 3.1.1 se liší od Definice 1.2.1 jednak v tom, že funkce f_j, u_i mohou nabývat hodnot v C, ale také v tom, že definičním oborem řešení u můžc být např. uzavřený interval. Nechť $u_1, \ldots, u_n$, kde $u_i: \mathscr{I} \to K$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ je řešení soustavy (1.1). Potom platí (1.3) v každém bodě $t \in \mathscr{I}$ a funkce $\dot{u}_i$ jsou spojité pro $i = 1, 2, \ldots, n$. V rovnici (1.3) můžeme integrovat a dostáváme

$$u_i(t_2) = u_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f_i(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) \, dt \tag{1.4}$$

pro libovolná $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy platí

3.1.2. Věta: *Nechť* $u_1, \ldots, u_n$ *je řešení soustavy* (1.1), u_i: $\mathscr{I} \to K$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Potom platí* (1.4) *pro libovolná* $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$.

Větu 3.1.2 můžeme za jistých okolností obrátit (viz Větu 3.3.4).

3.1.3. Poznámka: Soustavu (1.1), kde proměnné $x_1, \ldots, x_n$ jsou komplexní, lze převést na soustavu $2n$ rovnic s reálnými proměnnými. Je-li $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$, položme $x_j = y_{2j-1} + \mathrm{i}y_{2j}$, kde $y_1, \ldots, y_{2n}$ jsou reálná čísla, $\mathrm{i}^2 = -1$, a definujme funkce $h_1, \ldots, h_{2n}$ rovnicemi

$$f_j(t, x_1, \ldots, x_n) = h_{2j-1}(t, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) + \mathrm{i}h_{2j}(t, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Nechť $\mathscr{I}$ je interval, u_j: $\mathscr{I} \to C$; funkce $v_1, \ldots, v_{2n}$: $\mathscr{I} \to R$ zaveďme rovnicemi

$$u_j(t) = v_{2j-1}(t) + \mathrm{i}v_{2j}(t) \text{ pro } t \in \mathscr{I}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Z Definice 3.1.1 plyne, že platí toto tvrzení:

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ je řešení soustavy (1.1) právě tehdy, je-li $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ řešení soustavy

$$\dot{y}_j = h_j(t, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}), \quad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

3.2. Při teoretickém vyšetřování soustav diferenciálních rovnic budeme důsledně užívat vektorového značení [při vyšetřování konkrétních soustav, a zvláště při výpočtech budeme užívat souřadnic].

Je-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^n$, $\lambda \in K$, definujeme

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = x\lambda = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Prvek $(0, 0, \ldots, 0) \in K^n$ budeme označovat 0; ze souvislosti bude vždy patrné, zda jde o prvek v K, nebo v K^n.

Prvky z K^n můžeme sčítat, odčítat a násobit čísly z K, takže výsledek těchto operací je opět v K^n, přitom platí obvyklé vzorce a zvláštní úlohu má prvek $0 \in K^n$. Tyto skutečnosti vyjadřujeme výrokem, že K^n je *lineární* [nebo také *vektorový*] *prostor nad* K [viz Dodatek 3.1]. Prvky vektorového prostoru se také nazývají *vektory*. Je-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$, pak x_i je i-tá komponenta vektoru x. Vektorový prostor K^n má dimenzi n.

Funkci, která každému $x \in K^n$ přiřadí reálné číslo, které budeme značit $\|x\|$, nazýváme *normou*, jsou-li splněny tyto podmínky:

$$\|x\| \geqq 0 \quad \text{pro} \quad x \in K^n. \tag{2.1}$$

$$\text{Je-li} \quad x \in K^n, \ \|x\| = 0, \quad \text{pak} \quad x = 0, \tag{2.2}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \text{pro} \quad \lambda \in K, \; x \in K^n, \tag{2.3}$$

$$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\| \quad \text{pro} \quad x, y \in K^n. \tag{2.4}$$

Podmínkám (2.1) až (2.4) lze vyhovět mnoha způsoby. Můžeme např. položit

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{pro} \quad x \in K^n, \tag{2.5}$$

nebo

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} \quad \text{pro} \quad x \in K^n, \tag{2.6}$$

nebo

$$\|x\| = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| \quad \text{pro} \quad x \in K^n. \tag{2.7}$$

Všude v dalším výkladu budeme vycházet z předpokladu, že v K^n je pevně dána norma [např. některým ze vzorců (2.5) až (2.7) nebo jiným způsobem]. Lze dokázat [viz Dodatek 3.2], že pro libovolnou normu existují čísla $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ tak, že platí

$$\|x\| \leqq \eta_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{pro} \quad x \in K^n, \tag{2.8}$$

$$\eta_2 \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqq \|x\| \quad \text{pro} \quad x \in K^n. \tag{2.9}$$

Je-li $y \in K^n$, $r > 0$, položme

$$B(y, r) = B(y, r, K^n) = \{x \in K^n \mid \|x - y\| < r\},$$

$$\bar{B}(y, r) = \bar{B}(y, r, K^n) = \{x \in K^n \mid \|x - y\| \leqq r\}.$$

Považujeme-li číslo $\|x - y\|$ za vzdálenost bodů x, y, můžeme množinu $\bar{B}(y, r)$ interpretovat jako [uzavřenou] kouli se středem v bodě y a poloměrem r. Obdobně množinu $B(y, r)$ interpretujeme jako otevřenou kouli se středem v bodě y a poloměrem r.

Nechť $M_n(K)$ znamená množinu čtvercových matic $A = (A_{ij})$ typu (n, n), kde $A_{ij} \in K$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$. A_{ij} je prvek matice A v i-tém řádku a j-tém sloupci. Tedy matice z $M_n(R)$ mají reálné prvky, matice z $M_n(C)$ mají komplexní prvky (tj. v C); pro stručnost budeme psát M_n místo $M_n(K)$. Je-li $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $A = (A_{ij}) \in M_n$, znamená Ax takový vektor $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, pro který platí

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Je-li $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij}) \in M_n$, $\lambda \in K$, klademe

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij}), \quad \lambda A = A\lambda = (\lambda A_{ij}), \quad AB = \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}\Big).$$

Symbolem 0 budeme značit *nulovou matici* [tj. matici, jejíž všechny prvky jsou nuly — ze souvislosti budeme rozumět, zda 0 znamená $0 \in M_n$, nebo $0 \in K$]. Symbolem I budeme značit *jednotkovou matici*, tj.

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je $0 + A = A + 0 = A$, $IA = AI = A$ pro $A \in M_n$.

M_n je lineární prostor nad K, bereme-li v úvahu pouze sčítání matic a násobení matic čísly [přitom nulová matice je nulový prvek]. Jestliže matici $A = (A_{ij})$ přiřadíme vektor $x = (x_1, \dots, x_{n^2})$, kde $x_{n(i-1)+j} = A_{ij}$ (tj. řádky matice A napíšeme vedle sebe), můžeme ztotožnit M_n s K^{n^2}, tedy M_n má dimenzi n^2.

Budeme předpokládat, že v M_n je pevně dána norma [tj. pro každé $A \in M_n$ je $\|A\|$ reálné číslo a jsou splněny podmínky obdobné podmínkám (2.1) až (2.4)] a že platí

$$\|AB\| \leqq \|A\| \, \|B\| \quad \text{pro} \quad A, B \in M_n \,. \tag{2.11}$$

$$\|Ax\| \leqq \|A\| \, \|x\| \quad \text{pro} \quad A \in M_n,\ x \in K^n \,. \tag{2.12}$$

Lze dokázat, že existují čísla $\eta_3 > 0$, $\eta_4 > 0$ tak, že platí

$$\|A\| \leqq \eta_3 \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}| \,, \tag{2.13}$$

$$\eta_4 \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}| \leqq \|A\| \,, \tag{2.14}$$

kde $A = (A_{ij})$; nerovnosti (2.13) a (2.14) jsou obdobné nerovnostem (2.8) a (2.9). Je-li $\|x\|$ definováno vztahem (2.5), může $\|A\|$ být definováno

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \max_{j=1,2,\dots,n} |A_{ij}| \,. \tag{2.15}$$

Platí-li (2.6), může být

$$\|A\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2\Big)^{1/2} \,, \tag{2.16}$$

v případě, že platí (2.7), může být

$$\|A\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \,. \tag{2.17}$$

Ve všech těchto případech je splněno (2.11) a (2.12).

V každém případě může $\|A\|$ být definováno rovnicí

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid x \in K^n,\ \|x\| \leqq 1 \} \,. \tag{2.18}$$

Je-li $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, pak číslo $(x, y) \in K$ je v případě $K = R$ zavedeno rovnicí

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{2.19a}$$

a v případě $K = C$ rovnicí

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j\,, \tag{2.19b}$$

kde $\bar{y}_j$ je komplexně sdružené číslo k číslu y_j. (x, y) se nazývá *skalární součin vektorů* x, y.

Je-li $w^{[k]} \in K^n$ pro $k = 1, 2, \ldots$, $w \in K^n$,*), píšeme $w^{[k]} \to w$ pro $k \to \infty$ nebo $\lim_{k\to\infty} w^{[k]} = w$ a říkáme, že *posloupnost* $w^{[k]}$ *konverguje k* w *pro* $k \to \infty$, jestliže $\|w^{[k]} - w\| \to 0$ pro $k \to \infty$. Položme $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $w^{[k]} = (w_1^{[k]}, \ldots, w_n^{[k]})$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Z (2.8) a (2.9) plyne

3.2.1. Věta: *$w^{[k]} \to w$ pro $k \to \infty$ právě tehdy, jestliže $w_i^{[k]} \to w_i$ pro $k \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Posloupnost $w^{[k]}$ se nazývá *cauchyovská,* jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo m, že je $\|w^{[j]} - w^{[k]}\| < \varepsilon$ pro $j, k \geqq m$.

3.2.2. Věta: *Ke každé cauchyovské posloupnosti $w^{[k]}$, $w^{[k]} \in K^n$ pro $k = 1, 2, \ldots$, existuje $w \in K^n$ tak, že platí*

$$w = \lim_{k\to\infty} w^{[k]}\,. \tag{2.20}$$

w je vztahem (2.20) určeno jednoznačně.

Větu 3.2.2 lze stručně vyjádřit výrokem „*K^n je úplný prostor*". V základech matematické analýzy se dokazuje, že Věta 3.2.2 platí v případě, že $n = 1$, a pomocí (2.8) a (2.9) se dokáže, že Věta 3.2.2 platí i pro $n > 1$.

Je-li $\mathscr{I}$ množina, potom uspořádanou n-tici funkcí $u_i\colon \mathscr{I} \to K$, $i = 1, 2, \ldots, n$, budeme zapisovat symbolem u. Je $u\colon \mathscr{I} \to K^n$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Je-li ještě $v\colon \mathscr{I} \to K^n$ a $\lambda \in K$, pak $u + v$ a λu jsou funkce z $\mathscr{I}$ do K^n definované rovnicemi

$$(u + v)(t) = u(t) + v(t)\,, \quad (\lambda u)(t) = u(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{2.21}$$

Obdobně definujeme $A + B$ a λA, je-li $A, B\colon \mathscr{I} \to M_n$. Také pro zobrazení s hodnotami v M_n budeme užívat termínu funkce.

*) Pracujeme-li s větším počtem vektorů v K^n, budeme je odlišovat indexy napravo nahoře v lomené závorce, tj. $w^{[1]}, w^{[2]}, \ldots$.

S funkcemi, které nabývají hodnot v K^n nebo v M_n, můžeme pracovat obdobně jako s reálnými [nebo komplexními] funkcemi reálné proměnné.

Nechť $\mathscr{I}$ je interval v R, $u\colon \mathscr{I} \to K^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$. *Funkce u* se nazývá *spojitá v bodě* $t \in \mathscr{I}$, platí-li $u(t_k) \to u(t)$ pro $k \to \infty$ pro každou posloupnost t_k, $k = 1, 2, \ldots$, takovou, že $t_k \to t$ pro $k \to \infty$, $t_k \in \mathscr{I}$ pro $k = 1, 2, \ldots$. *Funkce u* je *spojitá*, je-li spojitá v každém bodě $t \in \mathscr{I}$. Z Věty 3.2.1 plyne, že platí

3.2.3. Věta: *Funkce u je spojitá v bodě t právě tehdy, jsou-li spojité v bodě t funkce* u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Také platí: *Funkce u je spojitá v bodě* $\tau \in \mathscr{I}$ *právě tehdy, jestliže ke každému číslu* $\varepsilon > 0$ *existuje takové číslo* $\delta > 0$, *že je* $\|u(\tau) - u(t)\| < \varepsilon$, *jakmile je* $t \in \mathscr{I}$, $|\tau - t| < \delta$.

Odtud plyne, že platí

3.2.4. Věta: *Je-li funkce u spojitá v bodě* $\tau \in \mathscr{I}$, *je také funkce* $\|u(t)\|$ *proměnné t spojitá v bodě* τ.

Je totiž podle (2.4)

$$\|u(\tau)\| \leqq \|u(\sigma)\| + \|u(\tau) - u(\sigma)\|\,,$$
$$\|u(\sigma)\| \leqq \|u(\tau)\| + \|u(\sigma) - u(\tau)\| \quad \text{pro} \quad \sigma \in \mathscr{I}$$

a odtud podle (2.3) plyne

$$-\|u(\sigma) - u(\tau)\| \leqq \|u(\tau)\| - \|u(\sigma)\| = \|u(\sigma) - u(\tau)\| \quad \text{pro} \quad \sigma \in \mathscr{I}\,.$$

Protože M_n je lineární prostor konečné dimenze [$\dim M_n = n^2$], platí vše, co zde bylo řečeno o spojitosti funkce $u\colon \mathscr{I} \to K^n$, také pro funkci $A\colon \mathscr{I} \to M_n$, $A(t) = (A_{ij}(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$; např. funkce A je spojitá v bodě t právě tehdy, jsou-li v bodě t spojité funkce A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dále platí

3.2.5. Věta: *Jsou-li funkce* $A, B\colon \mathscr{I} \to M_n$, $x\colon \mathscr{I} \to K^n$ *spojité v bodě* $\tau \in \mathscr{I}$, *jsou také funkce* $AB\colon \mathscr{I} \to M_n$, $Ax\colon \mathscr{I} \to K^n$ *spojité v bodě* τ. *Přitom funkce AB, Ax jsou definovány rovnicemi* $(AB)(t) = A(t)\,B(t)$, $(Ax)(t) = A(t)\,x(t)$ *pro* $t \in \mathscr{I}$.

Derivaci funkce $\mathscr{I}$ v bodě τ intervalu $\mathscr{I}$ zavádíme takto: $w \in K^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, se nazývá *derivace funkce u v bodě* τ, jestliže platí $[u(t_k) - u(t)]\,.\,(t_k - \tau)^{-1} \to w$ pro $k \to \infty$ pro každou posloupnost t_k, $k = 1, 2, \ldots$, takovou, že $t_k \to \tau$ pro $k \to \infty$, $t_k \in \mathscr{I}$, $t_k \neq \tau$ pro $k = 1, 2, \ldots$; v takovém případě píšeme

$$w = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\tau)\,.$$

Z Věty 3.2.1 a z obvyklé definice derivace plyne

3.2.6. Věta: *Nechť je* $\tau \in \mathscr{I}$. *Vektor* $w \in K^n$ *je derivace funkce u v bodě* τ *právě tehdy, je-li* w_i *derivace funkce* u_i *v bodě* τ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$; *v takovém případě je*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\tau) = \left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(\tau), \ldots, \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(\tau)\right). \tag{2.22}$$

Obdobně $B \in M_n$ je derivací funkce $A: \mathscr{I} \to M_n$ v bodě τ právě tehdy, je-li B_{ij} derivace funkce A_{ij} v bodě τ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$; v takovém případě je

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(\tau) = \left(\frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}t}(\tau)\right). \tag{2.23}$$

Přímým způsobem se ověří, že platí

3.2.7. Věta: *Nechť funkce $A, B: \mathscr{I} \to M_n$, $x: \mathscr{I} \to K^n$ mají derivaci v bodě $\tau \in \mathscr{I}$. Potom funkce $AB: \mathscr{I} \to M_n$, $Ax: \mathscr{I} \to K^n$ mají derivaci v bodě $\tau \in \mathscr{I}$ a platí*

$$\frac{\mathrm{d}AB}{\mathrm{d}t}(\tau) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(\tau)\,B(\tau) + A(\tau)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(\tau), \tag{2.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}Ax}{\mathrm{d}t}(\tau) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(\tau)\,x(\tau) + A(\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(\tau). \tag{2.25}$$

Obdobně jako v případě $n = 1$ budeme funkci $v: \mathscr{I} \to K^n$ nazývat primitivní funkcí k funkci u, jestliže je spojitá a jestliže platí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = u(t)$$

pro $t \in \mathscr{I}$ kromě konečného počtu bodů [tj. buď pro všechna $t \in \mathscr{I}$, nebo existuje konečný počet výjimek]. Z Věty 3.2.6 plyne, že platí

3.2.8. Věta: *Funkce $v = (v_1, \ldots, v_n)$ je primitivní funkcí k funkci $u = (u_1, \ldots, u_n)$ právě tehdy, je-li v_i primitivní funkcí k u_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Z Věty 3.2.8 a z (0.5.6) plyne: Jsou-li $v^{[1]}, v^{[2]}$ primitivní funkce k funkci u, $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, potom

$$v^{[1]}(t_2) - v^{[1]}(t_1) = v^{[2]}(t_2) - v^{[2]}(t_1).$$

Rozdíl $v(t_2) - v(t_1)$, kde v je primitivní funkce k u, nazýváme *integrálem* z u od t_1 do t_2 (s mezemi t_1, t_2) a píšeme

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t.$$

Píšeme-li $u = (u_1, \ldots, u_n)$, je

$$\int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t = \left(\int_{t_1}^{t_2} u_1\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_{t_1}^{t_2} u_n\,\mathrm{d}t\right) \in K^n.$$

Pojem „po částech spojitá funkce“ lze zavést pro funkce $u: \mathscr{I} \to K^n$, obdobně jako byl tento pojem zaveden v odst. 0.5 pro funkce $f: \mathscr{I} \to K$, a obdobně platí: *Je-li funkce $u: \mathscr{I} \to K^n$ po částech spojitá, pak k ní existuje funkce primitivní.* Z (0.5.9) a z Vět 3.2.3 a 3.2.8 plyne, že platí

3.2.9. Věta: *Je-li funkce $u\colon \mathscr{I} \to K^n$ spojitá a je-li v primitivní funkce k u, potom*

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = u(t) \quad pro \quad t \in \mathscr{I}\,.$$

Odhadu z následující věty budeme užívat velmi často.

3.2.10. Věta: *Je-li funkce $u\colon \mathscr{I} \to K^n$ po částech spojitá, $t_1 \leqq t_2$, $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, pak*

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.26}$$

Důkaz: Funkce $\|u(t)\|$ proměnné t je po částech spojitá a integrál na pravé straně má smysl. Budeme se zabývat pouze případem $t_1 < t_2$. Nechť funkce $z\colon \langle t_1, t_2\rangle \to K^n$ je po částech konstantní, tj. existují čísla $\sigma_0, \ldots, \sigma_j$ a vektory $w^{[1]}, \ldots, w^{[j]} \in K^n$ tak, že je $t_1 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_j = t_2$, $z(t) = w^{[i]}$ pro $\sigma_{i-1} < t < \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, j$. Snadno se přesvědčíme, že je

$$\int_{t_1}^{t_2} z(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{j} w^{[i]}(\sigma_i - \sigma_{i-1})\,,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|z(t)\|\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{j} \|w^{[i]}\|\,(\sigma_i - \sigma_{i-1})\,.$$

Z (2.3) a (2.4) plyne, že

$$\left\| \sum_{i=1}^{j} w^{[i]}(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \right\| \leqq \left\| \sum_{i=1}^{j-1} w^{[i]}(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \right\| + \|w^{[j]}\|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1})\,,$$

a postupně dostaneme

$$\left\| \sum_{i=1}^{j} w^{[i]}(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \right\| \leqq \sum_{i=1}^{j} \|w^{[i]}\|\,(\sigma_i - \sigma_{i-1})\,.$$

To znamená, že platí

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} z(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|z(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. K funkci u lze najít funkci $z\colon \langle t_1, t_2\rangle \to K^n$ po částech konstantní tak, že platí

$$|u_i(t) - z_i(t)| \leqq \varepsilon \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_1, t_2\rangle\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Platí

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} z(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} [u(t) - z(t)]\,\mathrm{d}t \right\| \leqq$$

$$\leqq \left\| \int_{t_1}^{t_2} z(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{t_1}^{t_2} [u(t) - z(t)]\,\mathrm{d}t \right\| \leqq$$

$$\leqq \int_{t_1}^{t_2} \|z(t)\|\,\mathrm{d}t + \left\| \int_{t_1}^{t_2} [u(t) - z(t)]\,\mathrm{d}t \right\| . \tag{2.27}$$

Je

$$\int_{t_1}^{t_2} [u(t) - z(t)]\,\mathrm{d}t = \left(\int_{t_1}^{t_2} [u_1(t) - z_1(t)]\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_{t_1}^{t_2} [u_n(t) - z_n(t)]\,\mathrm{d}t \right),$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} [u_i(t) - z_i(t)]\,\mathrm{d}t \right| \leqq \varepsilon(t_2 - t_1)$$

[srovnej (0.5.5)] a podle (2.8) platí

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} [u(t) - z(t)]\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \eta_1 n\, \varepsilon(t_2 - t_1) . \tag{2.28}$$

Dále je

$$\|z(t)\| \leqq \|u(t)\| + \|z(t) - u(t)\| \leqq \|u(t)\| + \eta_1 n \varepsilon \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle ,$$

je tedy

$$\int_{t_1}^{t_2} \|z(t)\|\,\mathrm{d}t \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t + \eta_1 n\, \varepsilon(t_2 - t_1) . \tag{2.29}$$

Z (2.27) až (2.29) plyne

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t + 2\eta_1 n\, \varepsilon(t_2 - t_1)$$

a (2.26) platí, protože $\varepsilon > 0$ můžeme zvolit libovolně malé. Věta 3.2.8 je dokázána.

3.3. Soustavu (1.1) i celý odst. 3.1 můžeme přepsat do vektorového zápisu. Místo soustavy (1.1) píšeme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) . \tag{3.1}$$

Přitom $G \subset R \times K^n$, $f\colon G \to K^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i\colon G \to K$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. [Pro $(t, x) \in G$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ znamená tedy $f(t, x)$ vektor, jehož i-tá komponenta je $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$.] (3.1) se nazývá *vektorová diferenciální rovnice.* Slovo vektorová se obvykle vynechává, a proto (3.1) budeme nazývat diferenciální rovnicí nebo stručně rovnicí.

Definici 3.1.1 přepíšeme takto:

3.3.1. Definice: Nechť $\mathscr{I}$ je interval a nechť funkce $u\colon \mathscr{I} \to K^n$ má spojitou derivaci $\dot{u}\colon \mathscr{I} \to K^n$.

Nechť platí

$$(t, u(t)) \in G \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J} \tag{3.2}$$

a

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}\,. \tag{3.3}$$

Potom u nazýváme *řešením rovnice* (3.1).

Obdobně přepíšeme Větu 3.1.2.

3.3.2. Věta: *Nechť u je řešení rovnice* (3.1), $u\colon \mathscr{J} \to K^n$. *Potom platí*

$$u(t_2) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, u(t))\,\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

pro $t_1, t_2 \in \mathscr{J}$.

Věta 3.3.2 platí, protože jde jen o jiný zápis Věty 3.1.2; ovšem je možné dokázat ji obdobným postupem jako Větu 3.1.2.

3.3.3. Poznámka: Nechť r je přirozené číslo, $G \subset R \times K^n$, $h\colon G \to K^r$. *Funkce h* se nazývá *spojitá v bodě* $(t', x') \in G$, jestliže pro každou posloupnost $(t_1, x^{[1]})$, $(t_2, x^{[2]}), \ldots$ takovou, že je $(t_i, x^{[i]}) \in G$ pro $i = 1, 2, \ldots$, $t_i \to t'$, $x^{[i]} \to x'$, platí $h(t_i, x^{[i]}) \to h(t', x')$ pro $i \to \infty$. *Funkce h* se nazývá *spojitá*, je-li spojitá v každém bodě $(t', x') \in G$. Je známé, že platí: *Funkce h je spojitá v bodě $(t', x') \in G$ právě tehdy, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že je $\|h(t, x) - h(t', x')\| < \varepsilon$, jakmile je $(t, x) \in G$, $|t - t'| < \delta$, $\|x - x'\| < \delta$.* Píšeme-li $h = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$, kde $h_i\colon G \to K$, pak platí obdobně jako v odst. 3.2 (Věta 3.2.3): *Funkce h je spojitá právě tehdy, jsou-li spojité funkce h_i pro $i = 1, 2, \ldots, r$.*

3.3.4. Věta: *Nechť funkce $f\colon G \to K^n$ je spojitá. Nechť $\mathscr{J}$ je interval, nechť funkce $u\colon \mathscr{J} \to K^n$ je spojitá, $(t, u(t)) \in G$ pro $t \in \mathscr{J}$. Nechť $s \in \mathscr{J}$ a nechť platí*

$$u(t) = u(s) + \int_s^t f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{3.5}$$

pro $t \in \mathscr{J}$. Potom u je řešení rovnice (3.1).

D ů k a z je jednoduchý. Podle učiněných předpokladů je složená funkce za integračním symbolem v (3.5) spojitá. Proto pravá strana má derivaci podle proměnné t v každém bodě $t \in \mathscr{J}$ (viz Větu 3.2.9); má tedy derivaci v každém bodě $t \in \mathscr{J}$ i strana levá a derivováním rovnice (3.5) dostaneme, že (3.3) platí v každém bodě $t \in \mathscr{J}$. Odtud plyne, že funkce $\dot{u}$ je spojitá. Věta 3.3.4 je dokázána.

3.3.5. Poznámka: Je-li $u\colon \mathscr{J} \to K^n$ řešení rovnice (3.1), $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, kde $u_i\colon \mathscr{J} \to K$, budeme také někdy pro zjednodušení formulací říkat, že u je řešení soustavy (1.1). Naopak, je-li $u_1, \ldots, u_n$ řešení soustavy (1.1), budeme říkat, že $(u_1, \ldots, u_n)$ je řešení rovnice (3.1). Protože soustava (1.1) vznikne rozepsáním rovnice (3.1), nazývá se i (1.1) diferenciální rovnice nebo stručně rovnice.

3.4. Také pojmy „prodloužení daného řešení" a „maximální řešení" se zavádějí zcela stejným způsobem jako v odst. 1.8. Platí

3.4.1. Věta: *Nechť* $u: \mathscr{I} \to K^n$ *je řešení rovnice* (3.1). *Pak existuje maximální řešení* $q: K \to K^n$ *rovnice* (3.1), *které je současně prodloužením řešení* u.

Této věty nebudeme užívat; její důkaz nalezne čtenář v Dodatku 3.3. Z Věty 3.4.1 plyne, že známe všechna řešení rovnice (3.1), známe-li všechna maximální řešení rovnice (3.1).