Obyčejné diferenciální rovnice

2. O elementárních způsobech integrace

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 29--72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402080

2. O elementárních způsobech integrace

V této kapitole probereme některé lineární diferenciální rovnice a soustavy lineárních diferenciálních rovnic (obecná teorie soustav lineárních diferenciálních rovnic je vyložena v kap. 4) a diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Všimneme si souvislosti mezi neautonomní rovnicí a autonomní soustavou dvou diferenciálních rovnic, dále transformace diferenciální rovnice a soustav diferenciálních rovnic a využití transformace k integraci diferenciálních rovnic.

2.1. Nechť $\mathscr{I}$ je otevřený interval, $k\colon \mathscr{I} \to R$ nechť je spojitá funkce. Je-li $s \in \mathscr{I}$, $y \in R$, pak funkce $u\colon \mathscr{I} \to R$ definovaná vztahem

$$u(t) = y \exp \int_s^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.1}$$

je řešením rovnice

$$\dot{x} = k(t)\,x\,. \tag{1.2}$$

O tom se přesvědčíme výpočtem.

u je zřejmě maximální řešení a je $u(s) = y$. Je-li $v\colon \mathscr{I} \to R$ řešení rovnice (1.2), položme

$$w(t) = v(t) \exp\left[-\int_s^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \quad (w\colon \mathscr{I} \to R)\,.$$

Vypočteme, že je $\dot{w}(t) = 0$ pro $t \in \mathscr{I}$, tedy $w =$ konst. Je-li $v(s) = y$, pak $v(t) = u(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$. Odtud plyne, že u je jediné maximální řešení, pro něž je $u(s) = y$.

Nechť K je (pevně zvolená) primitivní funkce k funkci k. Každé maximální řešení z rovnice (1.2) můžeme zapsat ve tvaru $z(t) = c\,\mathrm{e}^{K(t)}$, kde c je vhodné reálné číslo; jak jsme ukázali, je

$$z(t) = z(s) \exp \int_s^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau = z(s)\,\mathrm{e}^{K(t)-K(s)}\,,$$

$s \in \mathscr{I}$ je pevně zvolené a stačí položit $c = z(s)\,\mathrm{e}^{-K(s)}$.

Příklad: Každé maximální řešení z rovnice

$$\dot{x} = (2 + \sin t)\, x \tag{1.3}$$

můžeme napsat ve tvaru $z(t) = c \exp(2t - \cos t)$ pro $t \in R$, kde c je vhodné reálné číslo.

2.2. Nechť $\mathscr{I}$, k, K mají stejný význam jako v odst. 2.1 a nechť funkce $q : \mathscr{I} \to R$ je spojitá. Řešení u rovnice

$$\dot{x} = k(t)\, x + q(t) \tag{2.1}$$

hledejme ve tvaru

$$u(t) = w(t) \exp \int_s^t k(\tau)\, d\tau$$

pro $t \in \mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ ($s \in \mathscr{J}$ je pevně zvolené). Dosazením tohoto výrazu do rovnice (2.1) dostáváme po jednoduché úpravě

$$\dot{w}(t) = q(t) \exp\left[-\int_s^t k(\tau)\, d\tau\right],$$

tedy

$$w(t) = y + \int_s^t q(\sigma) \exp\left[-\int_s^\sigma k(\tau)\, d\tau\right] d\sigma,$$

$$u(t) = y \exp \int_s^t k(\tau)\, d\tau + \int_s^t q(\sigma) \exp \int_\sigma^t k(\tau)\, d\tau\, d\sigma\,. \tag{2.2}$$

Dosazením $s = t$ plyne $u(s) = y$. Ukázali jsme: Je-li funkce $u : \mathscr{J} \to R$ (kde $s \in \mathscr{J} \subset \mathscr{I}$) řešení rovnice (2.1) a je-li $u(s) = y$, pak funkce u je dána vzorcem (2.2). Výpočtem se přesvědčíme, že funkce u definovaná vzorcem (2.2) je opravdu řešení rovnice (2.1). Přirozeně ve vzorci (2.2) můžeme položit $\mathscr{J} = \mathscr{I}$ a tak je nalezeno jediné maximální řešení u rovnice (2.1), pro něž je $u(s) = y$.

Podobně jako v odst. 2.1 platí:

Je-li K pevně zvolená primitivní funkce ke k a $s \in \mathscr{I}$, pak každé maximální řešení z rovnice (2.1) můžeme napsat ve tvaru

$$z(t) = c\, e^{K(t)} + e^{K(t)} \int_s^t e^{-K(\sigma)}\, q(\sigma)\, d\sigma\,,$$

kde c je vhodná konstanta.

2.3. Nechť k_{11}, k_{12}, k_{22} jsou spojité funkce definované na intervalu $\mathscr{I}$. Buď $s \in \mathscr{I}$, $y_1, y_2 \in R$. Hledejme maximální řešení u_1, u_2 soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_{11}(t)\,x_1 + k_{12}(t)\,x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= \phantom{k_{11}(t)\,x_1 + {}} k_{22}(t)\,x_2\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

které splňuje podmínku $u_1(s) = y_1$, $u_2(s) = y_2$.

Podle odst. 2.1 je

$$u_2(t) = y_2 \exp \int_s^t k_{22}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \tau \in \mathscr{I}\,, \tag{3.2}$$

podle odst. 2.2 je

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y_1 \exp \int_s^t k_{11}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\, + \\ &+ y_2 \int_s^t k_{12}(\sigma) \exp \left[\int_\sigma^t k_{11}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_s^\sigma k_{22}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\sigma\,, \quad t \in \mathscr{I}\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

a těmito vzorci je určeno jediné maximální řešení soustavy (3.1), které splňuje podmínky $u_1(s) = y_1$, $u_2(s) = y_2$.

Obdobným způsobem můžeme najít řešení soustav diferenciálních rovnic s trojúhelníkovou maticí, tj. soustav tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_{11}(t)\,x_1 + k_{12}(t)\,x_2 + \ldots + k_{1n}(t)\,x_n + q_1(t)\,,\\ \dot{x}_2 &= \phantom{k_{11}(t)\,x_1 + {}} k_{22}(t)\,x_2 + \ldots + k_{2n}(t)\,x_n + q_2(t)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n &= \phantom{k_{11}(t)\,x_1 + k_{12}(t)\,x_2 + \ldots + {}} k_{nn}(t)\,x_n + q_n(t)\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde $k_{ij}\colon \mathscr{I} \to R$ a $q_i\colon \mathscr{I} \to R$ jsou spojité funkce pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

V případě soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= \phantom{\lambda x_1 + {}} \lambda x_2 + x_3\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_{n-1} &= \phantom{\lambda x_1 + \lambda x_2 + {}} \lambda x_{n-1} + x_n\,,\\ \dot{x}_n &= \phantom{\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_{n-1} + {}} \lambda x_n\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $\lambda \in R$, lze vypočítat, že maximální řešení $u_1, \ldots, u_n$, které splňuje podmínku $u_i(0) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $y_i \in R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, je dáno vzorci

$$u_1(t) \;\; = \mathrm{e}^{\lambda t} \left[y_1 + y_2 t + y_3 \frac{t^2}{2!} + \ldots + y_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right],$$

$$u_2(t) \;\; = e^{\lambda t}\left[y_2 + y_3 t + y_4\frac{t^2}{2!} + \ldots + y_n\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{n-1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(y_{n-1} + y_n t),$$

$$u_n(t) \;\; = \mathrm{e}^{\lambda t} y_n . \tag{3.6}$$

2.4. Nechť funkce $a, b: \mathscr{I} \to R$ jsou spojité, $s \in \mathscr{I}$, $y_1, y_2 \in R$. Výpočtem se přesvědčíme, že funkce u_1, u_2 definované vzorci

$$u_1(t) = y_1 \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+ y_2 \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right],$$

$$u_2(t) = -y_1 \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+ y_2 \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right], \quad t \in \mathscr{I}, \tag{4.1}$$

jsou řešením soustavy

$$\dot{x}_1 = \;\; a(t)\,x_1 + b(t)\,x_2 ,$$

$$\dot{x}_2 = -b(t)\,x_1 + a(t)\,x_2 . \tag{4.2}$$

Přitom je

$$u_1(s) = y_1 , \quad u_2(s) = y_2 . \tag{4.3}$$

Také zde lze ukázat obdobným způsobem jako dříve, že u_1, u_2 je jediné maximální řešení, které splňuje (4.3).

Návod: Nechť $\mathscr{J}$ je interval, $s \in \mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ a nechť funkce $v_1, v_2: \mathscr{J} \to R$ jsou řešením soustavy (4.2). Potom rovnicemi

$$v_1(t) = w_1(t) \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+ w_2(t) \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right],$$

$$v_2(t) = -w_1(t) \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+ w_2(t) \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.4}$$

jsou určeny funkce $w_1, w_2 : \mathscr{J} \to R$ (determinant soustavy je různý od nuly pro každé $t \in \mathscr{J}$) a funkce w_1, w_2 mají spojité derivace prvního řádu. Dosazením pravých stran vzorců (4.4) do soustavy (4.2) najdeme po úpravě, že je $\dot{w}_1(t) = 0 = \dot{w}_2(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$, tedy w_1, w_2 jsou konstantní funkce. Z podmínek (4.3) plyne, že je $w_1(t) = y_1$, $w_2(t) = y_2$ pro $t \in \mathscr{J}$.

2.5. Buď $\alpha, \beta \in R$. Vyšetřujme soustavu

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 \,,$$

$$\dot{x}_2 = \beta x_2 \,. \tag{5.1}$$

Protože pravá strana první rovnice nezávisí na x_2 a pravá strana druhé rovnice nezávisí na x_1, můžeme řešit každou z obou rovnic zvlášť, tj. nezávisle na druhé z rovnic. Říkáme, že soustava (5.1) se rozpadá. Podle odst. 2.1 [soustava (5.1) je autonomní, klademe tedy $\mathscr{J} = R$, viz odst. 1.6] můžeme všechna maximální řešení z_1 první z rovnic (5.1) zapsat ve tvaru $z_1(t) = y_1 \, e^{\alpha t}$ pro $t \in R$ (klademe $s = 0$) a všechna maximální řešení z_2 druhé z rovnic (5.1) můžeme zapsat ve tvaru $z_2(t) = y_2 \, e^{\beta t}$ pro $t \in R$; přitom $y_1, y_2 \in R$ můžeme volit libovolně. Nyní budeme rozlišovat několik případů:

(i) $\quad \alpha = \beta = 0 \,.$

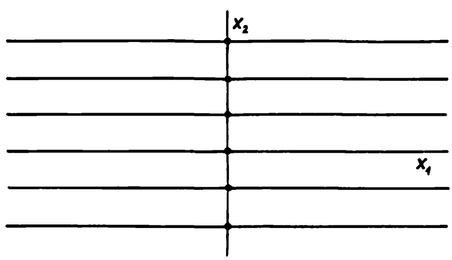
Zvolme bod $(y_1, y_2) \in R^2$. Jednobodová množina $\{(y_1, y_2)\}$ je trajektorie, a volíme-li všemi možnými způsoby bod $(y_1, y_2) \in R^2$, dostaneme tak všechny trajektorie.

(ii) $\quad \alpha \neq 0 \,, \quad \beta = 0 \,.$

Zvolme $y_2 \in R$. Množiny

$$\{(x_1, y_2) | \, x_1 > 0\} \,, \quad \{(0, y_2)\} \,, \quad \{(x_1, y_2) | \, x_1 < 0\}$$

jsou trajektorie, a volíme-li všemi možnými způsoby $y_2 \in R$, dostaneme tak všechny trajektorie (viz obr. 6).



Obr. 6

V případě $\alpha > 0$ se hodnoty řešení po trajektoriích (různých od jednobodových trajektorií) od osy x_2 s rostoucím t vzdalují, v případě $\alpha < 0$ se k ní přibližují.

Obdobným způsobem se vyšetří případ $\alpha = 0 \neq \beta$.

(iii) $\alpha \neq 0 , \quad \beta \neq 0 , \quad \alpha\beta > 0 .$

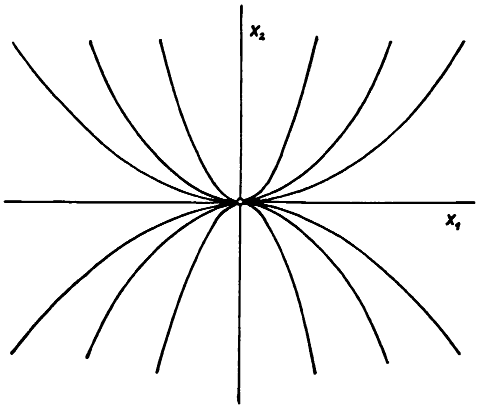
Množiny

$$\{(0, x_2) | \, x_2 > 0\} , \quad \{(0, 0)\} , \quad \{(0, x_2) | \, x_2 < 0\}$$

jsou trajektorie. Zvolme $c \in R$. Množiny

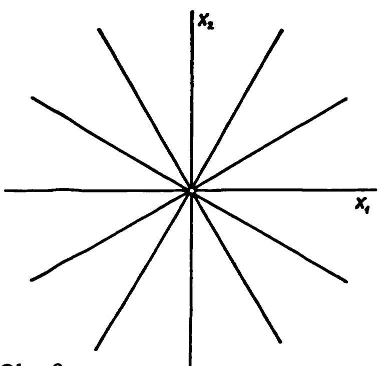
$$\{(x_1, x_2) | \, x_2 = c x_1^{|\beta|/|\alpha|}, x_1 > 0\} , \quad \{(x_1, x_2) | \, x_2 = c |x_1|^{|\beta|/|\alpha|}, x_1 < 0\}$$

jsou trajektorie. Volíme-li tak všemi možnými způsoby $c \in R$, dostaneme všechny



Obr. 7

trajektorie. Pro případ $|\alpha| < |\beta|$ jsou trajektorie naznačeny na obr. 7, pro případ $0 < |\alpha| = |\beta|$ jsou trajektorie naznačeny na obr. 8. V tomto případě jsou trajektorie



Obr. 8

polopřímky, jejichž počáteční bod je bod $(0, 0)$, a jednobodová trajektorie $\{(0, 0)\}$. V případě $\alpha > 0$, $\beta > 0$ se hodnoty řešení po trajektoriích [různých od trajektorie

$\{(0, 0)\}]$ od počátku vzdalují s rostoucím t, v případě $\alpha < 0$, $\beta < 0$ se k počátku přibližují.

(iv) $\quad \alpha \neq 0 \neq \beta\,, \quad \alpha\beta < 0\,.$

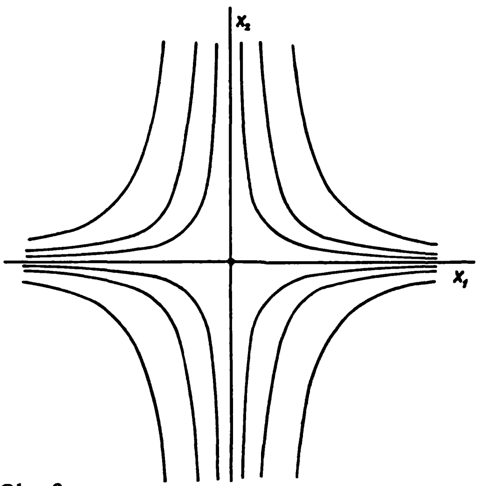
Množiny

$$\{(0, 0)\}\,, \quad \{(0, x_2) |\, x_2 > 0\}\,, \quad \{(0, x_2) |\, x_2 < 0\}\,, \quad \{(x_1, 0) |\, x_1 > 0\}\,,$$
$$\{(x_1, 0) |\, x_1 < 0\}$$

jsou trajektorie. Nechť $c > 0$. Množiny

$$\{(x_1, x_2) |\, x_1^{|\beta|}\, x_2^{|\alpha|} = c\,, \quad x_1 > 0, x_2 > 0\}\,,$$
$$\{(x_1, x_2) |\, x_1^{|\beta|}\, |x_2|^{|\alpha|} = c\,, \quad x_1 > 0, x_2 < 0\}\,,$$
$$\{(x_1, x_2) |\, |x_1|^{|\beta|}\, x_2^{|\alpha|} = c\,, \quad x_1 < 0, x_2 > 0\}\,,$$
$$\{(x_1, x_2) |\, |x_1|^{|\beta|}\, |x_2|^{|\alpha|} = c\,, \quad x_1 < 0, x_2 < 0\}$$

jsou trajektorie, a volíme-li všemi možnými způsoby $c > 0$, dostaneme všechny trajektorie. Případ $0 < |\alpha| < |\beta|$ je naznačen na obr. 9; v případě $\alpha = -\beta \neq 0$ dostáváme rovnoosé hyperboly.



Obr. 9

2.6. Vyšetřujme soustavu

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + \nu x_2\,,$$
$$\dot{x}_2 = -\nu x_1 + \mu x_2\,, \tag{6.1}$$

kde μ, $\nu \in R$, $\nu \neq 0$. [Pro $\nu = 0$ dostáváme soustavu (5.1), případ (i) nebo (iii).] Podle odst. 2.4 každé maximální řešení z_1, z_2 této soustavy je definováno na R

a můžeme je zapsat ve tvaru

$$z_1(t) = \quad y_1 \, e^{\mu t} \cos \nu t + y_2 \, e^{\mu t} \sin \nu t \,,$$
$$z_2(t) = -y_1 \, e^{\mu t} \sin \nu t + y_2 \, e^{\mu t} \cos \nu t \,, \tag{6.2}$$

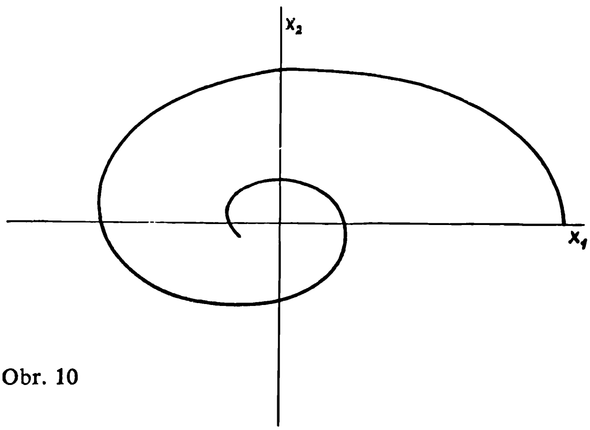
kde $y_1, y_2 \in R$. Položíme-li

$$y_1 = r \sin \varphi \,, \quad y_2 = r \cos \varphi$$

[taková $r \geqq 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ vždy existují], můžeme (6.2) přepsat ve tvaru

$$z_1(t) = r \, e^{\mu t} \sin (\nu t + \varphi) \,,$$
$$z_2(t) = r \, e^{\mu t} \cos (\nu t + \varphi) \,. \tag{6.3}$$

Je-li $\mu = 0$, je soustava (6.1) totožná s rovnicí (1.10.1) a trajektorie, která odpovídá řešení z_1, z_2, je v případě $r > 0$ kružnice o poloměru r se středem v počátku. Případu $r = 0$ odpovídá jednobodová trajektorie $\{(0, 0)\}$. (Viz obr. 3).



Obr. 10

Je-li $\mu \neq 0$, pak množina

$$\{(e^{\mu t} \sin (\nu t + \varphi), e^{\mu t} \cos (\nu t + \varphi)| \; t \in R\} \tag{6.4}$$

je trajektorie pro každé $\varphi \in R$. Všechny trajektorie dostaneme, proběhne-li φ interval $\langle 0, 2\pi)$ a připojíme-li ještě trajektorii $\{(0, 0)\}$. Abychom toto tvrzení dokázali, vezměme libovolnou trajektorii

$$T = \{(r' \, e^{\mu t} \sin (\nu t + \varphi'), r' \, e^{\mu t} \cos (\nu t + \varphi'))| \; t \in R\} \,,$$

kde $r' > 0$ a $\varphi' \in R$ jsou pevně zvolená čísla. Položme

$$t = s - \frac{1}{\mu} \log r' \,.$$

Je

$$T = \{(e^{\mu s} \sin (\nu s + \psi), e^{\mu s} \cos (\nu s + \psi))| \; s \in R\} \,,$$

kde

$$\psi = \varphi' - \frac{\nu}{\mu} \log r' .$$

Najdeme takové celé číslo k, že platí $\psi = \varphi + 2k\pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$; trajektorii T můžeme zapsat ve tvaru (6.4).

Obr. 10 odpovídá případu $\mu\nu > 0$; je-li $\mu > 0$, $\nu > 0$, pak hodnoty řešení se s rostoucím t po trajektoriích vzdalují od počátku, v případě $\mu < 0$, $\nu < 0$ se k počátku přibližují. Vzdálenosti počátku od bodů, v nichž libovolná trajektorie (6.4) protíná pevně zvolenou polopřímku, jejímž počátečním bodem je počátek, jsou body jisté oboustranně neohraničené geometrické posloupnosti s kvocientem $e^{2\pi\mu/\nu}$.

2.7. Buď $\lambda \in R$. Vyšetřujme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2 , \\ \dot{x}_2 &= \qquad \lambda x_2 . \end{aligned} \tag{7.1}$$

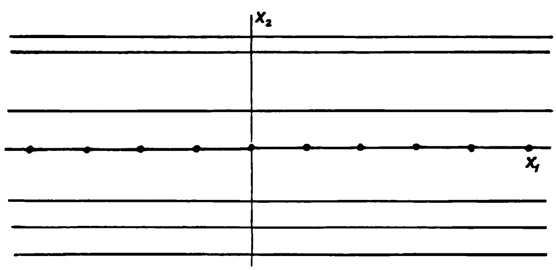
Podle odst. 2.3 každé maximální řešení z_1, z_2 můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda t} y_1 + t\, e^{\lambda t} y_2 , \\ z_2(t) &= \qquad\quad e^{\lambda t} y_2 . \end{aligned} \tag{7.2}$$

V případě $\lambda = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + t y_2 , \\ z_2 &= \qquad y_2 ; \end{aligned}$$

množiny $\{(y_1, 0)\}$ pro $y_1 \in R$ a $\{(x_1, y_2) |\ x_1 \in R\}$ pro $y_2 \in R$, $y_2 \neq 0$, jsou trajektorie a jsou to všechny trajektorie – viz obr. 11.



Obr. 11

Nechť je $\lambda \neq 0$. Je-li $y_1 = y_2 = 0$, odvodíme z (7.2) trajektorii $\{(0, 0)\}$; obdobně případu $y_1 > 0$, $y_2 = 0$ odpovídá trajektorie $\{(x_1, 0) |\ x_1 > 0\}$ a případu $y_1 < 0$, $y_2 = 0$ trajektorie $\{(x_1, 0) |\ x_1 < 0\}$.

Nechť $y_1, y_2 \in R$, $y_2 \neq 0$. Ze vzorců (7.2) najdeme trajektorii

$$T = \{(e^{\lambda t} y_1 + t\, e^{\lambda t} y_2, e^{\lambda t} y_2) |\ t \in R\} .$$

Je $(y_1, y_2) \in T$. Trajektorii T můžeme zapsat mnoha způsoby. Nechť je např. $y_2 > 0$. Každému $t \in R$ odpovídá číslo $x_2 = e^{\lambda t} y_2$ a je $x_2 > 0$ a naopak k číslu $x_2 > 0$ vypočteme $t \in R$ podle vzorce $t = \lambda^{-1}(\ln x_2 - \ln y_2)$. Dosazením za t podle tohoto vzorce dostaneme

$$e^{\lambda t} y_1 + t\, e^{\lambda t} y_2 = x_2 \left(\frac{y_1}{y_2} - \lambda^{-1} \ln y_2 \right) + \lambda^{-1} x_2 \ln x_2 \, .$$

Položme $c = y_1/y_2 - \lambda^{-1} \ln y_2$; můžeme psát

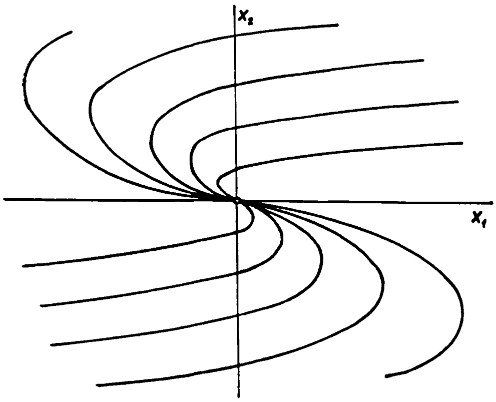
$$T = \{(x_1, x_2) | \, x_2 > 0, \, x_1 = x_2(c + \lambda^{-1} \ln x_2)\} \, . \tag{7.3}$$

V případě $y_2 < 0$ obdobně odvodíme

$$T = \{(x_1, x_2) | \, x_2 < 0, \, x_1 = x_2(c + \lambda^{-1} \ln(-x_2))\} \, , \tag{7.4}$$

kde $c = y_1/y_2 - \lambda^{-1} \ln(-y_2)$.

Tak jsme nalezli všechny trajektorie. Ze vzorců (7.3) a (7.4) a z vyjádření ostatních tří trajektorií lze odvodit, že každý bod $(u_1, u_2) \in R^2$ leží právě v jediné trajektorii (viz obr. 12; tento obrázek odpovídá případu $\lambda > 0$).



Obr. 12

2.8. Nechť funkce $g: (\alpha, \beta) \to R$, $\varphi: (\gamma, \delta) \to R$ jsou spojité. Rovnice

$$\dot{x} = g(x)\, \varphi(t) \tag{8.1}$$

se nazývá *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými*. Je-li $g(x) = 0$ pro $x \in (\alpha, \beta)$, pak tato rovnice není zajímavá (všechna řešení jsou konstantní funkce). Položme $U = \{x \in (\alpha, \beta) | \, g(x) \neq 0\}$ a předpokládejme, že množina U není prázdná. Protože funkce g je spojitá, je množina U otevřená, $U \subset R$. Otevřené podmnožiny v R mají jednoduchou strukturu: lze je vyjádřit jako sjednocení konečného nebo spočetného systému disjunktních otevřených intervalů. Tedy existují intervaly

(ε_i, ζ_i), kde $i = 1, 2, \ldots, k$ nebo $i = 1, 2, \ldots$ (budeme psát $i \in \mathscr{K}$ v obou případech) tak, že

$$U = \bigcup_{i \in \mathscr{K}} (\varepsilon_i, \zeta_i)$$

a

$$(\varepsilon_i, \zeta_i) \cap (\varepsilon_j, \zeta_j) = \emptyset \quad \text{pro} \quad i \neq j,\ i, j \in \mathscr{K}\,.$$

Pro $x \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$ je $g(x) \neq 0$, funkce g je spojitá, a proto je buď $g(x) > 0$ pro $x \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$, nebo je $g(x) < 0$ pro $x \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$. [Může být $\varepsilon_i = -\infty$ nebo $\xi_i = \infty$ pro některé i.]

V tomto odstavci budeme předpokládat, že je splněna ještě tato podmínka:

Pro každé $i \in \mathscr{K}$ a pro každé $\eta \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$ je

$$\int_{\varepsilon_i}^{\eta} \frac{dx}{|g(x)|} = \infty = \int_{\eta}^{\zeta_i} \frac{dx}{|g(x)|}\,. \tag{8.2}$$

Příklady: (i) Je-li $g(x) = \sin x$ pro $x \in R$, můžeme položit $(\varepsilon_i, \zeta_i) = ([i/2 - 1]\,\pi, i\pi/2)$ pro $i = 2, 4, 6, \ldots$, $(\varepsilon_i, \zeta_i) = (-\frac{1}{2}[i + 1]\,\pi, -\frac{1}{2}[i - 1]\,\pi)$ pro $i = 1, 3, 5, \ldots$, tedy $\mathscr{K} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Pro $i = 2j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, je $\varepsilon_i = (j - 1)\,\pi$, $\zeta_i = j\pi$ a pro každé $\sigma \in (0, \pi)$ je

$$\int_{(j-1)\pi}^{(j-1)\pi+\sigma} \frac{dx}{|\sin x|} = \int_0^{\sigma} \frac{dx}{\sin x} = \infty\,,$$

dále je

$$\int_{j\pi-\sigma}^{j\pi} \frac{dx}{|\sin x|} = \infty\,,$$

tedy podmínka (8.2) je splněna, je-li i sudé číslo. Obdobně se ověří, že podmínka (8.2) je splněna, je-li i liché číslo. Tedy (8.2) platí pro všechna $i \in \mathscr{K}$.

(ii) Je-li $g(x) = x(1 + x^2)^{-1}$ pro $x \in R$, můžeme položit $(\varepsilon_1, \zeta_1) = (-\infty, 0)$, $(\varepsilon_2, \zeta_2) = (0, \infty)$. Je $g(x) \sim x$ pro $x \to 0$ [tj. $g(x)/x \to 1$ pro $x \to 0$ $(x \neq 0)$], $g(x) \sim 1/x$ pro $x \to \infty$ i pro $x \to -\infty$ [tj. $g(x)/x^{-1} \to 1$ pro $x \to \infty$ i pro $x \to -\infty$]. Odtud snadno ověříme, že podmínka (8.2) je splněna.

(iii) Podmínka (8.2) je splněna, je-li $\alpha \neq 0$, $g(x) = \alpha x$ pro $x \in R$ nebo je-li $g(x) = \alpha|x|$ pro $x \in R$.

Podmínka (8.2) však není splněna, je-li $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, $g(x) = |x|^\beta$ pro $x \in R$. Je-li $\beta > 1$, je

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{\beta - 1}\,,$$

je-li $0 < \beta < 1$, je

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = 1 - \beta\,.$$

(iv) Podmínka (8.2) je splněna, je-li $g(x) = x|\lg |x||^\alpha$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$ a je-li $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Je-li však $\alpha > 1$, pak podmínka (8.2) není splněna.

Nechť $s \in (\gamma, \delta)$, $y \in U$. Hledejme maximální řešení u rovnice (8.1), které splňuje počáteční podmínku $u(s) = y$.

Najdeme takové $i \in \mathscr{K}$, že je $y \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$. Nechť G_i je funkce primitivní k funkci $1/g$ na intervalu (ε_i, ζ_i). Funkce G_i je spojitá a ryze monotónní [tj. rostoucí v případě, že je $g(x) > 0$ pro $x \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$, klesající v případě, že je $g(x) < 0$ pro $x \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$] a z podmínky (8.2) plyne, že funkce G_i zobrazuje interval (ε_i, ζ_i) na R [tj. ke každému $q \in R$ existuje jediné $r \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$ takové, že je $G_i(r) = q$]. Proto rovnicí

$$G_i(u(t)) = G_i(y) + \int_s^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t \in (\gamma, \delta), \tag{8.3}$$

je (jednoznačně) definována funkce $u\colon (\gamma, \delta) \to (\varepsilon_i, \zeta_i)$. Funkce G_i má derivaci $1/g$ a také pravá strana rovnice (8.3) má derivaci podle proměnné t pro každé $t \in (\gamma, \delta)$. Podle věty o implicitních funkcích má funkce u derivaci v každém t a platí

$$\frac{1}{g(u(t))}\,\dot{u}(t) = \varphi(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\gamma, \delta)\,. \tag{8.4}$$

Proto u splňuje v každém bodě $t \in (\gamma, \delta)$ rovnici (8.1), a protože funkce g a φ jsou spojité, je také funkce $\dot{u}$ spojitá. u je tedy řešení rovnice (8.1), a to řešení maximální.

Z (8.3) plyne $u(s) = y$. Dokázali jsme, že

$u\colon (\gamma, \delta) \to (\varepsilon_i, \zeta_i)$ *je maximální řešení rovnice* (8.1) *a je* $u(s) = y$. (8.5)

Ukážeme, že také platí tvrzení

Je-li $v\colon (\mu, \nu) \to (\alpha, \beta)$ *řešení rovnice* (8.1) $v(s) = y$, *potom* $v(t) = u(t)$ *pro* $t \in (\mu, \nu)$. (8.6)

(8.6) je tvrzení o jednoznačnosti; přímo z něho vyplývá, že platí

Funkce u definovaná rovnicí (8.3) *je jediné maximální řešení rovnice* (8.1) *splňující podmínku* $u(s) = y$ [*za předpokladu* $y \in U$]. (8.7)

Máme tedy dokázat, že platí tvrzení (8.6). Nechť je $y \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$. Nejdříve dokážeme, že je $v(t) = u(t)$ pro $t \in \langle s, \nu)$. V opačném případě by byla množina $\mathscr{T} = \{\tau \in \langle s, \nu) |\ v(\tau) \neq u(\tau)\}$ neprázdná. Položme $\sigma = \inf \mathscr{T}$. Je $u(t) = v(t)$ pro $s \leqq t < \sigma$, a protože funkce u a v jsou spojité, je $u(\sigma) = v(\sigma)$ a speciálně je $v(t) \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$ pro $s \leqq t \leqq \sigma$. Je $\sigma < \nu$, a protože v je spojitá funkce, existuje takové $\eta \in (\sigma, \nu)$, že platí $v(t) \in (\varepsilon_i, \zeta_i)$ pro $s \leqq t < \eta$. Je tedy definována funkce $G_i(v(t))$ pro $t \in \langle s, \eta)$ a tato funkce má spojitou derivaci. Protože v je řešení rovnice (8.1), platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,G_i(v(t)) = \frac{1}{g(v(t))}\,\dot{v}(t) = \varphi(t)$$

pro $t \in \langle s, \eta)$. Odtud integrací dostaneme

$$G_i(v(t)) = y + \int_s^t \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \, .$$

Protože funkce G_i je ryze monotónní, je $u(t) = v(t)$ pro $t \in \langle s, \eta)$ a to odporuje definici čísla σ; musí tedy platit $v(t) = u(t)$ pro $t \in \langle s, \nu)$. Obdobně se dokáže, že je $v(t) = u(t)$ pro $t \in (\mu, s\rangle$. Tvrzení (8.6) platí.

Nechť $(\alpha, \beta) - U \neq \emptyset$; zvolme $q \in (\alpha, \beta) - U$, $r \in (\gamma, \delta)$ a hledejme řešení w rovnice (8.1) splňující podmínku $w(r) = q$. Protože je $g(q) = 0$, můžeme položit

$$w(t) = q \quad \text{pro} \quad t \in (\gamma, \delta) \, . \tag{8.8}$$

Zřejmě je w maximální řešení rovnice (8.1), $w(r) = q$. Vzniká otázka, zda mohou existovat jiná taková řešení. Nechť v: $(\mu, \nu) \to (\alpha, \beta)$ je řešení rovnice (8.1), $v(r) = q$. Pak je $v(t) \in (\alpha, \beta) - U$ pro $t \in (\mu, \nu)$; kdyby totiž pro nějaké $s \in (\mu, \nu)$ bylo $v(s) \in U$, položili bychom $y = v(s)$ a podle tvrzení (8.6) by bylo $v(t) = u(t) \in (\varepsilon_i, \zeta_i) \subset U$ pro $t \in (\mu, \nu)$, tedy i pro $t = r$ a to není možné. Proto je $\dot{v}(t) = g(v(t)) = 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$, $v(t) = v(r) = q$ pro $t \in (\mu, \nu)$. Dospěli jsme k závěru:

Funkce w definovaná v (8.8) *je jediné maximální řešení rovnice* (1.1), *které splňuje podmínku $w(r) = q$* [*za předpokladu $q \in (\alpha, \beta) - U$*]. (8.9)

V tvrzeních (8.7) a (8.9) jsou popsána všechna maximální řešení rovnice (8.1).

2.9. Hledejme maximální řešení u rovnice

$$\dot{x} = 1 + |x| \tag{9.1}$$

splňující podmínku $u(1) = -2$.

Rovnice (9.1) je speciální případ rovnice (8.1) [je $\varphi(t) = 1$ pro $t \in (-\infty, \infty)$]. Proto jsou maximální řešení definována na R. Protože pravá strana rovnice (9.1) je vždy kladná, je každé řešení rostoucí funkce.

Primitivní funkci G k funkci $1/(1 + |x|)$ můžeme definovat

$$G(x) = \begin{cases} \ln(1 + x) & \text{pro} \quad x \geqq 0 \, , \\ -\ln(1 - x) & \text{pro} \quad x \leqq 0 \, . \end{cases}$$

Řešení u najdeme podle vzorce (8.3); musíme ovšem dát pozor, pro která t je $u(t) \leqq 0$ a pro která t je $u(t) \geqq 0$, a podle toho dosadit za $G(u(t))$.

Je $u(t) \leqq 0$ pro všechna $t \leqq 1$ a pro některá $t \geqq 1$. Pro taková t je

$$-\ln[1 - u(t)] = -\ln 3 + t - 1 \, ,$$

$$u(t) = 1 - 3\,\mathrm{e}^{1-t} \, . \tag{9.2}$$

Vzorce (9.2) platí, pokud $u(t) \leqq 0$, tj. pro $t \leqq 1 + \ln 3$. Je $u(1 + \ln 3) = 0$ a pro

$t \geqq 1 + \ln 3$ vzorec (8.3) dává (užijeme ho pro $s = 1 + \ln 3$, $y = 0$)

$$\ln[1 + u(t)] = t - 1 - \ln 3\,,$$
$$u(t) = \tfrac{1}{3}e^{t-1} - 1 \quad (t \geqq 1 + \ln 3)\,. \tag{9.3}$$

Hledané řešení u je v příslušných intervalech určeno vzorci (9.2) a (9.3).

2.10. Nechť funkce $g: (\alpha, \beta) \to R$ je spojitá, $g(x) \neq 0$ pro $x \in (\alpha, \beta)$. Nechť G je primitivní funkce k funkci $1/g$. Funkce G je ryze monotónní a zobrazuje interval (α, β) na nějaký interval, který označíme (ψ, ω). Nechť $s \in R$, $y \in (\alpha, \beta)$ a hledejme řešení u autonomní rovnice

$$\dot{x} = g(x)\,, \tag{10.1}$$

které splňuje podmínku $u(s) = y$. Obdobně jako v odst. 2.8 definujme funkci u rovnicí

$$G(u(t)) = G(y) + t - s\,. \tag{10.2}$$

Zde ovšem musíme volit t tak, aby bylo

$$G(y) + t - s \in (\psi, \omega)\,, \quad \text{tj.} \quad t \in (\psi + s - G(y),\ \omega + s - G(y))\,.$$

Podle věty o implicitních funkcích má u všude derivaci; platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(u(t)) = \frac{1}{g(u(t))}\,\dot{u}(t) = 1\,,$$

tedy je splněna rovnice (10.1) a funkce $\dot{u}$ je spojitá, protože u je spojitá funkce a platí (10.1). Zřejmě je $u(s) = y$.

Je-li funkce g na intervalu (α, β) kladná, pak je funkce G rostoucí a také u je rostoucí funkce a platí

$$u(t) \to \beta \quad \text{pro} \quad t \to [\omega + s - G(y)]\,-\,,$$
$$u(t) \to \alpha \quad \text{pro} \quad t \to [\psi + s - G(y)]\,+\,. \tag{10.3}$$

Je-li funkce g na intervalu (α, β) záporná, pak G i u jsou klesající funkce a platí

$$u(t) \to \alpha \quad \text{pro} \quad t \to [\omega + s - G(y)]\,-\,,$$
$$u(t) \to \beta \quad \text{pro} \quad t \to [\psi + s - G(y)]\,+\,. \tag{10.4}$$

Odtud odvodíme, že řešení u je maximální. Kdyby totiž řešení u mělo prodloužení w, bylo by

$$u(t) = w(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\psi + s - G(y),\ \omega + s - G(y))$$

a funkce w by byla definovaná a spojitá v bodě τ, kde $\tau = \psi + s - G(y)$ nebo $\tau = \omega + s - G(y)$. Podle vztahů (10.3) nebo (10.4) by bylo $w(\tau) = \alpha$ nebo $w(\tau) = \beta$, tedy by bylo $w(\tau) \notin (\alpha, \beta)$; současně má být $w(\tau) \in (\alpha, \beta)$ (neboť w je řešení). Proto u

je maximální řešení. Platí tvrzení o jednoznačnosti:

Jeli $v\colon (\mu, \nu) \to R$ řešení rovnice (10.1), $v(s) = y$, pak je $v(t) = u(t)$ pro $t \in (\mu, \nu)$. (10.5)

To plyne z rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(v(t)) = \frac{1}{g(v(t))} \dot{v}(t) = 1\,,$$

tedy $G(v(t)) - G(y) = t - s$.

Z tvrzení (10.5) zejména plyne, že u je jediné maximální řešení rovnice (10.1), pro které je $u(s) = y$.

Příklady: (i) Řešení u rovnice

$$\dot{x} = 5 + 2x + x^2$$

splňující podmínku $x(s) = y$ je dáno vzorcem

$$u(t) = -1 + 2\,\mathrm{tg}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y+1}{2} + 2(t - s)\right]$$

pro

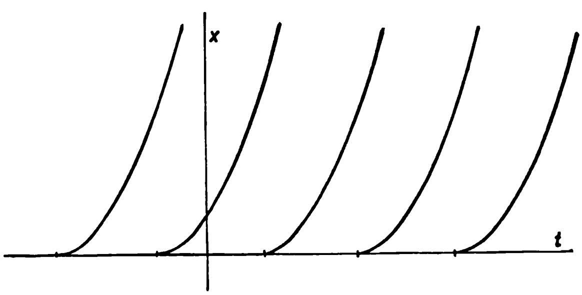
$$t \in \left(-\frac{\pi}{4} + s - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+1}{2}\,,\ \frac{\pi}{4} + s - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+1}{2}\right).$$

(ii) Nechť je $0 < \varrho < 1$,

$$g(x) = (1 - \varrho)^{-1}\, x^{\varrho} \quad \text{pro} \quad x > 0\,.$$

Řešení u rovnice

$$\dot{x} = g(x) \tag{10.6}$$



Obr. 13

splňující podmínku $u(s) = y$ $(s \in R,\ y > 0)$ je dáno vzorcem

$$u(t) = (t - s + y^{1-\varrho})^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t > s - y^{1-\varrho} \tag{10.7}$$

viz obr. 13).

(iii) Nechť je $0 < \varrho < 1$,

$$g(x) = (1 - \varrho)^{-1} |x|^\varrho \quad \text{pro} \quad x < 0 .$$

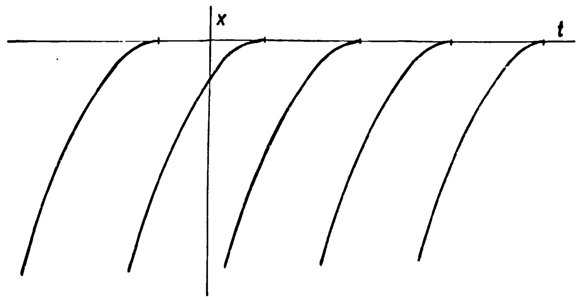
Řešení u rovnice

$$\dot{x} = g(x) \tag{10.8}$$

splňující podmínku $u(s) = y$ $(s \in R,\ y < 0)$ je dáno vzorcem

$$u(t) = -(-t + s + |y|^{1-\varrho})^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t < s + |y|^{1-\varrho} \tag{10.9}$$

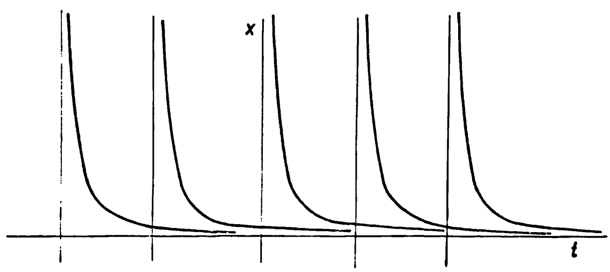
(viz obr. 14).



Obr. 14

(iv) Nechť je $\varrho > 1$,

$$g(x) = \frac{1}{1 - \varrho} x^\varrho \quad \text{pro} \quad x > 0 .$$



Obr. 15

Řešení u rovnice

$$\dot{x} = g(x)$$

splňující podmínku $u(s) = y$ $(s \in R,\ y > 0)$ je dáno vzorcem

$$u(t) = (t - s + y^{-(\varrho-1)})^{-1/(\varrho-1)} \quad \text{pro} \quad t > s - y^{-(\varrho-1)}$$

(viz obr. 15).

2.11. Nechť je $0 < \varrho < 1$,

$$g(x) = \frac{1}{1-\varrho}|x|^{\varrho} \quad \text{pro} \quad x \in R,\ x \neq 0,\ g(0) = 0\,.$$

Je $g(x) \geqq 0$ pro $x \in R$, a proto každé řešení rovnice

$$\dot{x} = g(x) \tag{11.1}$$

je neklesající. Rovnice (11.1) není speciálním případem rovnice (8.1), neboť nejsou splněny podmínky (8.2)

$$\left[\text{je} \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{|g(x)|} < \infty\,, \quad \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{|g(x)|} < \infty\right].$$

Pomocí toho, že známe maximální řešení rovnic z příkladů 2.10(ii), 2.10(iii), sestrojíme tato řešení rovnice (11.1):

$$u(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R\,, \tag{11.2}$$

zvolíme $d \in R$ a položíme $u(t) = 0$ pro $t \leqq d$,

$$u(t) = (t-d)^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t \geqq d\,, \tag{11.3}$$

zvolíme $c \in R$ a položíme

$$\begin{aligned} u(t) &= -(c-t)^{1/(1-\varrho)} && \text{pro} \quad t < c\,,\\ u(t) &= 0 && \text{pro} \quad t \geqq c\,, \end{aligned} \tag{11.4}$$

zvolíme $c, d \in R$, $c \leqq d$ a položíme

$$\begin{aligned} u(t) &= -(c-t)^{1/(1-\varrho)} && \text{pro} \quad t < c\,,\\ u(t) &= 0 && \text{pro} \quad c \leqq t \leqq d\,,\\ u(t) &= (t-d)^{1/(1-\varrho)} && \text{pro} \quad t > d\,. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Ve všech případech je $u\colon R \to R$, a tedy jde o maximální řešení. Ukážeme, že platí toto tvrzení:

Je-li $v\colon (\mu, \nu) \to R$ řešení rovnice (11.1), pak existuje řešení u, popsané některým ze vzorců (11.2) až (11.5) takové, že je

$$v(t) = u(t) \quad \textit{pro} \quad t \in (\mu, \nu)\,. \tag{11.6}$$

Nechť $v\colon (\mu, \nu) \to R$ je řešení rovnice (11.1). Je-li $v(t) = 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$, vezmeme za u řešení definované v (11.2). Je-li $v(t) > 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$, potom v je řešení rovnice (10.6) a podle tvrzení (10.5) a vzorce (10.7) je

$$v(t) = [t - s + v(s)^{1-\varrho}]^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t \in (\mu, \nu)$$

a pro libovolně pevně zvolené $s \in (\mu, \nu)$ najdeme u ve tvaru (11.3)

$$[d = s - v(s)^{1-\varrho}]\,.$$

Nechť je $v(t) \geqq 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$ a nechť existují $s_1, s_2 \in (\mu, \nu)$, $v(s_1) = 0$, $v(s_2) > 0$. Protože v je neklesající funkce, je $s_1 < s_2$ a existuje takové číslo $\eta \in (\mu, \nu)$, že je $v(t) = 0$ pro $\mu < t \leqq \eta$, $v(t) > 0$ pro $t \in (\eta, \nu)$. Jako v předcházejícím případě je

$$v(t) = [t - s + v(s)^{1-\varrho}]^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t \in (\eta, \nu)$$

při libovolně zvoleném $s \in (\eta, \nu)$, a protože v je spojitá, musí být $\eta = s - v(s)^{1-\varrho}$; opět jsme našli u ve tvaru (11.3) $(d = \eta)$. Případy $v(t) < 0$ a $v(t) \leqq 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$ se vyšetří obdobně.

Nechť existují $s_1, s_2 \in (\mu, \nu)$, $v(s_1) < 0$, $v(s_2) > 0$. v je neklesající. Proto je $s_1 < s_2$ a existují taková čísla $\eta_1, \eta_2 \in (\mu, \nu)$, že je $v(t) < 0$ pro $\mu < t < \eta_1$, $v(t) = 0$ pro $\eta_1 \leqq t \leqq \eta_2$ a $v(t) > 0$ pro $\eta_2 < t < \nu$. Podle tvrzení (10.5) a vzorců (10.7), (10.9) je

$$v(t) = -[-t + s_1 + |v(s_1)|^{1-\varrho}]^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t \in (\mu, \eta_1)\,,$$
$$v(t) = [t - s_2 + v(s_2)^{1-\varrho}]^{1/(1-\varrho)} \quad \text{pro} \quad t \in (\eta_2, \nu)\,.$$

Ze spojitosti funkce v plyne $s_1 + |v(s_1)|^{1-\varrho} = \eta_1$, $s_2 - v(s_2)^{1-\varrho} = \eta_2$. Tedy jsme našli u ve tvaru (11.5) $(c = \eta_1,\ d = \eta_2)$. Tvrzení (11.6) je dokázáno.

Z tvrzení (11.6) zejména plyne, že ve vzorcích (11.2) až (11.5) jsou popsána všechna maximální řešení rovnice (11.1).

2.11.1. Poznámka: Podobným způsobem se chovají řešení rovnice $\dot{x} = g(x)$, jestliže $g: R \to R$ je spojitá funkce, $g(x) < 0$ pro $x < 0$, $g(x) > 0$ pro $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{|g(x)|} = \infty = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{g(x)}, \quad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty\,, \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{g(x)} < \infty\,.$$

2.12. Nechť g má stejný význam jako v odst. 2.11. Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x} = g(x) \sin t\,. \tag{12.1}$$

Jedno z jejích řešení je dáno vzorcem

$$u(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R\,. \tag{12.2}$$

Snadno se lze přesvědčit, že pro $\eta > 1$ $(t \in R)$ vzorec

$$u(t) = (-\cos t + \eta)^{1/(1-\varrho)} \tag{12.3}$$

dává řešení rovnice (12.1) a pro $\eta < -1$ vzorec

$$u(t) = -(-\cos t - \eta)^{1/(1-\varrho)} \tag{12.4}$$

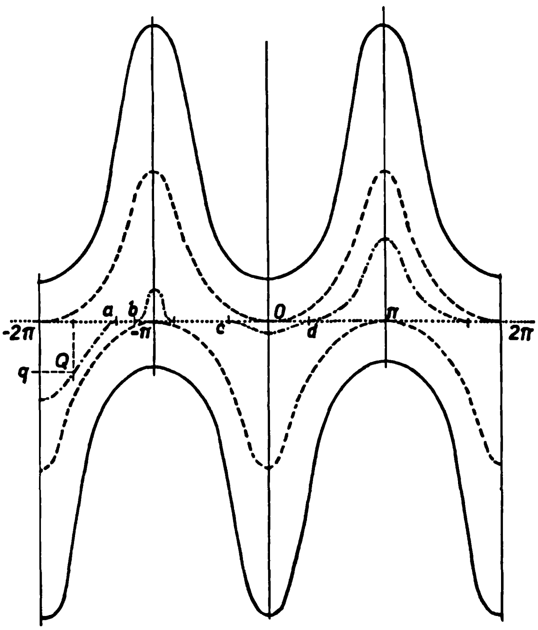
dává řešení rovnice (12.1). Popíšeme řešení, která nabývají hodnoty 0. Zvolme oboustrannou posloupnost čísel σ_i tak, aby bylo

$$0 \leqq \sigma_i\,, \quad \sigma_i + \sigma_{i+1} \leqq \pi \quad \text{pro} \quad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\,.$$

Definujme funkci v předpisem

$$\begin{aligned}
&v(t) = 0 \quad \text{pro} \quad i\pi + \sigma_i \leqq t \leqq (i+1)\pi - \sigma_{i+1}\,, \\
&v(t) = [-\cos t + \cos(i\pi - \sigma_i)]^{1/(1-\varrho)}\,, \\
&\text{je-li } i \text{ liché, } i\pi - \sigma_i < t < i\pi + \sigma_i\,, \\
&v(t) = -[\cos t - \cos(i\pi - \sigma_i)]^{1/(1-\varrho)}\,, \\
&\text{je-li } i \text{ sudé, } i\pi - \sigma_i < t < i\pi + \sigma_i\,.
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Situace je znázorněna na obr. 16.



Obr. 16

Na obr. 16 je tečkovaně naznačen graf řešení (12.2), plnými čarami jsou naznačeny grafy řešení tvaru (12.3) a (12.4). Čárkovaně jsou naznačena dvě řešení tvaru (12.5); horní vznikne volbou $\sigma_i = \pi$ pro i liché, $\sigma_i = 0$ pro i sudé, dolní vznikne volbou $\sigma_i = 0$ pro i liché, $\sigma_i = \pi$ pro i sudé. Protože čísla σ_i můžeme volit libovolně, dochází k takovémuto jevu: Nechť řešení v v bodě s má hodnotu q, $-2\pi < s < -\pi$, $-1 < q < 0$ (tj. jeho graf prochází bodem Q). Potom až do okamžiku a leží bod $(t, v(t))$ na čerchované čáře procházející bodem Q. Dále řešení v pokračuje s hodnotou 0 do okamžiku b (je $b \geqq a$), kdy může dále sledovat čerchovanou křivku nebo pokračovat s hodnotou 0 až do bodu $-\pi$; od okamžiku $-\pi$ může pokračovat po čárkované křivce nebo opět po ose X s hodnotou 0. Obdobné jevy mohou nastat např. v okamžicích c, 0, d.

Řešení popsaná vzorci (12.2) až (12.5) jsou všechna maximální řešení rovnice (12.1); to však nebudeme dokazovat.

2.13. V tomto odstavci nezavádíme žádné speciální předpoklady o funkci g; věta, kterou dokážeme, platí pro všechny autonomní diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou.

Nechť funkce $g\colon (\alpha, \beta) \to R$ je spojitá.

2.13.1. Věta: *Nechť $v\colon (\mu, \nu) \to (\alpha, \beta)$ je řešení rovnice*

$$\dot{x} = g(x)\,. \tag{13.1}$$

Potom buď je $\dot{v}(t) \geqq 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$, nebo je $\dot{v}(t) \leqq 0$ pro $t \in (\mu, \nu)$ (v obou případech v je monotónní funkce).

Důkaz: Nechť existují čísla $t_1, t_2 \in (\mu, \nu)$, $t_1 < t_2$, tak, že $\dot{v}(t_1)\,\dot{v}(t_2) < 0$. Je $v(t_1) \neq v(t_2)$ [jinak by bylo $g(v(t_1)) = g(v(t_2))$, a tedy i $\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_2)$]. Vyšetříme případ $v(t_1) < v(t_2)$, $\dot{v}(t_1) < 0$, $\dot{v}(t_2) > 0$. Položme

$$T = \sup \{t \mid t \in \langle t_1, t_2 \rangle, v(t) = v(t_1)\}\,.$$

Protože funkce v je spojitá, je $v(T) = v(t_1)$, tedy $\dot{v}(T) = g(v(T)) = g(v(t_1)) < 0$. Proto je $v(t) < v(T) = v(t_1)$ pro taková $t > T$, která jsou dostatečně blízko k T, a ze spojitosti funkce v plyne, že existuje $s \in (T, t_2)$ tak, že $v(s) = v(t_1)$ a to odporuje volbě T.

Obdobně se zjistí, že ani žádný z ostatních případů není možný. Proto Věta 2.13.1 platí.

2.14. Nechť je $0 < \varrho < 1$,

$$g(x) = (1 - \varrho)^{-1}\, x^{\varrho} \quad \text{pro} \quad x \geqq 0\,, \quad g(x) = -(1 - \varrho)^{-1}\, (-x)^{\varrho} \quad \text{pro} \quad x < 0\,.$$

Rovnice

$$\dot{x} = g(x) \tag{14.1}$$

má řešení určené vzorci

$$u(t) = 0 \qquad \text{pro} \quad t \in R\,, \tag{14.2}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 && \text{pro} \quad t \leqq c\,, \\ u(t) &= (t - c)^{1/(1-\varrho)} && \text{pro} \quad t > c \\ & && (c \in R \text{ můžeme volit libovolně})\,, \end{aligned} \tag{14.3}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 && \text{pro} \quad t \leqq c\,, \\ u(t) &= -(t - c)^{1/(1-\varrho)} && \text{pro} \quad t > c \\ & && (c \in R \text{ můžeme volit libovolně})\,. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Vzorce (14.2), (14.3) a (14.4) určují všechna maximální řešení; je-li $v\colon (\mu, \nu) \to R$

řešení rovnice (14.1), je $v(t) \geqq 0$ pro všechna $t \in (\mu, \nu)$ nebo je $v(t) \leqq 0$ pro všechna $t \in (\mu, \nu)$ [v opačném případě by existovala t_1, t_2 taková, že by bylo $v(t_1) > 0$, $v(t_2) < 0$, tedy $\dot{v}(t_1) > 0$, $\dot{v}(t_2) < 0$ a to by odporovalo Větě 2.13.1].

Dále můžeme postupovat stejným způsobem jako při důkazu obdobného tvrzení pro rovnici (11.1).

2.15. Mezi neautonomními soustavami řádu n a autonomními soustavami řádu $n + 1$ je úzká souvislost; popíšeme ji pro případ $n = 1$. Nechť $G \subset R^2$ je otevřená množina, $f: G \to R$. Platí

2.15.1. Věta: *Je-li U charakteristika rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y, x), \tag{15.1}$$

pak U je trajektorie soustavy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, x). \tag{15.2}$$

Je-li V trajektorie soustavy (15.2), *pak V je charakteristika rovnice* (15.1).

Důkaz: Nechť U je charakteristika rovnice (15.1). To znamená, že existuje interval $\mathscr{I}$ a funkce $u: \mathscr{I} \to R$ tak, že u má spojitou derivaci a platí

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) = f(u(x), x)$$

v každém bodě $x \in \mathscr{I}$, $U = \{(u(x), x) | x \in \mathscr{I}\}$. Položme $u_1(t) = u(t)$, $u_2(t) = t$ pro $t \in \mathscr{I}$. Je

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = f(u(t), t) = f(u_1(t), u_2(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}(t) = 1 \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I},$$

tj. u_1, u_2 je řešení soustavy (15.2); platí $U = \{(u_1(t), u_2(t)) | t \in \mathscr{I}\}$ a U je trajektorie soustavy (15.2).

Nechť V je trajektorie soustavy (15.2). To znamená, že existuje řešení v_1, v_2 soustavy (15.2) $v_1, v_2: \mathscr{I} \to R$ tak, že $V = \{(v_1(t), v_2(t)) | t \in \mathscr{I}\}$. Je

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) = 1;$$

zvolíme $\tau \in \mathscr{I}$ a odvodíme $v_2(t) - v_2(\tau) = t - \tau$, tj. $v_2(t) = t - c$, $c = \tau - v_2(\tau)$. Položme $\mathscr{I} = \{x | x = t - c, t \in \mathscr{I}\}$ a definujme $u: \mathscr{I} \to R$ vztahem $u(x) = v_1(x + c)$.

Je $v_2(x + c) = x + c - c = x$,

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{dv_1}{dt}(x + c) \,.\, 1 = f(v_1(x + c), v_2(x + c)) = f(u(x), x)$$

pro $x \in \mathscr{I}$ a $V = \{(u(x), x) | \, x \in \mathscr{I}\}$ a tak V je charakteristika rovnice (15.1).

2.15.2. Poznámka: Souvislost obdobná té, která platí mezi rovnicí (15.1) a soustavou (15.2), platí mezi soustavou

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(y_1, \ldots, y_n, x)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(y_1, \ldots, y_n, x) \end{aligned} \tag{15.3}$$

a soustavou

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, \ldots, y_n, x)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, \ldots, y_n, x)\,, \\ \frac{dx}{dt} &= 1\,. \end{aligned} \tag{15.4}$$

2.15.3. Poznámka: Věta 2.15.1 bude platit i v tom případě, jestliže pojmy „charakteristika" a „trajektorie" nahradíme pojmy „maximální charakteristika" a „maximální trajektorie"; rovnici (15.1) a soustavu (15.2) můžeme přitom nahradit soustavami (15.3) a (15.4).

2.16. Vyšetřujme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{16.1}$$

na množině $Q_1 = \{(x, y) \in R^2 | \, y \neq 0\}$. Zvolme $x_0, y_0 \in R$, $y_0 \neq 0$, a hledejme řešení y, pro něž je $y(x_0) = y_0$. Metodou separace proměnných (viz odst. 2.8) najdeme

$$y(x)\frac{dy}{dx}(x) = -x\,, \quad \tfrac{1}{2}y^2(x) - \tfrac{1}{2}y_0^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x_0^2\,,$$

$$y^2(x) = c^2 - x^2\,, \quad \text{kde} \quad c^2 = x_0^2 + y_0^2\,, \quad c > 0\,.$$

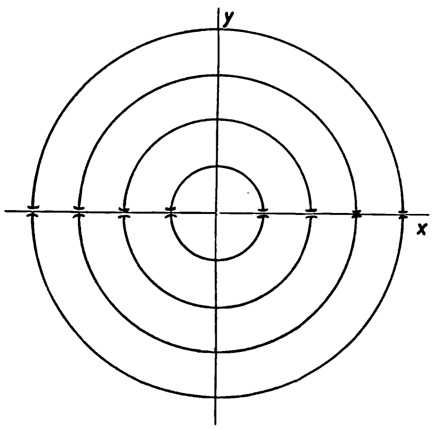
Je-li $y_0 > 0$, dostáváme

$$y(x) = \sqrt{(c^2 - x^2)} \quad \text{pro} \quad -c < x < c\,, \tag{16.2}$$

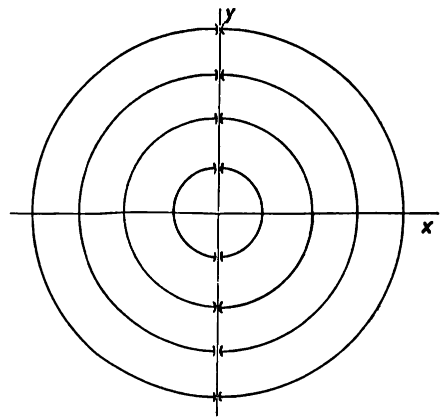
je-li $y_0 < 0$, dostáváme

$$y(x) = -\sqrt{(c^2 - x^2)} \quad \text{pro} \quad -c < x < c\,. \tag{16.3}$$

Vzorec (16.2) pro každé $c > 0$ dává charakteristiku rovnice (16.1); je to polokružnice se středem v počátku a poloměrem c, ležící v horní polorovině. Přitom je zřejmé, že jde o charakteristiky maximální [neboť musí platit $y(x) \neq 0$ pro každé x]. Obdobně vzorec (16.3) popisuje maximální charakteristiky rovnice (16.1); pro každé $c > 0$ jsou to polokružnice se středem v počátku a poloměrem c ležící v dolní polorovině (viz obr. 17).



Obr. 17



Obr. 18

Rovnici

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \tag{16.4}$$

můžeme vyšetřit na množině $Q_2 = \{(x, y) \in R^2 | \, x \neq 0\}$. Obdobným postupem najdeme řešení

$$x(y) = \sqrt{(c^2 - y^2)} \quad \text{pro} \quad -c < y < c\,, \quad c > 0\,, \tag{16.5}$$

$$x(y) = -\sqrt{(c^2 - y^2)} \quad \text{pro} \quad -c < y < c\,, \quad c > 0\,. \tag{16.6}$$

Grafy funkcí (16.5), (16.6) [jde o funkce proměnné y a grafem funkce (16.5) je množina $\{(x, y) \in R^2 | \; -c < y < c, \; x = \sqrt{(c^2 - y^2)}\}$] jsou maximální charakteristiky rovnice (16.4); jsou to polokružnice se středem v počátku a poloměrem c ležící buď v pravé, nebo v levé polorovině (viz obr. 18).

Tato situace vyvolává domněnku, že by mělo být možné vyšetřovat rovnice (16.1) a (16.4) současně a dosáhnout toho, aby za charakteristiky bylo možné považovat kružnice se středem v počátku a poloměrem c, $c > 0$.

Postup popíšeme pro obecný případ. Nechť množina $G \subset R^2$ je otevřená, $g, h: G \to R$. Položme

$$G_1 = \{(x, y) \in G |\ h(x, y) \neq 0\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in G |\ g(x, y) \neq 0\}.$$

Předpokládejme, že množiny G_1, G_2 jsou otevřené.

Na množině G_1 můžeme vyšetřovat rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}, \tag{16.7}$$

na množině G_2 můžeme vyšetřovat rovnici

$$\frac{dx}{dy} = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}. \tag{16.8}$$

Obě rovnice lze však současně vyšetřovat na množině

$$G_1 \cup G_2 = \{(x, y) \in R^2 |\ g^2(x, y) + h^2(x, y) > 0\}.$$

To, že vyšetřujeme obě rovnice současně, naznačíme symetrickým zápisem

$$h(x, y)\, dy - g(x, y)\, dx = 0 \tag{16.9}$$

[někdy se též užívá zápisu $dy/g(x, y) = dx/h(x, y)$].

Zaveďme tuto definici:

2.16.1. Definice: Množinu $L \subset G_1 \cup G_2$ budeme nazývat *charakteristikou rovnice* (16.9), existuje-li otevřený interval $\mathscr{I} \subset R$ a spojitě diferencovatelné funkce $l_1, l_2: \mathscr{I} \to R$ takové, že

(i) $\left[\frac{dl_1}{ds}(s)\right]^2 + \left[\frac{dl_2}{ds}(s)\right]^2 > 0$ pro $s \in \mathscr{I}$.

(ii) $L = \{(x, y) |\ x = l_1(s),\ y = l_2(s),\ s \in \mathscr{I}\}$.

(iii) Ke každému číslu $\sigma \in \mathscr{I}$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro množinu

$$L_\sigma = \{(x, y) |\ x = l_1(s),\ y = l_2(s),\ \sigma - \delta < s < \sigma + \delta\}$$

nastane (alespoň) jeden ze dvou případů:

(α) L_σ je grafem nějaké funkce $u: \mathscr{K} \to R$, přesněji

$$L_\sigma = \{(x, u(x)) |\ x \in \mathscr{K}\},$$

a přitom u je řešení rovnice (16.7).

(β) L_σ je grafem nějaké funkce $v: \mathscr{L} \to R$, přesněji

$$L_\sigma = \{(v(y), y) |\ y \in \mathscr{L}\},$$

a přitom v je řešení rovnice (16.8).

Příklad: Pro každé $c > 0$ je množina

$$M_c = \{(x, y) \in R^2 |\ x^2 + y^2 = c^2\}$$

charakteristikou rovnice

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{16.10}$$

V souvislosti s rovnicí (16.9) můžeme ještě vyšetřovat soustavu

$$\dot{x} = h(x, y),$$
$$\dot{y} = g(x, y). \tag{16.11}$$

Soustavu (16.11) vyšetřujeme ovšem na množině G. O vztahu rovnice (16.9) a soustavy (16.11) platí

2.16.2. Věta: *Nechť U je trajektorie soustavy* (16.11) *a nechť platí $U \subset G_1 \cup G_2$. Pak U je charakteristika rovnice* (16.9).

Nechť L je charakteristika rovnice (16.9). *Pak L je současně trajektorie soustavy* (16.11).

Důkaz: Nechť U je trajektorie soustavy (16.11), $U \subset G_1 \cup G_2$. To znamená, že existuje řešení u_1, u_2 soustavy (16.11), u_1, u_2: $\mathscr{I} \to R$ a platí

$$U = \{(u_1(t), u_2(t)) |\ t \in \mathscr{I}\}.$$

Funkce u_1, u_2 mají spojité derivace a platí

$$[\dot{u}_1(t)]^2 + [\dot{u}_2(t)]^2 = h^2(u_1(t), u_2(t)) + g^2(u_1(t), u_2(t)) > 0,$$

neboť $U \subset G_1 + G_2$. Zvolme $\sigma \in \mathscr{I}$ a nechť je pro určitost $(u_1(\sigma), u_2(\sigma)) \in G_1$. Najděme $\delta > 0$ takové, že je $(u_1(t), u_2(t)) \in G_1$ pro $\sigma - \delta < t < \sigma + \delta$. Položme

$$U_\sigma = \{(u_1(t), u_2(t)) |\ t \in (\sigma - \delta, \sigma + \delta)\}.$$

Podle Věty 1.10.1 je U_σ současně trajektorií soustavy

$$\dot{x} = 1,$$
$$\dot{y} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \tag{16.12}$$

a podle Věty 2.15.1 je U_σ charakteristikou rovnice (16.7). To však znamená, že funkce u_1, u_2 splňují všechny podmínky, které Definice 2.16.1 klade na funkce l_1, l_2.

Nechť L je charakteristika rovnice (16.9) a nechť funkce l_1, l_2 mají vlastnosti popsané v Definici 2.16.1. Ukážeme nejdřív, že platí

$$\frac{dl_1}{ds}(\sigma) = h(l_1(\sigma), l_2(\sigma))\,\varrho(\sigma),$$

$$\frac{dl_2}{ds}(\sigma) = g(l_1(\sigma), l_2(\sigma))\,\varrho(\sigma),$$

$$\varrho(\sigma) = \left(\left[\frac{dl_1}{ds}(\sigma)\right]^2 + \left[\frac{dl_2}{ds}(\sigma)\right]^2\right)^{1/2} [h^2(l_1(\sigma), l_2(\sigma)) +$$

$$+ g^2(l_1(\sigma), l_2(\sigma))]^{-1/2} \tag{16.13}$$

pro $\sigma \in \mathscr{J}$. Zvolme $\sigma \in \mathscr{J}$. Nechť pro určitost je $(l_1(\sigma), l_2(\sigma)) \in G_1$. Nechť $\delta > 0$ a L_σ mají význam popsaný v Definici 2.16.1 a nechť nastane např. případ (α) [nastane-li případ (β), budeme postupovat obdobně].

Existuje funkce $u: (\alpha, \beta) \to R$ taková, že platí $L_\sigma = \{(x, u(x)) | \alpha < x < \beta\}$ a že u má spojitou derivaci; je tedy $l_2(s) = u(l_1(s))$, a proto musí být

$$\frac{dl_1}{ds}(\sigma) \neq 0$$

[jinak by bylo i

$$\frac{dl_2}{ds}(\sigma) = \frac{du}{dx}(l_1(\sigma))\frac{dl_1}{ds}(\sigma) = 0].$$

Je

$$\frac{dl_2}{ds}(\sigma)\Big/\frac{dl_1}{ds}(\sigma) = \frac{du}{dx}(l_1(\sigma)) =$$

$$= g(l_1(\sigma), l_2(\sigma))/h(l_1(\sigma), l_2(\sigma)).$$

To znamená, že existuje $\varrho(\sigma)$ takové, že platí první dvě z rovnic (16.13); z těchto dvou rovnic plyne, že platí i třetí.

Je $\varrho(\sigma) > 0$ pro $\sigma \in \mathscr{J}$ a ϱ je spojitá. Podle odst. 2.10 existuje otevřený interval $\mathscr{I}$ a řešení ϑ rovnice

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{\varrho(\vartheta)},$$

$\vartheta: \mathscr{I} \to R$, takové, že zobrazuje interval $\mathscr{I}$ na interval $\mathscr{J}$ [v odst. 2.10 klademe $(\alpha, \beta) = \mathscr{J}$, $g = 1/\varrho$, $u = \vartheta$, $\mathscr{I} = (\psi + s - G(y), \omega + s - G(y))$]. Položme $u_1(t) = l_1(\vartheta(t))$, $u_2(t) = l_2(\vartheta(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$. u_1, u_2 je řešení soustavy (16.11) a je $L = \{(u_1(t), u_2(t)) | t \in \mathscr{I}\}$. Věta 2.16.2 je dokázána.

2.16.3. Poznámka: Množinu $M \subset G_1 \cup G_2$ nazveme *maximální charakteristikou rovnice* (16.9), jestliže M je charakteristika rovnice (16.9) a jestliže platí toto tvrzení: Je-li L charakteristika rovnice (16.9), $L \supset M$, potom $L = M$. Větu 2.16.2 můžeme modifikovat tímto způsobem:

Vyšetřujeme-li soustavu (16.11) *na množině* $G_1 \cup G_2$, *potom každá maximální trajektorie soustavy* (16.11) *je maximální charakteristikou rovnice* (16.9) *a naopak.*

Tuto modifikaci Věty 2.16.2 lze dokázat vhodným rozšířením důkazu Věty 2.16.2; dokazovat modifikaci Věty 2.16.2 však nebudeme.

2.17. Příklad: Vyšetřujme rovnici

$$x(1 - y^2)^2 \, dx + y(1 - x^2)^2 \, dy = 0 \tag{17.1}$$

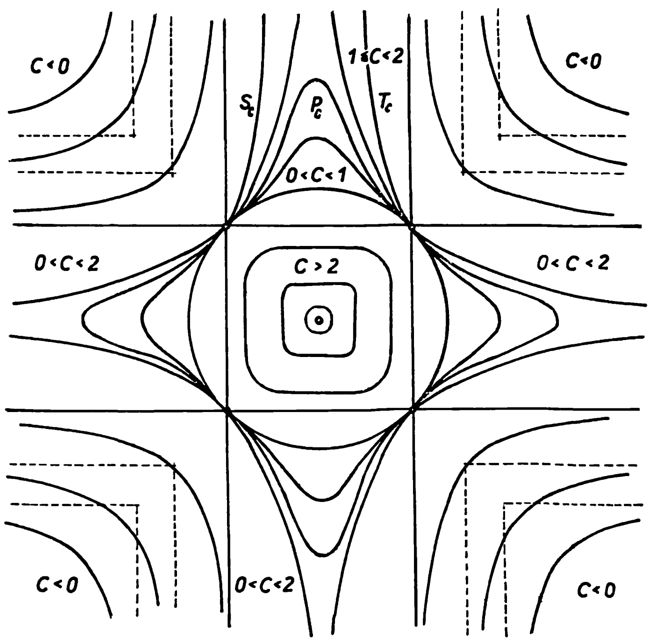
na množině

$$H = R^2 - \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\} .$$

Položme $\mathscr{I}_1 = (-\infty, -1)$, $\mathscr{I}_2 = (-1, 1)$, $\mathscr{I}_3 = (1, \infty)$. Podle Definice 2.16 ověříme, že množiny

$$\begin{array}{lll} \{(x, 1) \mid x \in \mathscr{I}_1\}, & \{(x, 1) \mid x \in \mathscr{I}_2\}, & \{(x, 1) \mid x \in \mathscr{I}_3\}, \\ \{(x, -1) \mid x \in \mathscr{I}_1\}, & \{(x, -1) \mid x \in \mathscr{I}_2\}, & \{(x, -1) \mid x \in \mathscr{I}_3\}, \\ \{(1, y) \mid y \in \mathscr{I}_1\}, & \{(1, y) \mid y \in \mathscr{I}_2\}, & \{(1, y) \mid y \in \mathscr{I}_3\}, \\ \{(-1, y) \mid y \in \mathscr{I}_1\}, & \{(-1, y) \mid y \in \mathscr{I}_2\}, & \{(-1, y) \mid y \in \mathscr{I}_3\} \end{array} \tag{17.2}$$

jsou charakteristiky rovnice (17.1) [množiny (17.2) jsou maximální charakteristiky rovnice (17.1), viz Poznámku 2.16.3].



Obr. 19

Hledejme řešení rovnice (17.1) na každé z množin $\mathscr{I}_i \times \mathscr{I}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, $(i, j) \neq (2, 2)$, zvlášť a dále na množině $\mathscr{I}_2 \times \mathscr{I}_2 - \{(0, 0)\}$, viz obr. 19. Na množině $\mathscr{I}_3 \times \mathscr{I}_3$ jsou obě funkce $x(1 - y^2)$ i $y(1 - x^2)$ záporné; je-li $x_0, y_0 > 1$, pak pro řešení y rovnice

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1-y^2)^2}{y(1-x^2)^2} \tag{17.3}$$

splňující podmínku $u(x) = y_0$ odvodíme metodou separace proměnných

$$\frac{1}{1-y^2(x)} + \frac{1}{1-x^2} = C, \tag{17.4}$$

kde

$$C = \frac{1}{1-y_0^2} + \frac{1}{1-x_0^2} < 0.$$

Rovnicí (17.4) je definována funkce u: $([1 - 1/C]^{1/2}, \infty) \to R$, která je řešením rovnice (17.1); u je klesající a je $u(x) \to \infty$ pro $x \to (1 - 1/C)^{1/2}+$, $u(x) \to$ $\to (1 - 1/C)^{1/2}$ pro $x \to \infty$. Graf funkce u je charakteristika (dokonce maximální charakteristika) rovnice (17.1) pro každé $C < 0$. Obdobně se chovají řešení rovnice (17.1), vyšetřujeme-li ji na množinách $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_3$, $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_3 \times \mathcal{I}_1$.

Nechť je $(x_0, y_0) \in \mathcal{I}_2 \times \mathcal{I}_2 - \{(0, 0)\}$. V případě, že je $y_0 \neq 0$, hledáme řešení y rovnice (17.3) jako funkci proměnné x, $y(x_0) = y_0$, a metodou separace proměnných dostáváme

$$\frac{1}{1-y^2(x)} + \frac{1}{1-x^2} = C, \tag{17.5}$$

kde

$$C = \frac{1}{1-y_0^2} + \frac{1}{1-x_0^2};$$

v případě, že je $x_0 \neq 0$, hledáme řešení x jako funkci proměnné y rovnice

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y(1-x^2)^2}{x(1-y^2)^2},$$

$x(y_0) = x_0$. Separací proměnných dostáváme

$$\frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-x^2(y)} = C,$$

kde je opět

$$C = \frac{1}{1-y_0^2} + \frac{1}{1-x_0^2}.$$

Snadno se ověří, že pro každé $C > 2$ množina

$$Q_C = \left\{(x, y) \in \mathcal{I}_2 \times \mathcal{I}_2 \,\middle|\, \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-x^2} = C\right\}$$

je charakteristika rovnice (17.1) [množina Q_C je tzv. *jednoduchá křivka*, viz obr. 19, a je maximální charakteristikou rovnice (17.1)].

Na množině $\mathscr{I}_2 \times \mathscr{I}_3$ řešíme rovnici (17.3) a pro řešení y, které je funkcí proměnné x, s podmínkou $y(x_0) = x_0$, dostáváme metodou separace proměnných opět (17.4), kde

$$C = \frac{1}{1 - y_0^2} + \frac{1}{1 - x_0^2} \in R .$$

Je-li $C < 1$, pak ke každému $x \in \mathscr{I}_2$ existuje jediné $y_C(x) \in \mathscr{I}_3$ tak, že platí (17.4); je-li $x \in \mathscr{I}_2$, $C \geqq 1$, pak číslo $y_C(x) \in \mathscr{I}_3$ takové, aby platilo (17.4), existuje pouze pro $-1 < x < -(1 - 1/C)^{1/2}$ a pro $(1 - 1/C)^{1/2} < x < 1$; je v obou případech určeno jednoznačně. Položme

$$P_C = \{(x, y_C(x)) | \, x \in \mathscr{I}_2\} \quad \text{pro} \quad C < 1 ,$$

$$S_C = \{(x, y_C(x)) | \, -1 < x < -(1 - 1/C)^{1/2}\}$$

a

$$T_C = \{(x, y_C(x)) | \, (1 - 1/C)^{1/2} < x < 1\} \quad \text{pro} \quad C \geqq 1 .$$

Množiny P_C, S_C, T_C jsou charakteristiky (dokonce maximální charakteristiky) rovnice (17.1). Zjistěme ještě chování funkce y_C a její derivace pro $x \to 1-$. Z rovnice (17.4) okamžitě plyne, že $y_C(x) \to 1$ pro $x \to 1-$.

Zaveďme funkci η_C vztahy $\eta_C(\xi) = y_C(x) - 1$, $x = 1 - \xi$ pro $\xi > 0$; je $\eta_C(\xi) \to 0$ pro $\xi \to 0+$. Dosazením do (17.4) a snadnou úpravou dostaneme

$$\frac{\eta_C(\xi)}{\xi} = \frac{2 - \xi}{2 + \eta_C(\xi)} - C\,\eta_C(\xi)\,(2 - \xi) ,$$

tedy $\eta_C(\xi)/\xi \to 1$ pro $\xi \to 0+$, tj. $[y_C(x) - 1]/(x - 1) \to -1$ pro $x \to 1-$, a proto

$$\frac{dy_C}{dx}(x) \to -1 \quad \text{pro} \quad x \to 1- .$$

Všimněme si ještě, že $y_1(x) = -1/x$ pro $-1 < x < 0$ a $y_1(x) = 1/x$ pro $0 < x < 1$.

Obdobně se chovají řešení rovnice (17.1) na množinách $\mathscr{I}_2 \times \mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_1 \times \mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3 \times \mathscr{I}_2$.

2.17.1. Poznámka: Postupu, kterého jsme užili k vyšetření rovnice (17.1), lze užít k vyšetření rovnice (16.9) v případě, že proměnné lze separovat, tj. v případě, že rovnici (16.9) lze zapsat ve tvaru

$$h_1(x)\, h_2(y)\, dy - g_1(x)\, g_2(y)\, dx = 0 , \tag{17.6}$$

kde funkce $g_1, g_2, h_1, h_2 \colon R \to R$ jsou spojité. Nejdříve vyloučíme z roviny R^2 ty body, ve kterých je současně $g_1(x)\, g_2(y) = 0 = h_1(x)\, h_2(y)$, tj. položíme

$$H = \{(x, y) \in R^2 | \, g_1^2(x)\, g_2^2(y) + h_1^2(x)\, h_2^2(y) \neq 0\}$$

a rovnici (17.6) vyšetříme na množině H. Předpokládejme pro jednoduchost, že platí

$$g_1^2(x) + h_1^2(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in R\,,$$
$$g_2^2(y) + h_2^2(y) > 0 \quad \text{pro} \quad y \in R\,. \tag{17.7}$$

Z (17.7) plyne, že platí

$$R^2 - H = \{(x, y) |\, g_1(x) = 0 = h_2(y)\} \cup \{(x, y) |\, g_2(y) = 0 = h_1(x)\}\,.$$

Dále najdeme charakteristiky rovnice (17.6), které leží v některé rovnoběžce s osou x; takové trajektorie mohou ležet jen na přímkách $y = c$, kde $g_2(c) = 0$. Najdeme ještě charakteristiky rovnice (17.6), které leží v některé rovnoběžce s osou y; takové trajektorie mohou ležet jen na přímkách $x = c$, kde $h_1(c) = 0$. Odstraníme z množiny H charakteristiky rovnice (17.6), které jsme právě vyšetřili, a na zbytku pak řešíme rovnici (17.6) metodou separace proměnných.

2.18. Nechť H, H' jsou otevřené podmnožiny v R^2, nechť funkce $\varphi_1, \varphi_2 : H \to R$ mají spojité derivace prvního řádu a nechť zprostředkují *difeomorfní zobrazení* množiny H na množinu H' [to znamená, že jsou splněny tyto podmínky:

$$(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) \in H' \quad \text{pro} \quad (x_1, x_2) \in H\,. \tag{18.1}$$

Ke každému bodu $(\xi_1, \xi_2) \in H'$ existuje právě jeden bod $(x_1, x_2) \in H$ tak, že je $\xi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$ pro $i = 1, 2$. (18.2)

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_1, x_2)\right) \neq 0$$

v každém bodě $(x_1, x_2) \in H$]. (18.3)

Nechť funkce ψ_1, ψ_2 zprostředkují *inverzní zobrazení*, tj.

$$\psi_i(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = x_i\,, \quad i = 1, 2, \ \text{pro} \ (x_1, x_2) \in H\,. \tag{18.4}$$

Potom platí též

$$\varphi_i(\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2)) = \xi_i\,, \quad i = 1, 2, \quad \text{pro} \quad (\xi_1, \xi_2) \in H'\,. \tag{18.5}$$

Z (18.5), (18.3) a z věty o implicitních funkcích plyne, že funkce ψ_1, ψ_2 mají spojité derivace prvního řádu. Derivováním rovnice (18.4) podle x_l (kde $l = 1, 2$) plyne, že platí

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j}(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(x_1, x_2) = \delta_{il}\,, \quad i, l = 1, 2\,, \tag{18.6}$$

kde $\delta_{11} = \delta_{22} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$. Obdobně derivováním rovnice (18.5) plyne, že platí

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2)) \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l}(\xi_1, \xi_2) = \delta_{il}\,, \quad i, l = 1, 2\,. \tag{18.7}$$

Nechť

$$\Phi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2))\right)$$

je matice, v jejímž i-tém řádku a j-tém sloupci je

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2)),$$

a nechť

$$\Psi = \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l}(\xi_1, \xi_2)\right)$$

je matice, v jejímž j-tém řádku a l-tém sloupci je

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l}(\xi_1, \xi_2).$$

Rovnice (18.7) můžeme zapsat ve tvaru

$$\Phi\Psi = I,$$

kde I je jednotková matice. Odtud plyne det Φ det $\Psi = 1$, a proto je

$$\det\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l}(\xi_1, \xi_2)\right) \neq 0.$$

Dokázali jsme, že zobrazení zprostředkované funkcemi ψ_1, ψ_2 je difeomorfní zobrazení množiny H' na množinu H.

2.18.1. Věta: I. *Nechť jsou dány funkce $g_1, g_2: H \to R$ a mějme řešení u_1, u_2 soustavy*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{18.8}$$

$u_1, u_2: \mathscr{I} \to R$, přičemž $\mathscr{I}$ je otevřený interval v R. Definujme funkce $\vartheta_1, \vartheta_2: \mathscr{I} \to R$ a $h_1, h_2: H' \to R$ vzorci

$$\vartheta_1(t) = \varphi_1(u_1(t), u_2(t)), \quad \vartheta_2(t) = \varphi_2(u_1(t), u_2(t)), \tag{18.9}$$

$$h_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2))\, g_j(\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2)). \tag{18.10}$$

Potom ϑ_1, ϑ_2 je řešení soustavy

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= h_1(\xi_1, \xi_2), \\ \dot{\xi}_2 &= h_2(\xi_1, \xi_2). \end{aligned} \tag{18.11}$$

II. *Nechť $\mathscr{J}$ je otevřený interval v R, $\omega_1, \omega_2: \mathscr{J} \to R$, a nechť ω_1, ω_2 je řešení soustavy* (18.11). *Definujme funkce $v_1, v_2: \mathscr{J} \to R$ vzorci*

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \psi_1(\omega_1(t), \omega_2(t)), \\ v_2(t) &= \psi_2(\omega_1(t), \omega_2(t)). \end{aligned} \tag{18.12}$$

Potom v_1, v_2 je řešení soustavy (18.8).

Důkaz: Protože u_1, u_2 je řešení soustavy (18.8), platí podle (18.9)

$$\frac{d\vartheta_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(u_1(t), u_2(t))\, g_j(u_1(t), u_2(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}$$

a dosazením $u_k(t) = \psi_k(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ plyne, že ϑ_1, ϑ_2 je řešení soustavy (18.11). První část Věty 2.18.1 je dokázána.

Definujme funkce $q_1, q_2: H \pm R$ vzorci

$$q_i(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_j}(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2))\, h_j(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)). \tag{18.13}$$

Podle první části Věty 2.18.1 je v_1, v_2 řešení soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= q_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= q_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Dosadíme-li za h_j do (18.13) podle (18.10), dostaneme se zřetelem na (18.4)

$$q_i(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_j}(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(x_1, x_2)\, g_k(x_1, x_2)$$

a podle (18.6) je $q_i(x_1, x_2) = g_i(x_1, x_2)$. Tím je dokázána druhá část Věty 2.18.1.

2.18.2. Poznámka: Říkáme, že soustavu (18.8) jsme převedli [transformovali] v soustavu (18.11) transformací popsanou funkcemi φ_1, φ_2. Inverzní transformace popsaná funkcemi ψ_1, ψ_2 převádí soustavu (18.11) zpět v soustavu (18.8).

2.18.3. Poznámka: Položme

$$\begin{aligned} U &= \{(u_1(t), u_2(t)) \mid t \in \mathscr{J}\}, \\ \Theta &= \{(\varphi_1(u_1(t), u_2(t)), \varphi_2(u_1(t), u_2(t))) \mid t \in \mathscr{J}\}. \end{aligned}$$

Množina U je trajektorie soustavy (18.8) a Θ její obraz při transformaci popsané funkcemi φ_1, φ_2. Podle první části Věty 2.18.1 je Θ trajektorie soustavy (18.11). Položme

$$\Omega = \{(\omega_1(t), \omega_2(t)) \mid t \in \mathscr{J}\}.$$

Množina Ω je trajektorie soustavy (18.11). Podle druhé části Věty 2.18.1 je obraz V množiny Ω při inverzní transformaci trajektorií soustavy (18.8).

2.18.4. Poznámka: Snadno se přesvědčíme pomocí obou částí Věty 2.18.1, že ϑ_1, ϑ_2 je maximální řešení, je-li u_1, u_2 maximální řešení, a že v_1, v_2 je maximální řešení, je-li ω_1, ω_2 maximální řešení. Zejména je-li U maximální trajektorie soustavy (18.8), je také Θ maximální trajektorie soustavy (18.11); je-li Ω maximální trajektorie soustavy (18.11), je také V maximální trajektorie soustavy (18.8).

2.18.5. Poznámka: Obdobné věty (včetně tvrzení obsažených v Poznámkách 2.18.2 a 2.18.3) platí pro autonomní soustavu n rovnic a také důkaz je zcela obdobný.

Příklad: V soustavě

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\,, \end{aligned} \tag{18.14}$$

kde $a_{ij} \in R$ jsou konstanty, $i, j = 1, 2$, $H = R^2$, proveďme transformaci popsanou funkcemi

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2\,, \\ \varphi_2(x_1, x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2\,; \end{aligned} \tag{18.15}$$

přitom předpokládáme, že $b_{ij} \in R$ jsou konstanty, $i, j = 1, 2$, a že $\det(b_{ij}) \neq 0$. Transformace (18.9) zobrazuje množinu $H = R^2$ na množinu $H' = R^2$ a zřejmě jsou splněny podmínky (18.1), (18.2), (18.3). Nechť d_{ij} je matice inverzní k matici b_{ij}, tedy

$$\psi_1(\xi_1, \xi_2) = d_{11}\xi_1 + d_{12}\xi_2\,, \quad \psi_2(\xi_1, \xi_2) = d_{21}\xi_1 + d_{22}\xi_2\,.$$

Soustava (18.14) se tak transformuje podle Věty 2.18.1 v soustavu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2\,, \\ \dot{\xi}_2 &= c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2\,, \end{aligned} \tag{18.16}$$

kde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} b_{ik}a_{kl}d_{lj}$. Ukazuje se, že matici (b_{ij}) můžeme volit tak, že soustava (18.14) je některá ze soustav (5.1), (6.1), (7.1), které umíme řešit. Tento postup bude podrobně vyložen a odůvodněn v kap. 5 (a to pro autonomní soustavy n rovnic, $n \geqq 1$).

2.19. Nechť $H, H', \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ mají stejný význam jako v odst. 2.18. Buď dána funkce $f: H \to R$. Hledáme funkci $p: H' \to R$ tak, aby transformace popsaná funkcemi φ_1, φ_2 převáděla řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{19.1}$$

v řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = p(\xi, \eta)\,. \tag{19.2}$$

Podrobněji řečeno, chceme, aby nastala tato situace: Je-li u řešení rovnice (19.1), $u\colon \mathscr{I} \to R$ ($\mathscr{I}$ je otevřený interval), položme

$$U = \{(x, u(x)) |\, x \in \mathscr{I}\}\,, \tag{19.3}$$

tj. U je charakteristika rovnice (19.1). Nechť Θ je obraz charakteristiky U, tj.

$$\Theta = \{(\varphi_1(x, u(x)), \varphi_2(x, u(x)) |\, x \in \mathscr{I}\}\,. \tag{19.4}$$

Θ má být charakteristikou rovnice (19.2), tj. má existovat otevřený interval $\mathscr{J}$ a funkce $\vartheta\colon \mathscr{J} \to R$ taková, že

$$\Theta = \{(\xi, \vartheta(\xi)) |\, \xi \in \mathscr{J}\} \tag{19.5}$$

a že ϑ je řešením rovnice (19.2).

Abychom toho dosáhli, budeme předpokládat, že platí

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) f(x, y) \neq 0 \quad \text{pro} \quad x, y \in H\,, \tag{19.6}$$

a definujeme funkce q_1, q_2, $p\colon H' \to R$ rovnicemi

$$\begin{aligned} q_1(\xi, \eta) = \Big[&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta)) + \\ &+ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta)) f(\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta))\Big]\,, \\ q_2(\xi, \eta) = \Big[&\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta)) + \\ &+ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta)) f(\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta))\Big]\,, \\ p(\xi, \eta) &= q_2(\xi, \eta)/q_1(\xi, \eta)\,. \end{aligned} \tag{19.7}$$

2.19.1. Věta: I. *Nechť u je řešení rovnice* (19.1), $u\colon \mathscr{I} \to R$, *$\mathscr{I}$ je otevřený interval; nechť U je definováno vztahem* (19.3) *a Θ vztahem* (19.4). *Pak existuje otevřený interval $\mathscr{J}$ a funkce $\vartheta\colon \mathscr{J} \to R$ taková, že platí* (19.5) *a že ϑ je řešením rovnice* (19.2).

II. *Nechť $\lambda\colon \mathscr{J} \to R$ je řešením rovnice* (19.2),

$$\Lambda = \{(\xi, \lambda(\xi)) |\, \xi \in \mathscr{J}\}\,, \quad V = \{(\psi_1(\xi, \lambda(\xi)), \psi_2(\xi, \lambda(\xi))) |\, \xi \in \mathscr{J}\}\,.$$

Potom V je charakteristika rovnice (19.1).

Důkaz: U je charakteristika rovnice (19.1) a podle Věty 2.15.1 je U trajektorie soustavy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 1\,, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(x, y)\,. \end{aligned} \tag{19.8}$$

Podle Věty 2.18.1 je Θ trajektorie soustavy

$$\frac{d\xi}{dt} = q_1(\xi, \eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = q_2(\xi, \eta); \tag{19.9}$$

podle Věty 2.15.1 je opět Θ charakteristika rovnice (19.2). První část Věty 2.19.1 je dokázána. Důkaz druhé části je obdobný.

2.19.2. Poznámka: Je-li u maximální řešení, pak také ϑ je maximální řešení. Zejména je-li U maximální charakteristika, je také Θ maximální charakteristika. Je-li λ maximální řešení, pak také V je maximální charakteristika.

2.20. Nechť H je rovina R^2, z níž byl odstraněn počátek $(0, 0)$. Čísla r, φ se nazývají *polární souřadnice bodu* $x_1, x_2 \in H$, jestliže platí

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad r > 0. \tag{20.1}$$

[Zřejmě $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ je vzdálenost bodu (x_1, x_2) od počátku a φ se může lišit od úhlu sevřeného kladnou poloosou x_1 s polopřímkou, která vychází z počátku a obsahuje bod (x_1, x_2), o $2\pi k$, kde k je celé číslo].

Položme $\psi_1(r, \varphi) = r \cos \varphi$, $\psi_2(r, \varphi) = r \sin \varphi$ pro $r > 0$, $\varphi \in R$, $H' = \{(r, \varphi) \in R^2 | \, r > 0\}$. Funkce ψ_1, ψ_2 zprostředkují zobrazení množiny H' na H a je

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, \varphi), & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial r}(r, \varphi), & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} = r. \tag{20.2}$$

Toto zobrazení ovšem není vzájemně jednoznačné, neboť platí

$$\psi_1(r, \varphi) = \psi_1(r, \varphi + 2k\pi), \quad \psi_2(r, \varphi) = \psi_2(r, \varphi + 2k\pi),$$

jakmile k je celé, $(r, \varphi) \in H'$.

Jsou-li $u_1, u_2 \colon (\alpha, \beta) \to R$ spojité funkce, $(u_1(t), u_2(t)) \in H$, pak existují spojité funkce $\varrho, \psi \colon (\alpha, \beta) \to R$, $\varrho(t) > 0$, tak, že je

$$u_1(t) = \varrho(t) \cos \psi(t), \quad u_2(t) = \varrho(t) \sin \psi(t). \tag{20.3}$$

Jestliže funkce u_1, u_2 mají derivaci, pak také funkce ϱ, ψ mají spojitou derivaci; to plyne podle věty o implicitních zobrazeních z (20.3) a z (20.2).

Nechť $g_1, g_2 \colon H \to R$ jsou spojité funkce a nechť $u_1, u_2 \colon (\alpha, \beta) \to R$ je řešení soustavy

$$\dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2). \tag{20.4}$$

Derivováním rovnic (20.3) dostaneme

$$g_1(u_1(t), u_2(t)) = \dot{u}_1(t) = \dot{\varrho}(t)\cos\psi(t) - \varrho(t)\sin\psi(t)\,.\,\dot{\psi}(t)\,,$$
$$g_2(u_1(t), u_2(t)) = \dot{u}_2(t) = \dot{\varrho}(t)\sin\psi(t) + \varrho(t)\cos\psi(t)\,.\,\dot{\psi}(t)\,.$$

Odtud vypočteme

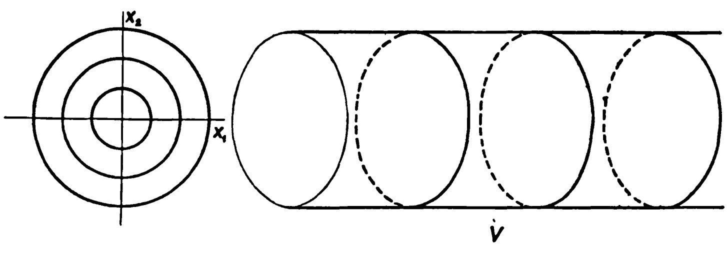
$$\begin{aligned}\dot{\varrho}(t) &= g_1(\varrho(t)\cos\psi(t), \varrho(t)\sin\psi(t))\cos\psi(t) + \\ &\quad + g_2(\varrho(t)\cos\psi(t), \varrho(t)\sin\psi(t))\sin\psi(t)\,,\\ \dot{\psi}(t) &= [-g_1(\varrho(t)\cos\psi(t), \varrho(t)\sin\psi(t))\sin\psi(t) + \\ &\quad + g_2(\varrho(t)\cos\psi(t), \varrho(t)\sin\psi(t))\cos\psi(t)]/\varrho(t)\end{aligned}$$

a tak ϱ, ψ je řešení soustavy

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &= g_1(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi)\cos\psi + g_2(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi)\sin\psi\,,\\ \dot{\psi} &= [-g_1(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi)\sin\psi + g_2(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi)\cos\psi]/\varrho\,. \qquad (20.5)\end{aligned}$$

Naopak, je-li ϱ, ψ řešení soustavy (20.5) a jsou-li funkce u_1, u_2 definovány rovnicemi (20.3), je (u_1, u_2) řešení soustavy (20.4). Přitom maximálnímu řešení odpovídá maximální řešení v obou případech.

2.20.1. Poznámka: Jestliže v množině $U = \{(r, \varphi) \in R^2 |\ r > 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ ztotožníme každý bod $(r, 2\pi)$ s bodem $(r, 0)$, $r > 0$, můžeme množinu V, která takto vznikne, považovat za válcovou plochu. Zobrazení (20.1) zobrazuje V na H a je přitom vzájemně jednoznačné; kružnice $\{(r, \varphi)|\ r = k\}$ na V přecházejí v kružnice $x_1^2 + x_2^2 = k^2$ na H (viz obr. 20), povrchové přímky válce [tj. polopřímky $\{(r, \varphi)|\ \varphi = \varphi_0\}$]



Obr. 20

přecházejí v polopřímky s krajním bodem v počátku. Lze si představit, co znamená, že funkce ζ definovaná na V má v okolí bodu $(r_0, \varphi_0) \in V$ derivaci podle r nebo podle φ: V okolí bodu (r_0, φ_0) rozvineme plochu V do roviny a derivujeme tak, jako by r a φ byly souřadnice v rovině. Nebudeme to popisovat podrobně a přesně. Lze ukázat, že rovnici (20.5) lze interpretovat jako rovnici na válcové ploše V a že rovnice (20.4) a (20.5) spolu souvisejí transformací (20.1).

Příklad: Soustava

$$\dot{x}_1 = (1 - x_1^2 - x_2^2)\, x_1 - x_2\,,$$
$$\dot{x}_2 = (1 - x_1^2 - x_2^2)\, x_2 + x_1 \tag{20.6}$$

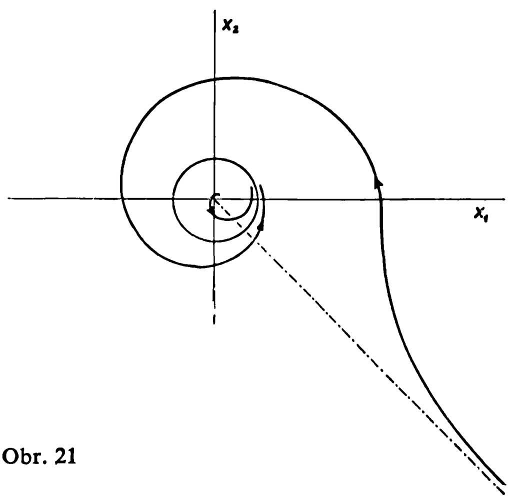
přechází transformací (20.1) v soustavu

$$\dot{r} = (1 - r^2)\, r\,,$$
$$\dot{\varphi} = 1\,. \tag{20.7}$$

Soustavu (20.7) umíme řešit; některé informace můžeme zjistit, aniž integrujeme soustavu (20.7). Soustava (20.6) má zřejmě řešení u_1, u_2, $u_1(t) = 0 = u_2(t)$ pro $t \in R$. Odpovídající řešení u soustavy (20.7) nenajdeme, protože bod $(0, 0) \in R^2$ byl z transformace do polárních souřadnic vyloučen. Soustava (20.7) má zřejmě řešení $r = 1$, $\varphi = t - t_0$, $t \in R$, pro každé $t_0 \in R$ a tomuto řešení odpovídají řešení v_{1t_0}, v_{2t_0} soustavy (20.6) $v_{1t_0}(t) = \cos(t - t_0)$, $v_{2t_0}(t) = \sin(t - t_0)$. Je-li $0 < r_0 < 1$, $t_0 \in R$, pak řešení ϱ první z rovnic (20.7), $\varrho(t_0) = r_0$, je rostoucí funkce, která je definovaná na R, a je $\lim_{t \to -\infty} \varrho(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} \varrho(t) = 1$ [viz odst. 2.8 a (10.3)]. Položme ještě $\varphi(t) = t - t_0$; φ je řešení druhé z rovnic (20.7). Odpovídající řešení

$$w_1(t) = \varrho(t) \cos(t - t_0)\,, \quad w_2(t) = \varrho(t) \sin(t - t_0)$$

soustavy (20.6) se „spirálovitě" blíží k počátku pro $t \to -\infty$ a „spirálovitě" se blíží ke kružnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$ pro $t \to +\infty$.



Obr. 21

Buď $r_1 > 1$, $t_0 \in R$. Pak řešení ζ první z rovnic (20.7), $\zeta(t_0) = r_1$, je funkce klesající a její definiční obor je zleva ohraničená polopřímka (t_1, ∞) [kde

$$t_1 = t_0 - \int_{r_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r(r^2 - 1)}\Bigg]$$

a platí

$$\lim_{t \to t_1 +} \zeta(t) = \infty , \quad \lim_{t \to \infty} \zeta(t) = 1 .$$

Vezměme ještě řešení $\varphi(t) = t - t_0$ druhé z rovnic (20.7). Odpovídající řešení q_1, q_2 soustavy (20.6)

$$q_1(t) = \zeta(t) \cos(t - t_0), \quad q_2(t) = \zeta(t) \sin(t - t_0)$$

se pro $t \to \infty$ „spirálovitě" navíjí na kružnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$, pro $t \to t_1 +$ se neomezeně vzdaluje od počátku a blíží se přitom k asymptotě

$$\{(x_1, x_2) | \, x_1 = r \cos(t_1 - t_0), \, x_2 = r \sin(t_1 - t_0), \, r > 0\} .$$

Viz obr. 21.

2.21. Nechť H je rovina, z níž byl odstraněn počátek, tj. $H = R^2 - \{(0, 0)\}$, $\vartheta \in R$. Funkce f: $H \to R$ se nazývá *homogenní funkce stupně* ϑ, jestliže platí

$$f(sx, sy) = s^\vartheta f(x, y) \quad \text{pro} \quad (x, y) \in H , \quad s > 0 . \tag{21.1}$$

Nechť g, h: $H \to R$ jsou spojité homogenní funkce stupně ϑ. Potom rovnice

$$g(x, y) \, \mathrm{d}y - h(x, y) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{21.2}$$

se nazývá *homogenní rovnice.* Podle Věty 2.16.1 je každá charakteristika rovnice (21.2) trajektorií soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y) , \\ \dot{y} &= h(x, y) \end{aligned} \tag{21.3}$$

a naopak. Podle Věty 1.9.1 je každá trajektorie soustavy (21.3) trajektorií soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Theta(x, y) \, g(x, y) , \\ \dot{y} &= \Theta(x, y) \, h(x, y) \end{aligned} \tag{21.4}$$

a naopak; přitom Θ: $H \to R$ je prozatím blíže neurčená spojitá funkce, $\Theta(x, y) \neq 0$ pro $(x, y) \in H$. Platí tedy tvrzení:

Každá charakteristika rovnice (21.2) *je trajektorií soustavy* (21.4) *a naopak.* (21.5)

Transformací soustavy (21.4) do polárních souřadnic dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \Theta(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \left[g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + \right. \\ &\left. + \, h(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi \right] , \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{r} \, \Theta(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \left[-g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi + \right. \\ &\left. + \, h(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi \right] . \end{aligned} \tag{21.6}$$

Položme $\Theta(x, y) = (x^2 + y^2)^{(1-\vartheta)/2}$, $(x, y) \in H$. Soustava (21.6) se zjednoduší a přejde v soustavu

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r[g(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + h(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi]\,, \\ \dot{\varphi} &= [-g(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi + h(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi]\,. \end{aligned} \tag{21.7}$$

Soustavu (21.7) lze řešit. Předpokládejme pro jednoduchost, že existuje takové číslo $L > 0$, že platí

$$\begin{aligned} &|g(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) - g(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)| \leqq L|\varphi_1 - \varphi_2|\,, \\ &|h(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) - h(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)| \leqq L|\varphi_1 - \varphi_2| \quad \text{pro} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in R\,. \end{aligned}$$

(To nastane zejména v tom případě, že funkce g, h mají spojité parciální derivace prvního řádu.) Položíme-li

$$q(\varphi) = -g(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi + h(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi\,, \quad \varphi \in R\,,$$

není těžké ověřit, že platí podmínka (8.2), a tak podle odst. 2.8 [kde klademe $\varphi(t) = 1$] můžeme najít řešení druhé z rovnic (21.7). Dosadíme-li některé řešení druhé z rovnic (21.7) za φ do první z rovnic (21.7), přejde tato rovnice v lineární homogenní rovnici, jejíž řešení najdeme podle odst. 2.1. Známe-li již funkce $r, \varphi: \mathscr{J} \to R$, takže r, φ je řešení soustavy (21.7), položíme $\Gamma = \{(r(t), \varphi(t)) \mid t \in \mathscr{J}\}$; Γ je trajektorie soustavy (21.7). Definujme funkce $x, y: \mathscr{J} \to R$ rovnicemi

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)\,, \quad y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

a položme

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathscr{J}\}\,.$$

Podle odst. 2.20 je x, y řešení soustavy (21.4) a C je trajektorie soustavy (21.4). Podle (21.5) je C charakteristika rovnice (21.2).

Příklad: Rovnici

$$(x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0 \tag{21.8}$$

odpovídá soustava

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2xy(x^2 + y^2)^{-1/2}\,, \\ \dot{x} &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-1/2} \end{aligned} \tag{21.9}$$

[zvolili jsme $\Theta(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ a rovnici (21.9) vyšetřujeme na množině $H = R^2 - \{(0, 0)\}$]. Soustava (21.9) přejde transformací

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi$$

v soustavu

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r\cos\varphi\,, \\ \dot{\varphi} &= \sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{21.10}$$

Pravá strana druhé z rovnic (21.10) se rovná nule pro $\varphi = k\pi$, k celé; je-li $\varphi(t) = k\pi$ pro $t \in R$, je $r(t) = \varrho_0 \mathrm{e}^{(-1)^k t}$, $t \in R$. Těmto řešením odpovídají trajektorie $\Gamma_k = \{(r, k\pi) | r > 0\}$, k celé číslo soustavy (21.10) a charakteristiky $C_0 = \{(x, 0) | x > 0\}$ a $C_1 = \{(x, 0) | x < 0\}$ rovnice (21.8). Na množině $\{(r, \varphi) | r > 0, \varphi \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)\}$ má [viz Větu 1.9.1] soustava (21.8) tytéž trajektorie jako soustava

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \operatorname{cotg} \varphi\,, \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned} \tag{21.11}$$

a podle Věty 2.15.1 jsou tyto trajektorie současně charakteristikami rovnice

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r \operatorname{cotg} \varphi\,. \tag{21.12}$$

Separací proměnných najdeme řešení rovnice (21.12) ve tvaru

$$r = a|\sin \varphi|\,, \tag{21.13}$$

kde $a > 0$. Po dosazení $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ do (21.13) dostáváme

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = a|y| (x^2 + y^2)^{-1/2} \quad \text{pro} \quad y \neq 0\,,$$

tj.

$$x^2 + y^2 - ay = 0 \quad \text{pro} \quad y > 0 \tag{21.14}$$

nebo

$$x^2 + y^2 + ay = 0 \quad \text{pro} \quad y < 0\,. \tag{21.15}$$

Rovnici (21.14) přepíšeme $x^2 + (y - a/2)^2 = a^2/4$; jde tedy o kružnici C_a se středem v bodě $(0, a/2)$ a poloměrem $a/2$, z níž byl odstraněn bod $(0, 0)$. Lze ukázat, že C_a je obrazem trajektorie $\tilde{\Gamma}_a = \{(\varrho, \psi) | \varrho = a \sin \psi, \psi \in (0, \pi)\}$ při transformaci $x = \varrho \cos \psi$, $y = \varrho \sin \psi$, a proto C_a je charakteristika rovnice (21.8). Obdobně rovnici (21.15) odpovídá kružnice $\tilde{C}_{-a}$ se středem v bodě $(0, -a/2)$ a poloměrem $a/2$, z níž byl odstraněn počátek, a také $\tilde{C}_{-a}$ je charakteristika rovnice (21.8) (viz obr. 22).

2.21.1. Poznámka: Obdobně můžeme postupovat i v případě, že množina $L \subset H$ je otevřená a má tuto vlastnost:

Je-li $(x, y) \in L$, $s > 0$, pak je i $(sx, sy) \in L$ a spojité funkce $g, h\colon L \to R$ splňují (21.1) pro $(x, y) \in L$, $s > 0$. To nastane např. v případě rovnice

$$f\left(\frac{ax + by}{cx + dy}\right) \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0\,, \tag{21.16}$$

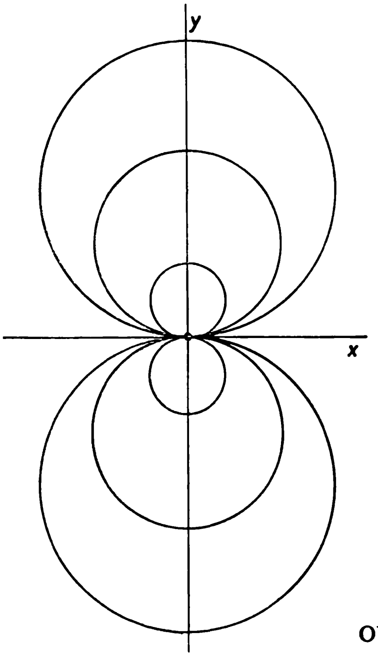
kde $f\colon R \to R$ je spojitá funkce, $a, b, c, d \in R$,

$$\det \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \neq 0\,;$$

v tomto případě položíme $L = \{(x, y) \in R^2 | cx + dy \neq 0\}$.

2.21.2. Poznámka: V literatuře se homogenní rovnice často zapisuje

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{h(x, y)}{g(x, y)} \tag{21.17}$$



Obr. 22

a provede se substituce

$$y = ux\,; \tag{21.18}$$

je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \frac{h(x, ux)}{g(x, ux)} = \frac{h(1, u)}{g(1, u)}.$$

Dostáváme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\left[\frac{h(1, u)}{g(1, u)} - u\right],$$

kterou lze řešit separací proměnných. Tento postup má ovšem nevýhodu, že musíme zvlášť vyšetřovat případy $x > 0$ a $x < 0$; existuje-li např. řešení y rovnice (21.17), $y\colon (-1, 1) \to R$, $y(0) > 0$, pak funkce u, definovaná podle (21.18), není definovaná v bodě $x = 0$ a je $u(x) \to \infty$ pro $x \to 0+$, $u(x) \to -\infty$ pro $x \to 0-$. Proto hledání maximálních řešení rovnice (21.17) tímto postupem může být obtížné.

2.22. Rovnice

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + a(x)\, z = b(x)\, z^{\gamma} \tag{22.1}$$

se nazývá *Bernoulliova rovnice.* Předpokládáme, že a, b: $R \to R$ jsou spojité funkce a že $\gamma \in R$; rovnici budeme vyšetřovat na polorovině $H = \{(x, z) |\ z > 0\}$. Je-li $\gamma = 1$ nebo $\gamma = 0$, rovnice (22.1) je rovnice lineární. Nechť je tedy $0 \neq \gamma \neq 1$. Rovnici (22.1) můžeme psát ve tvaru

$$z^{-\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + a(x)\, z^{1-\gamma} = b(x)\,. \tag{22.2}$$

Položme $w = z^{1-\gamma}$ [tj. položme $\varphi_2(x, z) = z^{1-\gamma}$, $\varphi_1(x, z) = x$, viz odst. 2.19]. Je-li $z: (\alpha, \beta) \to R$ řešení rovnice (22.2), pak w splňuje rovnici

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + (1 - \gamma)\, a(x)\, w = (1 - \gamma)\, b(x)\,. \tag{22.3}$$

Naopak, je-li w: $(\alpha, \beta) \to R$, $w(x) > 0$ pro $x \in (\alpha, \beta)$ řešení rovnice (22.3) a položíme-li $z = w^{1-\gamma}$, pak z je řešení rovnice (22.2).

Rovnice (22.3) byla vyšetřena v odst. 2.2; zde však ji vyšetřujeme na polorovině $H' = \{(x, w) \in R^2 |\ w > 0\}$. Najdeme-li řešení u rovnice (22.3) podle vzorce (2.2) (při daných $y > 0$ a $s \in R$), musíme se omezit na takový interval $\mathscr{I} \subset R$, že je $u(x) > 0$ pro $x \in \mathscr{I}$. Řešení q rovnice (22.1) najdeme z rovnice $q(x) = [u(x)]^{1/(1-\gamma)}$.

2.23. Rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x)\,, \tag{23.1}$$

kde funkce a, b, c: $R \to R$ jsou spojité, se nazývá *Riccatiova rovnice.* Riccatiova rovnice má řadu zajímavých vlastností (viz např. [69], kap. I, §6). Z nich nejdůležitější je její souvislost s lineární rovnicí druhého řádu. Předpokládejme, že je splněna podmínka

$$a(x) \neq 0 \text{ pro } x \in R; \text{ funkce má spojitou derivaci } a'. \tag{23.2}$$

V rovnici (23.1) proveďme substituci $y = p(x)\, u'/u$, kde $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ a p: $R \to R$ je daná funkce, která má spojitou derivaci, $p(x) \neq 0$ pro $x \in R$. Funkce u ovšem musí být všude různá od nuly; známe-li funkci y, je

$$u(x) = \varkappa \exp \int_{x_0}^{x} \frac{y(s)}{p(s)}\, \mathrm{d}s\,,$$

kde x_0, $\varkappa \in R$. Jednoduchým výpočtem dostáváme, že je

$$p(x)\, u''u + [p'(x) - b(x)\, p(x)]\, u'u - c(x)\, u^2 -$$
$$- [p(x) + a(x)\, p^2(x)]\, u'^2 = 0\,.$$

Dělíme-li $p(x)\,u$ a položíme-li $p(x) = -1/a(x)$, rovnice se zjednoduší a přejde v rovnici

$$u'' - \left(\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x)\right) u' + a(x)\,c(x)\,u = 0\,. \tag{23.3}$$

Obdobně můžeme přejít od rovnice (23.3) k rovnici (23.1). Tyto úvahy shrneme. Platí

2.23.1. Věta: *Nechť platí* (23.2). *Je-li funkce* $y\colon (\alpha, \beta) \to R$ *řešením rovnice* (23.1), $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $\varkappa \in R$, *pak funkce*

$$u(x) = \varkappa \exp \int_{x_0}^{x} [-a(s)\,y(s)]\,\mathrm{d}s$$

je řešením rovnice (23.3). *Naopak, je-li funkce* $u\colon (\alpha, \beta) \to R$ *řešením rovnice* (23.3) *a je-li* $u(x) \neq 0$ *pro* $\alpha < x < \beta$, *potom funkce* $y(x) = -u'(x)/[a(x)\,u(x)]$ *je řešením rovnice* (23.1).

2.24. V předcházejících odstavcích jsme většinou hledali vzorce pro řešení vyšetřovaných diferenciálních rovnic. Přitom jsme probrali jen některé nejdůležitější metody; některé další metody nalezne čtenář v knihách [33], [38], [67], [69]. Zejména upozorňujeme na knihu [33], kde je uvedeno přibližně 1 600 rovnic nebo soustav rovnic a ke každé z nich jsou uvedeny vzorce pro všechna nebo jen pro některá řešení nebo je uveden způsob, jak transformovat danou rovnici v rovnici, pro jejíž řešení již známe vzorce. Seznam rovnic a soustav, pro jejichž řešení známe vzorce, lze ovšem libovolně rozšiřovat: stačí vyjít od rovnice nebo soustavy, pro jejíž řešení máme vzorce, najít transformaci splňující podmínky Věty 2.18.1 nebo Věty 2.19.1 a aplikovat jednu z uvedených vět.

Ovšem úkol, před kterým obvykle stojíme, zejména v oblasti aplikované matematiky, je jiný. Je dána diferenciální rovnice nebo soustava diferenciálních rovnic a máme získat informace o jejích řešeních (např. zda všechna maximální řešení jsou definována na R, zda jsou omezená, zda každé řešení se blíží k počátku pro $t \to \infty$, nebo zjistit s danou přesností průběh řešení určitého řešení). I v případech, kdy známe vzorce pro řešení, může být vážnou překážkou, jsou-li tyto vzorce příliš složité.

Ale zejména musíme očekávat, že se setkáme s rovnicemi, pro jejichž řešení nebudeme umět odvodit vzorce. To plyne z výsledku o speciální Riccatiově rovnici, který dokázal J. Liouville v polovině devatenáctého století (viz [50]). *Speciální Riccatiovou rovnicí* nazýváme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay^2 + cx^\alpha\,, \tag{24.1}$$

kde $a, c, \alpha \in R$, $ac \neq 0$.

Je-li

$$\alpha = 2 \quad \text{nebo} \quad \alpha = \frac{4k}{-2k + 1}, \tag{24.2}$$

kde k je celé, potom pro řešení speciální Riccatiovy rovnice lze odvodit vzorce metodami popsanými v předcházejících odstavcích (viz např. [69]).

Liouvilleův výsledek popíšeme takto: Vyjděme z množiny konstantních funkcí a tuto množinu rozšiřujme tím způsobem, že na danou funkci nebo dvojici funkcí provedeme některou z přípustných operací. Přípustné operace jsou:

(i) Vyhledat primitivní funkci.

(ii) Provést superpozici dané funkce a funkce exponenciální nebo logaritmické nebo trigonometrické.

(iii) Provést některou algebraickou operaci (např. k funkcím f, g najít funkci $f + g$ nebo fg nebo spojitou funkci h splňující $h^3 + fh + g = 0$).

Nechť $\mathfrak{A}$ je množina funkcí, které získáme konečným počtem takových operací; přitom předpokládáme, že při každém kroku operace, kterou provádíme, má smysl na nějakém otevřeném intervalu [např. výraz $\log\left(\int_0^x 1\, d\tau\right)$ má smysl pro $x > 0$]. J. Liouville dokázal, že žádná z funkcí z množiny $\mathfrak{A}$ není řešením speciální Riccatiovy rovnice v tom případě, že číslo α nesplňuje žádnou z rovnic (24.2). Jinak řečeno: Není-li splněna žádná z rovnic (24.2), pak nelze pro řešení speciální Riccatiovy rovnice napsat vzorec pomocí konstant a konečného počtu přípustných operací (kdybychom ovšem připustili posloupnost operací a operaci limitního přechodu, byla by situace zcela jiná). Stručně se říká, že speciální Riccatiovu rovnici nelze řešit elementárně [nebo v uzavřeném tvaru nebo vzorcem]. Z Věty 2.23.1 plyne, že také lineární rovnici druhého řádu

$$u'' + dx^\alpha u = 0\,, \quad d \neq 0\,,$$

nelze řešit elementárně [neplatí-li ovšem (24.2)].

Tento Liouvilleův výsledek učinil zjevnou potřebu teorie, jejíž základy jsou vyloženy v následujících kapitolách. V teorii jde o to vystihnout jevy, s nimiž se setkáváme při studiu diferenciálních rovnic a soustav. Přitom se někdy dělají speciální předpoklady – např. v kap. 4 až 9 se vyšetřují lineární diferenciální soustavy, ale cílem zůstává studium vlastností řešení. Teorie neztrácí na významu nástupem počítačů; právě znalost teorie dává možnost účelně využívat počítačů.