0. Přípravná kapitola

Přípravná kapitola

0.1. V této kapitole nebudeme ještě mluvit o diferenciálních rovnicích, ale zavedeme některá označení a připomeneme některé základní pojmy zvláště z matematické analýzy.

Množinu reálných čísel budeme značit R, *množinu komplexních čísel* C; n bude znamenat *přirozené číslo*, $i, j, \ldots$ *celá čísla*. *Prázdnou množinu* značíme $\emptyset$. Jako obvykle $\alpha \in A$ znamená, že α *je prvkem množiny* A.

Je-li U daná množina a V vlastnost prvků z množiny U, bude $\{x \in U \mid V(x)\}$ znamenat množinu takových prvků x z U, které mají vlastnost V; je-li jasné ze souvislosti, že x bereme z množiny U, můžeme psát $\{x \mid V(x)\}$ místo $\{x \in U \mid V(x)\}$. Např. jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, je $\{x \in R \mid a \leqq x \leqq b\}$ *uzavřený interval s krajními body* a, b; značíme jej $\langle a, b \rangle$. Podobně $\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$ je *otevřený interval s krajními body* a, b a $\{x \mid a \leqq x < b\} = \langle a, b)$, $\{x \mid a < x \leqq b\} = (a, b\rangle$ jsou *polouzavřené intervaly*. Mezi *intervaly* budeme počítat také množiny $R = (-\infty, \infty)$, $\{x \mid x < a\} = (-\infty, a)$, $\{x \mid x > a\} = (a, \infty)$, $\{x \mid x \leqq a\} = (-\infty, a\rangle$, $\{x \mid x \geqq a\} = \langle a, \infty)$; z nich první je současně otevřený i uzavřený, druhé dva jsou otevřené a poslední dva jsou uzavřené. Z formálních důvodů se obvykle mezi intervaly zařazují množiny, které obsahují jediné reálné číslo, a množina prázdná; tyto množiny se nazývají *degenerované intervaly*, zatímco intervaly, které obsahují více než jeden bod, se nazývají *nedegenerované*. Abychom se vyhnuli častému užívání slova „nedegenerovaný", budeme v této knize intervalem rozumět pouze takový interval, který má více než jeden bod. Nechť $\mathscr{I}$ je interval. Číslo $c \in R$ se nazývá *vnitřní bod intervalu* $\mathscr{I}$, existuje-li takové číslo $\delta > 0$, že je $(c - \delta, c + \delta) \subset \mathscr{I}$. Zřejmě každý bod otevřeného intervalu je jeho vnitřním bodem.

Je-li $S \subset R$, pak *supremum množiny* S značíme $\sup\limits_{s \in S} s$ nebo $\sup \{s \mid s \in S\}$ a obdobného značení užíváme u infima. $B \subset A$ znamená, že B je *částí množiny* A. $A - D$ znamená *množinový rozdíl množin* A a D, tj. $A - D = \{\alpha \in A \mid \alpha \notin D\}$. Jsou-li D_α množiny pro $\alpha \in A$, značíme jejich *sjednocení* $\bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha$ nebo též $\bigcup \{D_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Obdobně jejich *průnik* píšeme ve tvaru $\bigcap\limits_{\alpha \in A} D_\alpha$ nebo $\bigcap \{D_\alpha \mid \alpha \in A\}$. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ znamená *kartézský součin množin* $A_1, A_2, \ldots, A_n$; jeho elementy jsou uspořádané n-tice $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ takové, že $\alpha_i \in A_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ [a je $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ právě tehdy, je-li $\alpha_i = \beta_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$]. Přitom není podstatné, že prvky kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ zapisujeme jako řádky $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Podstatné je jen, že víme, který prvek je na prvním, druhém, ..., n-tém místě. V některých případech je výhodné prvky kartézského součinu zapisovat jako sloupce

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

R^n je kartézský součin množin $A_1 = R, A_2 = R, \ldots, A_n = R$, tj.

$$R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in R \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Obdobně je

$$C^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_i \in C \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$R \times C^n = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \mid z_0 \in R, z_i \in C \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Speciálně je $R^1 = R$, $C^1 = C$.

0.2. Nechť U, V jsou množiny. $f: U \to V$ znamená, že f je *zobrazení množiny U do množiny V* [tj. ke každému $x \in U$ je přiřazen bod $f(x) \in V$]. U je *definiční obor zobrazení f*, V je *obor hodnot*. Také se říká, že zobrazení f je definované na U a že zobrazuje U do V. Je-li $\tilde{U} \subset U$, pak $f|_{\tilde{U}}$ znamená *restrikci zobrazení f na množinu $\tilde{U}$*, tj. $f|_{\tilde{U}}$ je zobrazení definované na $\tilde{U}$, $f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \to V$, a je $f|_{\tilde{U}}(x) = f(x)$ pro $x \in \tilde{U}$.

Je-li $V \subset R$ nebo $V \subset C$ nebo $V \subset R^n$ nebo $V \subset C^n$, říkáme, že *f je funkce*. $f(x)$ je *hodnota zobrazení (funkce) f v bodě x množiny U*; mluvíme-li o zobrazení (funkci), užíváme symbolu f.

V některých případech budeme užívat staršího způsobu značení, kde se pracuje s pojmem *proměnné*. Jsou to zejména ty případy, kde se vyskytují funkce definované pomocí elementárních funkcí; je-li např. $q: R \to R$, budeme mluvit o funkci $\sin [t\, q(t)]$ proměnné t, kde $t \in R$ (říká se též, že t probíhá množinu R).

0.3. Nechť je $\xi_i \in R$ (nebo $\xi_i \in C$) pro $i = 1, 2, \ldots$. Číslo $\xi \in R$ (resp. $\xi \in C$) se nazývá *limita posloupnosti ξ_i*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $K \in R$ tak, že je $\xi_i \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ pro $i \geqq K$. To, že ξ je limita posloupnosti ξ_i, zapisujeme

$$\xi = \lim_{i \to \infty} \xi_i.$$

Nechť je $A \subset R$, $\tau \in R$, $f: A \to R$ (nebo $f: A \to C$). Číslo $\eta \in R$ (resp. $\eta \in C$) se nazývá *limita funkce f v bodě τ*, jestliže:

Existuje posloupnost t_i, $i = 1, 2, \ldots$, taková, že je
$$\tau = \lim_{i \to \infty} t_i, \; t_i \in A, \; t_i \neq \tau \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

$\eta = \lim_{i \to \infty} f(t_i)$ pro každou posloupnost t_i, $i = 1, 2, \ldots$, která splňuje (3.1). (3.2)

To, že je η limita funkce f v bodě τ, zapisujeme

$$\eta = \lim_{t \to \tau} f(t) .$$

V základech matematické analýzy se dokazuje, že číslo η je limita funkce f v bodě τ právě tehdy, jestliže platí:

$$A \cap [(\tau - \delta, \tau) \cup (\tau, \tau + \delta)] \neq \emptyset \quad \text{pro každé číslo } \delta > 0 . \tag{3.3}$$

Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že je

$$|f(t) - \eta| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad t \in A \cap [(\tau - \delta, \tau) \cup (\tau, \tau + \delta)] . \tag{3.4}$$

Jestliže platí tyto podmínky:

Existuje posloupnost t_i, $i = 1, 2, \ldots$, taková, že je

$$\tau = \lim_{i \to \infty} t_i,\ t_i \in A,\ t_i > \tau \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{3.5}$$

$\eta = \lim_{i \to \infty} f(t_i)$ pro každou posloupnost t_i, $i = 1, 2, \ldots$, která splňuje (3.5), (3.6)

pak číslo η se nazývá *limita zprava funkce f v bodě τ* a tato skutečnost se zapisuje rovnicí

$$\eta = \lim_{t \to \tau+} f(t) .$$

Obdobně se zavádí výrok „η je *limita zleva funkce f v bodě τ*"; tento výrok se zapisuje

$$\eta = \lim_{t \to \tau-} f(t) .$$

Nechť je $s \in A$. Funkce f se nazývá *spojitá v bodě s*, jestliže platí

$f(s) = \lim_{i \to \infty} f(t_i)$ pro každou posloupnost t_i, $i = 1, 2, \ldots$, takovou, že je $t_i \in A$ pro $i = 1, 2, \ldots$, $s = \lim_{i \to \infty} t_i$. (3.7)

Je známé, že funkce f je spojitá v bodě s právě tehdy, jestliže platí:

Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že je

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad t \in A \cap (s - \delta, s + \delta) . \tag{3.8}$$

Funkce f se nazývá *spojitá*, je-li spojitá v každém bodě $s \in A$.

0.4. Nechť $\mathscr{I}$ je interval, $f: \mathscr{I} \to R$ nebo $f: \mathscr{I} \to C$. Číslo $\zeta \in R$ (resp. $\zeta \in C$) se nazývá *derivace funkce f v bodě τ*, jestliže platí $\zeta = \lim_{t \to \tau} [f(t) - f(\tau)]/(t - \tau)$. V takovém případě píšeme

$$\zeta = \dot{f}(\tau) = f'(\tau) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\tau)$$

(funkci f považujeme za funkci proměnné t, tedy derivace funkce f podle t v bodě τ). V případě, že τ není vnitřním bodem, se poněkud odchylujeme od běžné terminologie; je-li např. $\mathscr{I} = \langle a, b \rangle$, měli bychom číslo $\dot{f}(a)$ nazývat derivací zprava v bodě a a značit $\dot{f}_+(a)$.

Je-li $f\colon \mathscr{I} \to C$, můžeme psát $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$, kde $f_1, f_2\colon \mathscr{I} \to R$ [tj. $f(t) = f_1(t) + \mathrm{i}f_2(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$]. Funkce f má derivaci v bodě $\tau \in \mathscr{I}$ právě tehdy, mají-li funkce f_1 a f_2 derivaci v bodě τ; v takovém případě je $\dot{f}(\tau) = \dot{f}_1(\tau) + \mathrm{i}\dot{f}_2(\tau)$.

Nechť A je množina takových bodů $\tau \in \mathscr{I}$, v nichž funkce f má derivaci $\dot{f}(\tau)$. Zřejmě je definována funkce $\dot{f}$, která každé $\tau \in A$ zobrazuje na $\dot{f}(\tau)$, tedy $\dot{f}\colon A \to R$ (resp. $\dot{f}\colon A \to C$). Je-li A interval, $\tau \in A$, může funkce $\dot{f}$ mít derivaci v bodě τ; tuto derivaci značíme

$$f^{(2)}(\tau) \text{ nebo } \ddot{f}(\tau) \text{ nebo } f''(\tau) \text{ nebo } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(\tau)$$

a nazýváme druhou derivací funkce f v bodě τ. Nechť A_2 je množina takových τ, v nichž funkce $\dot{f}$ má derivaci. Zřejmě je $\ddot{f}\colon A_2 \to R$ (resp. $\ddot{f}\colon A_2 \to C$). Obdobně se zavádějí derivace vyšších řádů $\dddot{f} = f^{(3)}, f^{(4)}$ atd. Pro úplnost a jednotný zápis ve vzorcích se někdy klade $f^{(0)} = f, f^{(1)} = \dot{f}$.

0.5. Nechť je $f\colon \mathscr{I} \to R$ nebo $f\colon \mathscr{I} \to C$. Funkce $F\colon \mathscr{I} \to R$ (resp. $F\colon \mathscr{I} \to C$) se nazývá *primitivní funkce k f*, jestliže je spojitá a jestliže platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = f(t) \tag{5.1}$$

pro $t \in \mathscr{I}$ kromě konečného počtu bodů [tj. (5.1) buď platí pro všechna $t \in \mathscr{I}$, nebo existuje konečný počet výjimek]. Nechť je $f\colon \mathscr{I} \to C$, $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$, $F\colon \mathscr{I} \to C$, $F = F_1 + \mathrm{i}F_2$, kde $f_1, f_2, F_1, F_2\colon \mathscr{I} \to R$. Zřejmě platí:

> F je primitivní funkce k f právě tehdy, je-li F_j, $j = 1, 2$, primitivní funkce k f_j. (5.2)

Nechť je $f\colon \mathscr{I} \to R$ a nechť F je primitivní funkce k f. Snadno lze ukázat, že platí tato tvrzení:

> *Je-li $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, $t_1 < t_2$, $\alpha \in R$, $f(t) \geqq \alpha$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pak je $F(t_2) - F(t_1) \geqq \alpha(t_2 - t_1)$.* (5.3)

> *Je-li $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, $t_1 < t_2$, $\beta \in R$, $f(t) \leqq \beta$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pak je $F(t_2) - F(t_1) \leqq \beta(t_2 - t_1)$.* (5.4)

Je-li $\varepsilon > 0$, $|f(t)| \leqq \varepsilon$ *pro* $t \in \mathscr{I}$, *potom je* $|F(t_2) - F(t_1)| \leqq \varepsilon |t_2 - t_1|$ *pro* $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$. (5.5)

Je-li také G primitivní funkce k f, pak je

$$F(t_1) - G(t_1) = F(t_2) - G(t_2) \text{ pro } t_1, t_2 \in \mathscr{I}. \tag{5.6}$$

Podle (5.6) je $F(t_2) - F(t_1) = G(t_2) - G(t_1)$; rozdíl $F(t_2) - F(t_1)$ tedy nezávisí na tom, které primitivní funkce k funkci f jsme užili. Číslo $F(t_2) - F(t_1)$ se nazývá *určitý integrál z f od* t_1 *do* t_2 a označuje se

$$\int_{t_1}^{t_2} f \, dt \quad \text{nebo} \quad \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt, \quad \int_{t_1}^{t_2} f(s) \, ds \text{ atp.}$$

Je-li $f: \mathscr{I} \to C$ a jsou-li F, G primitivní funkce k f, pak podle (5.2) a (5.6) platí $F(t_2) - F(t_1) = G(t_2) - G(t_1)$ pro $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$. Také v tomto případě rozdíl $F(t_2) - F(t_1)$ nezávisí na tom, které primitivní funkce k funkci f jsme užili; číslo $F(t_2) - F(t_1)$ se nazývá určitý integrál z f od t_1 do t_2 a označuje se stejně jako v případě, že je $f: \mathscr{I} \to R$.

Nechť $\mathscr{I}$ je interval, $f: \mathscr{I} \to R$ ($f: \mathscr{I} \to C$). Nechť $S \subset \mathscr{I}$ je konečná množina (může být $S = \emptyset$) a nechť jsou splněny tyto podmínky:

Funkce f je spojitá v každém bodě $t \in \mathscr{I} - S$. (5.7)

Limity $\lim_{t \to s+} f(t)$, $\lim_{t \to s-} f(t)$ existují v každém bodě $s \in S$, který je vnitřním bodem intervalu $\mathscr{I}$. Je-li $s \in S$ levým krajním bodem intervalu $\mathscr{I}$, pak existuje první z uvedených limit; je-li $s \in S$ pravým krajním bodem intervalu $\mathscr{I}$, pak existuje druhá z uvedených limit. (5.8)

Takové funkce f budeme nazývat *po částech spojitými.*

Platí tvrzení: *Je-li funkce* $f: \mathscr{I} \to R$ ($f: \mathscr{I} \to C$) *po částech spojitá, pak k f existuje primitivní funkce.* Toto tvrzení se obvykle dokazuje pomocí některé integrační teorie (Riemannovy, Lebesgueovy, Daniellovy, Perronovy).

Dokáže se např., že pro každé $a, b \in \mathscr{I}$, $a < b$, existuje Riemannův integrál z f od a do b, který označíme

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f(\tau) \, d\tau \, ;$$

zvolí se $s \in \mathscr{I}$ a o funkci F definované předpisem

$$F(t) = (\mathrm{R}) \int_s^t f(\tau) \, d\tau, \; t \in \mathscr{I}, \; t > s, \; F(s) = 0 \, ,$$

$$F(t) = -(\mathrm{R}) \int_t^s f(\tau) \, d\tau, \; t \in \mathscr{I}, \; t < s \, ,$$

se dokáže, že je primitivní funkcí k f. Jiný způsob, kterým lze dokázat existenci primitivní funkce k funkci po částech spojité, je vyložen v [13] (kap. VIII, 7).

Nechť funkce $f\colon \mathscr{I} \to R$ je spojitá a nechť F je primitivní funkce k f. Snadno lze dokázat, že platí

$$\dot{F}(t) = f(t) \quad pro \quad t \in \mathscr{I}\,, \tag{5.9}$$

je-li $t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, $t_1 < t_2$, $f(t) \geqq 0$ *pro* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *a existuje-li takové* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *že je* $f(\tau) > 0$, *pak je*

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t > 0\,. \tag{5.10}$$