KAPITOLA XIX*

TRANSFORMACE A VÝPOČET ELIPTICKÝCH INTEGRÁLŮ*

§ 1. Normální tvar Weierstrassův a Riemannův. Jak bylo řečeno v **J I**, kap. XI, nazýváme eliptickými integrály integrály tvaru $\int R_1(x, \sqrt{X})\,\mathrm{d}x$, kde $R_1(x, y)$ je racionální funkce, X pak je mnohočlen (v proměnné x) třetího nebo čtvrtého stupně, mající vesměs jednoduché kořeny. Pro krátkost budeme říkati, že tento integrál „patří k mnohočlenu X". Na uvedeném místě bylo již řečeno, že takový integrál lze rozložiti na součet integrálu funkce racionální a integrálu tvaru

$$\int R(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \tag{1}$$

kde $R(x)$ je racionální funkce. Omezíme se proto hlavně na integrály tvaru (1). Přitom budeme předpokládati, že mnohočlen X má reálné součinitele; budeme však připouštěti pro proměnnou x i takové intervaly, v nichž je $X < 0$; v tomto případě klademe ovšem $\sqrt{X} = i\sqrt{-X}$, činitele $1 : i = -i$ lze pak prostě před integrál vytknouti.

Je-li X třetího stupně, lze integrál (1) *převésti na integrál, patřící k mnohočlenu 4. stupně.* Zvolme totiž reálné α tak, že $X(\alpha) \neq 0$ a zaveďme novou proměnnou rovnicí $x - \alpha = \dfrac{1}{y}$; tedy

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{y^2}, \quad X(x) = X\left(\alpha + \frac{1}{y}\right) =$$
$$= X(\alpha) + \frac{1}{y}\frac{X'(\alpha)}{1!} + \frac{1}{y^2}\frac{X''(\alpha)}{2!} + \frac{1}{y^3}\frac{X'''(\alpha)}{3!} = \frac{1}{y^4}\,.\,Y(y),$$

kde

$$Y(y) = y^4\,.\,X(\alpha) + y^3\,.\,\frac{X'(\alpha)}{1!} + y^2\,\frac{X''(\alpha)}{2!} + y\,\frac{X'''(\alpha)}{3!},$$

takže

$$\int R(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = -\int R\left(\alpha + \frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}}.$$

Přitom Y je čtvrtého stupně (ježto $X(\alpha) \neq 0$) a má kořeny 0, $\frac{1}{\alpha_1 - \alpha}$, $\frac{1}{\alpha_2 - \alpha}$, $\frac{1}{\alpha_3 - \alpha}$, jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kořeny mnohočlenu X.

Je-li X čtvrtého stupně, lze integrál (1) *převésti na integrál, patřící k mnohočlenu třetího stupně s vesměs reálnými kořeny.* Zde je důkaz trochu obtížnější. Mnohočlen $X = a_0x^4 + a_1x^3 + \ldots$ $(a_0 \neq 0)$ lze vždy rozložiti na součin dvou reálných kvadratických mnohočlenů:

$$X = (Ax^2 + Bx + C)(A_1x^2 + B_1x + C_1) \quad (A \neq 0,\ A_1 \neq 0)\,. \tag{2}$$

(Každý z obou kvadratických mnohočlenů je buďto součinem dvou reálných kořenových činitelů nebo součinem dvou komplexně sdružených nereálných kořenových činitelů.) Budeme se snažit transformovati tak, aby v (2) vpravo vypadly lineární členy.

Je-li předně $B_1 : A_1 = B : A$, klademe prostě

$$y = x + \frac{B}{2A} = x + \frac{B_1}{2A_1}\,,$$

načež zřejmě

$$X = (Ay^2 + C')(A_1y^2 + C_1'),\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y\,.$$

Budiž tedy za druhé $AB_1 - A_1B \neq 0$. Hledáme substituci $x = \frac{py + q}{y + 1}$ [1]) tak, aby ve výrazu

$$\begin{aligned} &Ax^2 + Bx + C = \\ &= \frac{1}{(y+1)^2}\left(A(py+q)^2 + B(py+q)(y+1) + C(y+1)^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

odpadl v závorce vpravo lineární člen, a podobně ve výrazu $A_1x^2 + B_1x + C_1$. Tím dostáváme tyto rovnice pro p, q:

$$2Apq + B(p+q) + 2C = 0,\ 2A_1pq + B_1(p+q) + 2C_1 = 0\,;$$

ty jsou splněny tehdy a jen tehdy, je-li

$$pq = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}\,,\quad p + q = \frac{2(CA_1 - C_1A)}{AB_1 - A_1B}\,, \tag{4}$$

[1]) p, q musí býti reálná, aby reálným y odpovídala reálná x a naopak; mimo to musí býti $p \neq q$, aby každému x (s výjimkou hodnoty $x = p$) odpovídalo nějaké y (kdyby bylo $p = q$, bylo by $x = p$ pro všechna $y \neq -1$).

t. j. jsou-li p, q kořeny rovnice

$$(AB_1 - A_1B)\,\xi^2 + 2(AC_1 - A_1C)\,\xi + (BC_1 - B_1C) = 0\,.$$

Jde jenom o to, zda tato rovnice má reálné různé kořeny (viz pozn. [1])), t. j. zda platí nerovnost

$$\Delta = (AC_1 - A_1C)^2 - (AB_1 - A_1B)(BC_1 - B_1C) > 0\,. \tag{5}$$

Nechť $Ax^2 + Bx + C = 0$ má kořeny λ, μ a obdobně $A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0$ má kořeny λ_1, μ_1, takže

$$B = -A(\lambda + \mu),\ C = A\lambda\mu,\ B_1 = -A_1(\lambda_1 + \mu_1),\ C_1 = A_1\lambda_1\mu_1\,.$$

Snadno spočteme

$$\begin{aligned}\Delta &= A^2A_1^2((\lambda_1\mu_1 - \lambda\mu)^2 - (\lambda + \mu - \lambda_1 - \mu_1)(\lambda\mu(\lambda_1 + \mu_1) - \\ &\qquad - \lambda_1\mu_1(\lambda + \mu))) = \\ &= A^2A_1^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1)(\mu - \lambda_1)(\mu - \mu_1)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Čísla λ, μ, λ_1, μ_1 jsou kořeny mnohočlenu X, tedy jsou navzájem různá. Jsou možny tyto případy:

α) Všechny čtyři kořeny jsou imaginární: tedy λ komplexně sdružené s μ, λ_1 s μ_1. Potom $\lambda - \lambda_1$ je komplexně sdružené s $\mu - \mu_1$, $\lambda - \mu_1$ s $\mu - \lambda_1$ a tedy podle (6) je $\Delta > 0$.

β) Dva kořeny jsou imaginární komplexně sdružené, na př. λ, μ, kdežto λ_1, μ_1 jsou reálné. Potom $\lambda - \lambda_1$ je komplexně sdružené s $\mu - \lambda_1$, $\lambda - \mu_1$ s $\mu - \mu_1$ a opět $\Delta > 0$.

γ) Všechny kořeny jsou reálné; potom v rozkladu (2) lze za $Ax^2 + Bx + C$ vzíti součin kterýchkoliv dvou kořenových činitelů; na př. můžeme dosáhnouti toho, že $\lambda > \mu > \lambda_1 > \mu_1$, načež opět $\Delta > 0$.[2])

Tím je pro $AB_1 - A_1B \neq 0$ v každém případě dokázána existence substituce $x = (py + q) : (y + 1)$ (p, q reálná různá), pro kterou jest

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{1}{(y+1)^2}\,(My^2 + P)\,,$$

$$A_1x^2 + B_1x + C_1 = \frac{1}{(y+1)^2}\,(M_1y^2 + P_1)\,,$$

[2]) Je ještě druhý takový rozklad, totiž ten, při němž $\lambda > \lambda_1 > \mu_1 > \mu$. Třetí rozklad, totiž ten, pro nějž je $\lambda > \lambda_1 > \mu > \mu_1$, dává $\Delta < 0$.

a dále

$$\mathrm{d}x = \frac{(p - q)\,\mathrm{d}y}{(y + 1)^2},$$

takže celkem

$$\int R(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = (p - q)\int R\left(\frac{py + q}{y + 1}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(My^2 + P)(M_1y^2 + P_1)}}. \tag{7}$$

Podobný výsledek jsme měli v případě $B_1 : A_1 = B : A$, totiž

$$\int R(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int R\left(y - \frac{B}{2A}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(Ay^2 + C')(A_1y^2 + C_1')}}.$$

Tím jsme tedy předložený integrál (1) převedli lineární (lomenou) substitucí[3]) na integrál tvaru

$$\int R_1(y)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(My^2 + P)(M_1y^2 + P_1)}}. \tag{8}$$

Lze psáti ($A(u), \ldots, G(u)$ značí mnohočleny)

$$\begin{aligned} R_1(y) &= \frac{A(y)}{B(y)} = \frac{A(y)}{C(y^2) + y\,D(y^2)} = \\ &= \frac{A(y)(C(y^2) - y\,D(y^2))}{C^2(y^2) - y^2\,D^2(y^2)} = \frac{E(y^2) + y\,F(y^2)}{G(y^2)}. \end{aligned} \tag{9}$$

To nás vede k tomu, abychom v integrálu (8) zavedli $y^2 = z$, $y = \pm\sqrt{z}$ (podle toho, zda $y \geqq 0$ či $y < 0$), $\mathrm{d}y = \pm\dfrac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}$, načež integrál (8) přejde v

$$\begin{aligned} &\pm\frac{1}{2}\int\frac{E(z)}{G(z)}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z(Mz + P)(M_1z + P_1)}} + \\ &+ \frac{1}{2}\int\frac{F(z)}{G(z)}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(Mz + P)(M_1z + P_1)}}. \end{aligned} \tag{10}$$

---

[3]) Tak nazýváme substituce tvaru $x = \dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; blíže viz o nich v následujícím paragrafu.

O druhý integrál se nebudeme starati, ten známe z **J I**, kap. IV, § 5. První integrál má pak vskutku žádaný tvar.[4]) Zároveň vidíme, jakými substitucemi můžeme z integrálu (1) (kde X je čtvrtého stupně) přejíti k integrálu (10); jsou to substituce tvaru

$$z = (x - p)^2 \text{ v případě } AB_1 - A_1B = 0\,,$$

$$z = \left(\frac{x - q}{p - x}\right)^2 \text{ v případě } AB_1 - A_1B \neq 0\,.$$

Z obou vět dokázaných v tomto paragrafu plyne, že *každý eliptický integrál lze převésti na integrály známé z* **J I**, *kap. IV a na integrál tvaru*

$$\int R(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}}\,, \tag{11}$$

kde R je racionální funkce a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou reálná různá; srovnejme je na př. tak, že $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Podle **J I**, kap. XI, § 2 lze pak integrál (11) vyjádřiti integrály

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}\,,\quad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}\,,\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x - \alpha)\sqrt{X}}\,, \tag{12}$$

kde X značí mnohočlen, stojící pod odmocninou v (11), a číslo α probíhá ony kořeny jmenovatele Q v racionální funkci $R = P : Q$, pro něž je $X(\alpha) \neq 0$. Integrálům (12) se říká po řadě eliptické integrály prvního, druhého a třetího druhu.

Mnohočlen X v (11) lze ještě různým způsobem upraviti. Jednak můžeme dosáhnouti toho, že součinitel u x^2 (a tedy součet kořenů) se rovná nule; toho docílíme tím, že klademe $z = x - \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$; tím přejde X v mnohočlen, jehož kořeny jsou $e_j = \alpha_j - \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, tedy $e_1 + e_2 + e_3 = 0$; tím přejde (11) ve tvar (je zvykem voliti za nejvyššího součinitele 4)

$$\int R_1(z) \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}\,, \tag{13}$$

$$e_1 > e_2 > e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 = 0\,;$$

[4]) Dá se ukázati, že pod odmocninou stojí vskutku mnohočlen 3. stupně (t. j. že $M \neq 0$, $M_1 \neq 0$) a že kořeny 0, $-P : M$, $-P_1 : M_1$ (jež jsou reálné) jsou různé. Ostatně, kdyby tomu tak nebylo, byla by věc ještě jednodušší, ježto by potom i první integrál v (10) měl tvar, známý z **J I**.

tomuto tvaru říkáme **Weierstrassův normální tvar** eliptických integrálů. Jednak můžeme dosáhnouti toho, že prostřední kořen je 1, nejmenší 0; toho docílíme tím, že klademe $z = \dfrac{x - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}$, načež kořeny jsou $\dfrac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}$, 1, 0. První kořen je větší než 1 a lze jej tedy psáti ve tvaru $\dfrac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} = \dfrac{1}{k^2}$, kde $0 < k < 1$. Tím dostaneme integrál (11) ve tvaru

$$\int R_2(z) \frac{dz}{\sqrt{z(1 - z)(1 - k^2 z)}}, \quad 0 < k < 1, \tag{14}$$

což je t. zv. **Riemannův normální tvar**; číslo k se nazývá **modulem** tohoto integrálu.

Cvičení

1. Převeďte integrál $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$ na normální tvar Riemannův. (Napřed podle první věty substituce $x = 1 : y$, na to podle druhé věty substituce $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}(z - 1) : (z + 1)$ (též byste mohli změnit znamení při $\sqrt{3}$) a konečně substituce $z^2 = u$, $u + 1 = v$; vyjde

$$\mp \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \int \frac{dv}{\sqrt{v(1 - v)(1 - \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})\, v)}}\,.\ ^{5)}$$

Zde je tedy $k = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$.

2. Upravujete-li integrál $J = \displaystyle\int \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}}$ podle předpisu tohoto paragrafu, dojdete substitucemi $x = (y - 1) : (y + 1)$, $y^2 = z$ ke tvaru $J = \sqrt{2}\,.$ $\displaystyle .\int \frac{dz}{(z + 1)\sqrt{z^2 + 6z + 1}}$. To je integrál typu, známého z **J I**, kap. IV, § 5 (vypočtěte jej!). Takovým eliptickým integrálům, jež dovedeme vyjádřiti elementárními funkcemi, říkáme **pseudoeliptické**. K takovému integrálu na př. dospějeme, jestliže při transformaci, vedoucí k rovnici (10), nám vyjde $E(z) = 0$ (identicky).

---

[5]) Znamení se řídí podle toho, je-li z záporné či kladné; určete je.

3. Převeďte integrál

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 4x + 7} \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^3 - x^4}}$$

na tvar (10) a zjistěte, že je pseudoeliptický.

4. Budiž $R(x)$ racionální funkce a vyšetřujme integrál

$$\int R(x) \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} \quad (0 < k < 1) \tag{15}$$

(to je t. zv. normální tvar Legendreův, o němž budeme jednati v následujících paragrafech). Upravím-li $R(x)$ (ve smyslu rovnice (9)) na tvar $R(x) = S(x^2) + x\,T(x^2)$ ($S(u)$, $T(u)$ racionální funkce), dostanu z (15) jednak integrál pseudoeliptický, jednak integrál

$$\int S(x^2) \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\,. \tag{16}$$

Kořeny mnohočlenu pod odmocninou jsou $-1, -k^{-1}, k^{-1}, 1$. Mohu tedy tento mnohočlen rozložiti (viz pozn. [5])) ještě jedním způsobem tak, aby $\Delta > 0$; je to rozklad

$$(1 - (k + 1)\,x + kx^2)(1 + (k + 1)\,x + kx^2)\,. \tag{17}$$

Transformujme nyní (17) substitucí $x = \dfrac{py + q}{y + 1}$; vyložená methoda nás vede k substituci $x = k^{-\frac{1}{2}}(y - 1) : (y + 1)$, čímž (16) přejde v integrál

$$\int S\left(\frac{1}{k}\,\frac{(y - 1)^2}{(y + 1)^2}\right) \frac{dy}{\sqrt{Y}}\,, \tag{18}$$

kde $Y = (\alpha + \beta y^2)(\gamma + \delta y^2)$ s reálnými $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Jestliže $S(v) = -\,S\left(\dfrac{1}{k^2v}\right)$, je $S\left(\dfrac{1}{k}\,\dfrac{(y - 1)^2}{(y + 1)^2}\right)$ lichá funkce y, tedy má tvar $y\,V(y^2)$, kde $V(u)$ je racionální, načež (18) je zřejmě pseudoeliptický. Proveďte podrobně vše, co bylo naznačeno.

§ 2. Lineární transformace eliptických integrálů. Legendreův normální tvar. Množinu E_1 všech konečných reálných čísel jsme většinou doplňovali dvěma čísly $+\infty$, $-\infty$. V této kapitole bude vhodnější, doplniti ji jediným číslem ∞.[6]) Tím dostáváme prostor, který jsme

[6]) Tohoto rozšíření se častěji užívá v oboru komplexních čísel, ale my se zde omezíme na reálná čísla.

v **D II**, kap. VI, § 4 (ke konci) označili $^*\boldsymbol{E}_1$. Tam jsme zavedli v tomto prostoru též metriku $^*\varrho$; zde však stačí připomenout, že v $^*\boldsymbol{E}_1$ znamená znak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ totéž jako $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ a že v souhlase s tím je také definována limita a spojitost funkce. Tak na př. klademe-li $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pro konečná reálná $x \neq 0$, $f(\infty) = 0$, $f(0) = \infty$, je f spojitá v $^*\boldsymbol{E}_1$ (je to dokonce homeomorfní zobrazení $^*\boldsymbol{E}_1$ na $^*\boldsymbol{E}_1$); v $\boldsymbol{E}_1^*$ by to nešlo, ježto v $\boldsymbol{E}_1^*$ máme v bodě 0 limitu zprava $+\infty$ a zleva $-\infty$. Číslu ∞ budeme zde říkati také reálné (a to nekonečné reálné) číslo.

Buďte nyní $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ konečná čísla (vše je v této kapitole reálné, pokud neřeknu výslovně nic jiného), $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Položme

(19) $$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

takže

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2} \neq 0, \text{ pokud } \gamma x + \delta \neq 0\,.$$

Doplňme zobrazení, dané rovnicí (19), tak, aby bylo spojité v $^*\boldsymbol{E}_1$. Rozeznávejme dva případy:

I. $\gamma \neq 0$. Potom je $\lim\limits_{x\to\infty} y = \dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}} y = \infty$. Doplňme tedy zobrazení (19) tak, že hodnotě $x = \infty$ přiřadíme $y = \alpha : \gamma$ a hodnotě $x = -\delta : \gamma$ přiřadíme $y = \infty$.

II. $\gamma = 0$. Potom je $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ a proto hodnotě $x = \infty$ přiřadíme $y = \infty$.

Takto doplněné zobrazení (19) nazveme lineární (lomenou) substitucí; je to spojité, ba dokonce homeomorfní zobrazení $^*\boldsymbol{E}_1$ na $^*\boldsymbol{E}_1$. Inversní zobrazení je opět lineární substituce, daná rovnicí

(20) $$x = \frac{\delta y - \beta}{-\gamma y + \alpha};$$

to souhlasí i pro $y = \alpha : \gamma$, $x = \infty$ a pro $y = \infty$, $x = -\delta : \gamma$ v případě I a pro $y = \infty$, $x = \infty$ v případě II.

Budiž

$$(20a)\qquad y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

také lineární substituce; potom substituce (19), (20a) jsou totožné (t. j. dávají pro každé x stejná y) tehdy a jen tehdy, jestliže existuje konečné $\lambda \neq 0$ tak, že $a = \lambda\alpha$, $b = \lambda\beta$, $c = \lambda\gamma$, $d = \lambda\delta$. Vše je tak jednoduché, že čtenář jistě nepotřebuje dalšího výkladu.

Poznámka 1. Jak to vypadá se zlomkem

$$(21)\qquad \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

když $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$? Potom buďto $\gamma = \delta = 0$ a zlomek nemá smyslu pro žádné konečné x; nebo existuje $\lambda \in \mathbf{E}_1$ tak, že $\alpha = \lambda\gamma$, $\beta = \lambda\delta$, načež zlomek má hodnotu λ pro všechna $x \in \mathbf{E}_1$, pro něž je definován. Tedy: nabývá-li zlomek (21) dvou různých konečných hodnot pro dvě konečné hodnoty x, je jistě $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, takže jde vskutku o lineární substituci v našem smyslu (to je někdy užitečné kriterium, jestliže α, β, γ, δ jsou dána složitými výrazy).

Důležitý pro nás bude pojem dvojpoměru čtyř reálných čísel. Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 čtyři různá čísla z $^*\mathbf{E}_1$ (jedno z nich může býti tedy též ∞), definujeme jejich dvojpoměr rovnicí

$$(22)\qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4};$$

přitom, je-li některé $x_j = \infty$, rozumím pod hodnotou zlomku vpravo jeho limitu pro $x_j \to \infty$. (Každé x_j se totiž vyskytuje v (22) vpravo jednou v čitateli a jednou ve jmenovateli, myslím-li si pravou stranu upravenu v jednoduchý zlomek; podíl příslušných činitelů má pak pro $x_j \to \infty$ limitu 1; tedy na př. $(\infty, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_4) : (x_2 - x_3)$, $(x_1, x_2, \infty, x_4) = (x_2 - x_4) : (x_1 - x_4)$ atd.) Vidíte, že dvojpoměr (22) je vždy konečné reálné číslo různé od 0, a to i když některé x_j jest ∞.[7]) Odvoďme (nebo vlastně zopakujme, asi je znáte) některé věty o dvojpoměru.

[7]) Stále ovšem předpokládám, že $x_1, \ldots, x_4$ jsou různá.

Věta A. *Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 čtyři různá čísla z $^*\mathsf{E}_1$, je jejich dvojpoměr konečné reálné číslo, různé od 0 a od 1. Naopak, je-li λ libovolné konečné reálné číslo, různé od 0 a od 1, a jsou-li x_2, x_3, x_4 libovolná tři různá čísla z $^*\mathsf{E}_1$, existuje jedno a jen jedno číslo $x_1 \in {}^*\mathsf{E}_1$, různé od x_2, x_3, x_4, pro něž jest $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda$.*

Důkaz. Buďte napřed x_2, x_3, x_4 různá konečná čísla; jde o rovnici

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \lambda\,, \quad \text{t. j.} \quad \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} = \lambda\,\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}\,. \tag{23}$$

Ježto $(x - x_3) : (x - x_4)$ je lineární substituce, tedy prosté zobrazení množiny $^*\mathsf{E}_1$ na $^*\mathsf{E}_1$, existuje ke každému $\lambda \in {}^*\mathsf{E}_1$ jedno a jen jedno $x_1 \in {}^*\mathsf{E}_1$ tak, že platí druhá rovnice (23); pro $\lambda = 0, 1, \infty$ vychází $x_1 = x_3, x_2, x_4$, tedy nikoliv různé od x_2, x_3, x_4; je-li však λ různé od 0, 1, ∞, vyjde x_1 různé od x_3, x_2, x_4. Je-li za druhé $x_2 = \infty$, je diskuse obdobná (pouze zlomek $(x_2 - x_3) : (x_2 - x_4)$ značí 1; pro $\lambda = 0, 1, \infty$ vyjde z (23) po řadě $x_1 = x_3$, $x_1 = \infty = x_2$, $x_1 = x_4$). Je-li za třetí $x_4 = \infty$, změní se (23) v $x_1 - x_3 = \lambda(x_2 - x_3)$ a opět existuje jedno a jen jedno x_1, vyhovující této rovnici; pro $\lambda = 0, 1, \infty$ vychází $x_1 = x_3$, $x_1 = x_2$, $x_1 = \infty = x_4$. Obdobně pro $x_3 = \infty$.

Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 různé prvky z $^*\mathsf{E}_1$, lze je uspořádati celkem $4! = 24$ způsoby; mezi příslušnými dvojpoměry jsou tyto vztahy:

Věta B. *Buďte x_1, x_2, x_3, x_4 čtyři různé prvky z $^*\mathsf{E}_1$; označme $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda$ Potom jest*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3) = (x_3, x_4, x_1, x_2) = (x_4, x_3, x_2, x_1)\,, \tag{24}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(x_2, x_1, x_3, x_4) = \frac{1}{\lambda}\,, && (x_1, x_3, x_2, x_4) = 1 - \lambda\,, \\ &(x_2, x_3, x_1, x_4) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}\,, && (x_3, x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{1 - \lambda}\,, \\ &(x_3, x_2, x_1, x_4) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Důkaz. (24) a první dvě rovnice z (25) plynou snadno z (23). Vyměním-li v první rovnici (25) x_1, x_3 a užiji druhé rovnice, dostanu třetí; vyměním-li v druhé x_1, x_3 a užiji první, dostanu čtvrtou; vyměním-li v třetí x_2, x_3 a užiji první, dostanu pátou.

Poznámka 2. Užijeme-li v (25) vzorce (24), dostaneme hodnotu dvojpoměru pro všech 24 permutací prvků x_j.

Poznámka 3. Z věty B plyne ihned: je-li $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, je také $(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4}) = (y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}, y_{j_4})$ pro libovolnou permutaci j_1, j_2, j_3, j_4 indexů 1, 2, 3, 4.

Věta C. *Dvojpoměr se nemění lineární substitucí. Podrobně: Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 různá čísla z $^*\mathsf{E}_1$, jimž odpovídají podle rovnice* (19) *čísla y_1, y_2, y_3, y_4, jest*

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,. \tag{26}$$

Důkaz. Buďte předně x_j konečná čísla, různá (v případě $\gamma \neq 0$) od $-\delta : \gamma$. Potom z (19) plyne ihned

$$y_1 - y_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(x_1 - x_3)}{(\gamma x_1 + \delta)(\gamma x_3 + \delta)}$$

a obdobně pro ostatní dvojice indexů. Dosazením do (y_1, y_2, y_3, y_4) a zkrácením obdržíme ihned (26). Jsou-li za druhé x_j libovolná, zvolme x'_j různá od ∞, $-\delta : \gamma$; buďte y'_j příslušná čísla, takže $(y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$; nechám-li x'_j konvergovati k x_j, mají y'_j za limity čísla y_j a poslední rovnice dává limitním přechodem (26).[8])

Věta D. *Buďte x_1, x_2, x_3 tři různé body z $^*\mathsf{E}_1$ a buďte y_1, y_2, y_3 rovněž tři různé body z $^*\mathsf{E}_1$. Potom existuje jedna a jen jedna lineární substituce, která zobrazuje bod x_1 na y_1, x_2 na y_2, x_3 na y_3.*

Důkaz. Je-li

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{27}$$

substituce s žádanými vlastnostmi, zobrazuje tato substituce každý bod x, různý od x_1, x_2, x_3, na bod y, vyhovující (viz větu C) rovnici

$$(x, x_1, x_2, x_3) = (y, y_1, y_2, y_3)\,. \tag{28}$$

Touto rovnicí je však bod y (při daném x) podle věty A jednoznačně určen, takže existuje nejvýše jedna taková lineární substituce. A ta-

---

[8]) Podrobnosti limitního přechodu jsou tak zřejmé (a nezajímavé), že je v tomto i podobných případech přenechávám čtenáři.

ková lineární substituce vskutku existuje, jak nyní ukážeme. Rozepíšeme-li totiž rovnici (28) obšírně, obdržíme

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x - x_2}{x - x_3} : \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}. \tag{29}$$

Vypočteme-li pak z této rovnice y, dostaneme rovnici tvaru (27), jež zobrazuje x_j na y_j ($j = 1, 2, 3$). Přenechal bych tuto snadnou úlohu čtenáři, ale budu některé výpočty v dalším potřebovati, a proto to provedu.

I. Buďte předně x_j, y_j vesměs konečná čísla. V (29) odstraníme formálně jmenovatele, napíšeme $y - y_3 = (y - y_2) + (y_2 - y_3)$ a obdržíme formálně

$$y - y_2 = \frac{(x - x_2)(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(x_3 - x_1)}{Px - Q}, \tag{30}$$

kde

$$P = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2), \tag{31}$$

$$Q = y_1x_1(x_2 - x_3) + y_2x_2(x_3 - x_1) + y_3x_3(x_1 - x_2). \tag{32}$$

To je rovnice, mající formálně tvar (27) (ještě bychom měli převést y_2 doprava a uvést na společného jmenovatele). Dosadíte-li $x = x_1, x_2, x_3$, vyjde z (30) vskutku $y = y_1, y_2, y_3$ (na př. pro $x = x_1$ vyjde $Px_1 - Q = (x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(y_2 - y_3) \neq 0$). Tedy je (30) vskutku lineární substituce (viz poznámku 1), jež zobrazuje x_1, x_2, x_3 po řadě na y_1, y_2, y_3.

II. Buďte y_1, y_2, y_3 konečná, ale na př. $x_3 = \infty$. Zvolme konečné x_3' různé od x_1, x_2, x_3 a budiž y_3' tak voleno, že

$$(x_3', x_1, x_2, x_3) = (y_3', y_1, y_2, y_3) \tag{33}$$

(viz větu A); přitom smíme předpokládati, že y_3' je konečné (kdyby bylo $y_3' = \infty$, změním x_3', tím se podle věty A změní dvojpoměr v (33) vlevo a tedy se změní y_3'). Podle případu I existuje lineární substituce, jež zobrazuje body x_1, x_2, x_3' na y_1, y_2, y_3'. Podle věty C zobrazuje tato lineární substituce bod x_3 na bod y, pro nějž $(y, y_1, y_2, y_3') = (x_3, x_1, x_2, x_3')$; podle věty A a podle pozn. 3 je vzhledem k (33) $y = y_3$. Tedy jsou body x_1, x_2, x_3 vskutku zobrazeny na y_1, y_2, y_3.

III. Buďte x_1, x_2, x_3 libovolná a na př. $y_3 = \infty$. Zvolme konečné y_3', různé od y_1, y_2, a určeme x_3' tak, aby platilo (33). Podle I, II existuje lineární substituce, jež zobrazuje x_1, x_2, x_3' na y_1, y_2, y_3'; podobně jako v II zjistíme, že bod x_3 je zobrazen na y_3.

Užijeme nyní dosavadních výsledků k tomu, abychom vyšetřili, jak se transformuje eliptický integrál (1), zavedeme-li v něm novou proměnnou y rovnicí (19), t. j. rovnicí (20). Do racionální funkce $R(x)$ dosadíme prostě za x podle rovnice (20) a jde nám tedy jen o to, jak se transformuje výraz $\mathrm{d}x : \sqrt{X}$; přitom budeme předpokládati, že mnohočlen X je třetího nebo čtvrtého stupně a že má reálné různé kořeny; vzhledem k tomu, co jsme řekli při vzorci (11), neznamená to žádné podstatné omezení. (Proč je účelno zabývati se také případem, že X je čtvrtého stupně, poznáme při úvahách o t. zv. Legendreově normálním tvaru v pozn. 6, v příkl. 2, 3 a v §§ 3, 4.) Výsledek, poučující nás o tom, jak se transformuje výraz $\mathrm{d}x : \sqrt{X}$, je dán touto větou:

Věta 259. *Budiž $A \neq 0$ konečné reálné číslo; buďte x_1, x_2, x_3, x_4 čtyři různá čísla z $^*\mathsf{E}_1$; buďte y_1, y_2, y_3, y_4 čtyři různá čísla z $^*\mathsf{E}_1$; budiž*

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{34}$$

lineární substituce, jež pro $j = 1, 2, 3, 4$ zobrazuje bod x_j na y_j.[9]) *Potom jest*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\dfrac{A(x-x_1)(x-x_2\,(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_4)(x_1-x_3)}}} &= \\ = \pm \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\dfrac{A(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\,y-y_4)}{(y_2-y_4)(y_1-y_3)}}}\end{aligned} \tag{35}$$

(pro všechna konečná x, různá od x_1, x_2, x_3, x_4, jimž odpovídá rovnici (34) *konečné y). Rovnice* (35) *platí i tehdy, je-li některé $x_j = \infty$ (po příp. $y_j = \infty$), v kterémžto případě je nutno nahraditi odmocninu vlevo (vpravo) její limitou pro $x_j \to \infty$ ($y_j \to \infty$).*

---

[9]) Pozor! Čísla x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 lze voliti libovolně; potom je podle věty D substituce (34) již určena. Číslo x_4 lze též voliti libovolně, ale číslo y_4 je již určeno: je to ono číslo, na něž je zobrazeno číslo x_4 substitucí (34).

Poznámka 4. Na př. pro $x_1 = \infty$ musíme vlevo klásti $(x - x_1) : (x_1 - x_3) = -1$; pro $y_4 = \infty$ musíme vpravo klásti $(y - y_4) : (y_2 - y_4) = 1$ atd. Znamení $\pm$ se řídí ovšem podle toho, zda $dy : dx$ je kladné či záporné, t. j. podle toho, zda funkce (34) je rostoucí či klesající v oněch intervalech, v nichž je konečná.

Důkaz. I. Buďte především všechna x_j, y_j konečná. Definujme P, Q rovnicemi (31), (32); potom substituce (34) (zobrazující x_1, x_2, x_3 na y_1, y_2, y_3) je dána rovnicí (30); ježto předpoklady jsou souměrné v indexech 1, 2, 3, a ježto se P, Q nemění cyklickou záměnou těchto indexů, můžeme místo (30) psáti hned tři rovnice:

$$y - y_1 = \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2)(x_2 - x_3)}{Px - Q}, \tag{36}$$

$$y - y_2 = \frac{(x - x_2)(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(x_3 - x_1)}{Px - Q}, \tag{37}$$

$$y - y_3 = \frac{(x - x_3)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(x_1 - x_2)}{Px - Q}. \tag{38}$$

Z rovnice $(y, y_2, y_4, y_1) = (x, x_2, x_4, x_1)$ plyne

$$y - y_4 = (y - y_1)\,\frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x - x_4}{x - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_4}.$$

Dosadím-li sem za $y - y_1$ podle (36), obdržím

$$y - y_4 = \frac{(x - x_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{(Px - Q)(x_2 - x_4)}. \tag{39}$$

Vynásobme (36) až (39) a položme pro krátkost

$$\begin{gathered}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = \Delta\,, \\ \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)} = \mu\,;\end{gathered} \tag{40}$$

vychází

$$\begin{gathered}A(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) = \\ = A\,\Delta^2\mu\,\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(Px - Q)^4}.\end{gathered} \tag{41}$$

Z rovnice (36) plyne

$$\mathrm{d}y = (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)(x_2 - x_3) \cdot \frac{Px_1 - Q}{(Px - Q)^2}\,\mathrm{d}x\,; \tag{42}$$

z výrazu pro $y - y_2$ (rovnice (37)) vypočteme $Px_1 - Q = (x_1 - x_2)$ . . $(x_3 - x_1)(y_2 - y_3)$, takže (42) dává

$$\mathrm{d}y = \frac{\Delta\,\mathrm{d}x}{(Px - Q)^2}\,; \tag{43}$$

vezmeme-li v (41) na obou stranách odmocninu a dělíme-li (43) rovnicí tak vzniklou, obdržíme (35).

II. Odmocninu v (35) vlevo označme $F(x, x_1, x_2, x_3, x_4)$, takže (35) lze psáti

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\,\frac{F(y, y_1, y_2, y_3, y_4)}{F(x, x_1, x_2, x_3, x_4)}\,.\text{[10]} \tag{44}$$

Buďte nyní x_j, y_j libovolná. Jsou-li x_1', x_2', x_3', x_4' konečná čísla, jež substituce (34) zobrazuje na konečná čísla y_1', y_2', y_3', y_4', je podle I

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\,\frac{F(y, y_1', y_2', y_3', y_4')}{F(x, x_1', x_2', x_3', x_4')}\,. \tag{45}$$

Nechme nyní (při pevném x, y) konvergovati x_j' k x_j (načež ovšem y_j' konvergují k y_j, neboť označím-li levou stranu v (34) $y(x)$, je $\lim\limits_{x\to x_j} y(x) = y(x_j) = y_j$); potom levá strana v (45) zůstává pevná (jde stále o derivaci téže funkce (34) v témž bodě x), kdežto pravá strana v (45) má za limitu pravou stranu v (44); tedy platí (44) (t. j. (35)) i v tomto obecném případě.

Poznámka 5. Je-li na př. některé $x_j = \infty$, ale všechna y_j konečná, slouží (35) k transformaci eliptického integrálu, patřícího k mnohočlenu 3. stupně, v eliptický integrál, patřící k mnohočlenu 4. stupně. Je-li též některé $y_k = \infty$, patří oba integrály k mnohočlenům 3. stupně. Osvětlíme použití věty 259 na několika příkladech, omezujíce se na takové, jež budou pro naše další úvahy důležité.

---

[10]) Výraz $F(x, x_1, x_2, x_3, x_4)$ má smysl, i když některé $x_j = \infty$ (pak se F bere v limitním smyslu, vyloženém ve větě 259). Ovšem rovnost (44) byla dosud dokázána jen pro konečná x_j, y_j.

Příklad 1. Hledejme lineární substituci (34), která převádí integrál ve tvaru Riemannově

$$\int R(x)\,\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \qquad (0 < k < 1) \tag{46}$$

opět na integrál ve tvaru Riemannově, při čemž y roste od 0 do 1, když x roste od $-\infty$ do 0. Hodnoty x_j jsou tedy $0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$,[11]) hodnoty y_j jsou — až na pořádek — $0, 1, \frac{1}{k'^2}, \infty$, kde k' $(0 < k' < 1)$ je dosud neznámý modul. Kladu-li $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{1}{k^2}$, má y růsti od 0 do 1, když x roste od $-\infty$ do 0; tedy $y_1 = 0$, $y_2 = 1$; ježto má y být ros oucí, dokud nenabude hodnoty ∞, nemůže býti $y_3 = \infty$, $y_4 = \frac{1}{k'^2}$ a musí tedy býti $y_3 = \frac{1}{k'^2}$, $y_4 = \infty$. Máme tedy tuto tabulku:

x_1	x_2	x_3	x_4
∞	0	1	k^{-2}
y_1	y_2	y_3	y_4
0	1	$(k')^{-2}$	∞

Hledanou substituci napíšeme ve tvaru[12]) $(y, y_4, y_1, y_2) = (x, x_4, x_1, x_2)$, t. j.

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} : \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2} = \frac{x-x_1}{x-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{y}{y-1} = \frac{k^{-2}}{x},$$

$$y = \frac{1}{1-k^2x}. \tag{47}$$

Pro $x = x_3 = 1$ vychází $y_3 = \frac{1}{k'^2} = \frac{1}{1-k^2}$, tedy

$$k' = \sqrt{1-k^2}. \tag{48}$$

[11]) Jde o mnohočleny 3. stupně.

[12]) Neužívám indexu 3, ježto k' ještě neznám.

Modul k', daný rovnicí (48), nazýváme modulem **komplementárním** k modulu k; ovšem k je pak komplementární modul ke k'.

Vzorec (35) dává pak ($A = k^2$, neboť $x(1-x)(1-k^2x)$ má při x^3 součinitele k^2)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\dfrac{k^2x(x-1)(x-k^{-2})}{-k^{-2}}}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\dfrac{k^2y(y-1)(y-k'^{-2})}{-k'^{-2}}}},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{-y(1-y)(1-k'^2y)}}. \tag{49}$$

Tím je transformace integrálu (46) provedena — stačí ještě do $R(x)$ zavésti

$$x = \frac{y-1}{k^2y}.$$

Poznámka 6. Transformací (47) odpovídají hodnotám x intervalu $(-\infty, 0)$ hodnoty y intervalu $(0, 1)$ a hodnotám x intervalu $(1, k^{-2})$ hodnoty y intervalu $(k'^{-2}, +\infty)$. Je-li tedy x v $(-\infty, 0)$ nebo v $(1, k^{-2})$, lze (46) převésti na integrál

$$\int R_1(y)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1-y)(1-k'^2y)}}, \tag{50}$$

kde y je v $(0, 1)$ nebo v $(k'^{-2}, +\infty)$ (nezapomeňte ovšem na znamení minus pod odmocninou v (49) vpravo). Je-li zde y v intervalu $(k'^{-2}, +\infty)$, vede substituce

$$y = \frac{1}{k'^2u} \tag{51}$$

k integrálu tvaru

$$\begin{aligned} -\int R_1\left(\frac{1}{k'^2u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{k'^2u^2\sqrt{\dfrac{1}{k'^2u}\left(1-\dfrac{1}{k'^2u}\right)\left(1-\dfrac{1}{u}\right)}} &= \\ = \int\frac{R_2(u)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)(1-k'^2u)}}&, \end{aligned} \tag{52}$$

kde u je v $(0, 1)$. Je-li konečně x v intervalu $(k^{-2}, +\infty)$, vede obdobně substituce

$$x = \frac{1}{k^2 u}$$

od integrálu (46) k integrálu tvaru

$$\int \frac{R_3(u)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2u)}}, \tag{53}$$

kde u je opět v $(0, 1)$. Celkem tedy: Ať je x kdekoliv, můžeme integrál (46) převést na integrál tvaru (50) nebo (53), kde u je v $(0, 1)$. Neboli: jestliže vedle integrálů (46) (při daném k) vyšetřujeme současně též integrály téhož tvaru, ale s komplementárním modulem k', můžeme se omeziti na x v intervalu $(0, 1)$. Odtud plyne ještě tato důležitá poznámka: Je-li v (46) $0 < x < 1$ a zavedeme-li substituci $x = t^2$ $(0 < t < 1)$, dostaneme

$$2\int R(t^2)\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 < k < 1)\,. \tag{54}$$

To je t. zv. *Legendreův normální tvar* a na ten lze každý eliptický integrál převésti. Přitom, vyšetřujeme-li současně též integrály s komplementárním modulem k', můžeme se omeziti na interval $0 < t < 1$.

Zavedeme-li do integrálů 1., 2. a 3. druhu v Riemannově tvaru (viz (12), (14)) substituci $x = t^2$, obdržíme tyto integrály v Legendreově tvaru (píši $T = (1 - t^2)(1 - k^2t^2)$):

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-\alpha)\sqrt{T}}; \tag{55}$$

podmínka $\alpha(1-\alpha)(1-k^2\alpha) \neq 0$ praví, že $\alpha \neq 0, 1, k^{-2}$; dělíme-li $t^2 - \alpha$ číslem $-\alpha$ a píšeme-li $-\dfrac{1}{\alpha} = m$ (tedy $m \neq 0, -1, -k^2$), lze poslední integrál, až na konstantního činitele, psáti ve tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+mt^2)\sqrt{T}} \quad (m \neq 0, -1, -k^2)\,. \tag{56}$$

Často je výhodno, psáti v Legendreově tvaru $t = \sin\varphi$; omezujeme-li se na interval $0 < t < 1$, můžeme se omeziti na hodnoty $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

Integrály prvního, druhého a třetího druhu mají pak tvar

$$
(57) \quad
\begin{aligned}
K_0 &= \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K_1 = \int \frac{\sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \\
&\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + m \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.
\end{aligned}
$$

Místo K_1 můžeme vzíti též

$$
(58) \quad L = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, \mathrm{d}\varphi = \int \frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \mathrm{d}\varphi = K_0 - k^2 K_1;
$$

známe-li K_0, K_1, známe též K_0, L a naopak.

Příklad 2. Hledejme lineární substituci, jež převádí Riemannův tvar v Riemannův tvar a to tak, že y klesá od 1 k 0, když x roste od 0 k 1. Hodnoty x_j jsou tedy (až na pořádek) 0, 1, k^{-2}, ∞, hodnoty y_j jsou 0, 1, l^{-2}, ∞ (modul l dosud neznáme). Ježto y má být klesající funkce, bude tabulka tato:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	k^{-2}	∞
y_1	y_2	y_3	y_4
1	0	∞	l^{-2}

Substituce jest

$$
(59) \quad \frac{y - 1}{y} = \frac{x}{x - 1} : \frac{1}{1 - k^2},
$$

odtud pak $y = \dfrac{x - 1}{k^2 x - 1}$ a dosazením $x = x_4 = \infty$ (t. j. limitním přechodem $x \to \infty$) vyjde $y_4 = l^{-2} = k^{-2}$, t. j. $l = k$ a z (35) plyne

$$
(60) \quad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)}} = - \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1 - y)(1 - k^2 y)}}.
$$

Zavedením $x = t^2$, $y = u^2$ ($t > 0$, $u > 0$) obdržíme příslušnou transformaci pro Legendreův tvar:

$$
(61) \quad u^2 = \frac{t^2 - 1}{k^2 t^2 - 1}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = - \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}
$$

$(0 < t < 1,\ 0 < u < 1)$. Substitucí $t = \sin\varphi$, $u = \sin\varphi'$ $(0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, $0 < \varphi' < \frac{1}{2}\pi)$ plyne konečně

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = -\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi'}}\,. \tag{62}$$

Vztah mezi φ, φ' plyne z první rovnice (61):

$$\sin^2\varphi' = \frac{\cos^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi}\,,\quad \cos^2\varphi' = 1 - \sin^2\varphi' = \frac{k'^2\sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi}\,,$$

načež dělením a odmocněním

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1}{k'}\quad (0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,,\quad 0 < \varphi' < \tfrac{1}{2}\pi)\,. \tag{63}$$

Tedy: jsou-li φ, φ' vázány vztahem (63), platí rovnice (62).

P ř í k l a d 3. Hledejme lineární substituci, jež převádí Legendreův tvar v Riemannův tak, že y roste od 0 do 1, když x roste od -1 do 1. Hodnoty x_j jsou zde kořeny mnohočlenu $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$, takže příslušná tabulka a substituce jsou tyto:

x_1	x_2	x_3	x_4
$-k^{-1}$	-1	1	k^{-1}
y_1	y_2	y_3	y_4
∞	0	1	l^{-2}

$$y = \frac{x + 1}{x + k^{-1}} : \frac{2}{1 + k^{-1}} = \frac{k + 1}{2}\cdot\frac{1 + x}{1 + kx}\,. \tag{64}$$

Nový modul l plyne dosazením $x = x_4$:

$$y_4 = l^{-2} = \frac{k + 1}{2}\cdot\frac{1 + k^{-1}}{2} = \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{k}\,,\quad l = \frac{2\sqrt{k}}{k + 1}\,. \tag{65}$$

Podle (35) vychází

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\dfrac{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}{(1 + k^{-1})^2}}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\dfrac{k^2y(y - 1)(y - l^{-2})}{l^{-2}}}}\,,\\ \frac{k + 1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1 - y)(1 - l^2y)}}\,.\end{gathered} \tag{66}$$

Abychom dostali též vpravo Legendreův tvar, klaďme $y = z^2$, $z = \sqrt{y}$ (tedy z beru kladně) a obdržíme: je-li

$$z^2 = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1+x}{1+kx} \; (|x| < 1,\ z > 0),\ l = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}, \tag{67}$$

jest

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-l^2z^2)}}. \tag{68}$$

§ 3. Výpočet eliptických integrálů 1. a 2. druhu řadami. První dva paragrafy byly věnovány integrálům neurčitým, a to hlavně jejich *transformaci*. Můžeme ovšem výsledků oněch paragrafů užíti též na integrály určité; k tomu bych pouze podotkl tuto maličkost: Vyšetřujeme-li určitý integrál

$$\int_a^b R(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \tag{69}$$

nevadí, jestliže interval $\langle a, b \rangle$ obsahuje některé kořeny mnohočlenu X (o nichž předpokládám, že jsou jednoduché). Vadilo by pouze, kdyby interval $\langle a, b \rangle$ obsahoval kořeny jmenovatele racionální funkce $R(x)$ (někdy by také mohly vaditi nekonečné meze). Tento a příští paragraf věnujeme *výpočtu* určitých integrálů eliptických; přitom vyjdeme z Legendreova tvaru a omezíme se na integrály 1. a 2. druhu[13]) (viz (57), (58)). Klaďme tedy (opírajíce se o pozn. 6 v § 2)

$$F(k, \Phi) = \int_0^\Phi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k, \Phi) = \int_0^\Phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, \mathrm{d}\varphi;^{14)} \tag{70}$$

přitom se omezíme na interval $0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi$ (krajní hodnoty 0, $\frac{1}{2}\pi$ teď u určitých integrálů ovšem také připouštíme jako meze). Současně budeme vyšetřovati také integrály $F(k', \Phi)$, $E(k', \Phi)$ s komplementárním modulem k' ($0 < k < 1$, $0 < k' < 1$, $k^2 + k'^2 = 1$). Zvláště

---

[13]) Integrály 3. druhu obsahují ještě o jeden parametr m více (viz (57)) a vedly by nás k složitějším výpočtům.

[14]) Skutečně ty integrály závisí na horní mezi Φ a na modulu k.

důležité jsou t. zv. úplné integrály (pro $\Phi = \frac{1}{2}\pi$), jež označíme krátce

$$K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi),\ K' = F(k', \tfrac{1}{2}\pi),\ E = E(k, \tfrac{1}{2}\pi),\ E' = E(k', \tfrac{1}{2}\pi)\,. \tag{71}$$

Podle binomické řady máme pro každé reálné φ a pro $0 < k < 1$

$$\begin{aligned}(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} k^4 \sin^4 \varphi + \ldots + \\ &+ \frac{1\,.\,3 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4 \ldots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \varphi + \ldots\,,\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \tfrac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4} k^4 \sin^4 \varphi - \ldots - \\ &- \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-3)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8 \ldots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \varphi - \ldots\end{aligned} \tag{73}$$

K oběma těmto řadám je majorantní řadou (v intervalu $-\infty < \varphi < +\infty$) řada

$$1 + \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}k^4 + \ldots + \tfrac{1}{2}k^{2n} + \ldots\,; \tag{74}$$

řady (72), (73) konvergují tedy stejnoměrně (vzhledem k proměnné φ) v $(-\infty, +\infty)$ a můžeme je tedy integrovati člen po členu. K tomu cíli potřebujeme integrály

$$I_{2n} = \int_0^{\Phi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{75}$$

Jest $I_0 = \Phi$; odvoďme rekurentní formuli ($n > 0$, n celé):

$$\begin{aligned}I_{2n} &= -\sin^{2n-1} \Phi \cos \Phi + \int_0^{\Phi} (2n-1) \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \\ &= -\sin^{2n-1} \Phi \cos \Phi + (2n-1)(I_{2n-2} - I_{2n})\,,\end{aligned}$$

$$I_{2n} = -\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} \Phi \cos \Phi + \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \tag{76}$$

a odtud indukcí

$$\begin{aligned}I_{2n} &= \frac{1\,.\,3 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4 \ldots 2n} I_0 - \\ &- \sin \Phi \cos \Phi \left(\frac{1}{2n} \sin^{2n-2} \Phi + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \sin^{2n-4} \Phi + \ldots + \right. \\ &\left. + \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots 5\,.\,3}{2n\,.\,(2n-2) \ldots 6\,.\,4\,.\,2}\right)\,.\end{aligned} \tag{77}$$

Položme

(78) $$c_0 = 1,\ c_n = \frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,\ldots\,2n}\quad (n > 0),$$

$$g_n(\xi) = 1 + \frac{2}{3}\,\xi + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\,\xi^2 + \ldots + \frac{2\,.\,4\,\ldots\,(2n-2)}{3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}\,\xi^{n-1};$$

potom lze (77) psáti

(79) $$I_{2n} = c_n\Phi - \sin\Phi\cos\Phi\, c_n g_n(\sin^2\Phi)\ \text{pro}\ n = 1, 2, \ldots$$

Pro pozdější potřebu spočtěme ještě integrály

(80) $$J_{2n} = \int_0^{\Phi} \frac{\sin^{2n}\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\Phi} \mathrm{tg}^{2n}\varphi\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi},$$

ovšem za předpokladu $0 \leqq \Phi < \frac{1}{2}\pi$. Rekurentní formule ($n > 0$, n celé):

(81) $$J_{2n} = \frac{\sin^{2n-1}\Phi}{\cos^{2n+1}\Phi}\,.\,(-\cos\Phi) + {} + \int_0^{\Phi} \cos\varphi\left((2n-1)\,\frac{\sin^{2n-2}\varphi}{\cos^{2n}\varphi} + (2n+1)\,\frac{\sin^{2n}\varphi}{\cos^{2n+2}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\,.$$

Poslední integrál je $(2n-1)\,.\,J_{2n-2} + (2n+1)\,J_{2n}$, takže vychází

(82) $$J_{2n} = \frac{\mathrm{tg}^{2n-1}\Phi}{2n\cos\Phi} - \frac{2n-1}{2n}\,J_{2n-2}\,.$$

To je podobná rekurentní formule jako (76); pouze místo sin je zde tg, místo $\cos\Phi$ je $1 : \cos\Phi$ a znamení jsou změněna; místo (79) dostaneme proto rovnici (ověřte ji indukcí!)

(83) $$J_{2n} = (-1)^n\,c_n J_0 + (-1)^{n-1}\,\frac{\mathrm{tg}\,\Phi}{\cos\Phi}\,c_n g_n(-\mathrm{tg}^2\Phi)\ \text{pro}\ n = 1, 2, \ldots;$$

přitom

(84) $$J_0 = \int_0^{\Phi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \lg\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi)\,.$$

Z (72), (73), (70) plyne (podle definice čísel c_n)

$$F(k, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n} I_{2n}\,, \quad E(k, \Phi) = \Phi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2n-1} k^{2n} I_{2n}\,.$$

Dosadíme-li za I_{2n} podle (79), obdržíme

$$(85) \qquad F(k, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n} \Phi - \sin \Phi \cos \Phi \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n} g_n(\sin^2 \Phi)\,,$$

$$E(k, \Phi) = \Phi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1} \Phi + \sin \Phi \cos \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1} g_n(\sin^2 \Phi)\,.$$
(86)

Pro $\Phi = \frac{1}{2}\pi$ dostáváme jednoduché řady

$$(87) \quad K = \tfrac{1}{2}\pi\, \mathfrak{K}, \text{ kde } \mathfrak{K} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \right)^2 k^{2n}\,,\text{[15]}$$

$$(88) \qquad E = \tfrac{1}{2}\pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \right)^2 . \frac{k^{2n}}{2n-1} \right).$$

Abychom si učinili představu, jak rychle tyto řady konvergují, poznamenejme: Pro $0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi$ je podle (75) $0 \leqq I_{2n} \leqq \frac{1}{2}\pi$; v (79) je vpravo menšenec i menšitel nezáporný, $0 < c_n \leqq 1$, tedy $0 \leqq c_n \Phi \leqq \leqq \frac{1}{2}\pi$, $0 \leqq \sin \Phi \cos \Phi\, c_n g_n(\sin^2 \Phi) \leqq \frac{1}{2}\pi$. Všechny čtyři řady v (85), (86) mají tedy v intervalu $0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi$ společnou majorantní řadu

$$(89) \qquad \tfrac{1}{2}\pi(1 + k^2 + k^4 + k^6 + \ldots)$$

a konvergují tedy dosti dobře, není-li k blízko jedničky. Je-li však k blízko jedničky, je na snadě tato myšlenka: Řady v (85) až (88) postupují podle mocnin čísla k; je-li k blízko 1, je $k' = \sqrt{1 - k^2}$ blízko 0 a budou tedy asi výhodnější řady, postupující podle mocnin čísla k'. Proveďme to. Je $1 - k^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - k^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi \,.$ $.\, (1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)$. Je-li $0 \leqq k' \operatorname{tg} \varphi < 1$, můžeme užíti binomické řady (omezíme se pro krátkost na integrály 1. druhu; o integrálech 2. druhu viz cvič. 2)

$$(90) \qquad (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{1}{2} k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} k'^4 \operatorname{tg}^4 \varphi - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} k'^6 \operatorname{tg}^6 \varphi + \ldots \right).$$

[15]) První člen (pro $n = 0$) značí jedničku.

Vyhovuje-li číslo Φ $(0 \leqq \Phi < \frac{1}{2}\pi)$ nerovnosti

$$k' \operatorname{tg} \Phi < 1 , \tag{91}$$

má řada (90) v intervalu $0 \leqq \varphi \leqq \Phi$ majorantní řadu

$$\frac{1}{\cos \Phi} (1 + (k' \operatorname{tg} \Phi)^2 + (k' \operatorname{tg} \Phi)^4 + \ldots) ; \tag{92}$$

lze tedy integrovati člen po členu a vyjde (viz (80), (78))

$$F(k, \Phi) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n k'^{2n} J_{2n} .$$

Dosadíme-li za J_{2n} podle (83) a potom za J_0 podle (84), obdržíme

$$F(k, \Phi) = \Re' \lg \operatorname{tg} (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi) - \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\cos \Phi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} g_n(-\operatorname{tg}^2 \Phi) , \tag{93}$$

kde

$$\Re' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} . \tag{94}$$

Podmínka (91) omezuje značně použitelnost rovnice (93); je-li Φ dosti blízko $\frac{1}{2}\pi$, není (91) jistě splněna; speciálně nelze tak počítati úplné integrály $(\Phi = \frac{1}{2}\pi)$. Můžeme si však vypomoci tímto obratem: zavedu-li do $F(k, \Phi)$ místo integrační proměnné φ novou integrační proměnnou φ' rovnicí

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi' = \frac{1}{k'} \qquad (0 \leqq \varphi' \leqq \tfrac{1}{2}\pi , \text{ viz příkl. 2 v § 2, (63))} , \tag{95}$$ [16])

bude mezi $\varphi = 0$ odpovídati mez $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$ a mezi Φ mez Φ', definovaná rovnicí

$$\operatorname{tg} \Phi \operatorname{tg} \Phi' = \frac{1}{k'} \quad (0 \leqq \Phi' \leqq \tfrac{1}{2}\pi) . \tag{96}$$

Podle citovaného příkladu bude pak (viz (62))

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\Phi'} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\Phi'} ,$$

[16]) Hodnotě $\varphi = 0$ odpovídá ovšem hodnota $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$ a hodnotě $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ hodnota $\varphi' = 0$.

t. j.

$$F(k, \Phi) = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k, \Phi') . \tag{97}$$

Volím-li $\Phi = \Phi_0$ tak, že

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{k'}} , \tag{98}$$

bude v (96) též $\Phi' = \Phi_0$ a rovnice (97) dává

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = 2F(k, \Phi_0) . \tag{99}$$

Z (97), (99) je viděti, že dovedeme vypočísti $F(k, \Phi)$ pro všechna Φ (stále se ovšem omezujeme na interval $\langle 0, \tfrac{1}{2}\pi \rangle$), dovedeme-li vypočísti $F(k, \Phi)$ pro $\Phi \leqq \Phi_0$. Neboť je-li $\Phi > \Phi_0$, tedy $\operatorname{tg} \Phi > \frac{1}{\sqrt{k'}}$, bude v (96) $\operatorname{tg} \Phi' < \frac{1}{\sqrt{k'}}$, tedy $\Phi' < \Phi_0$, a z (97), (99) je viděti, že k výpočtu $F(k, \Phi)$ stačí, vypočteme-li $F(k, \Phi')$ a $F(k, \Phi_0)$.

Je-li však $\Phi \leqq \Phi_0$, je

$$\operatorname{tg} \Phi \leqq \frac{1}{\sqrt{k'}} < \frac{1}{k'} , \tag{100}$$

takže podmínka (91) je splněna, a smíme tedy použíti rovnice (93). Můžeme tedy užíti rovnice (93) k výpočtu $F(k, \Phi)$ pro **všechna** Φ: Je-li předně $\Phi \leqq \Phi_0$ (kde Φ_0 je dáno rovnicí (98)), počítám $F(k, \Phi)$ přímo z (93); je-li za druhé $\Phi = \tfrac{1}{2}\pi$, užiji rovnice (99) a počítám $F(k, \Phi_0)$ z (93); je-li konečně $\Phi_0 < \Phi < \tfrac{1}{2}\pi$, určím Φ' z (96) (takže $\Phi' < \Phi_0$), užiji rovnic (97), (99) a počítám $F(k, \Phi_0)$, $F(k, \Phi')$ z (93). Jak rychle konvergují řady v (93), (94), splňuje-li Φ podmínku (100)? (Právě jsme zjistili, že se můžeme na taková Φ omeziti.) Abychom to zjistili, odhadneme napřed $g_n(-\operatorname{tg}^2 \Phi)$. Položme tedy $\xi = -\operatorname{tg}^2 \Phi$; součet $1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^q$ má pak pro $0 \leqq q \leqq n - 1$ prostou hodnotu

$$\left| \frac{1 \pm \xi^{q+1}}{1 - \xi} \right| \leqq \frac{1 + \operatorname{tg}^{2q+2} \Phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi} \leqq \frac{1 + k'^{-q} . \operatorname{tg}^2 \Phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi} \leqq \frac{1}{k'^q} \leqq \frac{1}{k'^{n-1}} .$$

Můžeme tedy užíti na $g_n(\xi)$ Abelova lematu (**D II**, věta 43), klademe-li

$$a_j = \xi^j,\ \varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \frac{2}{3},\ \varepsilon_2 = \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5},\ \ldots,\ A = \frac{1}{k'^{n-1}},\ B = -\frac{1}{k'^{n-1}}$$

a obdržíme (ježto $0 < c_n \leqq 1$)

$$(101) \qquad |g_n(-\operatorname{tg}^2 \Phi)| \leqq \frac{1}{k'^{n-1}}, \quad |c_n^2 k'^{2n} g_n(-\operatorname{tg}^2 \Phi)| \leqq k'^{n+1},$$

takže řada v (93) vpravo má v intervalu $\langle 0, \Phi_0 \rangle$ majorantní řadu

$$(102) \qquad k' + k'^2 + k'^3 + \ldots$$

Řada v (94) má ovšem majorantní řadu $1 + k'^2 + k'^4 + \ldots$, která vzhledem k nerovnostem $0 < k' < 1$ konverguje ještě rychleji než (102).

Máme tedy pro každé k pro výpočet integrálu $F(k, \Phi)$ k disposici dvě řady: jednak řadu (85), jež konverguje aspoň tak rychle jako geometrická řada (89) o kvocientu k^2, jednak řadu (93) (které ovšem v případě $\operatorname{tg} \Phi > 1 : \sqrt{k'}$ užijeme nikoliv pro hodnotu Φ, nýbrž pro hodnoty Φ_0, Φ', definované rovnicemi (98), (96)), jež konverguje aspoň tak rychle jako geometrická řada (102) o kvocientu k'. Přirozeně bychom se při numerickém výpočtu rozhodli pro tu řadu, při které máme zaručenu rychlejší konvergenci; t. j. při $k^2 \leqq k'$ (t. j. při $k^4 \leqq 1 - k^2$) pro řadu (85), při $k^2 > k'$ (t. j. při $k^4 > 1 - k^2$) pro řadu (93). Ihned zjistíte, že rovnost $k^4 = 1 - k^2$ platí pro $k^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0{,}618\ldots < 0{,}62$,[17]) nerovnost $k^2 < k'$ platí pak pro $k^2 < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, nerovnost $k^2 > k'$ platí pro $k^2 > -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, načež jest ovšem $k' < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.[18]) V každém případě máme tedy k disposici řadu, jež konverguje rychleji než geometrická řada o kvocientu 0,62. Nejnepříznivější případ máme pro $k^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$; je-li k blízko 0 nebo blízko 1, jest ovšem konvergence příslušné řady daleko rychlejší.

Všimněme si ještě této otázky: Integrály

$$F(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

---

17) Omezujeme se ovšem na hodnoty intervalu $0 < k < 1$.

18) Neboť pro $k^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ je $k' = k^2$ a při rostoucím k číslo k' klesá.

jsme definovali pro $0 < k < 1$. Co se děje s těmito integrály, když k se blíží nule nebo jedničce (při pevném Φ, $0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi$)? Zřejmě je $\lim\limits_{k \to 0+} F(k, \Phi) = \lim\limits_{k \to 0+} E(k, \Phi) = \int\limits_0^\Phi \mathrm{d}\varphi = \Phi$ pro $0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\lim\limits_{k \to 1-} E(k, \Phi) = \int\limits_0^\Phi \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \sin \Phi$ pro $0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\lim\limits_{k \to 1-} F(k, \Phi) = \int\limits_0^\Phi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos \varphi} = \lg \operatorname{tg} (\frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{4}\pi)$ pro $0 \leqq \Phi < \frac{1}{2}\pi$. Zbývá $\lim\limits_{k \to 1-} F(k, \frac{1}{2}\pi)$. Z poslední rovnice plyne pro každé $\Phi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

$$\liminf_{k \to 1-} F(k, \tfrac{1}{2}\pi) \geqq \liminf_{k \to 1-} F(k, \Phi) = \lg \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\pi) ,$$

tedy $\lim\limits_{k \to 1-} F(k, \frac{1}{2}\pi) = +\infty$, neboť v předešlé nerovnosti smíme Φ voliti libovolně blízko $\frac{1}{2}\pi$. Studujme podrobněji, jak rychle vzrůstá $F(k, \frac{1}{2}\pi)$ pro $k \to 1 -$. Ježto potom $k' = \sqrt{1 - k^2} \to 0$, definujme Φ_0 rovnicí (98), užijme vzorce (99) a $F(k, \Phi_0)$ vypočtěme z (93) pro $\Phi = \Phi_0$. Je

$$\operatorname{tg}^2 \Phi_0 = \frac{1}{k'}, \quad \cos \Phi_0 = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1 + k'}} ,$$

tedy

$$\frac{\operatorname{tg} \Phi_0}{\cos \Phi_0} = \frac{\sqrt{1 + k'}}{k'} = \frac{1 + O(k')}{k'} \tag{103}$$

(vše pro $k' \to 0 +$). Dále podle (78) je

$$c_1^2 k'^2 g_1(-\operatorname{tg}^2 \Phi_0) = \tfrac{1}{4} k'^2 ; \tag{104}$$

pro $n > 1$ je pak podle (101)

$$|c_n^2 k'^{2n} g_n(-\operatorname{tg}^2 \Phi_0)| \leqq k'^{n+1} . \tag{104a}$$

Dále (viz (94))

$$\mathfrak{R}' = 1 + O(k'^2) . \tag{105}$$

Zbývá vypočísti $\lg \operatorname{tg} (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi_0)$. Položme $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Phi_0$, $z = \operatorname{tg} (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi_0)$. Podle vzorců pro $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ je

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{k'}} = \frac{2y}{1 - y^2}, \quad z = \frac{1 + y}{1 - y} ;$$

tedy

$$y = \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} = \frac{2(z^2-1)}{4z}.$$

To je rovnice pro z, z níž plyne (musíme vzíti kladný kořen) $z = \frac{1}{\sqrt{k'}} + \sqrt{\frac{1+k'}{k'}}$ a odtud

$$\lg z = \lg \frac{2}{\sqrt{k'}} + \lg\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+k'}\right). \tag{106}$$

Ale $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+k'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k' + O(k'^2) = 1 + w$, kde $w = \frac{1}{4}k' + O(k'^2)$. Ale pro $w \to 0$ je $\lg(1+w) = w + O(w^2)$, takže

$$\lg\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+k'}\right) = \tfrac{1}{4}k' + O(k'^2). \tag{107}$$

Z (93), (105), (106), (107), (103), (104), (104a) plyne

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = 2F(k, \Phi_0) =$$
$$= 2(1 + O(k'^2))\left(\lg\frac{2}{\sqrt{k'}} + \frac{1}{4}k' + O(k'^2)\right) -$$
$$- 2 \cdot \frac{1 + O(k')}{k'} \cdot \left(\frac{1}{4}k'^2 + O(k'^3)\right),$$

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \lg\frac{4}{k'} + O\left(k'^2 \cdot \lg\frac{1}{k'}\right). \tag{108}$$

Ježto pro $k' \to 0+$ je $\lg\frac{1}{k'} = O\left(\frac{1}{k'^{\varepsilon}}\right)$ pro každé $\varepsilon > 0$, má poslední člen v (108) limitu 0 pro $k \to 1-$. (108) je hledaný vzorec; z něho speciálně plyne

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) \cong \lg\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \quad \text{pro } k \to 1-, \tag{109}$$

ale (108) říká ovšem více.

Cvičení

1. Při pevném Φ $(0 \leqq \Phi \leqq \frac{1}{2}\pi)$ jsou $F(k, \Phi)$, $E(k, \Phi)$ funkce proměnné k $(0 < k < 1)$ nebo — chcete-li — funkce proměnné k'. Dokažte rovnice

$$(110)\qquad \begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{E(k, \Phi)}{k}\right) = -\frac{F(k, \Phi)}{k^2}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\,(kF(k, \Phi)) = \frac{E(k, \Phi)}{k'^2} - \frac{k^2 \sin \Phi \cos \Phi}{k'^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}}\,. \end{gathered}$$

Návod: První rovnici dostanete ihned. Druhou můžete ovšem snadno ověřiti. Ale mysleme si, že nevíme, co má vyjít. Potom levá strana jest

$$\int_0^{\Phi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{X} \frac{\mathrm{d}x}{(1 - k^2x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

(substituce $x = \sin \varphi$, $X = \sin \Phi$). Na tento integrál užijte výsledku cvič. 1 v **J I**, kap. XI, § 2.

2. Z první rovnice (110) a z (85) dostanete ihned (86). Z druhé rovnice (110) a z (93) dostanete rozvoj $E(k, \Phi)$ podle mocnin k' $\left(\text{užijte toho, že } \frac{\mathrm{d}f(k')}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}f(k')}{\mathrm{d}k'} \cdot \left(-\frac{k}{k'}\right)\right)$; vyjde (pro $0 < \Phi < \frac{1}{2}\pi$, $0 < k' < 1$, $k' < (\operatorname{tg} \Phi)^{-1}$)

$$(111)\qquad \begin{gathered} E(k, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} k'^{2n}((2n - 1)\, c_{n-1}^2 - 2nc_n^2) \lg \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi) + \\ + \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\cos \Phi} \sum_{n=1}^{\infty} k'^{2n}(2nc_n^2\, g_n(-\operatorname{tg}^2 \Phi) - (2n - 1)\, c_{n-1}^2 g_{n-1}(-\operatorname{tg}^2 \Phi)) + \\ + (1 - k'^2) \sin \Phi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \operatorname{tg}^{2n} \Phi k'^{2n} \end{gathered}$$

(klademe $g_0(\xi) = 0$).

3. Pro $\Phi = \frac{1}{2}\pi$ dostáváme z (110) rovnice

$$(112)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{E}{k}\right) = -\frac{K}{k^2}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\,(kK) = \frac{E}{k'^2}\,.$$

Odtud snadno zjistíme, že platí rovnice

$$(113)\qquad k(1 - k^2)\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}k^2} + (1 - 3k^2)\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k} - kK = 0\,.$$

Rovnice (112) lze však (viz poznámku v cvič. 2) psáti též

(114) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k'}\left(\frac{E}{k}\right) = \frac{k'K}{k^3}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k'}(kK) = -\frac{E}{kk'}$$

a odtud zjistíte, že platí rovnice

(115) $$k'(1 - k'^2)\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}k'^2} + (1 - 3k'^2)\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k'} - k'K = 0\,.$$

Píšete-li v (113) k', K' místo k, K, vidíte, že diferenciální rovnici (115) vyhovuje nejenom funkce K, nýbrž i funkce K' a tedy i řada $\mathfrak{R}' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k'^{2n}$.

4. Uvažte, že funkce označené v (103), (107) znakem $O(k')$, $O(k'^2)$ lze pro $0 < k' < 1$ rozvinouti v řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k'^n$ resp. $\sum_{n=2}^{\infty} \mu_n k'^n$ a že rovněž platí rovnice tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} g_n\left(-\frac{1}{k'}\right) = \tfrac{1}{4}k'^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \varrho_n k'^n$$

(viz (78)). Následkem toho (93) pro $\mathrm{tg}^2\,\Phi_0 = 1 : k'$ dává

(116) $$K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = 2F(k, \Phi_0) = \mathfrak{R}' \lg\frac{4}{k'} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n k'^n\,;$$

koeficienty β_n nyní stanovíme. Dosadíme-li (116) do (115) a užijeme-li toho, že i řada $\mathfrak{R}'$ této rovnici vyhovuje, vidíme, že členy, obsahující činitele $\lg(4 : k')$, vypadnou, a vlevo zbude mocninná řada v k', jejíž součinitelé musí vesměs býti rovni nule (věta o neurčitých součinitelích). Vyjde předně $\beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = \ldots = \beta_{2n+1} = \ldots = 0$. Klademe-li za druhé $\beta_{2j} = \alpha_j c_j^2$, obdržíme $\alpha_{j+1} - \alpha_j = -\dfrac{2}{(2j+1)(2j+2)}$, načež lze (116) psáti ve tvaru

(117) $$K = \mathfrak{R}' \lg\frac{4}{k'} - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \left(\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\,2n}\right) k'^{2n}$$

5. Rovnice (112), (114) lze psáti ve tvaru (při čemž v rovnicích (114) zaměníme k s k')

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k} = \frac{E - K}{k}, \quad \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k} = \frac{E - k'^2K}{kk'^2}, \quad \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}k} = \frac{(K' - E')\,k}{k'^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}K'}{\mathrm{d}k} = \frac{k^2K' - E'}{kk'^2}.$$

Tyto rovnice lze zjednodušiti, zavedeme-li místo E, E' integrály

(118)
$$I = E - k'^2 K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k^2 \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$
$$I' = -E' + k^2 K' = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k'^2 \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Vyjde

(119)
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}k} = kK, \quad \frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}k} = kK', \quad \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k} = \frac{I}{kk'^2}, \quad \frac{\mathrm{d}K'}{\mathrm{d}k} = \frac{I'}{kk'^2}.$$

Z prvních dvou rovnic obdržíme integrací I, I'; snadno se přesvědčíme, že pro $k \to 0+$ je $\lim I = 0$, $\lim I' = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi = -1$. Tedy $I = \int_0^k kK \, \mathrm{d}k$, $I' = \int_0^k kK' \, \mathrm{d}k - 1$. Z první rovnice a z (87) plyne

(120)
$$I = \tfrac{1}{2}\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2n+2} k^{2n+2}.$$

V druhé rovnici vyměňme k s k'; vyjde $I = 1 - \int_0^{k'} k'K \, \mathrm{d}k'$. Užijeme-li rovnice (117), obdržíme snadno

(121)
$$I = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2n+2} k'^{2n+2} . \lg \frac{4}{k'} +$$
$$+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2n+2} k'^{2n+2} \left(\frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{3 . 4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\, 2n} - \frac{1}{2(2n+2)} \right),$$

při čemž součet $\frac{1}{1 . 2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) . 2n}$ značí pro $n = 0$ ovšem „prázdný“ součet $\sum_{h=1}^{0} \frac{1}{(2h-1)\, 2h}$, t. j. nulu. Rovnice (117), (121) nám dávají integrály prvního i druhého druhu (K, I) rozvinuté podle mocnin k' (ovšem až na logaritmický člen $\lg (4 : k')$, jenž se tak rozvinouti nedá).

6. Z rovnic (119) plyne, že funkce (proměnné k) $IK' - I'K$ má derivaci rovnou nule a je tedy konstantní pro $0 < k < 1$. Z rozvojů pro funkce I, K, I', K' podle mocnin k plyne pak limitním přechodem $k \to 0+$ rovnice $IK' - I'K = \frac{1}{2}\pi$.

§ 4. Výpočet úplných integrálů 1. druhu methodou aritmeticko-geometrického průměru. Buďte a_0, b_0 konečná nezáporná čísla; sestrojme jejich geometrický a aritmetický průměr

$$(122) \qquad a_1 = \sqrt{a_0 b_0}\,, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}(a_0 + b_0)$$

a obdobně definujme dále indukcí

$$(123) \qquad a_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}},\ b_r = \tfrac{1}{2}(a_{r-1} + b_{r-1}) \quad (r = 1, 2, \ldots)\,.$$

Tím dostáváme dvě posloupnosti nezáporných čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$ Dokážeme, že existují konečné limity $\lim\limits_{r\to\infty} a_r = \lim\limits_{r\to\infty} b_r$; toto číslo nazveme *aritmeticko-geometrickým průměrem* čísel a_0, b_0 a označíme je znakem $M(a_0, b_0)$. Napřed odbudeme některé jednoduché případy.

I. Je-li $a_0 = b_0$, je zřejmě $a_1 = b_1 = a_0$, a z (123) indukcí ihned $a_r = b_r = a_0$, takže $M(a_0, a_0) = a_0$.

II. Je-li na př. $a_0 = 0$, je zřejmě $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}b_0$ a indukcí $a_r = 0$, $b_r = \dfrac{1}{2^r}\, b_0$, tedy $M(0, b_0) = 0$.

III. Vyměním-li a_0, b_0, nezmění se a_1, b_1, a tedy ani a_r, b_r pro jakékoliv $r > 0$.

Jediný zajímavý případ je tedy ten, že čísla a_0, b_0 jsou obě kladná a různá; podle III stačí tedy, omezíme-li se na případ $0 < a_0 < b_0$. Buďte tedy dána čísla a_0, b_0,

$$(124) \qquad 0 < a_0 < b_0 < +\infty$$

a definujme čísla a_r, b_r rovnicemi (123). Zřejmě jest $a_r > 0$, $b_r > 0$. Dále

$$(125) \quad b_r - a_r = \tfrac{1}{2}(a_{r-1} + b_{r-1} - 2\sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{b_{r-1}} - \sqrt{a_{r-1}})^2\,.$$

Tedy: Je-li $b_{r-1} > a_{r-1}$, je též $b_r > a_r$. Z (124) plyne tedy indukcí, že $a_r < b_r$ pro $r = 0, 1, 2, \ldots$ Potom však plyne z (123)

$$a_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}} > \sqrt{a_{r-1} a_{r-1}} = a_{r-1},\quad b_r < \tfrac{1}{2}(b_{r-1} + b_{r-1}) = b_{r-1}\,,$$

tedy

$$(126) \qquad a_0 < a_1 < a_2 < \ldots;\quad b_0 > b_1 > b_2 > \ldots$$

Pro každé $r > 0$ je tedy $a_0 < a_r < b_r < b_0$. Monotonní posloupnosti (126) jsou tedy omezené a podle základní věty 65 v **D I**, str. 103 existují tedy limity

(127) $$a_0 < \lim_{r\to\infty} a_r \leqq \lim_{r\to\infty} b_r < b_0\,.$$

Abychom dokázali, že tyto dvě limity jsou stejné, počítejme podle (125) rozdíl

(128) $$b_r - a_r = \frac{1}{2}\,\frac{(\sqrt{b_{r-1}} - \sqrt{a_{r-1}})^2\,(\sqrt{b_{r-1}} + \sqrt{a_{r-1}})^2}{(\sqrt{b_{r-1}} + \sqrt{a_{r-1}})^2}\,.$$

Zde je čitatel $(b_{r-1} - a_{r-1})^2$; jmenovatel pak jest

$$2(a_{r-1} + b_{r-1} + 2\sqrt{a_{r-1}b_{r-1}}) = 4b_r + 4a_r = 8b_{r+1}\,,$$

takže z (128) plyne

(129) $$b_r - a_r = \frac{(b_{r-1} - a_{r-1})^2}{8b_{r+1}} \qquad (r = 1, 2, \ldots)\,.$$

Ježto podle (123) je $b_{r+1} > \frac{1}{2}b_r > \frac{1}{4}b_{r-1} > \frac{1}{4}(b_{r-1} - a_{r-1})$, plyne z (129) $b_r - a_r < \frac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1})$ a odtud indukcí $b_r - a_r < 2^{-r}(b_0 - a_0)$, takže $\lim_{r\to\infty}(b_r - a_r) = 0$. Obě limity v (127) jsou tedy stejné; označme tuto společnou limitu $M(a_0, b_0)$. Jest ovšem

(130) $$a_r < M(a_0, b_0) < b_r \quad \text{pro} \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Zajímá nás ještě, jak rychle konvergují čísla a_r, b_r k číslu $M(a_0, b_0)$; přitom nás ovšem zajímá relativní chyba

(131) $$\frac{M(a_0, b_0) - a_r}{M(a_0, b_0)}\,, \quad \text{po příp.} \quad \frac{b_r - M(a_0, b_0)}{M(a_0, b_0)}\,,$$

které se dopustíme, nahradíme-li číslo $M(a_0, b_0)$ číslem a_r, po příp. b_r. Obě tyto chyby jsou menší než číslo

(132) $$\delta_r = \frac{b_r - a_r}{M(a_0, b_0)}\,.$$

Nerovnost $b_r - a_r < \frac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1})$ praví, že $\delta_r < \frac{1}{2}\delta_{r-1}$. Ale z (129) plyne ještě další nerovnost: dělíme-li obě strany číslem $M(a_0, b_0)$ a uvážíme-li, že $b_{r+1} > M(a_0, b_0)$, obdržíme nerovnost $\delta_r < \frac{1}{8}\delta^2_{r-1}$. Shrňme dosavadní výsledky:

Věta 260. *Budiž* $0 < a_0 < b_0 < +\infty$. *Definujme kladná čísla* a_r, b_r *rovnicemi* (123) *pro* $r = 1, 2, \ldots$ *Potom jest* $a_r < b_r$ *pro* $r = 0, 1, \ldots$; *dále platí* (126) *a existuje kladná limita*

$$\lim_{r\to\infty} a_r = \lim_{r\to\infty} b_r = M(a_0, b_0),$$

kterou nazýváme aritmeticko-geometrickým průměrem čísel a_0, b_0. *Platí pak vzorce* (125), (129); *definujeme-li konečně* δ_r *rovnicí* (132), *je*

$$(133) \qquad \delta_r < \tfrac{1}{2}\delta_{r-1}, \quad \delta_r < \tfrac{1}{8}\delta_{r-1}^2 \quad \text{pro} \quad r = 1, 2, \ldots$$

Poznámka 1. Triviální případy $a_0 = 0$ (nebo $b_0 = 0$) a $a_0 = b_0$ jsme probrali již na začátku tohoto paragrafu. Víme dále, že $M(b_0, a_0) = M(a_0, b_0)$.

Poznámka 2. Z (133) je patrno, že $\lim \delta_r = 0$. Existuje tedy jistě r takové, že $\delta_r < 1$. Od tohoto r počínaje je konvergence čísel δ_r k nule (a tedy konvergence čísel a_r, b_r k číslu $M(a_0, b_0)$) nesmírně rychlá; neboť z druhé nerovnosti v (133) plyne pak

$$(134) \qquad \delta_{r+1} < 8^{-1},\ \delta_{r+2} < 8^{-3},\ \delta_{r+3} < 8^{-7},\ \delta_{r+4} < 8^{-15},\ \delta_{r+5} < 8^{-31}$$

atd.[19])

Obrátíme se nyní ke studiu úplných integrálů 1. druhu. Podle příkl. 3 v § 2 máme tento výsledek: Je-li

$$(135) \qquad z^2 = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1+x}{1+kx} \ (|x| < 1,\ z > 0),\ k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

je

$$(136) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}.$$

Roste-li x od -1 do $+1$, roste z od 0 do 1, a tedy

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} =$$

$$= \frac{2}{k+1} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}.$$

[19]) Užijeme-li pro $n > 0$ místo (133) pouze hrubší nerovnosti $\delta_{r+n+1} < \delta^2_{r+n}$, obdržíme $\delta_{r+n+1} < 8^{-2^n}$ pro celé $n \geq 0$.

Substituce $x = \sin\varphi$ v druhém integrálu a $z = \sin\varphi$ ve třetím vede k rovnici

$$(137)\qquad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{k+1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}}\,.$$

Tento vztah platí, je-li mezi k, k_1 splněna rovnice

$$(138)\qquad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\,.$$

Tuto rovnici přepíšeme ještě na jiný tvar. Je-li k_1' modul komplementární ke k_1, je

$$(139)\qquad k_1' = \sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2}} = \frac{1-k}{1+k} = -1 + \frac{2}{1+k}\,,$$

t. j.

$$(140)\qquad (1+k)(1+k_1') = 2\,.$$

Naopak z (140) plyne $k_1' = (1-k):(1+k)$ a tedy (138). Platí-li tedy mezi moduly k, k_1 rovnice (140), platí rovnice (138). Symetrie rovnice (140) užijeme ještě k této poznámce. Platí-li mezi moduly l, l_1 rovnice $(1+l)(1+l_1') = 2$, platí rovnice

$$(141)\qquad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{l+1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l_1^2 \sin^2\varphi}}\,.$$

Buďte nyní k, k_1 dva moduly, pro něž platí (140). Položíme-li tedy $l = k_1'$, bude $(1+l)(1+k) = 2$, t. j. rovnice (141) bude splněna, položíme-li ještě $l_1' = k$, t. j. $l_1 = k'$. Píšeme-li v (141) ještě (podle (140)) $1:(l+1) = 1:(k_1'+1) = \frac{1}{2}(1+k)$, obdržíme rovnici

$$(142)\qquad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}}\,,$$

jež platí, splňují-li moduly k, k_1 rovnici (138).[20]

---

[20]) T. j. rovnici (140).

Nyní užijeme vzorců (137), (142). Buďte dána dvě libovolná kladná konečná čísla a_0, b_0 taková, že $0 < a_0 < b_0$. Definujme

$$(143) \qquad a_r = \sqrt{a_{r-1}b_{r-1}}, \quad b_r = \tfrac{1}{2}(a_{r-1} + b_{r-1}) \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

a kladme ještě $c_r = \sqrt{b_r^2 - a_r^2}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. Položíme-li $k = \dfrac{a_0}{b_0}$, bude $k' = \sqrt{\dfrac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2}} = \dfrac{c_0}{b_0}$; volíme-li pak k_1 podle rovnice (138), bude

$$k_1 = 2\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} : \left(1 + \frac{a_0}{b_0}\right) = \frac{\sqrt{a_0 b_0}}{\frac{1}{2}(b_0 + a_0)} = \frac{a_1}{b_1},$$

$$k_1' = \sqrt{\frac{b_1^2 - a_1^2}{b_1^2}} = \frac{c_1}{b_1}$$

a rovnice (137), (142) dávají

$$b_0 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{b_1}{1 + \dfrac{a_0}{b_0}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$b_0 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2b_1}{1 + \dfrac{a_0}{b_0}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - c_1^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Dělíme-li číslem b_0 a uvážíme-li, že $2b_1 = a_0 + b_0$, obdržíme

$$(144) \qquad \begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2 \varphi}} &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - c_1^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Ježto čísla a_r, b_r, c_{r-1}, c_r se odvozují z a_{r-1}, b_{r-1} stejně jako a_1, b_1, c_0, c_1 z a_0, b_0, platí rovnice (144) i tehdy, píšete-li v nich obecně místo indexu 0 index $r - 1$ a místo indexu 1 index r. Odtud pak je ihned patrno, že

$$(145)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2^r} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{pro } r = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(146)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{pro } r = 0, 1, 2, \ldots$$

Budiž nyní dáno libovolně číslo k $(0 < k < 1)$. Volme $a_0 = k$, $b_0 = 1$, takže $c_0 = k'$. Levá strana v (146) je tedy $K' = F(k', \frac{1}{2}\pi)$. Dále jest $\lim\limits_{r\to\infty} a_r = \lim\limits_{r\to\infty} b_r = M(k, 1) > 0$ (viz větu 260), a tedy $\lim c_r = 0$. Jest

$$(147)\quad \frac{1}{\sqrt{b_r^2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2 \sin^2 \varphi}} \leqq \frac{1}{\sqrt{b_r^2 - c_r^2}}\,.$$

V těchto nerovnostech obě krajní křídla nezávisí na φ a konvergují pro $r \to \infty$ k číslu $1 : M(k, 1)$; prostřední člen tedy také konverguje k tomuto číslu, a to stejnoměrně v intervalu $0 \leqq \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$; následkem toho konverguje pravá strana v (146) pro $r \to \infty$ k číslu

$$(148)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{M(k, 1)} = \frac{\pi}{2M(k, 1)}\,.$$

Ale levá (a tedy ani pravá) strana v (146) nezávisí na r; její hodnota je tedy pro každé r rovna její limitě pro $r \to \infty$, t. j. je rovna číslu (148); t. j. číslo $F(k', \frac{1}{2}\pi)$ se rovná číslu (148). Dosadíme-li sem místo k komplementární modul k', obdržíme vzorec

$$(149)\quad K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\pi}{2M(\sqrt{1 - k^2}, 1)}\,.$$

Užili jsme vzorce (146); podívejme se nyní, k jakému výsledku nás vede vzorec (145). Budiž dáno k $(0 < k < 1)$; položme $a_0 = k$, $b_0 = 1$, $k_r = \dfrac{a_r}{b_r}$. Potom rovnici (145) lze psáti

$$(150)\quad K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2^r b_r} F(k_r, \tfrac{1}{2}\pi)\,.$$

Ježto pro $r \to \infty$ jest $\lim a_r = \lim b_r = M(k, 1) > 0$, je $\lim k_r = 1$.

Užijeme proto vzorce (108) z § 3; vidíme, že

$$F(k_r, \tfrac{1}{2}\pi) = \lg \frac{4}{k'_r} + \xi_r, \text{ kde } \lim_{r\to\infty} \xi_r = 0\,. \tag{151}$$

Jest

$$k'_r = \sqrt{\frac{b_r^2 - a_r^2}{b_r^2}} = \frac{c_r}{b_r};$$

podle (150), (151) je tedy

$$K = \frac{1}{2^r b_r} \lg \frac{4b_r}{c_r} + \frac{1}{2^r b_r}\,\xi_r\,, \tag{152}$$

$$\frac{1}{2^r} \lg \frac{4b_r}{c_r} = b_r K - \frac{1}{2^r}\,\xi_r\,. \tag{153}$$

Zde má první člen vpravo limitu $M(k, 1) \,.\, K$, druhý má limitu 0, takže existuje limita

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2^r} \lg \frac{4b_r}{c_r} = K \,.\, M(k, 1)\,. \tag{154}$$

Limitu posloupnosti vlevo převedeme obvyklým způsobem na součet nekonečné řady; sestrojíme totiž řadu $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ tak, aby bylo $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \dfrac{1}{2^r} \lg \dfrac{4b_r}{c_r}$ pro každé $r \geqq 0$. Tato řada má zřejmě tvar

$$\lg \frac{4b_0}{c_0} + \frac{1}{2}\left(\lg \frac{4b_1}{c_1} - 2 \lg \frac{4b_0}{c_0}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\lg \frac{4b_2}{c_2} - 2 \lg \frac{4b_1}{c_1}\right) + \ldots; \tag{155}$$

součet této řady je roven limitě v (154). Obecný člen této řady jest

$$\frac{1}{2^r} \lg \frac{b_r c_{r-1}^2}{4c_r b_{r-1}^2} \qquad (r = 1, 2, \ldots)\,. \tag{156}$$

Jest však

$$c_r = \sqrt{b_r^2 - a_r^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(a_{r-1} + b_{r-1})^2 - a_{r-1}b_{r-1}} = \tfrac{1}{2}(b_{r-1} - a_{r-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{b_{r-1}^2 - a_{r-1}^2}{b_{r-1} + a_{r-1}} = \frac{c_{r-1}^2}{4b_r}\,,$$

takže výraz (156) jest roven $2^{-r} \lg \left(\dfrac{b_r}{b_{r-1}}\right)^2 = -\,2^{-r+1} \lg \dfrac{b_{r-1}}{b_r}$ (jest $b_{r-1} > b_r$ (viz (126)), takže logaritmus je kladný). Dosadíme-li do (154) za levou stranu řadu (155), jejíž obecný člen je upraven způsobem právě vyloženým, a uvážíme-li, že $b_0 = 1$, $c_0 = k'$, dostáváme rovnici

$$K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{M(k, 1)} \cdot \left(\lg \frac{4}{k'} - \lg \frac{b_0}{b_1} - \frac{1}{2} \lg \frac{b_1}{b_2} - \frac{1}{2^2} \lg \frac{b_2}{b_3} - \dots\right). \tag{157}$$

Shrňme dosažené výsledky v tuto větu:

Věta 261. *Budiž* $0 < k < 1$. *Položme* $a_0 = k$, $b_0 = 1$ *a definujme* a_r, b_r *rovnicemi* (123). *Potom platí rovnice* (149), (157).

Poznámka 3. Vyšetříme nyní, jak dobře se vzorce (149), (157) hodí k numerickému výpočtu. V obou vzorcích se především musí počítati $M(\varkappa, 1)$ (jednou pro $\varkappa = k'$, podruhé pro $\varkappa = k$). Položme tedy $a_0 = \varkappa$, $b_0 = 1$ a definujme a_r, b_r rovnicemi (123), číslo δ_r pak rovnicí $\delta_r = (b_r - a_r) : M(\varkappa, 1)$. Je-li na př. $\frac{1}{2} \leqq \varkappa < 1$, je $M(\varkappa, 1) > \frac{1}{2}$, $b_0 - a_0 = 1 - \varkappa \leqq \frac{1}{2}$, tedy $\delta_0 < 1$ a podle pozn. 2 je konvergence čísel δ_r k nule velmi rychlá (v pozn. 2 můžeme teď klásti $r = 0$). Je-li však kladné číslo $\varkappa$ velmi malé, je konvergence z počátku velmi pomalá, jak ihned ukážeme. Klademe-li stále $a_0 = \varkappa$, $b_0 = 1$, je patrno z (123), že čísla a_r, b_r jsou spojitými funkcemi proměnné $\varkappa$ v intervalu $\langle 0, 1)$. Je-li $\varkappa = 0$, je zřejmě $b_r = 2^{-r}$ pro každé $r \geqq 0$. Zvolím-li tedy libovolné celé $r_0 > 2$, jest $b_{r_0} = 2^{-r_0}$ pro $\varkappa = 0$; následkem spojitosti existuje pak $\varepsilon > 0$ tak, že pro $0 < \varkappa < \varepsilon$ jest $b_{r_0} < 2^{-r_0+1}$, a tedy tím spíše $M(\varkappa, 1) < 2^{-r_0+1}$. Zvolme nějaké $\varkappa$ tak, že $0 < \varkappa < \varepsilon$. Je zřejmo, že $b_r \geqq \frac{1}{2} b_{r-1}$, tedy $b_r \geqq 2^{-r}$ pro každé r (ježto $b_0 = 1$). Je-li tedy $r \leqq$ $\leqq r_0 - 2$, je

$$\delta_r = \frac{b_r - a_r}{M(\varkappa, 1)} > \frac{b_r - M(\varkappa, 1)}{M(\varkappa, 1)} = \frac{b_r}{M(\varkappa, 1)} - 1 >$$
$$> 2^{-r} : 2^{-r_0+1} - 1 = 2^{r_0-r-1} - 1 \geqq 2 - 1 = 1 .$$

Tedy pro všechna $r \leqq r_0 - 2$ je $\delta_r > 1$ a tedy výsledek velmi nepřesný. Zjistili jsme pak, že r_0 můžeme zvoliti libovolně velké, ovšem musíme potom $\varkappa$ voliti dostatečně malé. Pro velmi malá $\varkappa$ trvá tedy velmi dlouho, než vůbec dostaneme $\delta_r < 1$ a výpočet čísla $M(\varkappa, 1)$ je tedy velmi zdlouhavý.[21])

---

[21]) Jakmile ovšem dojdeme k takové hodnotě r, pro kterou je $\delta_r < 1$, můžeme užíti poznámky 2: od této hodnoty r počínaje je tedy konvergence velmi rychlá — ale trvá to dlouho, než se vůbec k takovým číslům r dostaneme.

Všimněme si nyní napřed vzorce (149). Je-li $k' \geqq \frac{1}{2}$, t. j. $1 - k^2 \geqq \frac{1}{4}$, $k \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je výpočet čísla $M(k', 1)$ velmi příznivý (jak jsme zjistili, je v tomto případě již $\delta_0 < 1$). Je-li však k' velmi malé (t. j. k blízko jedničky), je vzorec (149) nepříznivý k numerickému výpočtu, jak jsme právě zjistili. Obraťme se proto ke vzorci (157) a předpokládejme $\frac{1}{2}\sqrt{3} < k < 1$. Klademe tedy $a_0 = k$, $b_0 = 1$, $\delta_r = (b_r - a_r) : M(k, 1)$. Ježto $k > \frac{1}{2}$, je $\delta_0 < 1$, a tedy čísla δ_r velmi rychle konvergují k nule, takže výpočet čísla $M(k, 1)$ se utváří velmi příznivě. Ještě musíme zjistiti, jak rychle konverguje řada v (157). Označme S součet této řady, znakem R_r označme zbytek

$$R_r = \frac{1}{2^r} \lg \frac{b_r}{b_{r+1}} + \frac{1}{2^{r+1}} \lg \frac{b_{r+1}}{b_{r+2}} + \ldots \tag{158}$$

Vynecháme-li z řady S všechny členy, následující po členu $-\dfrac{1}{2^{r-1}} \cdot$ $\cdot \lg \dfrac{b_{r-1}}{b_r}$, dopustíme se relativní chyby $\xi_r = \dfrac{R_r}{S}$. Odhadněme ξ_r. Podle (157) jest $S = K \cdot M(k, 1)$; zřejmě jest $K > \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1 \,.\, d\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $M(k, 1) > k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, tedy $S > \frac{1}{4}\sqrt{3} \,.\, \pi > 1$, takže $\xi_r < R_r$. Jak velký je obecný člen řady? Jest (píši $M(k, 1) = M$)

$$1 < \frac{b_{n-1}}{b_n} < \frac{b_{n-1}}{M} = 1 + \frac{b_{n-1} - M}{M} < 1 + \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{M} = 1 + \delta_{n-1} \,.$$

Pro $x > 0$ jest $\lg(1 + x) < x$ [22]), tedy

$$0 < \lg \frac{b_{n-1}}{b_n} < \lg(1 + \delta_{n-1}) < \delta_{n-1} \,. \tag{159}$$

Ježto a_n rostou, b_n klesají (s rostoucím n), je $\delta_n < \delta_{n-1}$ a z (158) plyne

$$\xi_r < R_r < \frac{1}{2^r}\,\delta_r + \frac{1}{2^{r+1}}\,\delta_{r+1} + \ldots < \frac{1}{2^{r-1}}\,\delta_r \leqq \delta_r$$

pro $r > 0$. Ježto δ_r velmi rychle konvergují k nule, je konvergence řady v (157) velmi rychlá a vzorec (157) se hodí pro výpočet integrálu K.

---

[22]) Třeba podle věty o přírůstku funkce: $\lg(1 + x) - \lg 1 = \dfrac{x}{1 + \Theta x}$ $(0 < \Theta < 1)$.

Cvičení

Použijeme nyní metody aritmeticko-geometrického průměru též k výpočtu úplných integrálů 2. druhu.

1. Označme úplné integrály, patřící k modulu k_1 (po příp. k_1', viz (138), (140)), znaky $K_1, E_1, I_1 = E_1 - k_1'^2 K_1, K_1', E_1', I_1' = -E_1' + k_1^2 K_1'$. Podle (137), (142) jest

$$K = \frac{1}{1+k} K_1, \quad K' = \frac{2}{1+k} K_1'. \tag{160}$$

Podle třetí a čtvrté rovnice (119) obdržíme pak

$$I = \frac{1+k}{2} I_1 - \frac{k(1-k)}{1+k} K_1, \quad I' = (1+k) I_1' - \frac{2k(1-k)}{1+k} K_1'. \tag{161}$$

2. Budiž $0 < a_0 < b_0$; definujme $a_r, b_r, c_r = \sqrt{b_r^2 - a_r^2}$ jako obvykle (viz (123)). Z cvič. 1 plyne

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a_0^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a_1^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}} - \\ &- \tfrac{1}{2} a_0 (b_0 - a_0) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}},\end{aligned} \tag{162}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{c_0^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2 \sin^2 \varphi}} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{c_1^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - c_1^2 \sin^2 \varphi}} + \\ &+ a_0 (b_0 - a_0) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - c_1^2 \sin^2 \varphi}}.\end{aligned} \tag{163}$$

Tytéž vztahy platí ovšem, píši-li $a_{r-1}, a_r, b_{r-1}, \ldots$ místo $a_0, a_1, b_0, \ldots$ Užijete-li rovnic (160) a rovnice $\lim\limits_{r \to \infty} 2^r c_r = 0$ (která se snadno dokáže z (133)), obdržíte (kladouce $a_0 = k$, $b_0 = 1$, $c_0 = k'$) $I = M(k, 1) - \mathfrak{A}(k, 1) K$, $I' = -\mathfrak{A}(k, 1) K'$, kde řada

$$\mathfrak{A}(a_0, b_0) = \sum_{r=0}^{\infty} 2^r a_r (b_r - a_r)$$

velmi rychle konverguje aspoň od onoho členu počínaje, pro nějž po prvé $\delta_r < 1$. Pro nepříliš malá k užijeme vzorce pro I, pro malá k vzorce pro I', v němž píšeme k' místo k. Tím máme dva rozvoje pro I, z nichž aspoň jeden je velmi rychle konvergentní.[23]) Diskutujte podrobněji rychlost konvergence (v prvním vzorci je malá obtíž, vznikající z toho, že pravá strana je rozdíl dvou kladných čísel; ale relativní chyba se tím příliš nezvětší, není-li k příliš malé).

3. Dokažte, že

$$\mathfrak{A}\,(a_0, b_0) = \tfrac{1}{2}(b_0^2 - a_0^2) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}(a_0, b_0)\,,$$

kde

$$\mathfrak{B}(a_0, b_0) = \sum_{r=0}^{\infty} 2^r(b_r - a_r)^2\,;$$

to je řada ještě rychleji konvergentní než $\mathfrak{A}$.

Návod:

$$4\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \sum_{r=0}^{\infty} 2^r(2(b_r^2 - a_r^2) - (b_r - a_r)^2) =$$

$$= 2(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{r=0}^{\infty} 2^r(4(b_{r+1}^2 - a_{r+1}^2) - (b_r - a_r)^2)\,,$$

a v poslední řadě, jak se snadno přesvědčíte, je každý člen roven nule.

4. Z cvič. 2, 3 odvoďte

$$E\ = M(k, 1) + (\tfrac{1}{2}k'^2 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}(k, 1))\,K\,,$$

$$E' = (\tfrac{1}{2}(1 + k^2) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}(k, 1))\,K'\,.$$

Diskutujte rychlost konvergence.

---

[23]) Integrály K, K' dovedeme ovšem počítati; viz větu 261 a pozn. 3.