KAPITOLA XVII*

NUMERICKÝ VÝPOČET URČITÝCH INTEGRÁLŮ (T. ZV. MECHANICKÁ KVADRATURA)*

§ 1. Úvodní poznámky. Poznámka 1 (Lagrangeův interpolační polynom). Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_r$ $(r \geqq 0)$ navzájem různá konečná komplexní čísla. Pro $j = 0, 1, \ldots, r$ sestrojme polynom

$$(1) \qquad p_j(x) = p_j(x_0, \ldots, x_r; x) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r}(x - x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r}(x_j - x_k)};$$

je to polynom r-tého stupně, $p_j(x_j) = 1$, $p_j(x_k) = 0$ pro $k \neq j$. Jsou-li tedy $y_0, y_1, \ldots, y_r$ jakákoliv konečná komplexní čísla (nemusí být navzájem různá), je $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{r} y_j\, p_j(x)$ polynom s těmito vlastnostmi:

1. P je stupně nejvýše r-tého.
2. $P(x_j) = y_j$ pro $j = 0, 1, \ldots, r$.

Dále je P jediný polynom s těmito vlastnostmi. Neboť jestliže polynom Q má také tyto vlastnosti, je $P - Q$ polynom stupně nejvýše r-tého,[1]) ale má aspoň $r + 1$ kořenů $x_0, x_1, \ldots, x_r$. Bude-li třeba, budeme místo $P(x)$ psáti $P(x_0, \ldots, x_r; y_0, \ldots, y_r; x)$.

Speciálně: Je-li f funkce, mající konečnou hodnotu v bodech $x_0, \ldots, x_r$, je

$$(2) \qquad P(x_0, \ldots, x_r; f(x_0), \ldots, f(x_r); x) = \sum_{j=0}^{r} f(x_j)\, p_j(x)$$

onen (jediný) polynom stupně nejvýše r-tého, který v bodech $x_0, \ldots, x_r$ nabývá týchž hodnot jako funkce f; říkáme mu Lagrangeův interpolační polynom (příslušný k funkci f a k bodům $x_0, \ldots, x_r$).

[1]) Vzpomeňme: Mluvíme-li o polynomu stupně nejvýše r-tého, nevylučuji polynom „nulový".

Poznámka 2. Nechť $-\infty < a \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_r \leqq b < +\infty$ a nechť reálná funkce f má v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci řádu $r + 1$. Budiž $P(x)$ polynom (2). Potom pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je

$$f(x) = P(x) + \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_r)}{(r + 1)!} f^{(r+1)}(\xi)\,, \tag{3}$$

kde $a < \xi < b$ (ξ ovšem závisí na x); důkaz viz v **D II**, kap. V, § 7, příkl. 1.

Poznámka 3. Od tohoto okamžiku půjde v této kapitole výhradně o konečné reálné funkce jedné reálné proměnné. Zachovejme předpoklady a označení pozn. 2. Potom pro $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ je

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{(r + 1)!}\int_\alpha^\beta (x - x_0)\ldots(x - x_r)\, f^{(r+1)}(\xi)\,\mathrm{d}x\,; \tag{4}$$

poslední integrál dovedeme odhadnouti, známe-li nějaký odhad funkce $f^{(r+1)}$ v $\langle a, b\rangle$. Naším úkolem bude toto: Známe-li hodnoty $f(x_j)$, můžeme integrál funkce f nahraditi přibližně integrálem funkce P; přitom je ovšem záhodno odhadnout chybu, které se tím dopustíme, t. j. odhadnout poslední integrál v (4).[2]) Je-li na př. $|f^{(r+1)}(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, vychází

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta P(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{M}{(r + 1)!}\int_\alpha^\beta |x - x_0|\ldots|x - x_r|\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

Integrál funkce P dovedeme vypočísti; jest

$$\int_\alpha^\beta P(x)\,\mathrm{d}x = C_0^{(r)} f(x_0) + \ldots + C_r^{(r)} f(x_r)\,, \tag{6}$$

$$C_j^{(r)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r}(x_j - x_k)}\int_\alpha^\beta \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r}(x - x_k)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

[2]) Této methody lze užíti k numerickému výpočtu integrálu funkce f, známe-li pouze konečný počet hodnot této funkce; tak je tomu na př. často v aplikacích, jestliže hodnoty funkce f stanovíme měřením. K odhadu chyby podle vzorce (4) jest ovšem třeba znáti nějaký odhad derivace $f^{(r+1)}$.

Čísla $C_j^{(r)}$ nezávisí na tvaru funkce f, závisí ovšem na α, β, $x_0, \ldots, x_r$; na volbě těchto čísel závisí též tvar „zbytku“, t. j. posledního integrálu v (4). Některé případy probereme v této kapitole.

Cvičení

V těchto cvičeních určíme tvar polynomu (1) pro některé speciální volby bodů $x_0, \ldots, x_r$. K cvič. 1, 2 je vhodno si zopakovat pozn. 2 v kap. XIII, § 8.

1. Zvolme $x_j = \cos\left((2j+1)\dfrac{\pi}{2(r+1)}\right)$ $(j = 0, \ldots, r)$; to jsou zřejmě kořeny t. zv. Čebyševova polynomu[3]) $T_{r+1}(x) = \dfrac{1}{2^r}\cos(r+1)\,\Theta$, kde $x = \cos\Theta$. Tedy

$$p_j(x) = C\,\frac{T_{r+1}(x)}{x - x_j},$$

kde C je konstanta. Podmínka $p_j(x_j) = 1$ dává $C = (T'_{r+1}(x_j))^{-1}$. Odtud snadno

$$p_j(x) = \frac{2^r}{r+1}(-1)^j\sqrt{1 - x_j^2}\,\frac{T_{r+1}(x)}{x - x_j}.$$

2. Zvolme $x_j = \cos\left((j+1)\dfrac{\pi}{r+2}\right)$ $(j = 0, \ldots, r)$. Ježto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_{r+2}(x) = \frac{r+2}{2^{r+1}}\,\frac{\sin(r+2)\,\vartheta}{\sin\vartheta}\quad(x = \cos\vartheta),$$

jsou x_j právě všechny kořeny polynomu $T'_{r+2}(x)$. Podobně jako v cvič. 1 vyjde

$$p_j(x) = \frac{2^{r+1}}{(r+2)^2}(-1)^j(1 - x_j^2)\,\frac{T'_{r+2}(x)}{x - x_j}.$$

3. Zvolme

$$x_j = \exp\left(\frac{2\pi i j}{r+1}\right)\quad(j = 0, \ldots, r;\ \exp(z) = e^z).$$

Vyjde

$$p_j(x) = \frac{1}{r+1}\,x_j\,\frac{x^{r+1} - 1}{x - x_j}.$$

---

[3]) Kdo se o těchto polynomech chce poučiti podrobněji, najde něco v kap. XIV, § 9.

§ 2. **Cotesova metoda.** Při této metodě se integrační interval rozdělí body $x_0, x_1, \ldots, x_r$ na r stejných dílů.

Věta 246. *Buďte a, h, r konečná reálná čísla, $h > 0$, r celé, $r > 0$. Budiž $f(x)$ funkce reálná a spojitá v $\langle a, a + hr\rangle$. Položme*

$$\int_a^{a+hr} f(x)\,\mathrm{d}x = h \sum_{j=0}^{r} C_j^{(r)} f(a + jh) + R\,, \tag{8}$$

kde

$$C_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-j}}{j!(r-j)!} \int_0^r t(t-1)\ldots(t-(j-1))(t-(j+1))\ldots(t-r)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Potom pro R platí tyto odhady (při čemž $\xi = \xi(t)$ znamená číslo intervalu $(a, a + hr)$, závislé na t):

I. Existuje-li v $\langle a, a + hr\rangle$ konečná derivace $f^{(r+1)}(x)$, jest

$$R = \frac{h^{r+2}}{(r+1)!} \int_0^r t(t-1)\ldots(t-r)\, f^{(r+1)}(\xi)\,\mathrm{d}t\,. \tag{10}$$

II. Je-li r sudé a existuje-li v $\langle a, a + hr\rangle$ konečná derivace $f^{(r+2)}(x)$, jest

$$R = \frac{h^{r+3}}{(r+2)!} \int_0^r t(t-1)\ldots(t-r)\left(t - \frac{r}{2}\right) f^{(r+2)}(\xi)\,\mathrm{d}t\,. \tag{11}$$

Důkaz. Položme $F(x) = f(a + hx)$, takže

$$\int_a^{a+hr} f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^r F(x)\,\mathrm{d}x,\ F(j) = f(a + jh),\ F^{(k)}(x) = h^k f^{(k)}(a + hx)\,, \tag{12}$$

pokud existuje konečná derivace vpravo. Budiž $P(x)$ polynom $P(0, 1, \ldots, r; F(0), F(1), \ldots, F(r); x)$. Podle poznámky 3 v § 1 (kde klademe $\alpha = 0$, $\beta = r$, $x_j = j$ a místo f píšeme F) je

$$\int_0^r P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{r} C_j^{(r)} F(j)\,, \tag{13}$$

kde $C_j^{(r)}$ (viz (7)) jsou vskutku dána vzorcem (9). Číslo R v rovnici (8) je pak podle (12), (13) dáno rovnicí

(14) $$R = h\int_0^r (F(x) - P(x))\,dx\,.$$

Tvrzení I plyne pak ihned z rovnice (4) v § 1, pozn. 3. Tvrzení II pak dokážeme takto:

Budiž r sudé, $r = 2s$. Budiž x libovolné číslo z $\langle 0, 2s\rangle$, různé od čísel $0, 1, 2, \ldots, 2s$. Vyšetřujme tuto funkci proměnné z:

$$\Phi(z) = F(z) - P(z) - \frac{z(z-1)\ldots(z-2s)}{x(x-1)\ldots(x-2s)}\cdot\frac{z-s}{x-s}\,.\,(F(x) - P(x)) -$$
$$- \frac{z(z-1)\ldots(z-2s)(z-x)}{s(s-1)\ldots 1\,.\,(-1)\,.\,(-2)\ldots(-s)(s-x)}\,(F'(s) - P'(s))\,.$$

Jest $\Phi(z) = 0$ pro $z = x, 0, 1, \ldots, 2s$; mimo to jest $\Phi'(s) = 0$. Podle Rolleovy věty má tedy funkce $\Phi'(z)$ v $(0, 2s)$ vedle kořenu s ještě dalších $2s + 1$ různých kořenů. Podle věty 84 v **D II** (aplikované na funkci $\Phi'(z)$) existuje $\tau \in (0, 2s)$ tak, že $\Phi^{(2s+2)}(\tau) = 0$, t. j.

(15) $$0 = F^{(2s+2)}(\tau) - \frac{(2s+2)!\,(F(x) - P(x))}{x(x-1)\ldots(x-2s)(x-s)} - (-1)^s\,\frac{(2s+2)!\,(F'(s) - P'(s))}{(s!)^2(s-x)}\,.$$

Vypočteme-li odtud $F(x) - P(x)$ a integrujeme od 0 do $2s$, obdržíme

(16) $$\int_0^{2s}(F(x) - P(x))\,dx = \frac{1}{(2s+2)!}\int_0^{2s} x(x-1)\ldots(x-2s)(x-s)\,F^{(2s+2)}(\tau)\,dx + A\int_0^{2s} x(x-1)\ldots(x-2s)\,dx\,,$$

kde konstantu A nevypisuji. Ale poslední integrál je roven nule, neboť po substituci $x = s + y$ přechází tento integrál v integrál

$$\int_{-s}^{s}(y^2 - s^2)(y^2 - (s-1)^2)\ldots(y^2 - 1^2)\,y\,dy\,,$$

a ten se rovná nule (integrand je lichá funkce). Z rovnic (14), (16) plyne pak ihned (11).

Poznámka 1. Chceme-li užíti věty 246, musíme vypočísti čísla $C_j^{(r)}$. Substitucí $r - t = v$ dostaneme z (9) ihned $C_j^{(r)} = C_{r-j}^{(r)}$. Další vztahy dostanu na základě toho, že ve vzorci (8) jest $R = 0$, jakmile f je polynom stupně nejvýše r-tého (neboť potom v (10) jest $f^{(r+1)}(\xi) = 0$). Užijme vzorce (8) pro $a = 0$, $h = 1$, kladouce po řadě $f(x) = 1$, $f(x) = x(r - x)$, $f(x) = x(x - 1)(r - x)(r - 1 - x)$ atd. Obdržíme rovnice

$$C_0^{(r)} + C_1^{(r)} + \ldots + C_r^{(r)} = \int_0^r \mathrm{d}x = r\,,$$

$$1\,.\,(r-1)\,C_1^{(r)} + 2\,.\,(r-2)\,C_2^{(r)} + \ldots + (r-1)\,.\,1\,.\,C_{r-1}^{(r)} =$$

$$= \int_0^r x(r-x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}r^3\,,$$

$$2\,.\,1\,.\,(r-3)(r-2)\,C_2^{(r)} + 3\,.\,2\,.\,(r-4)\,.\,(r-3)\,C_3^{(r)} + \ldots +$$

$$+ (r-2)(r-3)\,.\,1\,.\,2\,.\,C_{r-2}^{(r)} = \int_0^r x(x-1)(r-1-x)(r-x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{30}r^5 - \tfrac{1}{6}r^4 + \tfrac{1}{6}r^3$$

atd. Z těchto rovnic s použitím vztahu $C_j^{(r)} = C_{r-j}^{(r)}$ lze všechna $C_j^{(r)}$ vypočísti (viz cvič. 1).

Poznámka 2. V praxi můžeme užíti věty 246 na př. takto: Máme počítati

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (-\infty < A < B < +\infty)\,. \tag{17}$$

Zvolme přirozená čísla n, r, rozdělme interval integrační na n stejných dílů

$$I_k = \left\langle A + k\,\frac{B-A}{n}\,,\quad A + (k+1)\,\frac{B-A}{n} \right\rangle$$

($k = 0, 1, \ldots, n - 1$) a na každý z nich užijeme věty 246. První členy v rovnicích (8) vpravo (počet těch rovnic je teď n) dávají přibližnou hodnotu integrálu (17), při čemž ovšem $h = \dfrac{B-A}{nr}$. Předpokládáme-li, že v (A, B) je $|f^{(r+1)}(x)| \leqq M$, po případě $|f^{(r+2)}(x)| \leqq M$, dostaneme pro chybu $\mathfrak{R}$ v případě I odhad[4])

[4]) Jde o součet n čísel R z rovnic (8).

$$(18) \quad |\Re| \leqq \frac{M}{n^{r+1}} \left(\frac{B-A}{r}\right)^{r+2} \frac{1}{(r+1)!} \int_0^r |t(t-1)\dots(t-r)|\,dt\,,$$

v případě II pak odhad (jestliže r je sudé)

$$|\Re| \leqq \frac{M}{n^{r+2}} \left(\frac{B-A}{r}\right)^{r+3} \frac{1}{(r+2)!} \int_0^r \left|t(t-1)\dots(t-r)\left(t-\frac{r}{2}\right)\right| dt\,. \quad (18a)$$

Vidíte: volíte-li r pevně, potom pro $n \to \infty$ konverguje $\Re$ k nule aspoň tak rychle jako Nn^{-r-1}, v případě II dokonce aspoň tak rychle jako Nn^{-r-2} (při čemž N je konstanta nezávislá na n). Je-li funkce f dána početním výrazem, můžeme ovšem n voliti libovolně velké a tím dosáhnouti libovolné přesnosti.[5]) Jsou-li však hodnoty funkce f dány na př. fysikálním měřením, je číslo $n \,.\, r$ omezeno počtem vykonaných měření; mimo to jsou měřená čísla $f(a + jh)$ zatížena pozorovacími chybami, takže by nemělo smyslu stupňovati přesnost výpočtu nad jistou hranici (mimo to též odhad zbytku (18), (18a) může v tomto případě činiti obtíže, nedovedeme-li nějak odhadnouti velikost derivací funkce f).

Poznámka 3: Způsob výpočtu, udaný v pozn. 2, vede pro $r = 1$ k metodě lichoběžníkové a pro $r = 2$ k formuli Simpsonově (viz **J I**, věta 61, II a věta 62; ukažte, že dostanete i týž odhad zbytku).

Cvičení

1. Ukažte, že rovnice z pozn. 1 vskutku určují čísla $C_j^{(r)}$. Vypočtěte

$$C_0^{(1)} = \frac{1}{2}\,; \quad C_0^{(2)} = \frac{1}{3}\,, \quad C_1^{(2)} = \frac{4}{3}\,; \quad C_0^{(3)} = \frac{3}{8}\,, \quad C_1^{(3)} = \frac{9}{8}\,; \quad C_0^{(4)} = \frac{14}{45}\,, \quad C_1^{(4)} = \frac{64}{45}\,,$$

$$C_2^{(4)} = \frac{8}{15}\,; \quad C_0^{(5)} = \frac{95}{288}\,, \quad C_1^{(5)} = \frac{125}{96}\,, \quad C_2^{(5)} = \frac{125}{144}\,.$$

V následujících cvičeních předkládám čtenáři ještě další metodu mechanické kvadratury, kterou uvádí Petr ve svém Integrálním počtu (2. vyd., str. 285—294)

---

[5]) Co by se dělo při $r \to \infty$, nelze obecně říci, nevíme-li, jak se chovají derivace $f^{(r)}$ při rostoucím r.

jakožto „metodu ku praktickým počtům účelnější a vskutku užívanou, zvláště při výpočtech astronomických". Body $x_0, x_1, \dots, x_r$, jichž užíváme k sestrojení Lagrangeova polynomu, jsou zde opět ekvidistantní, ale leží z části vně integračního intervalu. Probereme zde podle Petra tři případy.

K „postupným diferencím" $\Delta^k y_j$, které v těchto cvičeních zavedeme, podotýkám předběžně toto: Vytvořím-li z funkce f nové funkce $\Delta f, \Delta^2 f, \dots$ („postupné diference") rovnicemi $\Delta f(x) = f(x + p) - f(x)$ ($p \neq 0$ pevné číslo), $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + p) - \Delta f(x) = f(x + 2p) - 2f(x + p) + f(x)$ atd., je jasno toto: Je-li f polynom stupně k, je (pro $k > 0$) Δf polynom stupně $k - 1$ atd.; $\Delta^k f$ je konstanta různá od nuly, $\Delta^{k+1} f$ je nula. To bude čtenář potřebovat při různých úvahách.

2. Máme počítati $\int\limits_a^{a+nh} f(x)\,dx$ ($h > 0, n \in N$). Vyšetřujme napřed $\int\limits_a^{a+h} f(x)\,dx$. Budiž $r \in N$. Položme $f(a + kh) = y_k$, $F(t) = f(a + ht)$, takže náš integrál je $h\int\limits_0^1 F(t)\,dt$. Užiji interpolačního polynomu pro hodnoty $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_r = r$ (viz pozn. 3 v § 1). Vychází

$$\text{(19)} \qquad \int\limits_0^1 F(t)\,dt = A_0 y_0 + \dots + A_r y_r + \frac{\mu_1}{(r+1)!}\int\limits_0^1 t(t-1)\dots(t-r)\,dt,$$

$$\inf_{0 \leqq t \leqq r} F^{(r+1)}(t) \leqq \mu_1 \leqq \sup_{0 \leqq t \leqq r} F^{(r+1)}(t)\,.^{6)}$$

Odtud ihned pro celé $n > 0$

$$\text{(20)} \qquad \int\limits_a^{a+nh} f(x)\,dx = h(A_0(y_0 + \dots + y_{n-1}) + A_1(y_1 + \dots + y_n) + \dots + A_r(y_r + \dots + y_{n+r-1})) + R$$

(výraz pro R upravíme za chvíli). Zaveďme na chvíli označení $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$.[7]) Závorku v (20) lze psáti též $M(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots +$

[6]) Existenci a omezenost této derivace předpokládejme.

[7]) Počítání těchto „postupných diferencí" je snadné, upravíme-li je vhodně v tabulku:

$$\begin{array}{ccccccc}
y_0 & & & & & & \\
 & \Delta y_0 & & & & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & & & & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & & \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & & \text{atd.} \\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & & & \\
y_3 & & & & & &
\end{array}$$

Někdy píšeme též $\Delta^0 y_j$ místo y_j.

$+ y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) + M_0(y_n - y_0) + M_1(y_{n+1} - y_1) + \ldots + M_{r-1}(y_{n+r-1} - y_{r-1})$
a to lze pomocí diferencí konečně psáti:

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\,M(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + h\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k(\Delta^k y_n - \Delta^k y_0) + R\,. \tag{21}$$

Volme $a = 0$, $h = n = 1$ a kladme postupně: $f(x) = 1$, $f(x) = t$, $f(x) = t(t-1)$, $\ldots$;[8]) vyjde

$$M = 1,\ \alpha_0 = 0,\ \alpha_k = \frac{1}{(k+1)!}\int_0^1 t(t-1)\ldots(t-k)\,dt\ \ (k > 0), \tag{22}$$
$$R = nh^{r+2}\alpha_r\mu\,,$$

kde $\inf\limits_{a \leq x \leq a+(n+r-1)h} f^{(r+1)}(x) \leq \mu \leq \sup\limits_{a \leq x \leq a(n+r-1)h} f^{(r+1)}(x)$. Nevýhoda tohoto postupu jest: Užívá se i hodnot funkce vně integračního intervalu. Výhoda: Kdežto čísla $C_j^{(r)}$ v metodě Cotesově (věta 246) závisí na dvou indexech, závisí čísla α_k jen na jednom indexu; počítám-li podle vzorce (21) s určitou hodnotou r a není-li přesnost postačující, zkusím zvětšit r o jedničku; k tomu cíli stačí přičísti jediný člen $h\alpha_r(\Delta^r y_n - \Delta^r y_0)$. Petr uvádí tyto hodnoty:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{12},\ \alpha_2 = \frac{1}{24},\ \alpha_3 = -\frac{19}{720},\ \alpha_4 = \frac{3}{160},\ \alpha_5 = -\frac{863}{60480},$$
$$\alpha_6 = \frac{275}{24192},\ \alpha_7 = -\frac{33953}{3628800}\,.$$

3. Všimnete-li si začátku cvič. 2, vidíte, že na př. body $x_0, x_1, \ldots, x_r$, jichž se užívá při interpolaci k výpočtu $\int_0^1 F(t)\,dt$, leží nesymetricky vzhledem k integračnímu intervalu (byly to body $0, 1, \ldots, r$). Vyložíme nyní dva případy, kde tyto body leží symetricky. Napřed však upravme trochu označení pro diference. Dána budiž funkce f, číslo a a číslo $h > 0$. Pro celé k položme $(k, 0) = f(a + kh) = y_k$.[9]) Diferenci $(k + 1, 0) - (k, 0)$ označme $(k + \frac{1}{2}, 1)$; diferenci $(k + \frac{3}{2}, 1) - (k + \frac{1}{2}, 1)$ označme $(k + 1, 2)$ atd.

[8]) R je pro těchto $r + 1$ funkcí rovno nule. Postupné diference se pro tyto funkce snadno počítají.

[9]) Čtenář se jistě nebude plésti s označením pro otevřený interval.

Obecně:

$$\left(\frac{p}{2}+1, q\right)-\left(\frac{p}{2}, q\right)=\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}, q+1\right).$$

Tabulka diferencí potom vypadá takto:

$$\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
(-2,0) & & (-2,2) & & & \dots \\
 & (-\frac{3}{2},1) & & & (-\frac{3}{2},3) & \dots \\
(-1,0) & & (-1,2) & & & \dots \\
 & (-\frac{1}{2},1) & & & (-\frac{1}{2},3) & \dots \\
(0,0) & & (0,2) & & & \dots \\
 & (\frac{1}{2},1) & & & (\frac{1}{2},3) & \dots \\
(1,0) & & (1,2) & & & \dots \\
 & (\frac{3}{2},1) & & & (\frac{3}{2},3) & \dots \\
(2,0) & & (2,2) & & & \dots \\
\multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Každý člen (neleží-li v prvním sloupci) je rozdílem oněch dvou členů předcházejícího sloupce, jež leží bezprostředně pod a nad ním. Ještě vyplníme prázdná místa v tabulce: Symbol $(\frac{1}{2}p, q)$ byl dosud pro celá p, q definován jen tehdy, je-li $p+q$ sudé; definujme ještě pro $p+q$ liché (p, q celá):

$$(\tfrac{1}{2}p, q)=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}, q)+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}, q).$$

4. K výpočtu $\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$ (při čemž $F(t)=f(a+ht)$) užiji nyní funkčních hodnot $F(t)$ pro $t=-s, -s+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s, s+1$. Ježto tyto hodnoty funkce F jsou lineárními kombinacemi diferencí $(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1), \dots, (\frac{1}{2}, 2s+1)$ — a naopak, lze výsledek psáti ve tvaru

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = A_0(\tfrac{1}{2}, 0)+\dots+A_{2s+1}(\tfrac{1}{2}, 2s+1)+R_1\,; \tag{23}$$

je-li F polynom stupně nejvýše $2s+1$, je $R_1=0$. Užiji-li vzorce (23) na funkci $F(1-t)$, nezmění se levá strana; pořádek hodnot $F(-s)$, $F(-s+1)$, ..., $F(s+1)$ se obrátí; v (23) vpravo se proto pouze změní znamení symbolů $(\frac{1}{2}, k)$ s lichým k. Tedy $A_1=A_3=A_5=\dots=0$. Podobně jako v cvič. 2 vypočteme

$$A_0=1,\ A_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 t(t^2-1^2)\dots(t^2-(k-1)^2)(t-k)\,\mathrm{d}t \text{ pro } k>0\,.$$

Sčítáním jako obvykle[10])

[10]) n celé kladné; jako obvykle píši $y_j=f(a+jh)$.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,\mathrm{d}x = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) + A_2((n, 1) - (0, 1)) +$$

$$+ A_4((n, 3) - (0, 3)) + \ldots + A_{2s}((n, 2s - 1) - (0, 2s - 1)) + nA_{2s+2}h^{2s+2}\mu\,,$$

$$\inf_{a-sh\leqq x\leqq a+nh+sh} f^{(2s+2)}(x) \leqq \mu \leqq \sup_{a-sh\leqq x\leqq a+nh+sh} f^{(2s+2)}(x)\,.\ ^{6})$$

Petr uvádí hodnoty:

$$A_2 = -\frac{1}{12}\,,\ A_4 = \frac{11}{720}\,,\ A_6 = -\frac{191}{60480}\,,\ A_8 = \frac{2497}{3628800}\,,$$

$$A_{10} = -\frac{14797}{95800320}\,.$$

5. Kdežto v cvič. 2, 4 byly meze integrálu současně též interpolačními body, budou nyní ležeti uprostřed mezi dvěma interpolačními body. Položme opět $f(a + ht) = F(t)$ a počítejme

$$\int_{a-\frac{1}{2}h}^{a+\frac{1}{2}h} f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(t)\,\mathrm{d}t$$

pomocí hodnot

$$F(-s), \ldots, F(s)\,,$$

t. j. pomocí hodnot

$$(-s, 0), (-s + 1, 0), \ldots, (s - 1, 0), (s, 0)\,.$$

Opět zavedu diference a dostanu

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(t)\,\mathrm{d}t = B_0(0, 0) + B_2(0, 2) + \ldots + B_{2s}(0, 2s) + R_1 \tag{24}$$

(koeficienty při $(0, k)$ při lichém k jsou rovny nule, jako v cvič. 4); jest pak

$$B_0 = 1,\ B_{2k} = \frac{1}{(2k)!}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2(t^2 - 1^2)\ldots(t^2 - (k - 1)^2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Zbytek R_1 dostane nyní pěknější formu, užiji-li k jeho odhadu metody, použité při důkazu tvrzení II věty 246; viz (16), kamž místo x zaveďte t substitucí $x = s + t$, načež místo v mezích $-s$, s integrujte pouze v mezích $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Obvyklým sečtením plyne pak

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a-\frac{1}{2}h}^{a-\frac{1}{2}h+nh} f(x)\,\mathrm{d}x = y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + B_2((n-\tfrac{1}{2}, 1) - (-\tfrac{1}{2}, 1)) +$$

$$+ \ldots + B_{2s}((n-\tfrac{1}{2}, 2s-1) - (-\tfrac{1}{2}, 2s-1)) + nh^{2s+2}B_{2s+2}\,\mu\,,$$

$$\inf_{a-sh\leqq x\leqq a+(n-1)h+sh} f^{(2s+2)}(x) \leqq \mu \leqq \sup_{a-sh\leqq x\leqq a+(n-1)h+sh} f^{(2s+2)}(x)\,.$$[6])

Všimněte si, že mezi cvič. 4 a 5 je asi týž rozdíl jako ve větě 246 mezi lichým a sudým r: ač je interpolační polynom v cvič. 5 stupně o 1 nižšího než v cvič. 4, jsou odhady pro zbytek řádově stejné.[11])

Petr udává tyto hodnoty:

$$B_2 = \frac{1}{24}\,,\; B_4 = -\frac{17}{5760}\,,\; B_6 = \frac{367}{967680}\,,\; B_8 = -\frac{27859}{464486400}\,,$$

$$B_{10} = \frac{1295803}{122624409600}\,.$$

§ 3. Gaussova metoda.[12])

V § 1, § 2 jsme funkci f aproximovali polynomem P, pro který je $f(x_j) = P(x_j)$; dá se očekávati, že ve většině případů dosáhneme lepší aproximace, budeme-li vedle splnění rovnic $P(x_j) = f(x_j)$ požadovati také ještě splnění rovnic $P'(x_j) = f'(x_j)$. Odvoďme o tom tuto větu:

Věta 247. *Budiž r celé, $r \geqq 0$, $-\infty < a < b < +\infty$. Nechť reálná funkce $f(x)$ má v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci $f^{(2r+2)}(x)$. Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_r$ navzájem různé body intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $P(x)$ polynom $P(x_0, \ldots, x_r; f(x_0), \ldots, f(x_r); x)$. Potom existuje jeden a jen jeden polynom $M(x)$, jenž má tyto vlastnosti:*

I. M je nejvýše stupně $2r+1$.

II. $P(x_j) + M(x_j) = f(x_j)$ pro $j = 0, 1, \ldots, r$.

III. $P'(x_j) + M'(x_j) = f'(x_j)$ pro $j = 0, 1, \ldots, r$.

---

[11]) Tomu jest rozuměti takto: Integrační interval $(a, a+nh)$, po příp. $(a-\frac{1}{2}h, a-\frac{1}{2}h+nh)$ má jistou délku $I = nh$, načež $nh^{2s+2} = I^{2s+2}\,.\,n^{-2s-1}$; mocnitel $-2s-1$ při n udává „řád“ pro odhad zbytku při rostoucím n, t. j. při hustší a hustší volbě „interpolačních bodů“ $a + jh = a + jIn^{-1}$.

[12]) K tomuto paragrafu potřebuje čtenář z kap. XIV větu 209 a počátek § 9 až do pozn. 1 včetně.

Jest pak $M(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_r)\, Q(x)$, kde Q je mnohočlen (stupně ovšem nejvýše r-tého). Ke každému $x \in \langle a, b\rangle$ existuje pak $\xi \in (a, b)$ tak, že jest

$$(25) \qquad f(x) = P(x) + M(x) + \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_r)^2}{(2r + 2)!} f^{(2r+2)}(\xi)\,.$$

Důkaz. Podmínka II říká, že $M(x_j) = 0$, t. j. že $M(x) = (x - x_0) \dots$ $\dots (x - x_r)\, Q(x)$, kde Q je polynom; podmínka I říká, že Q je nejvýše r-tého stupně. Dále jest

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} M(x)\right]_{x = x_j} = (x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_r)\, Q(x_j)\,;$$

podmínka III tedy říká, že

$$(26) \qquad Q(x_j) = \beta_j, \text{ kde } \beta_j = \frac{f'(x_j) - P'(x_j)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{r} (x_j - x_k)} \text{ pro } j = 0, 1, \dots, r\,.$$

Podmínky I, II, III budou tedy splněny tehdy a jen tehdy, je-li Q polynom $P(x_0, \dots, x_r; \beta_0, \dots, \beta_r)$. Zbývá dokázati (25). Tato rovnice je zřejmá pro $x = x_0$, pro $x = x_1, \dots$, pro $x = x_r$. Budiž tedy dáno $x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_j$ ($j = 0, 1, \dots, r$). Sestrojme tuto funkci proměnné z:

$$(27) \qquad \Phi(z) = f(z) - P(z) - M(z) - \frac{(z - x_0)^2 \dots (z - x_r)^2}{(x - x_0)^2 \dots (x - x_r)^2} (f(x) - - P(x) - M(x))\,.$$

Tato funkce je rovna nule pro $z = x_0, \dots, x_r$ a pro $z = x$. Její derivace je tedy rovna nule v $r + 1$ bodech, ležících vždy mezi dvěma sousedními z těchto bodů; mimo to je derivace ještě rovna nule v bodech $x_0, \dots, x_r$ (to je zřejmé z (27) a z podmínky III). Užijeme-li na funkci $\Phi'(z)$ věty 84 z **D II**, vidíme, že existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $\Phi^{(2r+2)}(\xi) = 0$, t. j. (ježto $P + M$ je nejvýše stupně $2r + 1$)

$$f^{(2r+2)}(\xi) = \frac{(2r + 2)!}{(x - x_0)^2 \dots (x - x_r)^2} (f(x) - P(x) - M(x))\,,$$

což je rovnice (25).

Poznámka 1. Nechť existuje v $\langle a, b\rangle$ omezená derivace $f^{(2r+2)}(x)$, takže existují konečná čísla m, M tak, že $m \leqq f^{(2r+2)}(x) \leqq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Buďte dále splněny předpoklady věty 247. Potom z rovnice (25) plyne (užijeme-li na integrál posledního členu první věty o střední hodnotě)

$$(28)\quad \begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P(x)\,dx + \int_a^b (x - x_0)\dots(x - x_r)\,Q(x)\,dx\, + \\ + \frac{\mu}{(2r + 2)!}\int_a^b (x - x_0)^2\dots(x - x_r)^2\,dx\,, \end{aligned}$$

kde $m \leqq \mu \leqq M$. To je vzorec pro přibližný výpočet integrálu vlevo; poslední člen vpravo je zbytek. Ale není to vzorec toho druhu, jaký si přejeme: neboť polynom $Q(x)$ závisí nejenom na hodnotách $f(x_j)$, nýbrž i na hodnotách $f'(x_j)$ (viz (26)). Tuto nesnáz odstraníme, volíme-li za $x_0, \dots, x_r$ kořeny[13]) Legendreova polynomu $X_{r+1}(x)$, příslušného k intervalu (a, b) (viz kap. XIV, § 9, A, (83)); to lze, neboť tyto kořeny jsou navzájem různé a leží v (a, b) (viz větu 209). Potom

$$C(x - x_0)\dots(x - x_r) = X_{r+1}(x)\,,$$

kde C je konstanta, a druhý integrál vpravo v (28) je roven nule následkem orthogonality (neboť Q je stupně nižšího než $r + 1$). Podotkněme ještě: Označím-li znakem $P_{r+1}(x)$ Legendreův polynom příslušný k intervalu $(-1, 1)$ a jsou-li $t_0, \dots, t_r$[13]) jeho kořeny, je (viz kap. XIV, § 9, (87))

$$X_{r+1}(\tfrac{1}{2}(b - a)\,t + \tfrac{1}{2}(b + a)) = \left(\frac{b - a}{2}\right)^{r+1} P_{r+1}(t)\,,$$

tedy

$$x_j = \tfrac{1}{2}(b - a)\,t_j + \tfrac{1}{2}(b + a)\,.$$

V prvním a třetím integrálu v (28) vpravo zavedeme substituci $x = \frac{1}{2}(b - a)\,t + \frac{1}{2}(b + a)$.[14])

Podle (6), (7) jest

$$(29)\qquad \int_a^b P(x)\,dx = \frac{b - a}{2}\sum_{j=0}^{r} C_j^{(r)} f(x_j)\,,$$

---

[13]) Seřazené na př. podle velikosti.

[14]) Jde o substituci, jež hodnoty $t = -1$, $t = 1$ zobrazuje na $x = a$, $x = b$.

$$(30) \qquad C_j^{(r)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r}(t_j - t_k)} \int\limits_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r}(t - t_k)\,\mathrm{d}t\,;$$

poslední člen v (28) pak jest

$$(31) \qquad \frac{\mu}{(2r+2)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2r+3} \int\limits_{-1}^{+1}(t-t_0)^2\ldots(t-t_r)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Integrál v (31) jest podle (87a) v kap. XIV roven

$$(32) \qquad \frac{((r+1)!)^4\,2^{2r+2}}{((2r+2)!)^2}\int\limits_{-1}^{+1}P_{r+1}^2(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

poslední integrál pak podle (86) v kap. XIV je roven $2:(2r+3)$. Výraz (31) je tedy roven

$$(33) \qquad \frac{\mu}{(2r+3)!}(b-a)^{2r+3}\cdot\frac{1}{2^{4r+4}}\left(\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2r+2)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2r+1)}\right)^2.$$

Shrneme-li výsledky této poznámky 1, obdržíme tuto větu, která dává Gaussovu metodu mechanické kvadratury:

Věta 248. *Budiž* $-\infty < a < b < +\infty$. *Budiž* $r \geqq 0$, r *celé. Budiž* $f(x)$ *reálná funkce, mající v* $\langle a, b\rangle$ *omezenou derivaci* $f^{(2r+2)}(x)$, *takže existují konečná čísla* m, M *tak, že pro všechna* $x \in \langle a, b\rangle$ *jest* $m \leqq f^{(2r+2)}(x) \leqq M$.

Buďte dále $t_0, t_1, \ldots, t_r$[13]) *kořeny Legendreova polynomu* $P_{r+1}(t)$ (*viz kap. XIV*, § 9, **A**) *a položme* $x_j = \frac{1}{2}(b-a)\,t_j + \frac{1}{2}(b+a)$. *Potom jest*

$$(34) \qquad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b-a)\sum_{j=0}^{r}C_j^{(r)}f(x_j) + \\ + \frac{\mu}{(2r+3)!}(b-a)^{2r+3}\cdot\frac{1}{2^{4r+4}}\left(\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2r+2)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2r+1)}\right)^2,$$

kde $C_j^{(r)}$ *jsou dána vzorci* (30) *a* $m \leqq \mu \leqq M$.

Poznámka 2. K výpočtu čísel $C_j^{(r)}$ je třeba znáti kořeny polynomu P_{r+1}. Viz cvič. 2.

Poznámka 3. (Obdobná poznámce 2 v § 2). Máme počítati

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \quad (-\infty < A < B < +\infty)\,.$$

Zvolme celá čísla $n > 0$, $r \geqq 0$; předpokládejme, že pro všechna $x \in \langle A, B\rangle$ je $m \leqq f^{(2r+2)}(x) \leqq M$. Rozdělme interval $\langle A, B\rangle$ na n stejných dílů a na každý z nich aplikujme vzorec (34). Zbytek bude míti tvar

$$\frac{\mu}{(2r+3)!}\cdot\frac{1}{n^{2r+2}}\cdot(B-A)^{2r+3}\cdot\frac{1}{2^{4r+4}}\left(\frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2r+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2r+1)}\right)^2,$$

při čemž $m \leqq \mu \leqq M$. Při pevném r konverguje tedy zbytek pro $n \to \infty$ k nule aspoň tak rychle jako Nn^{-2r-2} (kde N je číslo nezávislé na n), což je výsledek podstatně výhodnější než v § 2, pozn. 2. Ovšem na druhé straně je ekvidistantní rozdělení bodů x_j v Cotesově metodě příjemnější než nepravidelné rozdělení v metodě Gaussově.

Cvičení

1. Ukažte, že věta 248 je pro $r = 0$ totožná s výsledkem cvič. 2 v § 1, kap. VI, § 1.

2. Vzpomeňte si, že Legendreův polynom P_n je sudá (lichá) funkce pro sudé (liché) n. Odtud pro koeficienty $C_j^{(r)}$ ve větě 248 (viz (30)) plyne $C_j^{(r)} = C_{r-j}^{(r)}$. Pro $r = 1, 2, 3, 4$ můžete tedy snadno vypočísti kořeny t_j[15]) a čísla $C_j^{(r)}$. Petr uvádí (Integrální počet, 2. vyd., str. 300):

Pro $r = 1$: $t_j = \mp 1 : \sqrt{3}$, $C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = 1$.

Pro $r = 2$: $t_0 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $t_1 = 0$, $t_2 = -t_0$; $C_0^{(2)} = C_2^{(2)} = \dfrac{5}{9}$, $C_1^{(2)} = \dfrac{8}{9}$.

Pro $r = 3$: $t_j = \pm\sqrt{\dfrac{3}{7} \pm \dfrac{2}{35}\sqrt{30}}$, $C_j^{(3)} = \dfrac{1}{2} \mp \dfrac{1}{36}\sqrt{30}$.

Pro $r = 4$: $t_2 = 0$, $t_j = \pm\sqrt{\dfrac{5}{9} \pm \dfrac{2}{63}\sqrt{70}}$ $(j \neq 2)$;

$$C_2^{(4)} = \frac{128}{225},\quad C_j^{(4)} = \frac{322 \mp 13\sqrt{70}}{900}\quad (j \neq 2)\,.$$

---

[15]) Pozor! To jsou kořeny polynomu P_{r+1}.

3. Označení jako ve větě 248 a v cvič. 2. Pro celé k $(0 \leqq k \leqq r)$ jest

$$\sum_{j=0}^{r} t_j^{2k} C_j^{(r)} = \frac{2}{2k+1} \, .$$

Odtud a z rovnic $C_j^{(r)} = C_{r-j}^{(r)}$ lze počítati čísla $C_j^{(r)}$, známe-li kořeny polynomu $P_{r+1}(x)$.