KAPITOLA XVI*

FORMULE EULER-MACLAURINOVA*

Jde o vzorec značně důležitý při vyšetřování asymptotického chování integrálů nebo součtů. Jednu důležitou aplikaci tohoto vzorce poznáme v kap. XVIII, § 3 (Stirlingova řada).

§ 1. Euler-Maclaurinova formule. Integrál $\int_0^1 f(x)\,dx$ můžeme nahraditi přibližně číslem $\frac{1}{2}(f(0) + f(1))$ (to je podklad t. zv. lichoběžníkové metody[1])). Ptáme se, jaké chyby se přitom dopustíme. K tomu cíli integrujme per partes, předpokládajíce, že v $\langle 0, 1\rangle$ je f absolutně spojitá.[2]) Položíme-li $\varphi_0(x) = 1$ a sestrojíme-li funkci $\varphi_1(x)$ tak, že

$$\varphi_1'(x) = \varphi_0(x) \text{ (t. j. } \varphi_1(x) = x + a),$$

obdržíme

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,\varphi_0(x)\,dx =$$

$$= f(1)\,.\,(1 + a) - f(0)\,.\,a - \int_0^1 f'(x)\,\varphi_1(x)\,dx\,.$$

Aby první dva členy vpravo dávaly $\frac{1}{2}(f(1) + f(0))$, volme $a = -\frac{1}{2}$, tedy $\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$, načež máme

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 f'(x)\,\varphi_1(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Již tento vzorec je značně důležitý, jak poznáme v § 6. My však budeme postupovat dále. Zaveďme ještě další funkce $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots$ tak, aby bylo $\varphi_k'(x) = \varphi_{k-1}(x)$ pro $k = 1, 2, \ldots$ (φ_k je tedy mnohočlen k-tého stupně s nejvyšším koeficientem $1 : k!$). Má-li f v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ absolutně spojitou $(n - 1)$-ní derivaci, dostáváme z věty 99

---

[1]) Viz **J I**, kap. VI, § 1.
[2]) Věta 98.

$$\begin{aligned}(2)\quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}(f(0) + f(1)) - [f'(x)\,\varphi_2(x) - f''(x)\,\varphi_3(x) + \ldots + \\ &+ (-1)^{n-2} f^{(n-1)}(x)\,\varphi_n(x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Ve volbě mnohočlenů $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ je ještě jistá libovůle; volme je tak, aby bylo $\varphi_{2k+1}(0) = \varphi_{2k+1}(1) = 0$, načež v hranaté závorce v (2) vypadnou členy s derivacemi sudého řádu. Že taková volba je možná a to jediným způsobem, ukazuje tato věta:

Věta 235. *Existuje jedna a jen jedna posloupnost polynomů $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., jež mají tyto vlastnosti:*

(3) $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $\varphi_k'(x) = \varphi_{k-1}(x)$ pro $k = 1, 2, \ldots$,

(4) $$\varphi_{2k+1}(0) = \varphi_{2k+1}(1) = 0 \text{ pro } k = 1, 2, \ldots$$ [3])

Tyto polynomy nazveme Bernoulliovými polynomy.

Přitom je $\varphi_k(x)$ polynom k-tého stupně s racionálními koeficienty. Dále jest

(5) $$\varphi_k(x) = (-1)^k\,\varphi_k(1 - x) \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots;$$

(6) $$\varphi_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots;$$

(7) $$\varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k}(1) \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Racionální čísla $B_1, B_2, \ldots$, definovaná rovnicemi

(8) $$(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!} = \varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k}(1) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

budeme nazývati Bernoulliovými čísly. Až do konce této kapitoly budou míti znaky φ_k, B_k význam vytčený v této větě.[4])

Důkaz. Nechť jsou již známy polynomy $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2m-1}$ $(m > 0)$ s racionálními koeficienty, vyhovující podmínkám (3), (4). Budiž $\lambda(x)$ nějaká primitivní funkce k $\varphi_{2m-1}(x)$ a budiž $\varrho(x)$ nějaká primitivní funkce k $\lambda(x)$; jsou to mnohočleny, jež volme tak, aby měly racionální koeficienty.[5]) Potom máme voliti

[3]) Pro $k = 0$ máme ovšem $\varphi_1(0) = -\frac{1}{2}$, $\varphi_1(1) = \frac{1}{2}$.

[4]) Označení v matematické literatuře není zcela ustálené.

[5]) Ježto φ_{2m-1} má racionální koeficienty, stačí voliti prosté členy polynomů λ, ϱ racionálně — třeba rovny nule.

$$\varphi_{2m}(x) = \lambda(x) + a\,, \quad \varphi_{2m+1}(x) = \varrho(x) + ax + b\,;$$

přitom má býti $\varrho(0) + b = 0$, $\varrho(1) + a + b = 0$; to je splněno tehdy a jen tehdy, volím-li $b = -\varrho(0)$, $a = \varrho(0) - \varrho(1)$, což jsou opět racionální čísla.

Rovnici (5) dokážeme rovněž úplnou indukcí. Platí pro $k = 0, 1$. Nechť platí pro $k = 2m - 1$; potom integrací (viz poslední rovnici (3)) plynou z rovnice

$$\varphi_{2m-1}(x) = -\varphi_{2m-1}(1 - x)$$

další rovnice

$$\varphi_{2m}(x) = \varphi_{2m}(1 - x) + a\,,$$
$$\varphi_{2m+1}(x) = -\varphi_{2m+1}(1 - x) + ax + b\,;$$

dosazením $x = 0$ a $x = 1$ do poslední rovnice plyne podle (4) $b = 0$, $a = 0$, takže (5) platí i pro $k = 2m$, $k = 2m + 1$. Z (5) plyne $\varphi_{2k+1}(\frac{1}{2}) = -\varphi_{2k+1}(\frac{1}{2})$, tedy (6). Konečně (7) plyne z (5) dosazením $x = 0$.

Volme nyní v (2) $n = 2p$ (p přirozené číslo) a buďte $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Bernoulliovy polynomy; podle (4), (8) obdržíme

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{B_1}{2!}(f'(1) - f'(0)) + \tag{9}$$
$$+ \frac{B_2}{4!}(f'''(1) - f'''(0)) - \ldots + (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!}(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)) +$$
$$+ \int_0^1 f^{(2p)}(x)\,\varphi_{2p}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tato rovnice platí, je-li $f^{(2p-1)}$ absolutně spojitá v $\langle 0, 1\rangle$.

Věta 236. *Budiž p přirozené číslo; nechť funkce F má v $\langle a, a + h\rangle$[6]) absolutně spojitou derivaci $F^{(2p-1)}$. Potom jest*

$$\int_a^{a+h} F(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}h(F(a) + F(a + h)) -$$
$$- \frac{B_1}{2!}h^2(F'(a + h) - F'(a)) + \frac{B_2}{4!}h^4(F'''(a + h) - F'''(a)) - \tag{10}$$
$$- \ldots + (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!}h^{2p}(F^{(2p-1)}(a + h) - F^{(2p-1)}(a)) + R_p\,,$$

---

[6]) a, h předpokládám konečná, $h > 0$.

kde

$$R_p = h^{2p+1} \int_0^1 F^{(2p)}(a + hx)\, \varphi_{2p}(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

Důkaz. Do rovnice (9) dosaďme

$$f(x) = F(a + hx), \text{ tedy } f^{(k)}(x) = h^k F^{(k)}(a + hx)\,,$$
$$\int_a^{a+h} F(y)\, \mathrm{d}y = h \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Rovnicím (10), (11) se říká Euler-Maclaurinova formule. Chceme-li jí užíti, musíme předně znáti čísla $B_1, \ldots, B_p$ a za druhé musíme umět odhadnout zbytek R_p, k čemuž zase potřebujeme znáti aspoň do jisté míry průběh a velikost funkce φ_{2p}; tímto úkolem se budeme zabývati v příštím paragrafu.

§ 2. Bernoulliovy polynomy a čísla. Bernoulliovy polynomy $\varphi_k(x)$ lze též definovati „vytvořující funkcí" $\dfrac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t - 1}$. Tím rozumím toto: Rozvinu-li tuto funkci[7]) v mocninnou řadu (postupující podle mocnin proměnné t),[8]) je koeficient při t^k jistá funkce proměnné x, a to právě $\varphi_k(x)$. Dokažme to. Jest

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{1!} + \dfrac{t}{2!} + \dfrac{t^2}{3!} + \ldots} \tag{12}$$

pro všechna komplexní t, pro něž je $\mathrm{e}^t \neq 1$; pro $t = 0$ budeme pod hodnotou zlomku $t : (\mathrm{e}^t - 1)$ rozuměti jeho limitu pro $t \to 0$, t. j. číslo 1. Podle věty 235 v **D II** existuje číslo $R > 0$ tak, že pravou stranu rovnice (12) lze pro $|t| < R$ rozvinouti v mocninnou řadu:

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \quad (|t| < R)\,. \tag{13}$$

Pro všechna komplexní x, t jest

$$\mathrm{e}^{xt} = 1 + \frac{xt}{1!} + \frac{x^2t^2}{2!} + \frac{x^3t^3}{3!} + \ldots \tag{14}$$

---

[7]) Jakožto funkci komplexní proměnné t.

[8]) To lze provésti jen jedním způsobem; viz **D II**, věta 226 (věta o neurčitých součinitelích).

Vynásobím-li rovnice (13), (14), obdržím rovnici tvaru

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \psi_0(x) + \psi_1(x)\,t + \psi_2(x)\,t^2 + \ldots, \tag{15}$$

kde ψ_k je zřejmě polynom stupně nejvýše k-tého; rovnice platí pro libovolné komplexní x a pro $|t| < R$. Dosadím-li do (12) za levou stranu podle rovnice (13), dostanu snadno $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, a tedy vynásobením s řadou (14)

$$\psi_0(x) = 1, \; \psi_1(x) = x - \tfrac{1}{2}\,. \tag{16}$$

Pro $x = 0$ je funkce

$$\frac{t}{e^t - 1} - \psi_1(0)\,t = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{1}{2}\,t = \frac{t}{2}\cdot\frac{e^t + 1}{e^t - 1} \tag{17}$$

sudá funkce proměnné t; t. j. v (15) vpravo vypadnou — odečteme-li člen $\psi_1(0)\,.\,t$ — všechny liché mocniny t,[9]) t. j.

$$\psi_{2k+1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.\text{[10])} \tag{18}$$

Podobně pro $x = 1$: funkce

$$\frac{te^t}{e^t - 1} - \psi_1(1)\,t = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{1}{2}\,t = \frac{t}{2}\cdot\frac{e^t + 1}{e^t - 1} \tag{19}$$

je sudá, a proto je

$$\psi_{2k+1}(1) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{20}$$

Dále jest podle (13), (14), (15)

$$\psi_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{x^{k-j}}{(k-j)!}, \tag{21}$$

takže pro $k > 0$ jest

$$\psi_k'(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{x^{k-j-1}}{(k-j-1)!} = \psi_{k-1}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{22}$$

---

[9]) Budiž

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots \text{ (pro } |t| < R,\; R > 0)$$

sudá funkce; tedy také

$$f(t) = \tfrac{1}{2}(f(t) + f(-t)) = c_0 + c_2 t^2 + c_4 t^4 + \ldots;$$

věta 226 z **D II** (o neurčitých koeficientech) dává tedy (srovnáním obou rovnic) $c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = 0$.

[10]) Pro $k = 0$ je však $\psi_1(0) = -\frac{1}{2}$.

Podle (16), (18), (20), (22) a podle věty 235 je tedy

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x) \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

a máme tuto větu:

Věta 237. *Existuje číslo $R > 0$ takové, že platí*

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\, t^k \textit{ pro všechna } x \textit{ a pro } |t| < R\,, \tag{23}$$

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{B_1}{2!}t^2 - \frac{B_2}{4!}t^4 + \frac{B_3}{6!}t^6 - \dots \textit{ pro } |t| < R\,.^{11)} \tag{24}$$

Přitom připouštíme libovolná komplexní x, t; levé strany rovnic (23), (24) *značí pro $t = 0$ číslo* 1.

Z věty 235 víme, že $\varphi_m(\frac{1}{2}) = 0$ pro liché $m > 0$. Pro sudé m platí

Věta 238.

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!}\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) \textit{ pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

Důkaz.

$$\frac{te^{\frac{1}{2}t}}{e^t - 1} = \frac{t(e^{\frac{1}{2}t} + 1)}{e^t - 1} - \frac{t}{e^t - 1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{e^{\frac{1}{2}t} - 1} - \frac{t}{e^t - 1}\,.$$

Rozviňme levou stranu podle rovnice (23), pravou podle rovnice (24) v mocninnou řadu; porovnáme-li součinitele při t^{2k}, obdržíme hledaný výsledek.

Odvodíme si nyní Fourierovy rozvoje pro funkce φ_k v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. K tomu cíli definujme funkce Φ_k v intervalu $(-\infty, +\infty)$ takto:

I. Funkce $\Phi_k(x)$ jsou periodické s periodou 1 pro $k = 1, 2, 3, \dots$

II. Je-li $k > 1$, je $\Phi_k(x) = \varphi_k(x)$ pro $0 \leqq x \leqq 1$.[12]

III. Dále klademe $\Phi_1(x) = \varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$ pro $0 < x < 1$, $\Phi_1(0) = \Phi_1(1) = 0$.

---

11) Tato rovnice plyne ovšem z (23) dosazením $x = 0$; viz (8).

12) To není ve sporu s požadovanou periodicitou, ježto podle (4), (7) je $\varphi_k(0) = \varphi_k(1)$ pro $k > 1$; pro $k = 1$ je tomu jinak: $\varphi_1(0) = -\frac{1}{2}$, $\varphi_1(1) = \frac{1}{2}$.

Věta 239. *Pro každé $x \in \mathsf{E}_1$ jest*

$$(25) \qquad \Phi_{2k+1}(x) = (-1)^{k-1}\, 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k+1}} \quad \textit{pro } k = 0, 1, \dots;$$

$$(26) \qquad \Phi_{2k}(x) = (-1)^{k-1}\, 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k}} \quad \textit{pro } k = 1, 2, \dots.$$

Důkaz. Podle kap. XIII, § 6, příkl. 1 je tvrzení správné pro funkci Φ_1; přitom řada vpravo má podle téhož příkladu omezené částečné součty, dá se tedy podle věty 65 integrovati člen po členu.[13] Totéž platí pro všechny ostatní řady, jež mají majorantu $2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-2} < +\infty$. Jestliže nyní vzorce (25), (26) platí pro $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{2k-1}$, dostaneme integrací (ježto $\int_0^x \Phi_n(t)\, dt = \Phi_{n+1}(x) - \Phi_{n+1}(0)$)

$$\Phi_{2k}(x) + C = (-1)^{k-1}\, 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k}},$$

$$\Phi_{2k+1}(x) + Cx + D = (-1)^{k-1}\, 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k+1}}.$$

Ježto $\Phi_{2k+1}(0) = \varphi_{2k+1}(0) = 0$, $\Phi_{2k+1}(1) = \varphi_{2k+1}(1) = 0$, plyne $C = D = 0$, t. j. (25), (26) platí i pro funkce Φ_{2k}, Φ_{2k+1}. Tím je důkaz indukcí proveden.

Věta 240. *Pro $k = 1, 2, \dots$ jest*

$$(27) \qquad \frac{B_k}{(2k)!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}}, \quad \frac{2}{(2\pi)^{2k}} < \frac{B_k}{(2k)!} < \frac{4}{(2\pi)^{2k}}.$$

Důkaz. První rovnice plyne z (26) dosazením $x = 0$. Co se týče obou nerovností, plynou z toho, že

$$\frac{1}{(2\pi)^{2k}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}} < \frac{1}{(2\pi)^{2k}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x\pi)^{2k}} = \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \frac{1}{(2\pi)^{2k}}.$$

Známe nyní odhad pro B_k; odvodíme odtud odhad pro funkci $\varphi_{2k}(x)$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

[13]) Také se dá užíti věty 186.

Věta 241. *Polynom* $\varphi_{2k+1}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *nemá v intervalu* $(0, 1)$ *jiných kořenů než* $\frac{1}{2}$.

Důkaz. Věta je správná pro $k = 0$ $(\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2})$. Nechť je správná pro jistou hodnotu $k \geqq 0$. Polynom $\varphi_{2k+3}(x)$ má podle (4), (6) kořeny $0, \frac{1}{2}, 1$. Kdyby měl vedle kořenu $\frac{1}{2}$ v $(0, 1)$ ještě aspoň jeden kořen $\alpha \neq \frac{1}{2}$, měl by polynom $\varphi'_{2k+3}(x) = \varphi_{2k+2}(x)$ v intervalu $(0, 1)$ podle Rolleovy věty aspoň tři různé kořeny a polynom $\varphi'_{2k+2}(x) = \varphi_{2k+1}(x)$ by tam měl aspoň dva různé kořeny — spor. Tedy má také polynom $\varphi_{2k+3}(x)$ v intervalu $(0, 1)$ kořen pouze v bodě $\frac{1}{2}$.

Věta 242. *Pro* $k = 1, 2, 3, \ldots; 0 \leqq x \leqq 1$ *jest*

$$|\varphi_{2k}(x)| \leqq \frac{B_k}{(2k)!}. \tag{28}$$

Důkaz. Funkce $\varphi_{2k}(x)$ je spojitá v $\langle 0, 1\rangle$ a má uvnitř tohoto intervalu derivaci $\varphi_{2k-1}(x)$. Tato derivace je v $(0, 1)$ všude od nuly různá, vyjma v bodě $\frac{1}{2}$. Funkce $\varphi_{2k}(x)$ může tedy nabývati v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ své největší a rovněž nejmenší hodnoty pouze v některém z bodů $0, \frac{1}{2}, 1$; z (8) a z věty 238 plyne pak nerovnost (28) (ježto $B_k > 0$ podle věty 240).

Poznámka 1. Z definice, obsažené ve větě 235, lze postupně počítati funkce φ_k a z nich podle (8) čísla B_k. Jednodušší výpočet nám umožní rovnice (23), (24): násobíme-li na obou stranách řadou $\frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots$ a srovnáme koeficienty při téže mocnině t,[14]) obdržíme rekurentní relace pro funkce φ_k a čísla B_k. Na př. z (24) obdržíte (srovnáním koeficientů při t^{2k}) rovnici

$$\sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \binom{2k+1}{2p} B_p = \frac{2k-1}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

z níž můžeme (dosazujíce postupně $k = 1, 2, \ldots$) vypočísti

$$B_1 = \tfrac{1}{6},\ B_2 = \tfrac{1}{30},\ B_3 = \tfrac{1}{42},\ B_4 = \tfrac{1}{30},\ B_5 = \tfrac{5}{66},\ \ldots$$

[14]) Rovněž e^{xt} v (23) rozvineme v řadu (14).

Poznámka 2. Ježto dovedeme postupně vypočísti $B_1, B_2, \ldots$, dovedeme podle věty 240 počítati též $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ pro $k = 1, 2, \ldots$; na př.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = (2\pi)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{B_1}{2!} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ atd.}$$

Je zajímavé, že neznáme žádné podobné vzorce pro $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots$). Pro velké hodnoty k je výpočet čísla B_k obtížný, za to však řada $\sum(2n\pi)^{-2k}$ velmi rychle konverguje, takže pro velké hodnoty k můžeme naopak věty 240 užíti k přibližnému odhadu čísel B_k.

§ 3. Zbytek v Euler-Maclaurinově formuli. Budiž $n \in \mathbf{N}$, $h > 0$, $a \in \mathbf{E}_1$; kladme $b = a + nh$. Funkce F nechť má v $\langle a, b \rangle$ absolutně spojité derivace až do řádu $2p - 1$ ($p > 0$). Pro $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ je podle věty 236

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} F(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}h(F(a + kh) + F(a + (k + 1)\,h)) -$$
$$- \frac{B_1}{2!} h^2 (F'(a + (k + 1)\,h) - F'(a + kh)) + \ldots$$
$$+ h^{2p+1} \int_0^1 F^{(2p)}(a + kh + hx)\,\varphi_{2p}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Sečteme-li pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, obdržíme

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = h(\tfrac{1}{2}F(a) + F(a + h) + F(a + 2h) + \ldots + \\ &+ F(a + (n - 1)\,h) + \tfrac{1}{2}F(b)) - \frac{B_1}{2!} h^2(F'(b) - F'(a)) + \\ &+ \frac{B_2}{4!} h^4(F'''(b) - F'''(a)) - \ldots + \\ &+ (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} h^{2p}(F^{(2p-1)}(b) - F^{(2p-1)}(a)) + R_p\,, \end{aligned}\right.$$

kde

$$(31)\qquad R_p = h^{2p+1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 F^{(2p)}(a + h(k + x))\,\varphi_{2p}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Rovnice (30), (31) dávají formuli Euler-Maclaurinovu ve tvaru poněkud zobecněném; právě tohoto tvaru se nejčastěji užívá v aplikacích. Budeme nyní vyšetřovati zbytek (31) a odvodíme tuto větu:

Věta 243. *Buďte n, p přirozená čísla; $h > 0$; $b = a + nh$ (a reálné). Budiž F reálná funkce, mající v $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci*[15]) $F^{(2p)}$. *Potom platí rovnice* (30), *při čemž zbytek R_p je dán rovnicí*

$$R_p = h^{2p+1} \int_0^n F^{(2p)}(a + hx)\, \Phi_{2p}(x)\, \mathrm{d}x\,.^{16)} \tag{32}$$

Pro R_p platí tyto odhady:

I.

$$|R_p| \leqq (b - a)\, h^{2p} \frac{B_p}{(2p)!} \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |F^{(2p)}(x)|\,. \tag{33}$$

II. *Je-li $F^{(2p+1)}(x)$ spojitá a monotonní*[15]) *v $\langle a, b\rangle$, jest*

$$R_p = (-1)^{p+1}\, h^{2p+2} \frac{B_{p+1}}{(2p+2)!} \left(F^{(2p+1)}(b) - F^{(2p+1)}(a)\right) . 2\Theta\,, \tag{34}$$

kde $0 \leqq \Theta \leqq 1$.[17])

III. *Je-li $F^{(2p+2)}(x)$ spojitá*[15]) *v $\langle a, b\rangle$, jest*

$$|R_p| \leqq 2(b - a)\, h^{2p+2} \frac{B_{p+1}}{(2p+2)!} \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |F^{(2p+2)}(x)|\,. \tag{35}$$

Důkaz. Jestliže v k-tém sčítanci v (31) zavedeme novou proměnnou $k + x = x'$, obdržíme z (31) ihned (32). Z věty 242 a z (32) plyne ihned I (neboť $nh = b - a$). Předpokládejme nyní, že $F^{(2p+1)}(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$. Integrujeme-li k-tý člen v (31) per partes, máme vzhledem k (3), (4)

$$\begin{aligned} &h^{2p+1} \int_0^1 F^{(2p)}(a + h(k + x))\, \varphi_{2p}(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= - h^{2p+2} \int_0^1 F^{(2p+1)}(a + h(k + x))\, \varphi_{2p+1}(x)\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{36}$$

---

[15]) Míním stále konečnou derivaci.

[16]) Φ_{2p} bylo definováno před větou 239.

[17]) Všimněte si, že tento odhad dává též znamení zbytku.

Rozdělme integrační interval $\langle 0, 1\rangle$ na intervaly $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$; uvnitř každého z těchto dvou intervalů má $\varphi_{2p+1}(x)$ podle věty 241 stále totéž znamení. Užijeme-li tedy na každý z nich první věty o střední hodnotě ve tvaru vzorce (72) z kap. III (za větou 66) — který platí pro nezáporné φ i pro nekladné φ — obdržíme, že výraz (36) se rovná

$$(37) \quad - h^{2p+2}\Big(F^{(2p+1)}(\xi_k) \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2p+1}(x)\,dx + F^{(2p+1)}(\eta_k) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi_{2p+1}(x)\,dx\Big),$$

kde

$$a + hk \leqq \xi_k \leqq a + h(k + \tfrac{1}{2}) \leqq \eta_k \leqq a + h(k + 1).$$

Ale

$$\int_\alpha^\beta \varphi_{2p+1}(x)\,dx = \varphi_{2p+2}(\beta) - \varphi_{2p+2}(\alpha),$$

a z (8) a z věty 238 plyne, že výraz (37) je roven

$$(-1)^{p+1} h^{2p+2} (F^{(2p+1)}(\eta_k) - F^{(2p+1)}(\xi_k)) \frac{B_{p+1}}{(2p+2)!} \left(2 - \frac{1}{2^{2p+1}}\right).$$

Tento výraz máme sečísti přes hodnoty $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Je-li předně $F^{(2p+1)}$ monotonní v $\langle a, b\rangle$, má součet $\sum_{k=0}^{n-1} (F^{(2p+1)}(\eta_k) - F^{(2p+1)}(\xi_k))$ totéž znamení a nejvýše touž prostou hodnotu jako $F^{(2p+1)}(b) - F^{(2p+1)}(a)$; tím je dokázáno tvrzení II. Jestliže za druhé je $F^{(2p+2)}$ spojitá v $\langle a, b\rangle$, je podle věty o přírůstku funkce

$$|F^{(2p+1)}(\eta_k) - F^{(2p+1)}(\xi_k)| = \\ = (\eta_k - \xi_k) \,.\, |F^{(2p+2)}(\zeta_k)| \leqq h \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |F^{(2p+2)}(x)|,$$

kde $\xi_k \leqq \zeta_k \leqq \eta_k$. Odtud ihned plyne tvrzení III.

Cvičení

1. Jestliže $F^{(2p+1)}(x)$, $F^{(2p+3)}(x)$ jsou spojité a obě neklesající nebo obě nerostoucí v $\langle a, b\rangle$, lze v (34) místo 2Θ psáti Θ. Návod. Budiž $R_p \neq 0$ (jinak je to triviální). Pišme (34) ve tvaru $R_p = A_p \,.\, 2\Theta$; tedy $R_p A_p > 0$. Podle (34) s hodnotou $p + 1$ je $R_{p+1}A_p \leqq 0$ (neboť $A_{p+1}A_p \leqq 0$). Současně však $R_p = A_p + R_{p+1}$ a odtud snadno $|R_p| \leqq |A_p|$. — Tento výsledek dovoluje zdvojnásobit přesnost odhadu zbytku v příkladech § 4 a § 5, jakož i ve větě 255.

§ 4. Užití Euler-Maclaurinovy formule k výpočtu určitých integrálů. I. Mysleme si, že F má derivace všech řádů v $\langle a, b\rangle$, takže číslo p v (30) můžeme voliti libovolně veliké. Je tedy nasnadě myšlenka, co se stane s rovnicí (30), když v ní píšeme nekonečnou řadu

$$(38)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k}(F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a)) \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

místo konečného součtu $\sum_{k=1}^{p}$ a vynecháme zbytek R_p. Ale tento postup obyčejně nevede k cíli, protože již v případech velmi jednoduchých je řada (38) divergentní. Vyšetřujme na př. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, t. j. klaďme $F(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$ (cílem jest ovšem výpočet tohoto integrálu, t. j. čísla lg 2). Označíme-li k-tý člen řady (38) $(-1)^k \mathfrak{A}_k$, vyjde ihned

$$(39)\qquad \mathfrak{A}_k = \frac{B_k}{(2k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{2k}(2k-1)!\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) = \frac{B_k}{2k}\left(\frac{1}{n}\right)^{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}.$$

Abychom odhadli $\mathfrak{A}_k$, užijme odhadu z věty 240; položíme-li

$$(40)\qquad \mathfrak{B}_k = \frac{(2k-1)!}{(2\pi n)^{2k}},$$

máme ihned

$$(41)\qquad \mathfrak{B}_k < \mathfrak{A}_k < 4\mathfrak{B}_k.$$

Jest

$$(42)\qquad \frac{\mathfrak{B}_{k+1}}{\mathfrak{B}_k} = \frac{2k(2k+1)}{4\pi^2 n^2}, \quad \text{tedy} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{B}_{k+1}}{\mathfrak{B}_k} = +\infty;$$

tedy jest $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{B}_k = +\infty$ a tedy $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{A}_k = +\infty$, takže řada (38) v našem případě diverguje.

II. Přes tuto divergenci můžeme často užíti vzorce (30) výhodně k přibližnému výpočtu integrálu $\int_a^b F(x)\,dx$. Vezměme opět $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Ježto všechny derivace funkce x^{-1} jsou monotonní v $\langle 1, 2\rangle$, lze pro zbytek v (30) užíti vzorce (34), jenž říká, že R_p má totéž znamení jako

$(p+1)$-ní člen řady (38) a prostou hodnotu nejvýše dvakráte větší; tedy $|R_p| \leqq 2\mathfrak{A}_{p+1} < 8\mathfrak{B}_{p+1}$. Z (42) je vidět: Pro malá k, pokud je $k(k+\frac{1}{2}) < \pi^2 n^2$, je $\mathfrak{B}_k > \mathfrak{B}_{k+1}$; jakmile však $k(k+\frac{1}{2}) > \pi^2 n^2$, je $\mathfrak{B}_k < \mathfrak{B}_{k+1}$. Nejpříznivější odhad pro $|R_p|$ z nerovnosti $|R_p| < < 8\mathfrak{B}_{p+1}$[18]) obdržíme tedy, zvolíme-li $p = k_0$, kde k_0 je největší celé k, pro něž je $k(k+\frac{1}{2}) \leqq \pi^2 n^2$ (člen $\mathfrak{B}_{k_0+1}$ je totiž nejmenší mezi všemi $\mathfrak{B}_k$). Číslo k_0 je tím větší, čím větší je n; zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_0}{\pi n} = 1$. Při praktickém výpočtu nechceme ovšem míti ani n ani p příliš velké.[19]) Zkusme to pro $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, volíce $n = 10$, při čemž žádáme, aby chyba při výpočtu byla menší než 10^{-11}. Členové řady (38), t. j. řady $-\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3 + \dots$ jsou postupně:

$$-\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10^2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{16}\cdot 10^{-2},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\frac{15}{16} = \frac{1}{128}\cdot 10^{-4},$$

$$-\mathfrak{A}_3 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{10^6}\cdot\frac{63}{64} = -\frac{1}{256}\cdot 10^{-6},$$

$$\mathfrak{A}_4 = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{10^8}\cdot\frac{255}{256} = \frac{17}{4096}\cdot 10^{-8},$$

$$\mathfrak{A}_5 < \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10^{10}}, \quad |R_4| \leqq 2\mathfrak{A}_5 < 2\,.\,10^{-12}.$$

Stačí tedy voliti $p = 4$ a máme

$$\lg 2 = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \dots + \frac{10}{19} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) -$$
$$-\frac{1}{16}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{128}\cdot 10^{-4} - \frac{1}{256}\cdot 10^{-6} + \frac{17}{4096}\cdot 10^{-8} - 2\Theta\,.\,10^{-12},$$
$$0 \leqq \Theta \leqq 1\,.$$

---

[18]) Mohli bychom též užíti nerovnosti $|R_p| \leqq 2\mathfrak{A}_{p+1}$, ale ta vzhledem k (41) dává odhady „řádově“ stejné (totiž nejvýše čtyřikráte lepší).

[19]) Poznamenejme ještě: je-li p blízko čísla k_0, je podíl $\mathfrak{B}_{n+1} : \mathfrak{B}_n$ zřejmě blízký jedničce. Přidám-li tedy k součtu $-\mathfrak{A}_1 + \dots + (-1)^p \mathfrak{A}_p$ ještě další člen $(-1)^{p+1}\mathfrak{A}_{p+1}$, přidělal jsem si sice práci, ale přesnost výpočtu se zvýšila jen nepatrně; proto volíme v praxi číslo p vždy podstatně menší než k_0.

Největší přesnosti bychom pro $n = 10$ dosáhli, kdybychom volili p okolo čísla 10π. Na př. pro $p = 30$ bychom (třeba použitím logaritmických tabulek) dostali

$$|R_{30}| < 8\mathfrak{B}_{31} = 8 \cdot \frac{61!}{(20\pi)^{62}} < 10^{-26} .$$

Podstatně větší přesnosti nelze pro $n = 10$ dosáhnouti;[20]) kdybychom potřebovali větší přesnosti, musili bychom voliti větší n. Ale i kdybychom potřebovali přesnost řádu 10^{-26}, volili bychom raději větší n, načež bychom vystačili s menší hodnotou p.

III. Podobně lze počítati $\int_a^b F(x)\,dx$ i v obecném případě. Existuje-li spojitá $F^{(2p+2)}(x)$ v $\langle a, b\rangle$, lze užíti vzorce (35), při čemž $h = (b - a) : n$, a obdržíme pro zbytek odhad

$$|R_p| \leqq \frac{A_p}{n^{2p+2}}, \tag{43}$$

kde A_p nezávisí na n (závisí ovšem na p). Pravá strana v (43) konverguje k nule pro $n \to \infty$ a to tím rychleji, čím větší je p. Mohli bychom tedy při libovolně zvoleném p (na př. už pro $p = 1$) dosáhnouti libovolné přesnosti, ale po případě bychom musili voliti příliš velké n. Proto v praxi, je-li předepsána jistá přesnost δ (t. j. požadujeme-li, aby bylo $|R_p| < \delta$), volíme napřed jisté nepříliš velké n a potom hledáme p tak, aby bylo $|R_p| < \delta$. Neexistuje-li takové p (nebo je-li příliš veliké), volíme větší hodnotu n a k ní opět hledáme příslušné p, atd.

§ 5. Užití Euler-Maclaurinovy formule jako sumační formule.

I V předešlém paragrafu jsme užili formule (30) k výpočtu integrálu $\int_a^b F(x)\,dx$; naopak, známe-li tento integrál, můžeme formule (30) užíti k výpočtu součtu

$$\begin{aligned} S = {} & \tfrac{1}{2}F(a) + F(a + h) + F(a + 2h) + \ldots + \\ & + F(a + (n - 1)\,h) + \tfrac{1}{2}F(a + nh)\,; \end{aligned} \tag{44}$$

[20]) Náš odhad jest ovšem dosti hrubý.

to má význam tehdy, je-li n velké, takže přímý výpočet tohoto součtu by byl obtížný. Jako příklad vezměme součet

$$(45)\quad S_m = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m}$$

($m \in \mathbf{N}$). Kladu tedy v (30) $F(x) = x^{-1}$, $a = m$, $b = 2m$, $h = 1$, $n = m$. Levá strana v (30) jest $\int\limits_m^{2m} x^{-1}\,dx = \lg 2$, tedy číslo, jež můžeme považovati za „známé“ (známe různé metody pro výpočet tohoto čísla, jednu jsme odvodili právě v předešlém paragrafu). V (30) vpravo je předně součet S_m, za druhé součet $\sum\limits_{k=1}^{p} (-1)^k \mathfrak{A}_k$, kde

$$\mathfrak{A}_k = \frac{B_k}{(2k)!}(2k-1)!\,\frac{1}{m^{2k}}\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right),$$

a za třetí člen

$$R_p = 2\Theta(-1)^{p+1}\mathfrak{A}_{p+1},\ \text{kde}\ 0 \leqq \Theta \leqq 1\,.$$

Vidíme, že máme tytéž výrazy jako v předešlém paragrafu, pouze místo n píšeme m. Je-li m malé, počítáme ovšem S_m přímo; ale jakmile m je větší, je vidět, že R_p bude velmi malé, a to již pro dosti malé hodnoty p. Na př. pro $p = 3$ máme

$$|R_3| \leqq 2\mathfrak{A}_4 < 2\,.\,\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{m^8} < \frac{1}{100m^8},$$

takže

$$S_m = \lg 2 + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{m^2} - \frac{1}{128}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1}{256}\cdot\frac{1}{m^6} - \frac{\Theta}{100m^8}\quad (0 < \Theta < 1)\,.$$

Již pro $m = 100$ je zbytek menší než 10^{-18} a pro větší m stoupá přesnost velmi rychle s rostoucím m. Proti výsledku v předešlém paragrafu je zde ovšem jeden rozdíl: tam jsme mohli (při výpočtu integrálu $\int\limits_a^b F(x)\,dx$) voliti n libovolně velké a tím dosáhnouti libovolné přesnosti; zde však, je-li m dáno, musíme voliti $n = m$, takže náš odhad zbytku $|R_p| \leqq 2\mathfrak{A}_{p+1}$ nikdy (pro žádné p) neklesne pod jisté kladné číslo, totiž pod číslo $2 \operatorname*{Min}\limits_{p=1,2,3,\dots} \mathfrak{A}_{p+1}$.[21]) Zato dává naše

[21]) Kladná čísla $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$ mají limitu $+\infty$ (viz řádku za (42)), takže některé z nich je vskutku nejmenší.

metoda důležité výsledky pro „asymptotický průběh" veličiny S_m (pro $m \to +\infty$, $m \in \mathbf{N}$). Obecně lze říci toto: Napíšeme-li divergentní řadu

$$(46) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \mathfrak{A}_k\,, \text{ t. j. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k} \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \frac{1}{m^{2k}}$$

a označíme-li $\sigma_{p,m}$ součet jejích prvních p členů, je (pro $m \to +\infty$, $m \in \mathbf{N}$)[22])

$$\lg 2 = S_m - \sigma_{p,m} + 2\Theta \mathfrak{A}_{p+1} = S_m - \sigma_{p,m} + O\left(\frac{1}{m^{2p+2}}\right)$$

($|\Theta| \leqq 1$). (Tedy řada (46) je asymptotickým rozvojem funkce $S_m - \lg 2$ v podobném smyslu jako v kap. XV, § 2 — až na to, že proměnná m zde probíhá jen přirozená čísla.)

Poznamenávám, že bychom podobně mohli počítati součet

$$\frac{1}{2}\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+l-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{m+l};$$

kladl jsem speciálně $l = m$ jen proto, abych mohl užíti týchž čísel $\mathfrak{A}_k$ jako v § 4.

II. Úspěch, ke kterému jsme dospěli v bodě I, byl podmíněn tím, že obě sumační meze v S_m (sčítá se od m do $2m$) byly velké. Kdybychom místo toho vyšetřovali součet

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m},$$

nedošli bychom přímo k cíli. Abychom i v takových případech našli užitečné výsledky, musíme rovnici (30) poněkud upraviti:

Věta 244. *Buďte dána čísla a, h, p ($-\infty < a < +\infty$, $0 < h < +\infty$, $p \in \mathbf{N}$). Budiž $F(x)$ reálná funkce, jež má v $\langle a, +\infty)$ konečnou spojitou monotonní derivaci $F^{(2p+1)}(x)$, která má pro $x \to +\infty$ limitu 0:*

$$(47) \qquad \lim_{x \to +\infty} F^{(2p+1)}(x) = 0\,.$$

Pro libovolné $q \in \mathbf{N}$ pišme

$$(48) \qquad S_q = F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots + F(a+(q-1)h) + \\ + \tfrac{1}{2}F(a+qh)\,.$$

[22]) Při pevném p.

Potom platí:

I. Existuje konečná limita

$$\text{(49)}\quad \lim_{q\to\infty}\left(hS_q - \int_a^{a+qh} F(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k}F^{(2k-1)}(a+qh)\right) = \\ = A\,.$$

II. *Pro každé $q \in \mathbf{N}$ jest*

$$\text{(50)}\quad \begin{aligned} hS_q &= \int_a^{a+qh} F(x)\,\mathrm{d}x + A + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k}F^{(2k-1)}(a+qh) + \\ &+ 2\Theta(-1)^p\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}h^{2p+2}F^{(2p+1)}(a+qh)\,,\quad 0 \leqq \Theta \leqq 1\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Výraz, stojící za znamením limitním v (49), označme u_q. Je-li $0 < q < r$ ($q \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$), jest

$$\int_{a+qh}^{a+rh} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+rh} - \int_a^{a+qh}\,,$$

$$\begin{aligned} hS_r - hS_q = h(\tfrac{1}{2}F(a+qh) &+ F(a+(q+1)\,h) + \ldots + \\ &+ \ldots + F(a+(r-1)\,h) + \tfrac{1}{2}F(a+rh))\,. \end{aligned}$$

V rovnici (30) (se zbytkem ve tvaru (34)) klaďme $a + qh$, $a + rh$ místo a, b; okamžitě obdržíme

$$\text{(51)}\quad u_r - u_q = 2\Theta(-1)^p\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}h^{2p+2}(F^{(2p+1)}(a+rh) - F^{(2p+1)}(a+qh))\,.$$

Vzhledem k podmínce (47) je jasno, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $s \in \mathbf{N}$ tak, že pro $q > s$, $r > s$ jest $|u_r - u_q| < \varepsilon$. Posloupnost u_1, $u_2, \ldots$ splňuje tedy Bolzano-Cauchyovu podmínku, takže vskutku existuje konečná limita $\lim_{q\to\infty} u_q = A$, což je tvrzení I. Z rovnice (51) plyne pak limitním přechodem $r \to \infty$ (při pevném q) rovnice

$$\text{(52)}\quad u_q = A + 2\Theta(-1)^p\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}h^{2p+2}F^{(2p+1)}(a+qh)\,,$$

při čemž $0 \leqq \Theta \leqq 1$.[23]) To je však tvrzení II.

Jako **příklad** vezměme opět $a = 1$, $h = 1$, $F(x) = x^{-1}$. Všechny derivace funkce F jsou v $\langle 1, +\infty)$ monotonní, spojité a mají pro $x \to +\infty$ limitu 0. Pišme ve větě 244 $q - 1$ místo q; předně tedy existuje pro každé přirozené p konečná limita

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{2q} - \lg q - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \frac{B_k}{2k}\frac{1}{q^{2k}}\right) = C\,; \tag{53}$$

zřejmě je tedy též

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{q} - \lg q\right) = C, \tag{54}$$

neboť výrazy za znakem lim v (53), (54) se od sebe navzájem liší pouze o číslo, mající limitu 0. Za druhé jest pro každé přirozené p

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{q} = \frac{1}{2q} + \lg q + C + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \frac{B_k}{2k}\frac{1}{q^{2k}} + \\ + 2\Theta(-1)^{p+1}\frac{B_{p+1}}{2p+2}\frac{1}{q^{2p+2}}, \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Čísla $B_k : (2kq^{2k})$, jež se zde vyskytují, liší se od čísel (39) z předešlého paragrafu jen tím, že neobsahují činitele $1 - \frac{1}{2^{2k}}$ (který je pro větší k blízký jedničce a jejž jsme beztoho v § 4 při odhadech zbytku vynechávali); místo n stojí nyní q.

Číslo C, definované rovnicí (54), se nazývá **Eulerova konstanta**. Je to velmi důležité číslo, které můžeme s libovolnou přesností vypočísti z (55).[24] Na př. pro $q = 10$, $p = 4$ je prostá hodnota zbytku v (55) nejvýše rovna $2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{10^{10}} < 2 \cdot 10^{-12}$. Jest pak

$$C = 0{,}5772156649015\ldots$$

---

[23]) Řekněme to trochu podrobněji. Číslo Θ v rovnici (51) závisí ovšem (při pevném q) na r; pišme tedy v (51) Θ_r místo Θ. Ježto $0 \leqq \Theta_r \leqq 1$, existuje vybraná posloupnost $\Theta_{r_1}, \Theta_{r_2}, \ldots$, mající jistou limitu Θ ($0 \leqq \Theta \leqq 1$). Rovnice (52) (s hodnotou $\Theta = \lim_{n\to\infty} \Theta_{r_n}$) plyne pak z (51) limitním přechodem takto: do (51) dosadím $r = r_n$ a hledám limitu pro $n \to \infty$.

[24]) Známe-li ovšem $\lg q$.

Jakmile známe C a $\lg q$, můžeme z (55) počítati hodnoty $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{q}$ podobně, jako jsme v I počítali součty S_m.

§ 6. Nejjednodušší případ Euler-Maclaurinovy formule. Již v § 1 jsme uvedli vzorec

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 f'(x)\,\varphi_1(x)\,dx\,, \tag{56}$$

ale nezastavili jsme se u něho, nýbrž integrovali jsme dále per partes. Upravme nyní tento vzorec v jednoduchý vzorec sumační, při čemž zobecníme trochu předpoklady.

Věta 245. *Buďte a, b celá čísla, $a < b$; budiž $f(x)$ komplexní funkce, absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$. Budiž $\Phi_1(x)$ funkce s periodou 1, pro kterou jest*

$$\Phi_1(x) = x - \tfrac{1}{2} \textit{ pro } 0 < x < 1\,.$$

Potom jest

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b-1) + \tfrac{1}{2}f(b) &= \\ = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\,\Phi_1(x)\,dx &= \\ = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin 2n\pi x\,dx\,.& \end{aligned} \tag{57}$$

Součet vlevo budeme značiti $\sum_{k=a}^{b}{}' f(k)$; čárkou při znamení $\sum$ vyznačujeme tedy, že oba krajní členy součtu je vzíti s koeficientem $\frac{1}{2}$.

Důkaz. Je-li k celé, $a \leqq k \leqq b - 1$, jest

$$\lim_{x\to k+}\Phi_1(x) = -\tfrac{1}{2}\,,\quad \lim_{x\to k+1-}\Phi_1(x) = \tfrac{1}{2}\,,$$

takže integrace per partes dává (jestliže totiž nahradím hodnoty $\Phi_1(k)$, $\Phi_1(k+1)$ čísly $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, stane se Φ_1 absolutně spojitou v $\langle k, k+1\rangle$)

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}f(k+1) + \tfrac{1}{2}f(k) - \int_k^{k+1} f'(x)\,\Phi_1(x)\,dx\,.$$

Sečtením pro $k = a, a + 1, \ldots, b - 1$ obdržíme ihned první rovnici v (57). Dosadíme-li do ní za $\Phi_1(x)$ řadu (25), dostaneme za integračním znamením řadu $-\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-1} n^{-1} f'(x) \sin 2n\pi x$, jejíž částečné součty mají podle příkl. 1 v kap. XIII, § 6 společnou integrabilní majorantu $|f'(x)| \,.\, (\pi^{-1} + 2)$, takže můžeme integrovat člen po členu; tím dostaneme i druhou rovnici (57).

Příklad 1. Odvoďme tuto důležitou větu van der Corputovu: *Buďte a, b celá čísla, $a < b$. Budiž f reálná funkce, mající v $\langle a, b \rangle$ monotonní derivaci, jež pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ splňuje nerovnosti $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$. Potom jest*

$$\left| \sum_{k=a}^{b}{}' e^{2\pi i f(k)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)} \, dx \right| \leqq \frac{2}{\pi} \,.\text{[25])} \tag{58}$$

Hlavní ovšem jest, že levá strana je menší než jisté číslo, nezávislé na a, b a na tvaru funkce $f(x)$. Že vyjde právě číslo $2\pi^{-1}$, je již méně důležité.

Důkaz. Funkce $e^{2\pi i f(x)}$ má v $\langle a, b \rangle$ omezenou derivaci $2\pi i e^{2\pi i f(x)} \,.\, f'(x)$ a je tam tedy absolutně spojitá, takže věta 245 dává

$$\sum_{k=a}^{b}{}' e^{2\pi i f(k)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)} \, dx = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi i}{n} \int_a^b e^{2\pi i f(x)} \sin 2n\pi x \,.\, f'(x) \, dx \,.$$

Máme odhadnout pravou stranu; napřed provedeme malé zjednodušení. Násobím pravou stranu číslem $e^{2\pi i \lambda}$ (λ reálné); tím se prostá hodnota nezmění, amplituda se změní o $2\pi\lambda$, takže vhodnou volbou čísla λ lze dosáhnouti toho, že výraz

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i}{n} \int_a^b e^{2\pi i (f(x) + \lambda)} \sin 2n\pi x \,.\, f'(x) \, dx$$

bude reálný, takže se bude rovnati své reálné části, t. j. výrazu

[25]) Rozdělením na reálnou a imaginární část dostávám obdobné nerovnosti pro $\cos 2\pi f(x)$ a pro $\sin 2\pi f(x)$.

$$(59) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \int_a^b \sin 2\pi(f(x) + \lambda) \,.\, \sin 2n\pi x \,.\, f'(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Máme pak dokázati, že tento výraz má prostou hodnotu nejvýše $\frac{2}{\pi}$. Výraz (59) lze psáti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (I_n^- - I_n^+)\,,$$

kde

$$I_n^{\pm} = \int_a^b \cos 2\pi(nx \pm f(x) \pm \lambda)\, f'(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{f'(x)}{n \pm f'(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\sin 2\pi(nx \pm f(x) \pm \lambda))\, \mathrm{d}x \,.$$

Zde je funkce $\frac{f'(x)}{n \pm f'(x)} = \pm 1 \mp \frac{n}{n \pm f'(x)}$ v $\langle a, b\rangle$ monotonní, nezáporná a nejvýše rovna $\frac{1}{2n \pm 1}$, takže druhá věta o střední hodnotě dává $|I_n^{\pm}| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2n \pm 1} \,.\, 2$. Tedy

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (I_n^- - I_n^+) \right| \leqq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2}{\pi} \,.$$