KAPITOLA XIV

ORTHOGONÁLNÍ SYSTÉMY

V celé této kapitole jde o komplexní funkce; nevystupují zde vůbec nevlastní integrály, t. j. jde o Lebesgue-Stieltjesovy, v pozdějších paragrafech o Lebesgueovy integrály. Je-li $c = a + bi$ (a, b reálná), značíme komplexně sdružené číslo $a - bi$ znakem $\bar{c}$. Podobně: Je-li f funkce v oboru M, bude $\bar{f}$ značit funkci komplexně sdruženou, t. j. funkci v oboru M, pro kterou $\bar{f}(x)$ je číslo komplexně sdružené s $f(x)$, t. j. $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ pro $x \in M$. Pamatujme, že $c\bar{c} = |c|^2$, $f\bar{f} = |f|^2$. Slovy „nezáporná míra μ v $\mathbf{E}_r$“ rozumím ovšem funkci μ, vznikající rozšířením z funkce intervalu, mající vlastnost $\mathbf{S}_r$ (viz kap. I, § 6—8).

§ 1. Hölderova a Minkovského nerovnost. Poznámka 1. Je-li $1 < q < +\infty$, budeme znakem q' značiti vždy číslo, definované rovnicí $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, tedy též $1 < q' < +\infty$. Tvrdím, že

$$\text{(1)} \qquad ab \leqq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'} \text{ pro } 0 \leqq a \leqq +\infty,\ 0 \leqq b \leqq +\infty\,.$$

Důkaz. Je-li a nebo b nula nebo $+\infty$, je to jasné. Budiž tedy $0 < b < +\infty$. Funkce $\varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'} - ab$ má pro $a > 0$ derivaci $\varphi'(a) = a^{q-1} - b$, jež je záporná pro $0 < a < b^{\frac{1}{q-1}}$, kladná pro $a > b^{\frac{1}{q-1}}$. Funkce $\varphi(a)$ má tedy nejmenší hodnotu v bodě $b^{\frac{1}{q-1}}$, a tato hodnota je $\frac{1}{q}\, b^{\frac{q}{q-1}} + \frac{1}{q'}\, b^{q'} - b^{1+\frac{1}{q-1}} = 0$, ježto $1 + \frac{1}{q-1} = \frac{q}{q-1} = q'$.

Věta 194 (Hölderova nerovnost). *Budiž μ nezáporná míra v $\mathbf{E}_r$. Buďte f, g funkce μ-měřitelné v M, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.*

Potom

$$(2)\qquad \int_M |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqq \Big(\int_M |f|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_M |g|^{q'}\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q'}}.$$

D ů k a z. Kladťme $I_1 = (\int_M |f|^q\,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}$, $I_2 = (\int_M |g|^{q'}\,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q'}}$. Případ $I_1 I_2 = + \infty$ je jasný. Rovněž případ $I_1 I_2 = 0$, neboť potom buďto f nebo g je rovna nule skoro všude v M. Budiž tedy $0 < I_1 < +\infty$, $0 < I_2 < +\infty$. Podle pozn. 1 je

$$\frac{|f(x)\,g(x)|}{I_1 I_2} \leqq \frac{|f(x)|^q}{q I_1^q} + \frac{|g(x)|^{q'}}{q' I_2^{q'}}\,.$$

Integruji-li přes M, dostávám

$$\frac{1}{I_1 I_2}\int_M |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqq \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\,,$$

což je (2).

Věta 195 (Minkovského nerovnost). *Budiž μ nezáporná míra v $\mathbf{E}_r$. Buďte f, g funkce μ-měřitelné a μ-skoro všude konečné v M. Budiž $1 \leqq q < +\infty$. Potom*

$$(3)\qquad \Big(\int_M |f+g|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \leqq \Big(\int_M |f|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int_M |g|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}}\,.$$

D ů k a z. Budiž $q > 1$ (případ $q = 1$ je jasný). Buďte dále oba integrály vpravo konečné (jinak je vše jasné). Uvažme, že

$$|f+g|^q \leqq 2^q \operatorname{Max}(|f|^q, |g|^q) \leqq 2^q(|f|^q + |g|^q)\,,$$

takže i integrál vlevo je konečný. Je-li tento integrál roven nule, je opět vše zřejmé. Budiž tedy integrál vlevo kladný a konečný. Hölderova nerovnost dává

$$\int_M |f|\,|f+g|^{\frac{q}{q'}}\,\mathrm{d}\mu \leqq \Big(\int_M |f|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\int_M |f+g|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\int_M |g|\,|f+g|^{\frac{q}{q'}}\,\mathrm{d}\mu \leqq \Big(\int_M |g|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\int_M |f+g|^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q'}},$$

kde $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Sečtu-li tyto nerovnosti a užiji vztahů

$$|f+g|^q = |f+g|\,|f+g|^{\frac{q}{q'}} \leqq |f|\,|f+g|^{\frac{q}{q'}} + |g|\,|f+g|^{\frac{q}{q'}},$$

dostanu

$$\int_M |f+g|^q\,\mathrm{d}\mu \leqq \left(\left(\int_M |f|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_M |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right) . \left(\int_M |f+g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q'}} .$$

Ježto $1 - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q}$, plyne odtud (3).

Poznámka 2. Z **D II** (pozn. 1 za větou 106) známe tyto nerovnosti, platné pro konečná komplexní a_k, b_k:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(q > 1,\ q' > 1,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right),$$

$$(5) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (1 \leqq q < +\infty) .$$

Důkaz je obdobný; ostatně plyne (4), (5) z (2), (3), vezmu-li za μ Lebesgueovu míru v $\mathbf{E}_1$, $M = (0, n\rangle$, $f(x) = a_k$, $g(x) = b_k$ pro $k - 1 < x \leqq k$.

Limitním přechodem $n \to \infty$ plyne z (4), (5)

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(q > 1,\ q' > 1,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right),$$

$$(7) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (1 \leqq q < +\infty) .$$

Jde o řady s nezápornými členy, které vždy mají součet (který může býti $+\infty$). Speciálně: konvergují-li řady vpravo, konverguje i řada vlevo.

Následující malé (jen formální) zobecnění vzorců (2), (3) bude pro nás pohodlné:

Věta 196. *Budiž μ nezáporná míra v $\mathbf{E}_r$. Buďte V, f, g funkce μ-měřitelné v M a μ-skoro všude v M budiž $|f(x)| < +\infty$, $|g(x)| < +\infty$, $0 < V(x) < +\infty$. Potom je*

$$(8) \qquad \int_M V|fg|\,d\mu \leqq \left(\int_M V|f|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_M V|g|^{q'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}$$

pro $q > 1$, $q' > 1$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$,

$$(9) \qquad \left(\int_M V|f+g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\int_M V|f|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_M V|g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

pro $1 \leqq q < +\infty$.

Důkaz. Ve větě 194 pište $V^{\frac{1}{q}}f$, $V^{\frac{1}{q'}}g$ místo f, g; ve větě 195 pište $V^{\frac{1}{q}}f$, $V^{\frac{1}{q}}g$ místo f, g.

Poznámka 3. Zvláště důležitý bude pro nás případ $q = 2$, načež také $q' = 2$. Nerovnosti (2) se v tomto případě říká nerovnost Buňakovského. Speciálně: Jsou-li integrály $\int_M Vf^2\,d\mu$, $\int_M Vg^2\,d\mu$ konvergentní, je konvergentní i $\int_M Vfg\,d\mu$ a je

$$(10) \qquad \left|\int_M Vfg\,d\mu\right| \leqq \int_M |Vfg|\,d\mu \leqq \sqrt{\int_M V|f|^2\,d\mu \,.\, \int_M V|g|^2\,d\mu}\,.$$

§2. Prostor l^q $(1 \leqq q < +\infty)$. (Čti: malé l). Znakem l^q_K označme množinu (budeme říkati **prostor**), jejímiž prvky (budeme říkati **body**) jsou všechny posloupnosti $x_0, x_1, \ldots$ (budeme též značiti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nebo $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a pod.) komplexních čísel, pro něž je

$$(11) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q < +\infty\,.$$

Buďte $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ dva body (dvě posloupnosti) z l^q_K. Budiž $c \in K$. Je přirozené definovati násobek cx a součet $x + y$ rovnicemi $cx = \{cx_k\}_{k=0}^{\infty}$, $x + y = \{x_k + y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Zřejmě

$$(12) \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} |cx_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = |c|\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty\,,$$

$$(13) \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty\,,$$

takže též $cx \in l^q_K$, $x + y \in l^q_K$. Tedy l^q_K je komplexní modul (ve smyslu kap. I, § 10 v **D II**) a množina všech reálných posloupností z l^q_K je reálný modul, označme jej l^q_R. Budeme dále psáti l^q a míniti l^q_K; čtenář si však uvědomí, že naše věty platí též pro l^q_R. Nulovým prvkem o je posloupnost 0, 0, 0, ...

Pro $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^q$ položme

$$(14) \qquad \|x\|_q = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Je $\|o\| = 0$ (index q někdy vynechávám) a podle (12), (13) je $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$, $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$; pro $x \neq o$ je $0 < \|x\| < +\infty$. Tedy $\|x\|_q$ je normou v l^q (viz **D II**, kap. VI, § 1, příklad 4). Jestliže tedy položím $\varrho(x, y) = \|x - y\|$, je ϱ metrikou v prostoru l^q.

Vzpomeňme si na tyto pojmy z theorie metrických prostorů: Jsou-li $x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ body daného metrického prostoru P a je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = 0$, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ a říkáme, že posloupnost $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ je konvergentní v P a má limitu x. Posloupnost nemůže míti v P více než jednu limitu.[1]) Posloupnost se nazývá cauchyovskou, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $(n \geqq n_0,\ m \geqq n_0) \Rightarrow \varrho(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon$. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Jestliže také naopak každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní v P, nazýváme prostor P úplným.

Věta 197. *Prostor l^q je úplný.*

Důkaz. Budiž $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ cauchyovská posloupnost z l^q; pišme $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že

$$(15) \qquad (n \geqq n_0(\varepsilon),\ m \geqq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^q \leqq \varepsilon^q ,$$

tedy tím spíše platí pro každé celé $k \geqq 0$

$$(n \geqq n_0(\varepsilon),\ m \geqq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leqq \varepsilon ;$$

tedy existuje (**D II**, věta 26 — jde o posloupnost komplexních čísel) konečná limita $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Položme $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.

---

[1]) Důkaz: Je-li $\lim \varrho(x^{(n)}, x) = 0 = \lim \varrho(x^{(n)}, y)$, je $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x^{(n)}) + \varrho(x^{(n)}, y)$ pro každé n, tedy $\varrho(x, y) = 0$, $x = y$.

Budiž opět $\varepsilon > 0$ a najděme $n_0(\varepsilon)$ tak, že platí (15). Pro každé $r \in \boldsymbol{N}$ je potom

$$(n \geqq n_0(\varepsilon),\ m \geqq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow \sum_{k=0}^{r} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^q \leqq \varepsilon^q\,,$$

tedy (limitní přechod $m \to \infty$)

$$n \geqq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=0}^{r} |x_k^{(n)} - x_k|^q \leqq \varepsilon^q$$

pro každé $r \in \boldsymbol{N}$ a tedy ($r \to \infty$)

$$n \geqq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^q \leqq \varepsilon^q\,.$$

Odtud plyne předně $x^{(n)} - x \in \boldsymbol{l}^q$, tedy též $x = x^{(n)} - (x^{(n)} - x) \in \boldsymbol{l}^q$ a za druhé $\|x^{(n)} - x\| \leqq \varepsilon$ pro $n \geqq n_0$, tedy $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Tedy má každá cauchyovská posloupnost v $\boldsymbol{l}^q$ limitu v $\boldsymbol{l}^q$.

Poznámka 1. Je-li $1 \leqq q < p < +\infty$, $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in \boldsymbol{l}^q$, je též $x \in \boldsymbol{l}^p$.

Důkaz. Z (11) plyne, že $|x_k| < 1$, tedy $|x_k|^p \leqq |x_k|^q$, pro všechna dosti velká k. Tedy též $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$.

Cvičení

1. Budiž M množina všech posloupností $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde x_k jsou komplexní čísla, jejichž obě části (reálná i imaginární) jsou racionální čísla, jež jsou všechna až na konečný počet rovna nule. Potom M je spočetná a hustá v $\boldsymbol{l}^q$. Tedy $\boldsymbol{l}^q$ je separabilní (**D II**, kap. VI, § 15, def. 30).

§ 3. Prostor $\boldsymbol{L}_V^q(M; \mu)$. Budiž μ nezáporná míra v $\boldsymbol{E}_r$, budiž V funkce μ-měřitelná v $M \subset \boldsymbol{E}_r$, budiž $0 < V(x) < +\infty$ μ-skoro všude v M a budiž $1 \leqq q < +\infty$. Znakem $\boldsymbol{L}_V^q(M; \mu)$ označme množinu všech funkcí f, μ-měřitelných v M, pro něž

$$\left(\int_M V|f|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty\,.^{2)}$$

[2]) Znaky M, μ u symbolu $\boldsymbol{L}$ často vynecháváme. Podotkněme, že $\boldsymbol{L}_1^1(M; \mu)$ (t. j. $q = 1$, $V(x) = 1$) značí totéž jako znak $\boldsymbol{L}(M; \mu)$, zavedený již v kap. III.

Levou stranu označme $\|f\|$, obšírněji $\|f\|_q$ nebo — je-li třeba — $\|f\|_{q,V,M,\mu}$. Funkci V se často říká **váha**. Je-li $f \in L_V^q$, $g \in L_V^q$, $c \in K$, je zřejmě

$$\|cf\| = |c| \cdot \|f\|, \quad \|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\| \tag{16}$$

(věta 196); dále je zřejmě $\|f\| = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $f \sim 0$ $(M; \mu)$, t. j. je-li $f(x) = 0$ μ-skoro všude v M. Je tedy předně patrno, že L_V^q má všechny vlastnosti modulu až na III. (viz **D II**, kap. I, § 10). Dále má $\|f\|$ skoro všechny vlastnosti normy (**D II**, kap. VI, § 1, příkl. 4), až na to, že z $\|f\| = 0$ neplyne $f = 0$ v M, nýbrž pouze $f \sim 0$ $(M; \mu)$. Abychom tomu odpomohli, rozdělme množinu všech funkcí, jež jsou μ-skoro všude v M konečné, do tříd tak, že dvě takové funkce f, g patří do téže třídy tehdy a jen tehdy, je-li $f \sim g$ $(M; \mu)$. Třídu, do které patří f, označme (f). Znakem $\tilde{L}_V^q(M; \mu)$ označme množinu oněch tříd (f), pro něž $f \in L_V^q(M; \mu)$. Násobek $c \,.\, (f)$ třídy (f) (pro $c \in K$), po případě součet $(f) + (g)$ definujme jako třídu (cf) po příp. $(f + g)$.[3] Množina $\tilde{L}_V^q(M; \mu)$ je nyní zřejmě modulem; definuji-li

$$\|(f)\|_{q,V,M,\mu} = \|f\|_{q,V,M,\mu} \tag{17}$$

(kratčeji píši $\|(f)\|$ nebo $\|(f)\|_q$), je tento výraz zřejmě **normou** (je opět zřejmo, že výraz (17) se nezmění, nahradím-li f funkcí $f_1 \sim f$). Definuji-li tedy vzdálenost

$$\varrho((f), (g)) = \|(f) - (g)\| = \|(f - g)\| = \left(\int_M V|f - g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{18}$$

stává se $\tilde{L}_V^q$ metrickým prostorem.

Poznámka 1. V literatuře se obyčejně nerozlišuje mezi L a $\tilde{L}$; místo (f) se psává f a mluví se o funkci místo o třídě funkcí, t. j. „ztotožňují" se ekvivalentní funkce. Ač tato licence sotva může vésti k nedorozumění, budu zde rozeznávati důsledně mezi f a (f), mezi L a $\tilde{L}$. Výsledky vyslovuji obyčejně i pro L i pro $\tilde{L}$. Formulace v $\tilde{L}$ je výhodná tím, že výsledky mají jednoduchý „geometrický" smysl v metrickém prostoru $\tilde{L}_V^q$.

---

[3]) Že se tyto třídy nezmění, píši-li v nich místo f, g funkce $f_1 \sim f$, $g_1 \sim g$, je jasno.

Poznámka 2. Rovnice $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n) = (f)$ (v prostoru $\tilde{L}_V^q$) znamená podle (18), že

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty}\left(\int_M V|f_n - f|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = 0\,. \tag{19}$$

Říká se proto také, že funkce f_n *konvergují k f v průměru q-tého stupně* (v M, vzhledem k váze V a míře μ). Ježto v metrickém prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu, platí toto: Konvergují-li f_n k funkci f v průměru q-tého stupně, potom f_n konvergují k funkci g v průměru q-tého stupně tehdy a jen tehdy, je-li $(g) = (f)$, t. j. $g \sim f\,(M; \mu)$.

Poznámka 3. Vezměme $V(x) = 1$, $M = (0, 1\rangle$, $q \geqq 1$; μ budiž Lebesgueova míra. Definujme $f_1, f_2, \ldots$ takto: Pro celá k, m ($k \geqq 0$, $0 \leqq m \leqq 2^k - 1$) položme $f_{2^k+m}(x) = 1$ pro $2^{-k}m < x \leqq 2^{-k}(m+1)$, pro ostatní x budiž $f_{2^k+m}(x) = 0$. (Kreslete!) Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n) = (0)$, ač pro žádné $x \in (0, 1\rangle$ není $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Naopak: položme $g_n(x) = n$ pro $0 < x \leqq \frac{1}{n}$, $g_n(x) = 0$ pro ostatní x. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ dokonce pro každé x, ale $\|g_n\| \geqq 1$, tedy není $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n) = (0)$. Ale platí aspoň tato věta:

Věta 198. *Nechť v* $\tilde{L}_V^q$ *je* $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n) = (f)$, *t. j. nechť platí* (19). *Potom existují přirozená* $n_1 < n_2 < \ldots$ *tak, že je*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \mu\text{-skoro všude v } M\,. \tag{20}$$

Důkaz. Lze voliti $n_1 < n_2 < \ldots$ tak, že $\|f_{n_k} - f\| < 2^{-k}$. Podle věty 61 je

$$\int_M V \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f|^q\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_M V|f_{n_k} - f|^q\,\mathrm{d}\mu < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kq} < +\infty\,.$$

Tedy je integrand vlevo skoro všude konečný (a současně $V(x) > 0$); t. j. existuje N tak, že $\mu(N) = 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^q < +\infty \quad \text{pro } x \in M \dot{-} N\,.$$

Tedy má k-tý člen řady limitu 0, t. j. $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ pro $x \in M \dot{-} N$.

Poznámka 4. Budiž V funkce μ-měřitelná v M, $|V(x)| < +\infty$ μ-skoro všude v M. Potom lze psáti $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ tak, že $\int_{M_n} |V| \, d\mu < +\infty$ pro $n = 1, 2, \ldots$ **Důkaz.** Lze předpokládati $|V(x)| < +\infty$ všude v M. Položme $N_k = \mathcal{E}_x(x \in M, k \leqq |V(x)| < k + 1)$, takže $M = N_0 \cup N_1 \cup \ldots$ Každé N_k lze rozložiti na spočetně mnoho množin $N_{k,l}$ konečné míry, načež $\int_{N_{k,l}} |V| \, d\mu \leqq (k+1) \, \mu(N_{k,l}) < +\infty$.

Věta 199. *Prostor $\tilde{L}_V^q(M; \mu)$ je úplný. Jinak řečeno: Budiž $f_1, f_2, \ldots$ posloupnost funkcí z $L_V^q(M; \mu)$ taková, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon)$ tak, že platí*

$$(n \geqq N(\varepsilon), m \geqq N(\varepsilon)) \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leqq \varepsilon . \tag{21}$$

Potom existuje $f \in L_V^q(M, \mu)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 . \tag{22}$$

Důkaz: Podle (21) lze voliti $n_1 < n_2 < \ldots$ tak, že

$$n \geqq n_k \Rightarrow \left(\int_M V |f_{n_k} - f_n|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2^k},$$

tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_M V |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 .$$

Rozložme $M = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_s$ tak, že $\int_{M_s} V \, d\mu < +\infty$ (pozn. 4). Potom (věta 196)

$$\int_{M_s} V |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \, d\mu \leqq \left(\int_{M_s} V \, d\mu\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{M_s} V |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(pro $q = 1$ položte místo prvního činitele vpravo jedničku) a tedy (věta 61)

$$\int_{M_s} V \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_s} V |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \, d\mu < +\infty .$$

Existuje tedy N_s tak, že $\mu(N_s) = 0$ a pro $x \in M_s \dot{-} N_s$ je $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) -$
$- f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty$; tedy je též konvergentní řada $f_{n_1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k}(x) -$
$- f_{n_{k+1}}(x))$ s částečnými součty $f_{n_{k+1}}(x)$. Tedy μ-skoro všude v M (totiž pro všechna $x \in \bigcup_{s=1}^{\infty} M_s \dot{-} \bigcup_{s=1}^{\infty} N_s$) existuje konečná $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) =$
$= f(x)$. Dokáži, že $f \in \mathsf{L}_V^q$ a že $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$.

Budiž $\varepsilon > 0$; potom platí (21). Zvolím-li tedy jakékoliv $n \geqq N(\varepsilon)$, je pro všechna dosti velká k

$$\|f_n - f_{n_k}\| \leqq \varepsilon ;$$

odtud podle Fatouovy věty 63 (pro $k \to \infty$)

$$\|f_n - f\| \leqq \liminf_{k \to \infty} \|f_n - f_{n_k}\| \leqq \varepsilon .$$

To platí pro každé $n \geqq N(\varepsilon)$. Tedy je předně $f_n - f \in \mathsf{L}_V^q$ a tedy i $f =$
$= f_n - (f_n - f) \in \mathsf{L}_V^q$ a za druhé platí (22).

Poznámka 5. Je-li $0 < \alpha < \beta < +\infty$, $V(x) \geqq 0$, $0 < \int_M V \, \mathrm{d}\mu <$
$< +\infty$, f μ-měřitelná v M, je

$$\left(\frac{1}{\int_M V \, \mathrm{d}\mu} \int_M V|f|^\alpha \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \left(\frac{1}{\int_M V \, \mathrm{d}\mu} \int_M V|f|^\beta \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{\beta}} . \tag{23}$$

(Všimněte si analogie s větou 107 v **D II**.)

Důkaz. Položme $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$, tedy $q > 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.
Z věty 196 plyne, že

$$\int_M V|f|^\alpha \, \mathrm{d}\mu \leqq \left(\int_M V \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_M V|f|^{\alpha q} \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

což je (23), neboť $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$.

Výrazy v (23) jsou jakési „průměry" funkce f; zvláště výrazný je případ $V = 1$ (pro $0 < \mu(M) < +\infty$).

Poznámka 6. Z (23) plyne: Je-li $\int\limits_M V \, d\mu < +\infty$, $1 \leqq p < q < +\infty$, $f \in \mathsf{L}_V^q$, je též $f \in \mathsf{L}_V^p$. Pro $\int\limits_M V \, d\mu = +\infty$ to nemusí být pravda: pro $V = 1$, $M = (1, +\infty)$ a pro Lebesgueovu míru je $\int\limits_1^{+\infty} x^{-1} \, dx = +\infty$, ale $\int\limits_1^{+\infty} x^{-2} \, dx < +\infty$.

§ 4. Orthogonalita. O funkcích $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $(n \geqq 1)$, konečných μ-skoro všude v M, budeme říkati, že jsou lineárně μ-závislé v M (nebo že tvoří systém funkcí lineárně μ-závislých v M a pod.), jestliže existují konečná komplexní čísla $a_1, \ldots, a_n$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly a taková, že

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n \sim 0 \, (M; \mu) \, . \tag{24}$$

Jediná funkce f tvoří tedy systém lineárně μ-závislý v M tehdy a jen tehdy, je-li $f \sim 0 \, (M; \mu)$. Jestliže funkce $f_1, \ldots, f_n$, konečné μ-skoro všude v M, nejsou lineárně μ-závislé v M, říkáme, že jsou lineárně μ-nezávislé v M; o nekonečné posloupnosti $f_1, f_2, \ldots$ funkcí (konečných μ-skoro všude v M) říkáme konečně, že tvoří systém funkcí lineárně μ-nezávislých v M, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ jsou funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lineárně μ-nezávislé v M.

Poznámka 1. Definice orthogonality. Buďte f, g funkce z $\mathsf{L}_V^2(M; \mu)$,[4]) takže integrály

$$I_1 = \int\limits_M V f \bar{g} \, d\mu \, , \quad I_2 = \int\limits_M V \bar{f} g \, d\mu \tag{25}$$

konvergují (věta 196 pro $q = 2$); jest ovšem $I_2 = \bar{I}_1$. Jestliže $I_1 = 0$ (a tedy též $I_2 = 0$), říkáme, že f, g jsou orthogonální nebo že f je orthogonální k g (je-li třeba, dodáváme: orthogonální v M vzhledem k funkci V při míře μ). Konečnou nebo nekonečnou posloupnost funkcí

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \quad (\omega_n \in \mathsf{L}_V^2(M; \mu)) \tag{26}$$

nazýváme orthogonální (v M vzhledem k V při míře μ), je-li

---

[4]) Od tohoto okamžiku budeme mluviti skoro výhradně o tomto speciálním případě ($q = 2$). Stále ovšem předpokládáme $0 < V(x) < +\infty$ μ-skoro všude v M.

$$(27) \qquad \int_M V\omega_n\overline{\omega_m}\,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ pro } n \neq m\,.$$

Je-li nadto $\int_M V\omega_n\overline{\omega_n}\,\mathrm{d}\mu = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, říkáme, že posloupnost (27) je orthonormální. Poznamenejme: Jestliže v orthogonální posloupnosti (27) není $\omega_n \sim 0\ (M; \mu)$ pro žádné n, jsou čísla

$$(28) \qquad \|\omega_n\| = \left(\int_M V\omega_n\overline{\omega_n}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

kladná ($\omega_n\overline{\omega_n} = |\omega_n|^2$) a tedy můžeme vytvořiti posloupnost funkcí

$$(29) \qquad \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}, \frac{\omega_1}{\|\omega_1\|}, \ldots,$$

která je zřejmě orthonormální.

Poznámka 2. Je-li f orthogonální k funkcím $g_1, g_2, \ldots, g_k$, je orthogonální též ke každé jejich „lineární kombinaci" $A_1g_1 + A_2g_2 + \ldots + A_kg_k$ ($A_i \in \mathbf{K}$). To je zřejmé.

Příklad 1. Budiž $0 < l < +\infty$, $\xi \in \mathbf{E}_1$. Potom systém funkcí

$$(30) \qquad 1,\ \cos\frac{2k\pi x}{l},\ \sin\frac{2k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

a rovněž systém funkcí (píšeme $\exp(x) = \mathrm{e}^x$)

$$(31) \qquad \exp\left(\frac{2k\pi\mathrm{i}x}{l}\right) \quad (k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$$

je orthogonální (v $(\xi, \xi + l)$ vzhledem k funkci 1 při Lebesgueově míře). Ale není to systém orthonormální (obecně); orthonormální jsou tyto dva systémy:

$$\frac{1}{\sqrt{l}},\ \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2k\pi x}{l},\ \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\exp\left(\frac{2k\pi\mathrm{i}x}{l}\right) \quad (k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)\,.$$

Důkaz ihned ze vzorců (15) v kap. XIII a ze vzorce (k, m celá)·

$$\int_\xi^{\xi+l} \exp\left(\frac{2k\pi\mathrm{i}x}{l}\right).\exp\left(-\frac{2m\pi\mathrm{i}x}{l}\right)\mathrm{d}x = \delta l\,,$$

kde $\delta = 1$ pro $m = k$, $\delta = 0$ pro $m \neq k$.

Věta 200. *Budiž $f_1, f_2, \ldots$ konečná nebo nekonečná posloupnost funkcí orthogonálních v M (vzhledem k V při míře μ), z nichž žádná není ~ 0 $(M; \mu)$. Potom tyto funkce jsou lineárně μ-nezávislé v M.*

Důkaz. Platí-li (24), násobme funkcí $V\bar{f}_k$ a integrujme; vychází $a_k \int_M V|f_k|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0$, tedy $a_k = 0$ pro $k = 1, \ldots, n$.

Naopak, každá posloupnost funkcí lineárně μ-nezávislých v M a patřících do $\mathbf{L}_V^2(M; \mu)$ se dá „orthogonalisovat" podle této věty:

Věta 201. *Buďte $f_0, f_1, f_2, \ldots$ funkce lineárně μ-nezávislé v M, patřící do $\mathbf{L}_V^2(M; \mu)$ (jde buďto o konečnou posloupnost o m členech nebo o nekonečnou posloupnost). Potom existuje posloupnost funkcí $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (v prvním případě konečná o m členech, v druhém případě nekonečná) s těmito vlastnostmi:*

1. Každá φ_n je ekvivalentní s jistou lineární kombinací funkcí $f_0, \ldots, f_n$, t. j.

$$\varphi_n \sim a_{0,n} f_0 + \ldots + a_{n,n} f_n \;(M; \mu) \tag{32}$$

$(a_{l,n} \in \mathbf{K})$, při čemž $a_{n,n} \neq 0$.

2. Podobně, pro každou f_n platí

$$f_n \sim b_{0,n}\varphi_0 + \ldots + b_{n,n}\varphi_n \;(M; \mu) \tag{33}$$

$(b_{l,n} \in \mathbf{K})$, při čemž $b_{n,n} \neq 0$.

3. Žádná φ_n není ~ 0 (M, μ).

4. Funkce $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jsou orthogonální v M vzhledem k V při míře μ.

Důkaz. Kladu $\varphi_0 = f_0$ a dále indukcí: Nechť jsou již sestrojeny $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ tak, že 1, 2, 3, 4 platí pro $n = 0, 1, \ldots, k$. Položme (se zatím neurčenými koeficienty c_n)

$$\varphi_{k+1} = c_0\varphi_0 + \ldots + c_k\varphi_k + f_{k+1}\,. \tag{34}$$

Násobme $V\bar{\varphi}_n$ $(0 \leqq n \leqq k)$ a integrujme; podle 3, 4 vyjde

$$\int_M V\varphi_{k+1}\bar{\varphi}_n \,.\, \mathrm{d}\mu = c_n \int_M V\varphi_n\bar{\varphi}_n \,\mathrm{d}\mu + \int_M V f_{k+1}\bar{\varphi}_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Ježto koeficient při c_n je různý od nuly, lze c_n $(n = 0, 1, \ldots, k)$ zvoliti tak, že φ_{k+1} je orthogonální k $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$. Podle (34) platí 2 i pro $n = k + 1$ a ježto $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ jsou ekvivalentní lineárním kombinacím funkcí $f_0, \ldots, f_k$, plyne z (34), že také 1 platí pro $n = k + 1$. Kdyby pak bylo $\varphi_{k+1} \sim 0\,(M; \mu)$, plynula by z (32) (pro $n = k + 1$) lineární μ-závislost funkcí $f_0, \ldots, f_{k+1}$ v M (neboť $a_{k+1,k+1} \neq 0$), což je spor.

Poznámka 3. Nechť $f_0, f_1, \ldots$ splňují předpoklady věty 201. I. Jestliže pro funkce $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ platí vlastnost 1, platí i vlastnosti 2, 3. Důkaz. Vlastnost 2, t. j. vzorec (33), plyne indukcí. Vzorec (33) totiž platí pro $n = 0$ a platí-li pro hodnoty $n = 0, 1, \ldots, k - 1$, dokáže se pro $n = k$ takto: Ve vzorci (32) pro $n = k$ nahradím $f_0, \ldots, f_{k-1}$ lineárními kombinacemi funkcí $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ (podle (33)) a dostanu (33) pro $n = k$. Důkaz vlastnosti 3: Kdyby bylo $\varphi_n \sim 0\,(M; \mu)$, plynula by z (32) lineární μ-závislost funkcí $f_0, \ldots, f_n$ — spor. II. Vlastnosti 1, 2, 3, 4 zůstávají zachovány, nahradíme-li každou φ_n funkcí ekvivalentní a násobíme ji ještě libovolnou konstantou $c_n \in \boldsymbol{K}$ různou od nuly. Tvrdím: *Až na tuto libovůli jsou funkce $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ úplně určeny funkcemi $f_0, f_1, \ldots$* Důkaz. Budiž $\psi_0, \psi_1, \ldots$ další systém funkcí s vlastnostmi 1 až 4. Zřejmě je ($c_{k,n} \in \boldsymbol{K}$, $c_{n,n} \neq 0$)

$$\varphi_n \sim c_{0,n}\psi_0 + \ldots + c_{n-1,n}\,\psi_{n-1} + c_{n,n}\,\psi_n\,(M; \mu)\,. \tag{35}$$

Násobím $V\overline{\psi}_k$ ($k = 0, \ldots, n - 1$) a integruji; ježto ψ_k je lineární kombinací funkcí $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$, k nimž je φ_n orthogonální, vyjde z (35) $0 = c_{k,n} \int_M V|\psi_k|^2\,\mathrm{d}\mu$, tedy $c_{k,n} = 0$ pro $k < n$, tedy $\varphi_n \sim c_{n,n}\,\psi_n\,(M; \mu)$.

III. V případě reálných funkcí $f_0, f_1, \ldots$ vede nás důkaz věty 201 zřejmě opět k reálným funkcím $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, které ovšem nakonec — chceme-li — můžeme násobiti imaginárními čísly (různými od nuly).

Poznámka 4. Budeme nyní chvíli pracovat s funkcemi jedné proměnné. Jsou-li $Q_0, Q_1, \ldots$ polynomy, při čemž Q_k má právě stupeň k, lze každý polynom P stupně nejvýše k-tého psáti jako lineární kombinaci $P = a_0Q_0 + a_1Q_1 + \ldots + a_kQ_k$. To je zřejmé: neboť odečtu-li vhodný násobek a_kQ_k, bude míti $P - a_kQ_k$ stupeň nejvýše $k - 1$, odečtením vhodného násobku $a_{k-1}Q_{k-1}$ dostanu polynom $P - a_kQ_k - a_{k-1}Q_{k-1}$ stupně nejvýše $k - 2$ atd. Z tohoto důvodu platí: Funkce f je orthogonální k polynomům $Q_0, \ldots, Q_k$ tehdy a jen tehdy, je-li orthogonální ke každému polynomu stupně nejvýše k-tého a také tehdy a jen tehdy (což je zřejmé), je-li orthogonální k funkcím $1 = x^0, x^1, \ldots\, x^k$

Věta 202. *Budiž* $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$. *Jde o Lebesgueovu míru v* $\mathbf{E}_1$. *Budiž* $V(x) > 0$ *skoro všude v* (a, b) *a integrál* $\int_a^b V(x)\, x^m \,\mathrm{d}x$ *budiž konvergentní pro* $m = 0, 1, 2, \ldots$[5]) *Potom existuje posloupnost*

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots \tag{36}$$

s těmito vlastnostmi:

1. Q_n *je reálný polynom právě n-tého stupně.*

2. Funkce (36) *tvoří systém funkcí orthogonálních v* (a, b) *vzhledem k* V *(při Lebesgueově míře).*

Polynomům (36) *říkáme polynomy orthogonální v* (a, b) *vzhledem k* V.

Důkaz: Funkce $1, x^1, x^2, \ldots$ jsou lineárně μ-nezávislé v (a, b)(μ značí Lebesgueovu míru) a zřejmě patří do $\mathbf{L}_V^2\,((a, b), \mu)$. Stačí nyní užíti věty 201 a pozn. 3, III (realita).

Poznámka 5. Polynomy (36) jsou jednoznačně určeny až na to, že každý z nich smíme násobit libovolným reálným číslem různým od nuly.[6])

Orthogonálními polynomy se budeme ještě zabývati; nyní se vrátíme k obecným úvahám.

§ 5. Fourierovy řady.

Budiž

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \tag{37}$$

systém funkcí orthogonálních v M (vzhledem k V při míře μ),[7]) takže

$$\int_M V \omega_n \overline{\omega_m}\, \mathrm{d}\mu = 0 \text{ pro } n \neq m\,; \tag{38}$$

předpokládejme dále, že žádná ω_n není $\sim 0\ (M; \mu)$, takže

$$A_n = \int_M V |\omega_n|^2\, \mathrm{d}\mu > 0\,. \tag{39}$$

---

[5]) Pro konečná a, b stačí konvergence integrálu $\int_a^b V(x)\,\mathrm{d}x$, ježto každá mocnina x^m $(m = 1, 2, \ldots)$ je omezená v (a, b).

[6]) Viz pozn. 3, II. Dva polynomy ekvivalentní v (a, b) jsou si ovšem rovny.

[7]) Předpokládám, že (37) je nekonečná posloupnost. Případ konečné posloupnosti by byl obdobný, ale pro nás méně důležitý.

Je-li $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k \, (M; \mu)$ (t. j. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x)$ μ-skoro všude v M) a dá-li se tato řada násobit $V\overline{\omega_n}$ a potom integrovat člen po členu, vyjde

$$c_n = \frac{1}{A_n} \int_M V f \overline{\omega_n} \, \mathrm{d}\mu \,. \tag{40}$$

To nás vede k této definici:

Definice 29. *Budiž* (37) *systém funkcí orthogonálních v* M *vzhledem k* V *při míře* μ *a nechť platí* (39). *Budiž* $f \in \mathsf{L}^2_V(M; \mu)$. *Potom čísla* (40) *nazýváme Fourierovými koeficienty funkce* f *a řadu*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k \tag{41}$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce f; *tento vztah mezi funkcí* f *a řadou* (41) *vyjadřujeme znakem*

$$f \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k, \quad \textit{obšírněji} \quad f \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k \, (M, V, \mu) \,. \tag{42}$$

Částečný součet $\sum_{k=0}^{n} c_k \omega_k$ *budeme obyčejně značit* $s_n(f)$, *jeho hodnotu v bodě* x *budeme značit*

$$s_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, \omega_k(x) \,.^{8)} \tag{43}$$

Poznámka 1. I. Vztah (42) zatím nic neříká o tom, jak se chová řada (41) nebo posloupnost jejích částečných součtů; tím se budeme zabývati v dalším. II. Vezmete-li místo posloupnosti (37) posloupnost

$$b_0 \omega_0, \, b_1 \omega_1, \, b_2 \omega_2, \, \dots \quad (b_n \in \mathsf{K}, \, b_n \neq 0) \,,$$

násobí se A_n číslem $|b_n|^2 = b_n \overline{b_n}$ a integrál v (40) se násobí $\overline{b_n}$, takže c_n se dělí b_n, t. j. řada (41) se nezmění. Nic se tedy nestane, jestliže funkce (37) z praktických zřetelů násobím nějakými vhodnými konstantami, různými od nuly. III. Vezmeme-li speciálně $V = 1$, $M =$

[8]) Fourierovy koeficienty závisí ovšem na volbě systému (37); můžeme mluvit na př. o Fourierových koeficientech „podle systému $\omega_0, \omega_1, \dots$“.

$= (\xi, \xi + l)$, $\mu =$ Lebesgueově míře v E_1 a za systém (37) vezmeme systém (30) nebo (31), dostáváme Fourierovy řady z kap. XIII, kde jsme však obecněji místo funkcí $f \in L_1^2$ vyšetřovali funkce $f \in L_1^1$.
IV. Je-li $f \approx \sum a_k \omega_k$, $g \approx \sum b_k \omega_k$, $c \in K$, je zřejmě $cf \approx \sum c a_k \omega_k$, $f + g \approx \sum (a_k + b_k)\, \omega_k$.

Věta 203. *Budiž* $f \in L_V^2(M; \mu)$,

$$f \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k \quad (M, V, \mu)\,. \tag{44}$$

Buďte $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 0)$ *konečná komplexní čísla. Potom je* (při označení (39))

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k\|^2 &= \int_M V|f - \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k|^2 \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_M V|f|^2 \,\mathrm{d}\mu - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 A_k + \sum_{k=0}^{n} |c_k - a_k|^2 A_k\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} &\int_M V(f - \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k)(\bar{f} - \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \omega_k})\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_M V|f|^2 \,\mathrm{d}\mu - \sum_{k=0}^{n} (a_k \int_M V \bar{f} \omega_k \,\mathrm{d}\mu + \overline{a_k} \int_M V f \overline{\omega_k}\,\mathrm{d}\mu) + \\ &\qquad + \sum_{k,l=0}^{n} a_k \overline{a_l} \int_M V \omega_k \overline{\omega_l}\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_M V|f|^2 \,\mathrm{d}\mu - \sum_{k=0}^{n} (a_k \overline{c_k} + \overline{a_k} c_k)\, A_k + \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_k} A_k\,, \end{aligned}$$

a součinitel při A_k je $(c_k - a_k)(\overline{c_k} - \overline{a_k}) - c_k \overline{c_k}$.

Důsledek 1. Jestliže — při daném n — koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ probíhají nezávisle na sobě všechna konečná komplexní čísla, nabývá výraz (45) (za předpokladu $A_k > 0$) své nejmenší hodnoty tehdy a jen tehdy, je-li $a_0 = c_0, \ldots, a_n = c_n$, načež[9])

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k \omega_k\|^2 = \|f - s_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 A_k\,. \tag{46}$$

[9]) Stále ovšem předpokládám $f \in L_V^2(M; \mu)$.

Zde je levá a tedy i pravá strana nezáporná pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a odtud plyne:

Důsledek 2. Pro $f \in \mathbf{L}^2_V(M; \mu)$ je

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 A_k \leqq \|f\|^2 < +\infty, \tag{47}$$

takže řada vlevo konverguje. (47) je t. zv. Besselova nerovnost.

Poznámka 2. Buďte $a_0, \ldots, a_n$ $(n \geqq 0)$ konečná komplexní čísla,

$$f \sim a_0\omega_0 + \ldots + a_n\omega_n \quad (M; \mu);^{10)} \tag{48}$$

potom *Fourierovy koeficienty* $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *funkce* f *jsou* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $0, 0, 0, \ldots$, *takže* $s_m(f) = a_0\omega_0 + \ldots + a_n\omega_n$ *pro* $m \geqq n$. Důkaz: Násobím (48) funkcí $V\overline{\omega_k}$ a integruji $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. *Pro funkci* (48) *platí proto v* (47) *znamení rovnosti, neboť*

$$\int_M Vf\bar{f}\, d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int_M Va_k\overline{a_k}\omega_k\overline{\omega_k}\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 A_k .$$

Poznámka 3. Bude pro nás důležito, kdy v (47) platí znamení rovnosti, t. j. kdy je

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 A_k = \|f\|^2 < +\infty . \tag{49}$$

Říkáme v tom případě, že funkce f (stále mluvím jen o funkcích z $\mathbf{L}^2_V$) splňuje Parsevalovu rovnost. I. Podle (46) to platí *tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\| = 0 . \tag{50}$$

II. Právě jsme viděli, že každá funkce tvaru (48) splňuje Parsevalovu rovnost. Dokažme ještě: *Splňují-li* $f_1, \ldots, f_p$ *Parsevalovu rovnost, splňuje i* $f = a_1f_1 + \ldots + a_pf_p$ $(a_k \in \mathbf{K})$ *Parsevalovu rovnost.* Důkaz. $s_n(f; x) = \sum_{k=1}^{p} a_k s_n(f_k; x)$ pro μ-skoro všechna x v M,[11]) tedy

$$f - s_n(f) \sim \sum_{k=1}^{n} a_k(f_k - s_n(f_k)) \quad (M; \mu)$$

---

[10]) T. j. $f(x) = a_0\omega_0(x) + \ldots + a_n\omega_n(x)$ μ-skoro všude v M.

[11]) Rozhodně to platí pro ta x, pro něž $|\omega_k(x)| < +\infty$.

a odtud (viz (16))

$$\|f - s_n(f)\| \leqq \sum_{k=1}^{p} |a_k| \cdot \|f_k - s_n(f_k)\| \,.$$

Ježto pravá strana má pro $n \to \infty$ za limitu nulu, platí to i pro levou stranu. III. Speciálně: Ježto $s_n(f)$ má tvar (48), splňuje $s_n(f)$ Parsevalovu rovnost. *Jestliže tedy f splňuje Parsevalovu rovnost, splňuje i $f - s_n(f)$ Parsevalovu rovnost.* IV. Jestliže f splňuje Parsevalovu rovnost, t. j. jestliže platí (50), potom podle věty 198 *existuje posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < \dots$ tak, že je*

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} s_{n_k}(f; x) \quad \mu\text{-skoro všude v } M.\text{[12]} \tag{51}$$

Viděli jsme (věta 203, důsledek 2), že pro každou $f \in \mathsf{L}_V^2$ řada v (47) konverguje. Naopak platí tato důležitá věta, t. zv. věta Riesz-Fischerova:

Věta 204. *Budiž* (37) *orthogonální systém, pro nějž platí* (39). *Buďte a_k ($k = 0, 1, \dots$) komplexní čísla taková, že $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 A_k$ konverguje. Potom existuje v L_V^2 právě jedna funkce f — až na ekvivalenci — pro kterou platí vztahy*

$$f \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \,, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 A_k \,.\text{[13]} \tag{52}$$

Důkaz. Položme $f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k$, takže (pozn. 2) f_n má Fourierovy koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots$ Pro $m > n$ ihned vypočteme

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_M V \Big| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \omega_k \Big|^2 \mathrm{d}\mu = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 A_k \,; \tag{53}$$

ježto $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 A_k$ konverguje, je splněn předpoklad věty 199 (viz vzorec (21)), takže podle této věty existuje $f \in \mathsf{L}_V^2$ tak, že $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$. Počítejme Fourierovy koeficienty funkce f. Jest

[12]) Rovnice (50), (51) nám již napovídají důležitost Parsevalovy rovnosti. Proto nás budou zvláště zajímat systémy $\omega_0, \omega_1, \dots$, při kterých každá funkce z L_V^2 splňuje Parsevalovu rovnost. Viz o tom § 6 a další.

[13]) T. j. v (47) platí znamení rovnosti, t. j. platí (50).

$$\left|\int_M V(f_n - f)\,\overline{\omega_k}\,d\mu\right| \leqq \sqrt{\int_M V|\omega_k|^2\,d\mu \,.\int_M V|f_n - f|^2\,d\mu}$$

(podle (10)). První integrál vpravo nezávisí na n, druhý má limitu 0 pro $n \to \infty$; tedy integrál vlevo má limitu 0, t. j.

$$\int_M Vf\overline{\omega_k}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M Vf_n\overline{\omega_k}\,d\mu\,.$$

Ale integrál vpravo je podle pozn. 2 roven $A_k a_k$ pro všechna $n \geqq k$.[14]) Tedy k-tý Fourierův koeficient funkce f je a_k, t. j. platí první vztah (52).

Dále: Podle věty 198 existuje vybraná posloupnost $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ tak, že μ-skoro všude v M je $\lim\limits_{p\to\infty} |f_{n_p}(x)| = |f(x)|$, takže podle Fatouova lemmatu (věta 63)

$$\int_M V|f|^2\,d\mu \leqq \liminf_{p\to\infty} \int_M V|f_{n_p}|^2\,d\mu\,,$$

t. j. (viz pozn. 2 ke konci)

$$\|f\|^2 \leqq \liminf \sum_{k=0}^{n_p} |a_k|^2 A_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 A_k\,;$$

obrácená nerovnost také platí podle (47). Tím je dokázán i druhý vztah (52). Budiž konečně též $g \approx \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\omega_k$, $\|g\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 A_k$. Máme dokázati, že $f \sim g\ (M; \mu)$. Ježto f, g splňují Parsevalovu rovnost, je (pozn. 3, (50)) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|g - s_n(g)\| = 0$. Ale $s_n(f) = s_n(g)$; z nerovnosti $\|f - g\| \leqq \|f - s_n(f)\| + \|s_n(f) - g\|$ plyne tedy, že $\|f - g\| = 0$, t. j. $f \sim g\ (M; \mu)$.

Parsevalově rovnosti dáme ještě o něco obecnější tvar:

Věta 205. *Nechť* $f \in \mathbf{L}_V^2$, $g \in \mathbf{L}_V^2$,

$$f \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k\omega_k\,, \quad g \approx \sum_{k=0}^{\infty} b_k\omega_k\,. \tag{54}$$

Nechť f, g *splňují Parsevalovu rovnici:*[15])

$$\int_M Vf\bar{f}\,d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\overline{a_k}A_k\,, \quad \int_M Vg\bar{g}\,d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\overline{b_k}A_k\,. \tag{55}$$

[14]) Viz vzorec (40) pro Fourierovy koeficienty.

[15]) Užívám stále označení (39) a předpokládám $A_k > 0$.

Potom je

$$\int_M V f \bar{g}\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k A_k\,, \tag{56}$$

při čemž řada vpravo absolutně konverguje.

Důkaz. Podle pozn. 3, II splňují též $f + g$, $f + ig$ Parsevalovu rovnici, t. j. (uvědomte si, že $\overline{ig} = -\,i\,.\,\bar{g}$)

$$\int_M V(f + g)(\bar{f} + \bar{g})\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(\overline{a_k} + \overline{b_k})\, A_k\,, \tag{57}$$

$$\int_M V(f + ig)(\bar{f} - i\bar{g})\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k)(\overline{a_k} - i\overline{b_k})\, A_k\,.^{16)} \tag{58}$$

Užitím (55) plyne odtud

$$\int_M V(\pm f\bar{g} + \bar{f}g)\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm\, a_k \overline{b_k} + \overline{a_k} b_k)\, A_k\,. \tag{59}$$

(Rovnice s horním znamením plyne z (57), s dolním z (58)). Odečtením obou rovnic (59) plyne (56).

§ 6. Úplné systémy. Budiž opět (37) orthogonální systém v M vzhledem k V při míře μ; nechť $A_n > 0$ (viz (39)) pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ Systém (37) nazýváme úplným (v $\mathbf{L}_V^2(M; \mu)$), jestliže platí:

I. Žádná funkce z $\mathbf{L}_V^2$, kromě funkcí ekvivalentních s nulou, není orthogonální ke všem ω_n. Jinak řečeno: Je-li $f \in \mathbf{L}_V^2$, $\int_M V f \overline{\omega_n}\, d\mu = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, je $f \sim 0\ (M; \mu)$.

Budeme vyšetřovati ještě následující dvě vlastnosti systému ω_0, $\omega_1, \ldots$:

II. Každou funkci $f \in \mathbf{L}_V^2$ lze v průměru 2. stupně aproximovat lineárními kombinacemi funkcí ω_k s libovolnou přesností; t. j. ke každému $\varepsilon > 0$ existují konečná komplexní čísla $a_0, \ldots, a_{n_0}$ tak, že

$$\|f - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \omega_k\| < \varepsilon\,. \tag{60}$$

[16]) Vpravo jsou řady s nezápornými členy, tedy absolutně konvergentní.

III. Pro každou funkci $f \in L_V^2$ platí „Parsevalova rovnost" $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 A_k$ (označení viz v (39), (40)) neboli (viz pozn. 3 v § 5)

$$\lim_{n \to \infty} \|f - s_n(f)\| = 0 . \tag{61}$$

Věta 206. *Vlastnosti I, II, III jsou ekvivalentní.*

Důkaz. II $\Rightarrow$ III. Nechť platí II. Podle věty 203 (důsledek 1) plyne z (60) nerovnost $\|f - s_n(f)\| < \varepsilon$ pro každé $n \geqq n_0$. Tedy platí III.

III $\Rightarrow$ I. Nechť neplatí I. Potom existuje funkce $f \in L_V^2$, neekvivalentní s nulou, mající všechny Fourierovy koeficienty $c_k = 0$. Tedy $\|f\| > 0$, ale $\sum |c_k|^2 A_k = 0$. Tedy z non I plyne non III; tedy z III plyne I.

I $\Rightarrow$ II. Nechť platí I. Budiž $f \in L_V^2$; nechť c_k jsou její Fourierovy koeficienty, takže (věta 203, důsledek 2) $\sum |c_k|^2 A_k < +\infty$. Podle věty 204 existuje funkce $g \in L_V^2$, která má též Fourierovy koeficienty c_k a pro kterou platí Parsevalova rovnost, t. j. (§ 5, pozn. 3) $\lim_{n \to \infty} \|g - s_n(g)\| = 0$. Ale $f - g$ má Fourierovy koeficienty $c_k - c_k = 0$ a je tedy orthogonální ke všem ω_k, takže podle I je $f \sim g$. Tedy jest i $\lim_{n \to \infty} \|f - s_n(g)\| = \lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=0}^{n} c_k \omega_k\| = 0$. Tedy platí II.

Poznámka 1. Je-li (37) úplný systém, platí (56) pro každé $f \in L_V^2$ a každé $g \in L_V^2$.

Poznámka 2. Jestliže v orthogonálním systému (37) platí $A_k > 0$, tvoří funkce $A_k^{-\frac{1}{2}} \omega_k$ systém orthonormální a Fourierova řada (41) se tím nezmění (viz pozn. 1, II v § 5); ovšem se tím také nezruší úplnost systému (37). Můžeme se tedy bez újmy obecnosti omeziti na orthonormální systémy, načež ve vzorcích § 5 a § 6 bude $A_k = 1$.

Poznámka 3. Funkcí $f \in L_V^2$ jsou určeny její Fourierovy koeficienty (40). Naopak, je-li systém (37) úplný a mají-li funkce $f \in L_V^2$, $g \in L_V^2$ tytéž Fourierovy koeficienty, je $f \sim g$ $(M; \mu)$. Neboť funkce $f - g$ má Fourierovy koeficienty rovny nule, tedy je orthogonální ke všem ω_k, tedy $f - g \sim 0$ $(M; \mu)$.

Poznámka 4. Vztahy (24), (27), (32), (33), (38), (39), (40), (45), (48), (50), (52), (56), (60) zůstanou zachovány, nahradím-li funkce $f, g, f_k, \varphi_k, \omega_k$ v nich vystupující funkcemi ekvivalentními. Mohu proto věty z § 5, 6 vysloviti také v $\tilde{\mathbf{L}}^2_V(M; \mu)$, t. j. v prostoru tříd (f), kde $f \in \mathbf{L}^2_V(M; \mu)$. Lineární závislost (vzorec (24)) je ovšem teď vyjádřena rovnicí $a_1(f_1) + \ldots + a_n(f_n) = (0)$; orthogonalita tříd (ω_n), (ω_m) rovnicí (27) atd. Je zbytečno, vypisovati příslušné výsledky (připisováním závorek). Místo $f \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k\omega_k$ píšeme ovšem teď také symbol $(f) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\omega_k)$ a mluvíme o Fourierově řadě třídy (f). Ale jednu věc ještě vyzvedněme. Předpokládejme, že v $\mathbf{L}^2_V(M; \mu)$ existuje nekonečná úplná orthonormální posloupnost $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$[17]) Každé třídě $(f) \in \tilde{\mathbf{L}}^2_V$ přiřaďme posloupnost $c = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ jejích Fourierových koeficientů (40). Podle (47) je $c \in \mathbf{l}^2$; podle věty 204 je každý bod $c \in \mathbf{l}^2$ tímto způsobem přiřazen jisté třídě $(f) \in \tilde{\mathbf{L}}^2_V$; dvěma různým třídám jsou pak podle pozn. 3 přiřazeny dva různé body v $\mathbf{l}^2$; toto zobrazení je tedy prosté zobrazení $\tilde{\mathbf{L}}^2_V$ na celý prostor $\mathbf{l}^2$. Je-li $(f) \approx \approx \sum a_k(\omega_k)$, $(g) \approx \sum b_k(\omega_k)$, klaďme $a = \{a_k\}$, $b = \{b_k\}$. V prostoru $\tilde{\mathbf{L}}^2_V$ je vzdálenost $\varrho((f), (g)) = \|f - g\| = \sqrt{\sum |a_k - b_k|^2}$ (Parsevalova rovnost), ale to je právě vzdálenost $\varrho(a, b)$ v prostoru $\mathbf{l}^2$. Shrňme:

Věta 207. *Nechť v prostoru $\tilde{\mathbf{L}}^2_V(M; \mu)$ existuje nekonečná úplná posloupnost orthonormálních tříd $(\omega_0), (\omega_1), \ldots$ Potom platí: Přiřadím-li každé třídě $(f) \in \tilde{\mathbf{L}}^2_V(M; \mu)$ posloupnost jejích Fourierových koeficientů (podle systému $\omega_0, \omega_1, \ldots$), dostanu isometrické zobrazení* (**D II**, *kap. VI*, § 3) *prostoru $\tilde{\mathbf{L}}^2_V(M; \mu)$ na prostor $\mathbf{l}^2$.*

§ 7. Úplnost trigonometrického systému. Věta 208. *Každý z obou orthogonálních systémů* (30), (31) *v příkl. 1, § 4 je úplný.*

Předpokládá se přitom $V(x) = 1$, $M = (\xi, \xi + l)$ $(\xi \in \mathbf{E}_1, 0 < l < + \infty)$, μ je Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_1$.

[17]) Dá se dokázati, že tomu tak je vždy, až na některé triviální případy, kdy tato posloupnost je konečná.

Důkaz. Nechť $f \in L_1^2((\xi, \xi + l))$[18]) má všechny Fourierovy koeficienty rovny nule. Doplníme-li definici f tak, aby měla periodu l, je podle věty 187 $f \sim 0$. Důkaz je hotov.

Poznámka 1. Napišme explicite vzorce (49), (56) pro tento případ. Má-li $f \in L_1^2$ Fourierovy koeficienty a_k, b_k, po případě c_k, dané vzorci (16), (17) v kap. XIII, § 2 (nezapomeňme, že první koeficient jsme označili $\frac{1}{2}a_0$) a má-li $g \in L_1^2$ Fourierovy koeficienty α_k, β_k, po příp. γ_k, je

$$(62)\qquad \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} |f|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \tfrac{1}{4}|a_0|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)\,,$$

$$(63)\qquad \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f\bar{g} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\bar{\gamma}_k = \tfrac{1}{4}a_0\bar{\alpha}_0 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\bar{\alpha}_k + b_k\bar{\beta}_k)\,;$$

poslední dvě řady jsou absolutně konvergentní. Při reálném f jsou a_k, b_k reálná, $c_k = \bar{c}_{-k}$, takže v (63) lze při reálném g psáti $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\gamma_{-k}$.

Poznámka 2. Je-li $f \in L_1^2$, $g \in L_1^2$, je $fg \in L_1^1$ (stále míním interval $(\xi, \xi + l)$ a Lebesgueovu míru v E_1) — viz (10). Ježto jsme v kap. XIII vyšetřovali Fourierovy řady pro funkce z L_1^1, můžeme se ptáti po Fourierových koeficientech Γ_k funkce fg, jestliže c_k, γ_k jsou koeficienty funkcí f, g (podle systému (31)). Tvrdím, že

$$(64)\qquad \Gamma_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\gamma_{k-n}\,,$$

při čemž řada vpravo konverguje absolutně.

Důkaz.

$$(65)\qquad \Gamma_k = \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f(x)\, g(x) \exp\left(-\frac{2k\pi \mathrm{i}}{l}\,x\right) \mathrm{d}x\,.$$

Přitom funkce $g(x) \exp\left(-\dfrac{2k\pi \mathrm{i}}{l}\,x\right)$ je komplexně sdružena s funkcí

[18]) Tedy též $f \in L_1^1((\xi, \xi + l))$ podle § 3, pozn. 6.

$$h(x) = \bar{g}(x) \exp\left(\frac{2k\pi i}{l} x\right),$$

jejíž Fourierovy koeficienty jsou

$$\gamma'_n = \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} h(x) \exp\left(-\frac{2n\pi i}{l} x\right) dx ;$$

tedy[19])

$$\overline{\gamma'_n} = \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} g(x) \exp\left(-\frac{2(k-n)\pi i}{l} x\right) dx = \gamma_{k-n} .$$

Podle (65) a podle věty 205 dostáváme tedy

$$\Gamma_k = \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} f(x) \bar{h}(x) \, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \overline{\gamma'_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \gamma_{k-n} .$$

Cvičení

1. Budiž $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Potom odhadnutím součtu $\sum\limits_{k=1}^{p} e^{ikx}$ a parciální sumací obdržíte: Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx$$

jsou stejnoměrně konvergentní v každém uzavřeném intervalu, jenž neobsahuje žádné číslo tvaru $2m\pi$ (m celé).

2. Je-li $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$, je trigonometrická řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$$

konvergentní pro všechna reálná x, ale není Fourierovou řadou žádné funkce z $L_1^2(0,2\pi)$.

3. Parsevalovy rovnice lze též užíti k sčítání nekonečných řad. Příklady:

$$\text{(66)} \quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(viz kap. XIII, § 6, příkl. 1)},\\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \quad \text{(viz kap. XIII, § 6, cvič. 4)}. \end{aligned}$$

[19]) Integrand nahradím funkcí komplexně sdruženou.

Z kap. XIII, § 6, cvič. 6, rovnice (114) pro $m = 2$ obdržíme

$$\left(\frac{1}{1 . 3 . 5 . 7}\right)^2 + \left(\frac{1}{3 . 5 . 7 . 9}\right)^2 + \left(\frac{1}{5 . 7 . 9 . 11}\right)^2 + \dots =$$
$$= \frac{5\pi^2}{3^2 . 2^9} - \frac{1}{2 . 3^4} - \frac{1}{3^2 . 5^2} .$$

Podobně bychom mohli rovnice (114) z kap. XIII užíti pro libovolné celé $m > 0$. Pro $m = 1$ obdržíte znovu (66).

4. Z příkl. 2 a 3 v kap. XIII, § 6 a z rovnice (63) plyne: Není-li $\alpha = mi$ (m celé), je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} - 1}{e^{\alpha\pi} + 1} . \tag{67}$$

Tento výsledek však můžeme dostati též bez užití Parsevalovy věty přímo z řady v (94), kap. XIII, § 6.

§ 8. Vlastnosti orthogonálních polynomů.

V celém tomto paragrafu činíme tyto předpoklady (které již neopakuji v znění jednotlivých vět): Jde vesměs o Lebesgueovu míru v $\mathbf{E}_1$; jsou dána čísla a, b ($-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$) a funkce V, kladná a konečná skoro všude v (a, b) a taková, že

$$\int_a^b V(x) . |x|^m \, dx < +\infty \text{ pro } m = 0, 1, 2, \dots ; \tag{68}$$

budeme psáti stručně $\mathbf{L}_V^2(a, b)$. Příslušné (reálné) orthogonální polynomy ve smyslu věty 202 budeme značit

$$Q_0, Q_1, \dots ; \tag{69}$$

přitom Q_n je polynom právě n-tého stupně a je určen jednoznačně až na multiplikativní konstantu (t. j. místo Q_n lze psáti $q_n Q_n$, kde $q_n \in \mathbf{E}_1$, $q_n \neq 0$).

Většinou budeme voliti Q_n buďto tak, aby koeficient při x^n byl roven jedné,[20] nebo tak, aby (69) byl systém orthonormální, t. j. $\int_a^b V Q_n^2 \, dx = 1$, a aby koeficient při x^n byl kladný.[20]

[20]) Touto podmínkou je Q_n již určen jednoznačně.

Věta 209. *Q_n má v (a, b) n jednoduchých kořenů* (a tedy už žádné jiné).

Důkaz. $n = 0$ — jasné. Budiž tedy $n > 0$. Uvědomme si, že reálný polynom $P(x)$ mění své znamení tehdy a jen tehdy, prochází-li x jeho kořenem liché násobnosti. Buďte $x_1, \ldots, x_r$ všechny navzájem různé kořeny liché násobnosti polynomu Q_n, které leží v (a, b), tedy $0 \leqq r \leqq n$. Položme $R(x) = \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)$ ($R(x) = 1$ pro $r = 0$). Potom $Q_n R$ má v (a, b) jen kořeny sudé násobnosti, tedy nemění znamení, tedy $\int_a^b V Q_n R \, dx \neq 0$. Ale Q_n je orthogonální ke všem polynomům stupně nižšího než n, tedy R má nutně stupeň n, t. j. $r = n$.

Věta 210. *Nechť $Q_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) má koeficient při x^k rovný jedné. Potom platí (α_n, β_n jsou reálné konstanty)*

$$Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\, Q_n(x) - \beta_n\, Q_{n-1}(x) \tag{70}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$ (Klademe-li $Q_{-1} = 0$, platí (70) zřejmě i pro $n = 0$.)

Důkaz. $Q_{n+1} - xQ_n$ je polynom stupně nejvýše n-tého, tedy

$$Q_{n+1}(x) - x\, Q_n(x) = \gamma_0\, Q_0(x) + \ldots + \gamma_{n-1}\, Q_{n-1}(x) + \gamma_n\, Q_n(x)\,. \tag{71}$$

Násobme $V(x)\, Q_k(x)$ ($0 \leqq k \leqq n - 2$) a integrujme; ježto $x\, Q_k(x)$ je stupně nižšího než n a tedy orthogonální k Q_n, vyjde

$$0 = \gamma_k \int_a^b V Q_k^2 \, dx, \text{ t. j. } \gamma_k = 0 \text{ pro } 0 \leqq k \leqq n - 2\,,$$

takže (71) má tvar (70).

Poznámka 1. Nepředpokládám-li, že koeficient při x^k v Q_k je rovný jedné, musím ovšem místo (70) psáti

$$A_n\, Q_{n+1}(x) = (x - B_n)\, Q_n(x) - C_n\, Q_{n-1}(x),\ A_n \neq 0\,. \tag{72}$$

Poznámka 2. Nyní budeme mluviti o Fourierových řadách funkcí z $\mathbf{L}_V^2(a, b)$ podle polynomů $Q_0, Q_1, \ldots$:

$$f \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k,\ c_k = \frac{1}{A_k} \int_a^b V f Q_k \, dx\,,\quad A_k = \int_a^b V Q_k^2 \, dx > 0\,. \tag{73}$$

Částečný součet

$$(74) \qquad s_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k Q_k(x) = \int_a^b V(y) f(y) \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x) Q_k(y)}{A_k} \, dy$$

(který má smysl pro všechna $x \in \mathbf{K}$) *je polynom stupně nejvýše n-tého.*

Je-li f speciálně *polynom stupně nejvýše q-tého*, lze psáti

$$f(x) = a_0 Q_0(x) + \ldots + a_q Q_q(x) ,$$

načež $\frac{1}{A_p} \int_a^b V f Q_p \, dx$ je rovno a_p pro $p \leqq q$ a je rovno nule pro $p > q$, takže f *má Fourierovy koeficienty* $a_0, a_1, \ldots, a_q, 0, 0, \ldots$ Tedy: *Je-li f polynom stupně nejvýše q-tého, je $s_n(f; x) = f(x)$ pro všechna $n \geqq q$ a všechna $x \in \mathbf{K}$.*

Ještě speciálněji: pro $f = 1$ platí $s_n(f) = f$ pro všechna $n \geqq 0$, t. j. (viz (74))

$$(75) \qquad 1 = \int_a^b V(y) \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x) Q_k(y)}{A_k} \, dy$$

pro všechna $n \geqq 0$ a všechna $x \in \mathbf{K}$.

Věta 211. *Je-li interval (a, b) omezený, je systém (69) úplný.*

Důkaz. Budiž $f \in \mathbf{L}_V^2(a, b)$, $\varepsilon > 0$. Podle věty 206 (viz II) stačí dokázati toto: Existuje polynom P (t. j. lineární kombinace polynomů (69)) tak, že

$$(76) \qquad \int_a^b V |f - P|^2 \, dx < \varepsilon .$$

Ježto $|\alpha + i\beta|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, stačí se omeziti na reálné f a hledati reálný polynom P. Smíme předpokládati, že $0 < V(x) < +\infty$, $|f(x)| < +\infty$ všude (nejenom skoro všude) v $\langle a, b \rangle$.

Ježto $\int_a^b V f^2 \, dx < +\infty$, existuje (věta 51) číslo $\delta > 0$ tak, že

$$(77) \qquad (M \subset \langle a, b \rangle, \ \mu(M) < \delta) \Rightarrow \int_M V f^2 \, dx < \tfrac{1}{3}\varepsilon .$$

Toto δ podržme. Položme $M_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)| > n,\ a \leqq x \leqq b)$. Ježto f je konečné, je $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset$, $M_n \supset M_{n+1}$, $\mu(M_1) \leqq b - a < +\infty$ (zde užívám omezenosti intervalu (a, b)); podle věty 24 je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_n) = \mu(\emptyset) = 0$. Existuje tedy n tak, že $\mu(M_n) < \delta$. Toto n podržme. Položme $f_1(x) = f(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle \dot{-} M_n$, $f_1(x) = 0$ pro ostatní x, takže (viz (77))

$$|f_1(x)| \leqq \operatorname{Min}\,(|f(x)|, n) \text{ pro } a \leqq x \leqq b\,, \tag{78}$$

$$\int_a^b V(f - f_1)^2\,\mathrm{d}x = \int_{M_n} Vf^2\,\mathrm{d}x < \tfrac{1}{9}\varepsilon\,. \tag{79}$$

Podle věty 51 existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$$(N \subset \langle a, b\rangle,\ \mu(N) < \delta_1) \Rightarrow 4n^2 \int_N V\,\mathrm{d}x < \tfrac{1}{9}\varepsilon\,. \tag{80}$$

Toto δ_1 podržme. Podle Luzinovy věty existuje otevřená množina N tak, že f_1 je spojitá v $\langle a, b\rangle \dot{-} N$ a že $\mu(N) < \delta_1$. Přitom lze (viz obdobnou úvahu v kap. XIII, § 4, důkaz věty 181, pozn. [13])) předpokládati, že body a, b neleží v N. Sestrojme (viz **D II**, věta 77 a text před ní) funkci f_2 s těmito vlastnostmi:

1. $f_2 = f_1$ v $\langle a, b\rangle \dot{-} N$; 2. f_2 je spojitá v $\langle a, b\rangle$; 3. $|f_2| \leqq n$ v $\langle a, b\rangle$ (to lze, ježto $|f_1| \leqq n$).

Tedy (viz (80))

$$\int_a^b V(f_1 - f_2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{N\,.\,(a,b)} V(f_1 - f_2)^2\,\mathrm{d}x \leqq 4n^2 \int_{N\,.\,(a,b)} V\,\mathrm{d}x < \tfrac{1}{9}\varepsilon\,. \tag{81}$$

Konečně podle Weierstrassovy věty 180 v **D II** existuje reálný polynom P tak, že

$$\operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b}\,(f_2(x) - P(x))^2 \int_a^b V(y)\,\mathrm{d}y < \tfrac{1}{9}\varepsilon\,.$$

Tedy

$$\int_a^b V(f_2 - P)^2\,\mathrm{d}x < \tfrac{1}{9}\varepsilon\,. \tag{82}$$

Odtud pak (viz (79), (81), (82))

$$\begin{aligned}\|f - P\| \leqq \|f - f_1\| + \|f_1 - f_2\| + \|f_2 - P\| < \\ < \tfrac{1}{3}\sqrt{\varepsilon} + \tfrac{1}{3}\sqrt{\varepsilon} + \tfrac{1}{3}\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}\,,\end{aligned}$$

což je (76).

Cvičení

V cvičeních 1 až 5 se předpokládá, že Q_k má při x^k koeficient 1.

1. Nechť komplexní polynom P stupně k-tého má při x^k koeficient 1. Potom

$$\int_a^b V|P|^2 \, dx \geqq \int_a^b VQ_k^2 \, dx ;$$

znamení rovnosti platí jen pro $P = Q_k$.

Návod: $P = Q_k + \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n Q_n$ atd.

2. V rovnici (70) je pro $n > 0$

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b xVQ_n^2 \, dx}{\int_a^b VQ_n^2 \, dx} , \quad \beta_n = \frac{\int_a^b VQ_n^2 \, dx}{\int_a^b VQ_{n-1}^2 \, dx} > 0 .$$

3. Pro žádné $x \in K$ není $Q_n(x) = Q_{n+1}(x) = 0$. Návod: z (70) a z cvič. 2 by plynulo $Q_{n-1}(x) = \ldots = Q_0(x) = 0$, ale $Q_0(x) = 1$.

4. Je-li $Q_n(x) = 0$ $(n > 0)$, je $Q_{n+1}(x) \, . \, Q_{n-1}(x) < 0$.

5. Kořeny polynomů Q_n, Q_{n+1} se oddělují; t. j. má-li Q_n kořeny $x_1, \ldots, x_n$ a Q_{n+1} kořeny $y_1, \ldots, y_{n+1}$, je $a < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < x_n < y_{n+1} < b$. Návod: Nechť tato vlastnost je splněna pro polynomy $Q_1, \ldots, Q_n$; odtud a z cvič. 4 sledujte znamení Q_{n+1} v bodech $a, x_1, \ldots, x_n, b$ (znamení v bodě a závisí na tom, je-li n sudé či liché — neboť v intervalu $(-\infty, a)$ nemění Q_k znamení).

6. Nechť nyní je (69) orthonormální, $Q_n(x) = p_n x^n + \ldots, p_n > 0$. Potom

$$(y - x) \sum_{n=0}^{m} Q_n(x) \, Q_n(y) = \frac{p_m}{p_{m+1}} \left(Q_m(x) \, Q_{m+1}(y) - Q_m(y) \, Q_{m+1}(x) \right)$$

pro $x \in K$, $y \in K$ (vzorec Christoffel-Darbouxův).

Návod: Přepište (70) pro orthonormální Q_k, užívajíce pro β_n cvič. 2 a násobte $Q_n(y)$. Vyjde

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} Q_{n+1}(x) \, Q_n(y) + \frac{p_{n-1}}{p_n} Q_{n-1}(x) \, Q_n(y) = (x - \alpha_n) \, Q_n(x) \, Q_n(y) .$$

Zde vyměním x s y a odečtu; nato sečtu přes n.

Tedy lze (74) přepsati do formy

$$s_m(f; x) = \frac{p_m}{p_{m+1}} \int_a^b \frac{V(y) f(y)}{y - x} (Q_{m+1}(y)\, Q_m(x) - Q_m(y)\, Q_{m+1}(x))\, dy\,.$$

Je to jakási analogie k tomu, jak jsme v kap. XIII vzorec (26) přepsali do tvaru (28).

§ 9.*Legendreovy a Čebyševovy polynomy. Jacobiovy polynomy.* Budeme teď vyšetřovati některé systémy polynomů orthogonální v (a, b). Jestliže a, b jsou konečná, lze tento interval substitucí $x = \frac{1}{2}((b - a)\, y + (b + a))$ převésti na interval $-1 < y < 1$. Interval $(a, +\infty)$ lze substitucí $x = y + a$ převésti na $(0, +\infty)$; interval $(-\infty, b)$ lze substitucí $x = -y + b$ převésti na $(0, +\infty)$. Stačí tedy vyšetřovati intervaly $(-1, 1)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. V tomto paragrafu probereme některé důležité případy pro interval $(-1, 1)$, a to t. zv. Legendreovy polynomy ($V(x) = 1$ — pro ilustraci provedu i případ obecného omezeného intervalu (a, b)) a Čebyševovy polynomy ($V(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$). Tyto polynomy jsou speciálním případem Jacobiových polynomů ($V(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$). Tyto polynomy vyšetřuji v řadě cvičení (4—11); přitom, abych získal souvislost s t. zv. hypergeometrickou řadou, provádím příslušné úvahy napřed pro interval $(0, 1)$ (pro $V(x) = x^\alpha (1 - x)^\beta$) a potom teprve transformuji na $(-1, 1)$. Pro rozvinutelnost funkcí podle Legendreových a Čebyševových polynomů uvádím dvě jednoduché věty (215, 222), které by se však daly podstatně zlepšiti. V § 10 uvádím dále Hermiteovy polynomy (interval $(-\infty, +\infty)$, $V(x) = e^{-x^2}$) a Laguerreovy polynomy (interval $(0, +\infty)$, $V(x) = e^{-x}$).

A) Legendreovy polynomy. Ty odpovídají volbě $-\infty < a < b < +\infty$, $V(x) = 1$; označme je X_n. Nejsnáze je najdeme takto: Jako každý polynom n-tého stupně, lze též X_n psáti ve tvaru $X_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} Y_n(x)$, kde Y_n je mnohočlen stupně $2n$ (jejž bychom dostali integrací). Pro každý polynom $R(x)$ stupně nižšího než n jest pak (integrujeme n-kráte per partes)

$$\int_a^b X_n(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b Y_n^{(n)}(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= [Y_n^{(n-1)}R - Y_n^{(n-2)}R' + \ldots \pm Y_n R^{(n-1)}]_a^b\,.$$

Tento výraz má býti roven nule (podmínka orthogonality); to bude jistě splněno, bude-li polynom Y_n míti n-násobné kořeny a, b. Položme tedy $Y_n = A_n(x-a)^n\,(x-b)^n$; je zvykem, klásti $A_n = \dfrac{1}{2^n n!}$, takže máme

(83) $$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,((x-a)(x-b))^n \quad (X_0(x) = 1)\,.$$

Systém polynomů X_n není orthonormální; jest

$$\int_a^b X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b Y_n^{(n)}(x)\,Y_n^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= [Y_n^{(n)}Y_n^{(n-1)} - Y_n^{(n+1)}Y_n^{(n-2)} + \ldots \mp Y_n^{(2n-1)}Y_n]_a^b \pm \int_a^b Y_n^{(2n)}Y_n\,\mathrm{d}x\,.$$

Hranatá závorka vypadne; poslední integrál jest

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_a^b (x-a)^n(x-b)^n\,\mathrm{d}x\,;$$

integrujeme-li opět n-kráte per partes, obdržíme

$$\pm\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_a^b (x-a)^{2n}\,\mathrm{d}x\,;$$

celkem tedy

(84) $$\int_a^b X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}\,.\,(2n+1)}\,.$$

Obyčejně se brává $a = -1$, $b = +1$; označme příslušné mnohočleny $P_n(x)$. Tedy z (83), (84)

(85) $$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,.\,n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,((x^2-1)^n)\,,$$

$$(86)\qquad \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Mezi polynomy (83), (85) jest ovšem úzký vztah. Položme $x = \alpha y + \beta$ tak, aby pro $y = -1$ bylo $x = a$, a pro $y = 1$ bylo $x = b$; t. j. $x = \frac{1}{2}((b - a)\,y + (b + a))$. Potom jest

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x - a)(x - b))^n = \left(\frac{2}{b - a}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\left(\frac{(b - a)^{2n}}{2^{2n}}(y^2 - 1)^n\right),$$

a tedy

$$(87)\qquad X_n(x) = \left(\frac{b - a}{2}\right)^n P_n(y) = \left(\frac{b - a}{2}\right)^n P_n\left(\frac{2x - (b + a)}{b - a}\right).$$

Poznámka 1. Z (85) je patrno, že polynom $P_n(x)$ obsahuje pro sudá n jen sudé mocniny x, pro lichá n jen liché mocniny x.

Víme z věty 210 (viz též pozn. 1 v § 8), že platí rekurentní relace tvaru

$$A_n\,P_{n+1}(x) = (x - B_n)\,P_n(x) - C_n\,P_{n-1}(x)\,.$$

Z pozn. 1 je patrno, že $B_n = 0$. Koeficienty A_n, C_n určíme srovnáním koeficientů při x^{n+1} a při x^{n-1}; jest totiž

$$(87\text{a})\qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\,.\,n!}\left(\frac{(2n)!}{n!}\,x^n - n\,.\,\frac{(2n - 2)!}{(n - 2)!}\,x^{n-2} + \ldots\right).$$

Snadným výpočtem obdržíte:

Věta 212. *Pro Legendreovy polynomy* (85) *jest pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(88)\qquad (n + 1)\,P_{n+1}(x) - (2n + 1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0\,.$$

Odtud se polynomy P_n snadno postupně počítají:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},\ P_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x$$

atd.

Polynomy P_n vyhovují jednoduché diferenciální rovnici:

Věta 213. *Legendreovy polynomy* (85) *vyhovují pro* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *diferenciální rovnici*

$$(89)\qquad (1 - x^2)\,P_n''(x) - 2x\,P_n'(x) + n(n + 1)\,P_n(x) = 0\,.$$

Důkaz. Položme $\eta(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2 - 1)^n$; potom jest $(x^2 - 1)\eta' = 2nx\eta$; derivuji-li $(n + 1)$-kráte, obdržím

$$(x^2 - 1)\eta^{(n+2)} + 2(n + 1)x\eta^{(n+1)} + (n + 1)n\eta^{(n)} = \\ = 2nx\eta^{(n+1)} + 2n(n + 1)\eta^{(n)}.$$

Dosadím-li sem $\eta^{(n)} = P_n$, obdržím ihned (89).

Legendreovy polynomy lze také definovati t. zv. „vytvořující funkcí". Jestliže nějakou funkci dvou proměnných $f(x, t)$ lze v okolí bodu $t = 0$ rozvinouti v mocninnou řadu podle mocnin t (jejíž koeficienty jsou ovšem funkcemi x):

$$f(x, t) = g_0(x) + g_1(x) \cdot t + g_2(x) \cdot t^2 + \dots,$$

říkáme, že funkce f je vytvořující funkcí pro funkce $g_0, g_1, g_2, \dots$

Věta 214. *Buďte t, x konečná komplexní čísla,* $2|t|\,|x| + |t|^2 < 1$. *Potom je*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = P_0(x) + P_1(x)\,t + P_2(x)\,t^2 + \dots \tag{90}$$

Důkaz. Označme levou stranu z; pro zmíněná x, t lze levou stranu rozvinouti v binomickou řadu[21])

$$z = 1 + \frac{1}{2}(2tx - t^2) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2tx - t^2)^2 + \dots$$

Podle příkl. 1 za větou 234 v **D II** lze vpravo umocnit a uspořádat podle mocnin t:

$$z = A_0(x) + A_1(x)\,t + A_2(x)\,t^2 + \dots;\ A_0(x) = 1 = P_0(x), \\ A_1(x) = x = P_1(x). \tag{91}$$

Derivujme podle t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2tx + t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x - t}{(1 - 2tx + t^2)} \cdot z. \tag{92}$$

[21]) Že tyto výpočty s komplexními čísly jsou v pořádku, plyne z kap. VII, § 1, pozn. 5 a z **D II**, kap. XII, § 5.

Ježto mocninnou řadu lze derivovati člen po členu, plyne z (91), (92)

$$(x - t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots) =$$
$$= (1 - 2tx + t^2)(A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2 + \ldots)\,.$$

Vynásobením a srovnáním koeficientů při t^n obdržíme

$$xA_n - A_{n-1} = (n + 1)\, A_{n+1} - 2nxA_n + (n - 1)\, A_{n-1}\,,$$

t. j.

$$(n + 1)\, A_{n+1}(x) - (2n + 1)\, x\, A_n(x) + n\, A_{n-1}(x) = 0\,,$$

což je táž rekurentní relace jako (88). Ježto tato relace určuje jednoznačně $A_2, A_3, \ldots$, jakmile známe A_0, A_1, a ježto $A_0 = P_0$, $A_1 = P_1$, je $A_n = P_n$ pro všechna n.

Poznámka 2. Je-li x libovolně dáno, je pro dostatečně malá $|t|$ podmínka $2|t|\,|x| + |t|^2 < 1$ splněna, a tedy (90) platí. Z (90) odvodíme nyní důležitý odhad:

Věta 215. *Pro* $-1 \leqq x \leqq 1$ *je*

(93) $$|P_n(x)| \leqq P_n(1) = 1\,.$$

Důkaz. Položme v (90) $x = 1$, načež pro $|t| < 1$ (pamatujme, že odmocninu bereme s amplitudou v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$)) vyjde v (90) vlevo $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots$, načež (viz pozn. 2) srovnáním s pravou stranou vyjde $P_n(1) = 1$. Budiž dále $-1 \leqq x \leqq 1$, takže existuje $\Theta \in \langle 0, \pi\rangle$ tak, že $x = \cos\Theta$. Potom máme $1 - 2t\cos\Theta + t^2 = (1 - te^{i\Theta})(1 - te^{-i\Theta})$; ježto pro $|t| < 1$ oba činitelé mají reálnou část kladnou, smíme podle pozn. 5 v kap. VII, § 1 užíti pravidla 1 : $(\xi\eta)^{\frac{1}{2}} = (\xi\eta)^{-\frac{1}{2}} = \xi^{-\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}}$ a máme

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - te^{i\Theta})(1 - te^{-i\Theta})}} = (1 - te^{i\Theta})^{-\frac{1}{2}}(1 - te^{-i\Theta})^{-\frac{1}{2}}\,;$$

rozvineme-li oba činitele v binomickou řadu, dostaneme v (90) vlevo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2k)}\, t^k e^{ik\Theta}\,.\,\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2l-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2l)}\, t^l e^{-il\Theta}\,.$$

Vynásobením a srovnáním koeficientu při t^n s koeficientem při t^n na pravé straně v (90) dostáváme rovnici tvaru

$$P_n(\cos\Theta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{i(2k-n)\Theta},$$

kde $\alpha_k > 0$ (je zbytečno vypisovat α_k podrobně). Odtud plyne

$$|P_n(\cos\Theta)| \leqq \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = P_n(\cos 0),$$

t. j. $|P_n(x)| \leqq P_n(1)$.

Věta 216. *Nechť funkce f má v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ absolutně spojitou druhou derivaci. Potom její Fourierova řada podle Legendreových polynomů konverguje stejnoměrně v $\langle -1, 1\rangle$ k součtu $f(x)$.*

Důkaz. Ke každému přirozenému n existuje podle věty 190 polynom F_n nejvýše n-tého stupně tak, že $\operatorname*{Max}_{-1\leqq x\leqq 1} |f(x) - F_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pro $n \to \infty$. Označím-li tedy toto maximum M_n, je $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 M_n = 0$. Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ máme

$$f(x) - s_n(f; x) = f(x) - F_n(x) - (s_n(f; x) - F_n(x)).$$

Ale podle pozn. 2 v § 8 je $F_n(x) = s_n(F_n; x)$ a tedy

$$f(x) - s_n(f; x) = f(x) - F_n(x) - s_n(f - F_n; x). \tag{94}$$

V posledním členu užijeme vzorce (74), kde $V = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $Q_k = P_k$, tedy $|P_k(x)| \leqq 1$ (viz (93)), dále $1 : A_k = \frac{1}{2}(2k + 1) \leqq \leqq \frac{1}{2}(2n + 1)$ (viz (86)). Tedy

$$|s_n(f - F_n; x)| \leqq 2 \cdot M_n \cdot (n + 1)\, \frac{2n + 1}{2} \leqq 2M_n(n + 1)^2.$$

Podle (94) je tedy pro $x \in \langle -1, 1\rangle$

$$|f(x) - s_n(f; x)| \leqq M_n(1 + 2(n + 1)^2);$$

zde pravá strana nezávisí na x a pro $n \to \infty$ konverguje k nule.

B) Čebyševovy polynomy. Tak se říká polynomům

$$\begin{aligned} T_0(x) = 1,\ T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \Big(x^n &+ \binom{n}{2} x^{n-2}(x^2 - 1) + \\ &+ \binom{n}{4} x^{n-4}(x^2 - 1)^2 + \ldots\Big) \text{ pro } n > 0, \end{aligned} \tag{95}$$

zavedeným v kap. XIII, § 8, pozn. 2. Koeficient při x^n v T_n je roven jedné. Mimoto je pro každé komplexní Θ (viz (144) v kap. XIII)

$$(96)\quad T_0(\cos\Theta) = 1,\ T_n(\cos\Theta) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n\Theta \text{ pro } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ke každému komplexnímu x existují komplexní Θ taková, že $x = \cos\Theta$;[22]) jednu z těchto hodnot Θ (a sice tu, jejíž reálná část leží v $\langle 0, \pi\rangle$) označíme znakem arccos x. Rovnice (96) lze tedy (pro každé $x \in \mathbf{K}$) přepsati do tvaru

$$(97)\quad T_0(x) = 1,\ T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)\ (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Věta 217. *Čebyševovy polynomy tvoří orthogonální systém v* $(-1, 1)$ *vzhledem k funkci* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důkaz. Nechť $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_n = 1$ pro $n > 0$. Potom jest (substituce $x = \cos\Theta$, $0 \leqq \Theta \leqq \pi$)

$$(98)\quad \int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\lambda_n\lambda_m}{2^{n+m-2}}\int_0^\pi \cos n\Theta \cos m\Theta\, d\Theta\,.$$

Pro $n \neq m$ jest integrál vpravo roven nule.

Poznámka 3. Pro $n = m$ dává (98)

$$(99)\quad \int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{pro } n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2^{2n-1}} & \text{pro } n > 0\,. \end{cases}$$

Polynomy $T_n(x)$ lze také definovati „vytvořující funkcí“:

[22]) V **D II**, kap. XII, § 4 jsme mluvili jen o rovnici $z = \sin w$. Ale přechod ke kosinu je snadný. Je $\cos w = \sin(\frac{1}{2}\pi - w)$; tedy rovnici $\cos w = z$ lze psáti $\sin(\frac{1}{2}\pi - w) = z$ a tato rovnice je splněna tehdy a jen tehdy, je-li buďto $\frac{1}{2}\pi - w = \arcsin z + 2k\pi$ nebo $\frac{1}{2}\pi - w = \pi - \arcsin z + 2k\pi$ (k celé). Přitom právě pro jednu z těchto hodnot (totiž $\arcsin z$) leží reálná část čísla $\frac{1}{2}\pi - w$ v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, t. j. reálná část čísla $w = \frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{2}\pi - w)$ leží v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Tuto hodnotu w nazveme $\arccos z$; t. j. $\arccos z = \frac{1}{2}\pi - \arcsin z$. To je tedy ono jediné řešení rovnice $\cos w = z$, jehož reálná část leží v $\langle 0, \pi\rangle$. Pro $-1 \leqq z \leqq 1$ je tato definice ve shodě s **D I**, kap. VII, § 2.

Věta 218. *Jsou-li r, x reálná čísla, $|r| < 1$, $|x| \leqq 1$, jest*

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2rx + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n 2^n T_n(x) \,. \tag{100}$$

Důkaz. Definujme $\Theta = \arccos x$, tedy $x = \cos \Theta$. Jest (sečtu geometrickou řadu)

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{ni\Theta} = \frac{1 + re^{i\Theta}}{1 - re^{i\Theta}} = \frac{(1 + re^{i\Theta})(1 - re^{-i\Theta})}{1 - 2r \cos \Theta + r^2} \,.$$

Srovnáním reálných částí plyne

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\Theta = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \Theta + r^2} \,.$$

Dosazením $x = \cos \Theta$ a užitím rovnice (96) plyne (100).

Věta 219 (rekurentní relace). *Pro celé $n > 1$ jest*

$$T_{n+1}(x) - x\, T_n(x) + \tfrac{1}{4} T_{n-1}(x) = 0 \,. \tag{101}$$

Důkaz. Vynásobím-li rovnici (100) jmenovatelem $1 - 2rx + r^2$ a srovnám koeficienty při r^{n+1}, dostanu ihned (101).[23]

Ježto $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, lze ze (101) pohodlně počítati T_n.

Věta 220 (diferenciální rovnice). *Pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ jest*

$$(1 - x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0 \,. \tag{102}$$

Důkaz. Pro $-1 < x < 1$ klaďme $\Theta = \arccos x$, tedy $x = \cos \Theta$. Položme $y = 2^{-n+1} \cos n\Theta = T_n(x)$ (pro $n > 0$; případ $n = 0$ je zřejmý). Jest

$$\frac{d^2y}{d\Theta^2} + n^2 y = 0 \,. \tag{103}$$

Ale

$$\frac{dy}{d\Theta} = -\frac{dy}{dx} \sqrt{1 - x^2} \,, \quad \frac{d^2y}{d\Theta^2} = (1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} \,;$$

dosazením do (103) plyne (102).[23]

[23]) Sice jen pro $-1 < x < 1$, ale ježto levá strana je polynom, platí rovnice pro každé komplexní x.

Čebyševovy polynomy mají tuto minimální vlastnost:

Věta 221. *Budiž n přirozené číslo; budiž $Q(x)$ reálný mnohočlen n-tého stupně s nejvyšším koeficientem* 1. *Potom jest*

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |Q(x)| \geqq \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \,.\text{[24]} \tag{104}$$

Důkaz. Pro $-1 \leqq x \leqq 1$ je podle (97) $|T_n(x)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$; znamení rovnosti platí, je-li $n \arccos x = k\pi$ (k celé, $0 \leqq \frac{k}{n}\pi \leqq \pi$), t. j. je-li $x = \cos\frac{k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Označme $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$; jest $1 = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = -1$, a dále $T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$ (podle (97)). Je-li Q reálný polynom stupně n-tého s nejvyšším koeficientem 1, který není identický s $T_n(x)$, je $R(x) = T_n(x) - Q(x)$ polynom stupně nižšího než n, který není identicky roven nule. Kdyby pro všechna $x \in \langle -1, 1 \rangle$ bylo $|Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, bylo by

$$R(x_0) > 0,\ R(x_1) < 0,\ R(x_2) > 0,\ \ldots,\ (-1)^n R(x_n) > 0 \,. \tag{105}$$

Mezi kterýmikoliv dvěma hodnotami x_k, x_{k+1} by ležel aspoň jeden kořen polynomu $R(x)$; tento polynom by tedy měl aspoň n kořenů, což není možno.

Věta 222. *Nechť f má absolutně spojitou derivaci (prvního řádu) v $\langle -1, 1 \rangle$. Potom její Fourierův rozvoj podle Čebyševových polynomů konverguje stejnoměrně v $\langle -1, 1 \rangle$ k součtu $f(x)$.*

Důkaz (jako u věty 216). Ke každému $n \in \boldsymbol{N}$ existuje podle věty 190 polynom F_n nejvýše n-tého stupně tak, že $M_n = \max\limits_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - F_n(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ pro $n \to \infty$. Pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ máme — s použitím pozn. 2 v § 8 —

$$\begin{aligned} f(x) - s_n(f; x) &= f(x) - F_n(x) - (s_n(f; x) - F_n(x)) = \\ &= f(x) - F_n(x) - s_n(f - F_n; x) \,. \end{aligned} \tag{106}$$

[24]) Zobecnění a zostření tohoto výsledku viz v cvič. 3.

Užiji opět vzorce (74), kde $V(y) = (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, $a = -1$, $b = 1$, $Q_k = T_k$, tedy $|T_k(x)| \leqq 2^{-k+1}$ (viz (97)), $1 : A_k = \frac{1}{\pi} \cdot 2^{2k-1}$ pro $k > 0$ (viz (99)), $T_0 = 1$, $1 : A_0 = 1 : \pi$. Tedy $|T_k(x)\, T_k(y)| : A_k \leqq \frac{2}{\pi}$, takže

$$|s_n(f - F_n; x)| \leqq M_n \,.\, (n + 1) \,.\, \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

a tedy konečně podle (106)

$$|f(x) - s_n(f; x)| \leqq M_n(1 + 2(n + 1))\,;$$

zde pravá strana nezávisí na x a pro $n \to \infty$ konverguje k nule.

Cvičení

1. Nechť f má v $\langle -1, 1\rangle$ absolutně spojitou derivaci řádu $p \geqq 2$. Potom pro rozvoj podle Legendreových polynomů platí

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - s_n(f; x)| = o\left(\frac{1}{n^{p-2}}\right).$$

2. Nechť f má v $\langle -1, 1\rangle$ absolutně spojitou derivaci řádu $p \geqq 1$. Potom pro rozvoj podle Čebyševových polynomů platí

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - s_n(f; x)| = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right).$$

3. Nechť komplexní polynom Q stupně n-tého má koeficient při x^n rovný jedné. Potom platí (104); znamení rovnosti platí jen pro $Q = T_n$. Návod: Budiž předně Q reálný. Je-li $\max\limits_{-1 \leqq x \leqq 1} |Q(x)| \leqq \max\limits_{-1 \leqq x \leqq 1} |T_n(x)|$, platí pro $R = T_n - Q$ nerovnosti jako v (105), ale se znameními $\geqq$, $\leqq$. Platí-li vesměs $>$, $<$, plyne spor. Je-li na př. $R(x_{k-1}) \neq 0$, $R(x_k) = 0$, $R(x_{k+1}) \neq 0$, mají první a třetí výraz totéž znamení, a ihned nahlédnete, že mezi x_{k-1}, x_{k+1}, nemůže ležeti jen jeden — a to jednoduchý — kořen polynomu R. Podobně, jestliže několik po sobě následujících $R(x_j)$ je rovno nule. Celkem dostanete, že R má aspoň n kořenů,[25]) tedy je R nula. Je-li za druhé Q komplexní, a neplatí-li v (104) znamení $>$, je reálná část Q rovna T_n, imaginární část pak je nutně nula ve všech bodech x_j; tedy je vůbec nula.

Další cvičení se týkají Jacobiových polynomů.

---

[25]) k-násobný kořen je přitom počítán za k kořenů.

4. Buďte α, β, γ libovolná komplexní čísla, avšak nechť γ není ani 0 ani celé záporné. Potom

$$
\begin{aligned}
(107)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\, \beta(\beta + 1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \\
+ \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\, \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

je t. zv. hypergeometrická řada. Je to mocninná řada v x; je-li α nebo β buďto 0 nebo celé záporné, je (107) polynom v x; v ostatních případech má řada poloměr konvergence 1.

Pro $|x| < 1$ vyhovuje řada (107) diferenciální rovnici

$$
(108)\qquad x(1 - x)\, y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x)\, y' - \alpha\beta y = 0
$$

(t. zv. hypergeometrická nebo Gaussova rovnice).

5. V dalším budiž stále $q > 0$, $p - q > -1$. Definujeme-li funkci $G_n(p, q, x)$ pro $0 < x < 1$[26]) rovnicí

$$
(109)\qquad G_n(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1 - x)^{q-p}}{q(q + 1) \ldots (q + n - 1)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^{q+n-1}(1 - x)^{p+n-q})
$$

($n = 0, 1, \ldots$), jest G_n polynom (v proměnné x) stupně nejvýše n-tého. Jest pro celé k, $0 \leqq k < n$

$$
(110)\qquad \int_0^1 x^{q-1}(1 - x)^{p-q} G_n(p, q, x) \,.\, x^k \,\mathrm{d}x = 0\,.\text{[27]})
$$

Proto je G_n buďto nula (což brzo vyloučíme) nebo polynom stupně **p r á v ě** n-tého (jak to odůvodníte?).

6. Z rovnice (109) ve tvaru

$$
G_{n+1}(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1 - x)^{q-p}}{q(q + 1) \ldots (q + n)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^{q+1+(n-1)}(1 - x)^{p+2+n-(q+1)})\right)
$$

plyne (čárka značí derivaci podle x)

$$
\begin{aligned}
q\, G_{n+1}(p, q, x) = x(1 - x)\, G_n'(p + 2, q + 1, x) + (q - (p + 1)\, x)\,. \\
.\, G_n(p + 2, q + 1, x)\,.
\end{aligned}
$$

Ale tato rovnice je splněna též, píšeme-li místo $G_n(p, q, x)$ polynom $F(p + n, -n, q, x)$. Ježto pro $n = 0$ jsou obě funkce stejné (totiž rovny 1), jest (indukcí podle n)

$$
(111)\qquad G_n(p, q, x) = F(p + n, -n, q, x)\,.
$$

[26]) Chci se vyhnout úvahám o mocninách komplexních čísel s neceiým mocnitelem. Ježto nakonec vyjde polynom, není to žádné podstatné omezení.

[27]) Návod: Podobně jako u Legendreových polynomů. Pro $n = 0$ kladu ovšem součin ve jmenovateli (109) roven jedné.

7. Z cvič. 5, 6 je patrno: „Jacobiovy polynomy“

$$G_0(p, q, x),\ G_1(p, q, x), \ldots \tag{112}$$

tvoří systém orthogonální v (0, 1) vzhledem k funkci $x^{q-1}(1 - x)^{p-q}$. Koeficient při x^n jest pro $n > 0$ roven

$$(-1)^n \frac{(p + n)(p + n + 1) \ldots (p + 2n - 1)}{q(q + 1) \ldots (q + n - 1)} . \tag{113}$$

Výpočtem integrálu (110) pro $k = n$ obdržíte

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x^{q-1}(1 - x)^{p-q}\, G_n^2(p, q, x)\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{n!\,(p + n)(p + n + 1) \ldots (p + 2n - 1)}{(q(q + 1) \ldots (q + n - 1))^2} \int_0^1 x^{q+n-1}(1 - x)^{p+n-q}\, \mathrm{d}x . \end{aligned} \tag{114}$$

S integrálem vpravo jsme se setkali v kap. VII, § 1, pozn. 6 a § 3, příkl. 28; je to $\mathrm{B}(q + n, p - q + n + 1)$.

8. Z cvič. 4, 6 plyne, že funkce $y = G_n(p, q, x)$ hoví diferenciální rovnici

$$x(1 - x)\, y'' + (q - (p + 1)\, x)\, y' + (p + n)\, ny = 0 . \tag{115}$$

9. Užijeme-li věty 210 ve tvaru (72), dostáváme srovnáním prostých členů a koeficientů u nejvyšších dvou mocnin pro $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} A(n, p, q) \,.\, G_{n+1}(p, q, x) = (x + B(n, p, q)) \,.\, G_n(p, q, x) &+ \\ + C(n, p, q) \,.\, G_{n-1}(p, q, x) &; \end{aligned}$$

při tom je

$$A(n, p, q) = - \frac{(n + q)(n + p)}{(2n + p)(2n + p + 1)} ,$$

$$B(n, p, q) = \frac{n(q + n - 1)}{2n + p - 1} - \frac{(n + 1)(q + n)}{2n + p + 1} ,$$

$$C(n, p, q) = \frac{(n + p - q)\, n}{(2n + p)(2n + p - 1)} .$$

10. Transformujme interval (0, 1) na (− 1, 1) a pišme $\alpha = q - 1$, $\beta = p - q$. Vidíme, že polynomy

$$\begin{aligned} &G_n\left(\alpha + \beta + 1,\ \alpha + 1, \frac{1 - x}{2}\right) = F\left(\alpha + \beta + n + 1,\ -n,\ \alpha + 1, \frac{1 - x}{2}\right) = \\ &= \frac{(-1)^n(1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta}}{2^n(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} ((1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}) \end{aligned} \tag{116}$$

jsou orthogonální v $(-1, 1)$ vzhledem k funkci $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ (předpokládáme $\alpha > -1, \beta > -1$). Pro větší symetričnost položme

$$P_n(\alpha, \beta, x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) =$$

$$(117) \qquad = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}G_n\left(\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

11. Z cvič. 10 plyne pro Legendreovy a Čebyševovy polynomy ($\alpha = \beta = 0$, po příp. $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$)

$$(118) \qquad P_n(x) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right);$$

$$(119) \qquad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

(poslední rovnice neplatí pro $n = 0$).

§ 10.*Hermiteovy a Laguerreovy polynomy.* A) Hermiteovy polynomy. Pišme

$$(120) \qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^n\mathrm{e}^{-x^2}H_n(x) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Tvrdím, že $H_n(x)$ je reálný polynom stupně n-tého s nejvyšším koeficientem 2^n. Ze (120) totiž plyne derivováním

$$(121) \qquad (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}H_{n+1} = (-1)^n\mathrm{e}^{-x^2}(-2xH_n + H_n'),$$

odkudž tvrzení ihned plyne úplnou indukcí. Polynomy $H_n(x)$ se nazývají Hermiteovy polynomy. Můžeme je také definovati vytvořující funkcí. Položme

$$(122) \qquad \psi(x, t) = \mathrm{e}^{-t^2+2tx} = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-(x-t)^2}$$

pro libovolná komplexní t, x. Podle příkl. 2 za větou 234 v **D II** můžeme v řadě

$$\psi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(2tx - t^2)^k$$

umocniti každý člen podle binomické poučky a potom srovnati na př. podle mocnin t v řadu

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n!}t^n.$$

Podle pozn. 7 před větou 226 v **D II** jest

$$A_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,\psi(x, t)\right]_{t=0} = e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} =$$

$$= (-1)^n\,e^{x^2}\left[\frac{d^n}{dz^n}\,e^{-z^2}\right]_{z=x} = H_n(x)\,.$$

Tedy jest pro všechna komplexní t, x

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n\,. \tag{123}$$

Tuto mocninnou řadu pro funkci ψ můžeme derivovati člen po členu. Dosadíme-li řady odtud plynoucí do rovnice $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 2(x - t)\,\psi$, jež plyne ze (122), obdržíme srovnáním koeficientů při t^n:

(124) $H_{n+1}(x) - 2x\,H_n(x) + 2n\,H_{n-1}(x) = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

Srovnejme rovnici (124) s rovnicí $H_{n+1} - 2xH_n + H'_n = 0$, jež plyne ze (121); vyjde rovnice

$$H'_n(x) = 2n\,H_{n-1}(x) \text{ pro } n = 1, 2, \ldots \tag{125}$$

Dosadíme-li podle této rovnice do (124), obdržíme diferenciální rovnici

(126) $H''_n(x) - 2x\,H'_n(x) + 2n\,H_n(x) = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$[28])

Jest $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, ... Ze (124) jest indukcí patrno, že $H_n(x)$ je sudá nebo lichá funkce, podle toho, zda n je sudé či liché.

Ze (120) je patrno, že pro libovolný polynom $P(x)$ má výraz

$$P(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

pro $x \to +\infty$ i pro $x \to -\infty$ limitu 0. Integrací per partes obdržíme proto pro $0 \leqq m \leqq n$ podle (120), (125)

---

[28]) Případy $n = 0$, $n = 1$ jsou zřejmé.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\, dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\, 2m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\, dx = \ldots =$$

$$= (-1)^{n-m}\, 2^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}}\, dx\,.$$

Pro $n > m$ je poslední integrál ($H_0(x) = 1$)

$$\left[\frac{d^{n-m-1} e^{-x^2}}{dx^{n-m-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0\,;$$

pro $m = n$ pak vyjde (Laplaceův integrál, viz třeba kap. III, § 7, příkl. 12)

(127) $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\, e^{-x^2}\, dx = 2^n \,.\, n!\, \sqrt{\pi} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Shrňme tyto výsledky:

Věta 223. *Definujme funkce*

(128) $$H_0(x), H_1(x), H_2(x), \ldots$$

rovnicí (120). *Potom jest $H_n(x)$ reálný polynom n-tého stupně s nejvyšším koeficientem 2^n; je to funkce lichá pro liché n, sudá pro sudé n. Polynomy* (128) *se nazývají Hermiteovy polynomy a tvoří orthogonální systém v* $(-\infty, +\infty)$ *vzhledem k funkci* e^{-x^2}. *Pro všechna komplexní x, t platí* (123). *Dále platí* (124), (125), (126), (127).

B) Laguerreovy polynomy. Položme

(129) $$\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = e^{-x} L_n(x) \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Leibnizova formule pro derivování součinu dává ihned

(130) $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{(n(n-1)\ldots(n-k+1))^2}{k!} x^{n-k}\,;$$

$L_n(x)$ je tedy mnohočlen n-tého stupně; koeficient při x^n v (130) znamená $(-1)^n$. Polynomy

$$L_0(x), L_1(x), L_2(x), \ldots \tag{131}$$

se nazývají Laguerreovy polynomy. Podotkněme, že kterákoliv derivace funkce $x^n e^{-x}$, násobená libovolným polynomem, má pro $x \to + \infty$ limitu 0. Je-li $0 \leqq k \leqq n$ (k, n celá), je proto opětovnou integrací per partes:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k L_n(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})\, dx = \\ &= -k \int_0^{+\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x})\, dx = \ldots = \\ &= (-1)^k k! \int_0^{+\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x})\, dx\,. \end{aligned} \tag{132}$$

Je-li $k < n$, je poslední integrál

$$\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n e^{-x})\right]_0^{+\infty} = 0\,.$$

(Že napsaný výraz má pro $x = 0$ hodnotu nulu, plyne z toho, že — derivuji-li podle Leibnizova pravidla — každý člen obsahuje aspoň činitele x^{k+1}) Pro $k = n$ máme však podle (132)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n^2(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) \,.\, (-1)^n x^n\, dx = \\ &= n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = (n!)^2 \text{ pro } n = 0, 1, \ldots \text{ [29]} \end{aligned} \tag{133}$$

Systém (131) je tedy orthogonální v $(0, +\infty)$ vzhledem k funkci e^{-x}. Laguerreovy polynomy lze též definovati touto vytvořující funkcí: Pro libovolné komplexní x a pro $|t| < 1$ položme

$$\psi(x, t) = \frac{1}{1-t}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{x^m t^m}{(1-t)^{m+1}}\,. \tag{134}$$

[29]) $(-1)^n x^n$ je nejvyšší člen v $L_n(x)$; integrály, odpovídající členům s nižším mocnitelem, rovnají se nule podle toho, co jsme právě dokázali.

Jest

$$(135) \qquad \frac{1}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{k!} t^k .$$

Do (134) můžeme dosaditi[30]) řadu (135) a přerovnati podle mocnin t; obdržíme

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} x^{n-k} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!(n-k)!},$$

t. j. (viz (130))

$$(136) \qquad \psi(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n .$$

Parciální derivací podle t obdržíme

$$(137) \qquad (1-t)^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-t-x)\,\psi .$$

Derivuji-li mocninnou řadu ψ člen po členu a srovnám v (137) koeficienty při t^n, obdržím rekurentní vztah

$$(138) \quad L_{n+1} - (2n+1-x)\,L_n + n^2 L_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Další vztah obdržím z definice (129):

$$L_{n+1}e^{-x} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x \,.\, x^n e^{-x}) = x \,.\, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^n e^{-x}) +$$

$$+ (n+1) \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = x \frac{d}{dx} (L_n e^{-x}) + (n+1)\,L_n e^{-x},$$

t. j.

$$(139) \qquad L_{n+1} = x(L'_n - L_n) + (n+1)\,L_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Dosazením ze (139) do (138) obdržíme

$$(140) \qquad xL'_n = nL_n - n^2 L_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Napíši-li ještě rovnici

$$(141) \qquad xL'_{n+1} = (n+1)\,L_{n+1} - (n+1)^2 L_n ,$$

[30]) Viz opět příkl. 2 za větou 234 v **D II**.

obdržím

$$(142)\qquad x(L'_{n+1} - (n+1)\,L'_n) = (n+1)(L_{n+1} - (2n+1)\,L_n + \\ + n^2 L_{n-1})\,;$$

užitím (138) plyne (píši-li ještě n místo $n + 1$)

$$(143)\qquad L'_n = nL'_{n-1} - nL_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$ [31]

Derivováním rovnic (138), (140) plyne

$$(144)\qquad L'_{n+1} - (2n + 1 - x)\,L'_n + L_n + n^2 L'_{n-1} = 0\,,$$

$$(145)\qquad nL'_n - xL''_n - L'_n = n^2 L'_{n-1}\,.$$

Ze (143) plyne

$$(146)\qquad (n+1)\,L'_n - (n+1)\,L_n = L'_{n+1}\,.$$

Sečtením (144), (145), (146) plyne konečně diferenciální rovnice

$$(147)\qquad xL''_n + (1 - x)\,L'_n + nL_n = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)\,.$$

Shrňme:

Věta 224. *Definujme funkce L_n rovnicí* (129); *potom jest $L_n(x)$ mnohočlen n-tého stupně s nejvyšším koeficientem* $(-1)^n$. *Polynomy* (131) *se nazývají Laguerreovy polynomy; tvoří orthogonální systém v* $(0, +\infty)$ *vzhledem k funkci* e^{-x}. *Pro libovolné komplexní x a pro $|t| < 1$ platí* (136). *Dále platí* (130), (133), (138), (140), (143), (147).

[31]) V rovnicích (143), (147) jest nutno triviální případy $n < 2$ ověřiti přímo.