KAPITOLA V

LEBESGUEŮV INTEGRÁL V $\mathbf{E}_1$

§ 1. Vitaliova věta o pokrytí. V celém tomto paragrafu znamená μ Lebesgueovu míru v $\mathbf{E}_r$. Omezený nezvrhlý interval v $\mathbf{E}_r$, jehož hrany jsou stejně dlouhé, nazveme *krychlovým intervalem*. Délku hrany krychlového intervalu K budeme značiti $h(K)$; je tedy $0 < h(K) < + \infty$, $\mu(K) = h^r(K)$. Kratčeji budeme krychlovým intervalům říkati „krychle" (uvědomte si ovšem, že to jsou krychle ve speciální poloze).

Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ a budiž $\mathfrak{K}$ systém uzavřených krychlí v $\mathbf{E}_r$. Budeme říkati, že $\mathfrak{K}$ *pokrývá* M *ve smyslu Vitaliově*, jestliže každý bod z M je obsažen v libovolně malých krychlích systému $\mathfrak{K}$; podrobně: jestliže ke každému $x \in M$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje krychle $K \in \mathfrak{K}$ tak, že $x \in K$, $h(K) < \varepsilon$.

Poznámka 1. Nechť systém $\mathfrak{K}$ pokrývá M ve smyslu Vitaliově. Nechť G je otevřená, $M \subset G$. Potom systém oněch krychlí systému $\mathfrak{K}$, které leží v G (t. j. které jsou částmi množiny G) zřejmě také pokrývá M ve smyslu Vitaliově.

Věta 81 (Vitali). *Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}_r$ a nechť $\mathfrak{K}$ je systém uzavřených krychlových intervalů, pokrývající M ve smyslu Vitaliově. Potom existuje disjunktní spočetný systém krychlí z $\mathfrak{K}$:*

$$K_1, K_2, K_3, \dots \quad (K_n \in \mathfrak{K},\ K_p K_q = \emptyset \text{ pro } p \neq q) \tag{1}$$

tak, že (μ je Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_r$)

$$\mu(M \dot{-} \bigcup_n K_n) = 0\,. \tag{2}$$

Poznámka 2. Posloupnost (1) je buďto konečná, t. j. má jistý poslední člen K_m, nebo je nekonečná.

Důkaz. I. Předpokládejme napřed, že M je omezená. Sestrojme otevřenou krychli I tak, že $M \subset I$. Podle pozn. 1 smíme z $\mathfrak{K}$ vynechati všechny krychle, jež neleží v I. Smíme tedy a budeme předpokládati, že všechny krychle $K \in \mathfrak{K}$ leží v I a tedy $h(K) < h(I)$.

Zvolme předně nějakou krychli $K_1 \in \mathfrak{K}$. Je-li $M \subset K_1$, jsme hotovi. Není-li však $M \subset K_1$, sestrojujeme další krychle $K_2, K_3, \ldots$ podle tohoto předpisu: Je-li n přirozené číslo a jsou-li disjunktní krychle $K_1, \ldots, K_n$ ($K_j \in \mathfrak{K}$) již zvoleny, položme

$$F_n = \bigcup_{j=1}^{n} K_j\,, \quad G_n = I \dot{-} F_n\,. \tag{3}$$

Tedy $F_n \subset I$ je uzavřená, G_n otevřená. Jestliže $M \subset F_n$, jsme hotovi: za posloupnost (1) vezmeme $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Není-li tomu tak, t. j. existuje-li bod $x_0 \in M \dot{-} F_n$, volíme K_{n+1} takto: Ježto F_n je uzavřená, má x_0 od F_n kladnou vzdálenost. Ježto systém $\mathfrak{K}$ pokrývá M ve smyslu Vitaliově, existuje $K \in \mathfrak{K}$ tak, že $x_0 \in K \subset I \dot{-} F_n = G_n$.[1]) Budiž s_n supremum všech čísel $h(K)$ pro všechna $K \in \mathfrak{K}$, ležící v G_n. Ježto aspoň jedno takové K existuje, je $0 < s_n \leqq h(I) < +\infty$. Zvolme (vzpomeňte si na definici suprema) $K_{n+1} \in \mathfrak{K}$ tak, že[2]) $h(K_{n+1}) > > \frac{1}{2}s_n$, $K_{n+1} \subset G_n$. Systém $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$ jest opět disjunktní. Tak postupujeme dále. Skončí-li se tento proces při některém n, jsme hotovi, jak bylo již poznamenáno. Není-li tomu tak, dostáváme nekonečnou posloupnost krychlí

$$K_1, K_2, \ldots \quad (K_n \in \mathfrak{K},\ K_pK_q = \emptyset \text{ pro } p \neq q) \tag{4}$$

s touto vlastností (F_n, G_n definuji vzorci (3)): je-li s_n supremum čísel $h(K)$ pro všechna $K \in \mathfrak{K}$, jež leží v G_n, je

$$h(K_{n+1}) > \tfrac{1}{2}s_n > 0 \text{ pro } n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Ježto K_n jsou disjunktní, je

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^r(K_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\Big) \leqq \mu(I) < +\infty\,. \tag{6}$$

Budiž Q_n krychle soustředná s K_n o hraně $h(Q_n) = 5h(K_n)$.

Z (6) plyne

$$\lim_{n\to\infty} h(K_n) = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} h^r(Q_n) < +\infty\,. \tag{7}$$

---

[1]) Každé $K \in \mathfrak{K}$ leží v I.

[2]) Velmi přirozená myšlenka: Chci pokrýti „co největší část“ množiny M; proto volím K_{n+1} „velké“.

Položme $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Stačí zřejmě dokázat, že pro každé přirozené p je

$$(8) \qquad M \dot{-} F \subset \bigcup_{n=p}^{\infty} Q_n ;$$

neboť odtud plyne $\mu_e(M \dot{-} F) \leqq \sum_{n=p}^{\infty} h^r(Q_n)$, kde vpravo je zbytek konvergentní řady; tedy $\mu_e(M \dot{-} F) < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, t. j. $\mu(M \dot{-} F) = 0$.

(8) pak dokážeme takto: Vezměme libovolný bod $x \in M \dot{-} F$. Jest $x \in M$, $x \in G_p$. Ježto G_p jest otevřená, existuje $K \in \mathfrak{K}$ tak, že $x \in K \subset G_p$. Podržme krychli K pevnou. Nemůže býti $K \subset G_n$ pro všechna $n > p$; neboť je-li $K \subset G_n$, je $h(K) \leqq s_n < 2h(K_{n+1})$ (viz (5)) a pravá strana podle (7) konverguje k nule pro $n \to \infty$. Tedy: Je $K \subset G_p$, t. j. $KF_p = \emptyset$, ale existuje $n > p$ tak, že je $KF_n \neq \emptyset$ (t. j. K neleží v G_n). Vezměme nejmenší takové $n > p$, takže

$$KF_{n-1} = \emptyset\,, \quad KF_n \neq \emptyset\,, \quad \text{tedy} \quad KK_n \neq \emptyset\,.$$

Ježto $K \subset G_{n-1}$, je $h(K) \leqq s_{n-1} < 2h(K_n)$ (viz (5)). Ježto K má společný bod s K_n a hranu menší než $2h(K_n)$, je zřejmo (načrtněte!), že $K \subset Q_n$. Tedy $x \in Q_n$ pro jisté $n > p$. Tím je (8) dokázáno.

II. Budiž nyní M neomezená. Sestrojme všechny otevřené krychle

$$\underset{[x_1, \ldots, x_r]}{\mathcal{E}} (m_1 < x_1 < m_1 + 1, \ldots, m_r < x_r < m_r + 1)\,,$$

kde $m_1, \ldots, m_r$ jsou libovolná celá čísla. Srovnejme tyto krychle v posloupnost $R_1, R_2, \ldots$ Množina $\mathsf{E}_r \dot{-} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ má míru rovnou nule, neboť se skládá z oněch bodů, jejichž některá souřadnice je celé číslo, t. j. je sjednocením spočetného systému nadrovin (tedy zvrhlých intervalů). Každou z omezených množin MR_n lze podle bodu I skoro celou[3]) pokrýti spočetným disjunktním systémem krychlí z $\mathfrak{K}$, o nichž mimo to smíme (viz pozn. 1) předpokládati, že leží v R_n. Všechny tyto krychle (pro $n = 1, 2, \ldots$) tvoří tedy dohromady disjunktní spočetný systém krychlí z $\mathfrak{K}$, pokrývající skoro celou množinu M.

---

[3]) T. j. až na množinu míry 0.

Podaný důkaz pochází od polského matematika St. Banacha.

Pro omezené množiny lze z Vitaliovy věty odvoditi tento důsledek:

Věta 82. *Nechť $M \subset \mathbf{E}_r$ je neprázdná omezená množina a nechť $\mathfrak{K}$ je systém uzavřených krychlových intervalů, pokrývající M ve smyslu Vitaliově. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje disjunktní konečný systém krychlí z $\mathfrak{K}$:*

$$K_1, K_2, \ldots, K_m \quad (K_n \in \mathfrak{K},\ K_p K_q = \emptyset \text{ pro } p \neq q) \tag{9}$$

tak, že

$$\mu_e(M \dot{-} \bigcup_{n=1}^{m} K_n) < \varepsilon\,. \tag{10}$$

Důkaz. Zvolme otevřenou omezenou množinu $G \supset M$. Můžeme se (podle pozn. 1) omeziti na systém těch krychlí $K \in \mathfrak{K}$, pro které je $K \subset G$. Vyberme z nich disjunktní posloupnost (1), pro kterou platí (2). Je-li posloupnost (1) nekonečná, uvažme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \leqq \mu(G) < +\infty\,,$$

takže řada vlevo konverguje. Existuje tedy $m \in \mathbf{N}$ tak, že $\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(K_n) < \varepsilon$. Je však $M \dot{-} \bigcup_{n=1}^{m} K_n \subset (M \dot{-} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=m+1}^{\infty} K_n)$, takže podle (2) dostáváme (10).

Cvičení

1. Viz cvič. 2 v kap. I, § 10. Sledováním důkazu věty 81 zjistěte, že tato věta zůstává v platnosti i tehdy, jestliže uzavřené krychlové intervaly nahradíme uzavřenými koulemi ($h(K)$ značí teď poloměr koule K).

V dalších cvičeních budiž f zobrazení $\mathbf{E}_r$ na $\mathbf{E}_r$, které je isometrické při eukleidovské metrice $\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Všechna taková zobrazení byla popsána v **D II**, kap. VI, § 3, příkl. 3 — ale nebudeme to potřebovat.

2. Obrazem uzavřené koule je uzavřená koule o témž poloměru.

3. Obrazem množiny nulové je množina nulová (viz cvič. 5 v kap. I, § 10). Proto obrazem měřitelné množiny je měřitelná množina.

4. $\mu_e(f(M)) \leqq \mu_e(M)$. Návod: Nechť $\mu_e(M) < +\infty$, $\varepsilon > 0$. Sestrojím otevřenou $G \supset M$, $\mu(G) < \mu_e(M) + \varepsilon$. Podle cvič. 1 pokryji skoro celou M disjunktní posloupností koulí $K_n \subset G$ ($n = 1, 2, \ldots$); podle cvič. 2, 3 bude $\mu_e(f(M)) \leqq \leqq \Sigma\mu(K_n) < \mu_e(M) + \varepsilon$.

5. $\mu_e(f(M)) = \mu_e(M)$. M je měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li $f(M)$ měřitelná. Návod: cvič. 3, 4 a inversní zobrazení. Obecnější výsledky obdržíme v kap. VI.

§ 2. Derivace funkcí s variací konečnou. V tomto paragrafu půjde o reálné konečné funkce jedné reálné proměnné. Znakem $\langle a, b\rangle$ budu v tomto paragrafu označovati nezvrhlý omezený uzavřený interval (t. j. $a \neq b$) — každý takový interval v $\mathbf{E}_1$ je ovšem „krychlový". Na rozdíl od dosavadních úmluv budu v tomto paragrafu připouštěti označení $\langle a, b\rangle$ i tehdy, když $a > b$; potom nechť $\langle a, b\rangle$ znamená totéž, co $\langle b, a\rangle$ (tedy na př. $\langle 3, 1\rangle = \langle 1, 3\rangle$). Slova „míra", „měřitelný" a pod. a znak μ se vztahují k Lebesgueově míře v $\mathbf{E}_1$.

Poznámka 1. Definujme *horní a dolní derivaci* funkce f v bodě x rovnicemi

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \overline{D} f(x) &= \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \\ \underline{D} f(x) &= \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,. \end{aligned}$$

Vždy jest $\underline{D} f(x) \leqq \overline{D} f(x)$. Derivace $f'(x)$ (konečná nebo nekonečná) existuje zřejmě tehdy a jen tehdy, je-li $\overline{D} f(x) = \underline{D} f(x)$, načež $f'(x) = \overline{D} f(x) = \underline{D} f(x)$.

Poznámka 2. Z definice v pozn. 1 je patrno, že existují posloupnosti $h_1, h_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots$ tak, že

$$\text{(12)} \quad h_n \neq 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} h_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \overline{D} f(x)\,,$$

$$\text{(13)} \quad k_n \neq 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} k_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+k_n) - f(x)}{k_n} = \underline{D} f(x)$$

(viz kap. I, § 1, pozn. 4).

Poznámka 3. V **D II**, kap. V, § 8 jsme zavedli čtyři derivovaná čísla.[4]) Zřejmě

[4]) „Zprava" $D^+ f(x) = \limsup_{h\to 0+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $D_+ f(x) = \liminf_{h\to 0+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a podobně „zleva" (D^-, D_-; piš $h \to 0-$).

$$\overline{D} f(x) = \text{Max}\,(D^+ f(x), D^- f(x)),\ \underline{D} f(x) = \text{Min}\,(D_+ f(x), D_- f(x))$$

(viz **D II**, kap. V, § 6, pozn. 4 nebo kap. VI, § 12, pozn. 5).

Poznámka 4. Je-li f neklesající v (a, b), je $\underline{D} f(x) \geqq 0$ pro $a < x < b$.

1. pomocná věta. *Budiž f funkce rostoucí a konečná v intervalu (a, b) $(-\infty < a < b < +\infty)$. Budiž $0 \leqq p < +\infty$, $M \subset (a, b)$. Nechť v každém bodě množiny M je $\underline{D} f(x) \leqq p$. Potom $\mu_e(f(M)) \leqq p\, \mu_e(M)$.*

Důkaz. $f(M)$ je obraz množiny M, tedy jistá množina v $\mathbf{E}_1$. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle definice vnější míry (číslo σ_1 ve větě 10) existuje otevřená množina G tak, že

$$M \subset G \subset (a, b)\ ,^{5)}\quad \mu(G) < \mu_e(M) + \varepsilon\,. \tag{14}$$

Ke každému bodu $x \in M$ existuje posloupnost $k_1, k_2, \ldots$ tak, že platí (13); ježto $\underline{D} f(x) \leqq p$, můžeme po vynechání konečného počtu členů dosáhnouti toho, že pro všechna přirozená n je

$$(15)\qquad k_n \neq 0\,,\quad \lim_{n\to\infty} k_n = 0\,,\quad \langle x, x + k_n\rangle \subset G\,,$$

$$\frac{f(x + k_n) - f(x)}{k_n} < p + \varepsilon \quad \text{neboli} \quad \frac{|f(x + k_n) - f(x)|}{|k_n|} < p + \varepsilon$$

(neboť v předešlém zlomku má čitatel totéž znamení jako jmenovatel). Tím je každému bodu $x \in M$ přiřazena jistá posloupnost intervalů $\langle x, x + k_n\rangle$ ($n = 1, 2, \ldots$; čísla k_n závisí ovšem na x; pro větší jasnost lze psáti $k_n(x)$ místo k_n). Všechny intervaly $\langle x, x + k_n(x)\rangle$ (pro všechna $x \in M$, $n \in \mathbf{N}$) pokrývají M. Ježto f je rostoucí, je obraz intervalu $\langle x, x + k_n(x)\rangle$ zřejmě obsažen v intervalu

$$\langle f(x),\ \ f(x + k_n(x))\rangle\ ; \tag{16}$$

všechny intervaly (16) pokrývají tedy $f(M)$, a to ve smyslu Vitaliově, neboť z (15) plyne

$$|f(x + k_n(x)) - f(x)| < (p + \varepsilon)\, |k_n(x)|\,. \tag{17}$$

Podle věty 81 existuje tedy disjunktní posloupnost

$$I_1, I_2, \ldots\ (I_m I_q = \emptyset \text{ pro } m \neq q)\,, \tag{18}$$

[5]) Kdyby nebylo $G \subset (a, b)$, mohu místo G vzít $G\,.\,(a, b)$.

vybraná ze systému intervalů (16) a taková, že

$$\mu(f(M) \dot{-} \bigcup_m I_m) = 0 . \tag{19}$$

Každému intervalu I_m přiřaďme interval H_m takto: Je-li I_m interval (16), budiž $H_m = \langle x, x + k_n(x)\rangle$. Tím dostáváme novou posloupnost intervalů

$$H_1, H_2, \ldots$$

Přitom podle (17) je $\mu(I_m) < (p + \varepsilon)\,\mu(H_m)$. Dále $H_m H_q = \emptyset$ pro $m \neq q$ (neboť obraz intervalu H_m leží v I_m, obraz H_q leží v I_q, a je $I_m I_q = \emptyset$). Dále je $H_m \subset G$ a tedy celkem podle (15), (14)

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_m I_m) &= \sum_m \mu(I_m) \leqq (p + \varepsilon) \sum_m \mu(H_m) = \\ &= (p + \varepsilon)\,\mu(\bigcup_m H_m) \leqq (p + \varepsilon)\,\mu(G) < \\ &< (p + \varepsilon)(\mu_e(M) + \varepsilon) . \end{aligned} \tag{20}$$

Ale $f(M) \subset (f(M) \dot{-} \bigcup_m I_m) \cup (\bigcup_m I_m)$, takže (19), (20) dává $\mu_e(f(M)) < < (p + \varepsilon)(\mu_e(M) + \varepsilon)$; to platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\mu_e(f(M)) \leqq \leqq p\,\mu_e(M)$.

2. pomocná věta. *Budiž f funkce rostoucí a omezená v intervalu (a, b) $(a < b)$. Budiž $0 < q < +\infty$, $M \subset (a, b)$. Nechť v každém bodě množiny M je $\overline{D}\, f(x) \geqq q$. Potom $\mu_e(f(M)) \geqq q\,\mu_e(M)$.*

Důkaz. Zvolme číslo ε, $0 < \varepsilon < q$. Množina $f(M)$ je podle předpokladu omezená. Podle definice vnější míry existuje otevřená množina G tak, že

$$f(M) \subset G\,, \quad \mu(G) < \mu_e(f(M)) + \varepsilon . \tag{21}$$

Znakem S označme množinu oněch bodů $x \in M$, v nichž f je spojitá.[6] Podle kap. I, § 1, pozn. 2 je $M \dot{-} S$ spočetná. Je-li $x \in S$, zvolíme posloupnost $h_1, h_2, \ldots$ tak, že platí (12); ježto $\overline{D}\, f(x) \geqq q$, můžeme vynecháním konečného počtu členů dosáhnouti toho, že pro všechna přirozená n je $\dfrac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} > q - \varepsilon$ neboli (ježto čitatel a jmeno-

[6]) V obvyklém smyslu, t. j. vzhledem k E_1.

vatel mají totéž znamení) $\frac{|f(x + h_n) - f(x)|}{|h_n|} > q - \varepsilon$. Dále $x \in S \subset \subset M$, tedy $f(x) \in f(M) \subset G$. Ježto G je otevřená, f spojitá v bodě x, leží interval $\langle f(x), f(x + h_n)\rangle$ pro všechna dosti velká n v G. Vynecháním konečného počtu členů lze dosáhnouti toho, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je

$$
(22) \qquad \begin{gathered} h_n \neq 0, \ \lim_{n\to\infty} h_n = 0, \ \langle f(x), f(x + h_n)\rangle \subset G, \\ |f(x + h_n) - f(x)| > (q - \varepsilon)|h_n| . \end{gathered}
$$

Čísla h_n závisí ovšem na x, pišme $h_n = h_n(x)$. Všechny intervaly $\langle x, x + h_n(x)\rangle$ (pro všechna $x \in S$, $n \in \mathbf{N}$) pokrývají zřejmě S ve smyslu Vitaliově. Tedy existuje disjunktní posloupnost intervalů

$$
(23) \qquad I_1, I_2, \dots \ (I_p I_m = \emptyset \text{ pro } p \neq m) ,
$$

vybraná ze systému intervalů $\langle x, x + h_n(x)\rangle$ a taková, že

$$
(24) \qquad \mu(S \dot{-} \bigcup_p I_p) = 0 .
$$

Každému intervalu $I_p = \langle x, x + h_n(x)\rangle$ přiřaďme interval $H_p = = \langle f(x), f(x + h_n(x))\rangle$. Ježto f je rostoucí, je též $H_p H_m = \emptyset$ pro $p \neq m$ (leží-li I_p vlevo od I_m, leží též H_p vlevo od H_m). Odtud a z (22), (21) plyne (ježto $\bigcup_p H_p \subset G$)

$$
(25) \quad (q - \varepsilon) \sum_p \mu(I_p) \leqq \sum_p \mu(H_p) = \mu(\bigcup_p H_p) \leqq \mu(G) < \mu_e(f(M)) + \varepsilon .
$$

Ale $M = (M \dot{-} S) \cup (M . \bigcup_p I_p) \cup (S \dot{-} \bigcup_p I_p)$, načež ze spočetnosti množiny $M \dot{-} S$ a z (24) plyne

$$
(26) \qquad \mu_e(M) \leqq \mu(\bigcup_p I_p) = \sum_p \mu(I_p) .
$$

Ale z (25), (26) plyne pro každé $\varepsilon \in (0, q)$

$$
\mu_e(f(M)) > (q - \varepsilon)\, \mu_e(M) - \varepsilon ,
$$

tedy $\mu_e(f(M)) \geqq q\, \mu_e(M)$.

3. pomocná věta. *Budiž f omezená a neklesající v omezeném intervalu (a, b) $(a < b)$. Potom f má skoro všude v (a, b) konečnou derivaci.*

Důkaz. Funkce $g(x) = f(x) + x$ je v (a, b) rostoucí a omezená. Existuje-li konečná $g'(x)$, existuje i konečná $f'(x) = g'(x) - 1$. Stačí tedy dokázati, že g má skoro všude v (a, b) konečnou derivaci.

Pro každé $x \in (a, b)$ je $0 \leqq \underline{D}\, g(x) \leqq \overline{D}\, g(x) \leqq +\infty$. Položme

$$A = \mathop{\mathcal{E}}_x(a < x < b, \overline{D}\, g(x) = +\infty)\,,$$

$$B = \mathop{\mathcal{E}}_x(a < x < b, 0 \leqq D\, g(x) < \overline{D}\, g(x))\,.$$

Stačí dokázati, že $\mu(A) = \mu(B) = 0$.

Podle předpokladu existuje omezený interval I tak, že $g((a, b)) \subset I$. Na množinu A lze užíti 2. pomocné věty s libovolným konečným q, takže $q\, \mu_e(A) \leqq \mu_e(g(A)) \leqq \mu(I) < +\infty$; ježto to platí pro každé konečné $q > 0$, je $\mu_e(A) = 0$.

Za druhé: Je-li $x \in B$, existují kladná racionální čísla $p < q$ tak, že $\underline{D}\, g(x) < p < q < \overline{D}\, g(x)$. Položíme-li tedy

$$B_{p,q} = \mathop{\mathcal{E}}_x(a < x < b, \underline{D}\, g(x) < p < q < \overline{D}\, g(x))\,,$$

je $B = \bigcup\limits_{p,q} B_{p,q}$ (sčítá se přes racionální p, q, $0 < p < q$). Stačí tedy dokázati, že $\mu(B_{p,q}) = 0$. Podle 1. a 2. pomocné věty je $p\, \mu_e(B_{p,q}) \geqq \geqq \mu_e(g(B_{p,q})) \geqq q\, \mu_e(B_{p,q})$. Ježto $p < q$, $0 \leqq \mu_e(B_{p,q}) \leqq b - a < +\infty$, plyne odtud $\mu_e(B_{p,q}) = 0$.

Věta 83. *Budiž f funkce konečná a neklesající v intervalu I. Potom f má skoro všude v I konečnou derivaci.*

Důkaz. Budiž a počáteční, b koncový bod $I(-\infty \leqq a < b \leqq \leqq +\infty)$. Zvolme čísla $\ldots < a_{-3} < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < < a_3 < \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{-n} = a$. V každém intervalu (a_n, a_{n+1}) je $f(a_n) \leqq f(x) \leqq f(a_{n+1})$, tedy f omezená. Intervaly (a_n, a_{n+1}) pokrývají vnitřek I až na spočetnou množinu bodů a_n. Stačí nyní, užijeme-li 3. pomocné věty na každý z intervalů (a_n, a_{n+1}).

Pojednáme nyní o funkcích s variací konečnou a o funkcích absolutně spojitých (zopakujte si **D II**, kap. V, § 9). Ježto každá funkce, mající v $\langle a, b\rangle$ variaci konečnou ($-\infty < a < b < +\infty$), je v $\langle a, b\rangle$ rozdílem dvou konečných neklesajících funkcí, plyne z věty 83 ihned

Věta 84. *Každá funkce, mající v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ konečnou variaci, má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci.*

Poznámka 5. Každá funkce, která je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, má v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci (**D II**, kap. V, § 9, pozn. 11) a tedy má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci.

Poznámka 6. Budiž f spojitá v $\langle a, b\rangle$; jestliže v každém bodě $x \in (a, b)$ je $f'(x) = 0$, je f konstantní v $\langle a, b\rangle$ (viz **D I**, věta 135). Jestliže však je $f'(x) = 0$ pouze pro *skoro* všechna $x \in (a, b)$, nemusí být f konstantní, jak ukazuje tento příklad: V **D II**, kap. V, § 9, cvič. 4 jsme sestrojili funkci f s těmito vlastnostmi: f je spojitá a neklesající v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, 1\rangle$, není tedy konstantní v $\langle 0, 1\rangle$. Ale f je konstantní v každém omezeném styčném intervalu Cantorova diskontinua a má tam tedy derivaci rovnou nule. Ježto Cantorovo diskontinuum má Lebesgueovu míru rovnou nule (kap. I, § 8, příkl. 1), je $f'(x) = 0$ skoro všude v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Je nyní velmi důležité, že takovéto poměry nemohou nastati u funkcí *absolutně* spojitých:

Věta 85. *Budiž f absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Budiž $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Potom f je konstantní v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Budiž $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$. Máme dokázati, že $f(\alpha) = f(\beta)$.

Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto f je absolutně spojitá v $\langle \alpha, \beta\rangle$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\left(\alpha \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_p < b_p \leqq \beta, \sum_{n=1}^{p} (b_n - a_n) < \delta\right) \Rightarrow \tag{27}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{p} |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon\,.$$

Budiž M množina oněch bodů $x \in (\alpha, \beta)$, pro něž $f'(x) = 0$; podle předpokladu je $\mu(M) = \beta - \alpha$. Je-li $x \in M$, potom pro všechna dosti malá $|h|$ je $|f(x + h) - f(x)| \leqq \varepsilon|h|$. Odtud je jasno, že systém všech intervalů $\langle x, x + h\rangle$, vyhovujících podmínkám

$$x \in M,\ x + h \in (\alpha, \beta),\ h > 0,\ |f(x + h) - f(x)| \leqq \varepsilon h\,,$$

pokrývá M ve smyslu Vitaliově. Podle věty 82 lze tedy z těchto intervalů vybrati konečný počet disjunktních intervalů (mysleme si je srovnány zleva doprava) $\langle x_p, x_p + h_p\rangle$ $(p = 1, \ldots, n)$ tak, že jest

$$(28)\quad \begin{aligned} &\alpha < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 < x_2 + h_2 < \ldots < x_n + h_n < \beta\,, \\ &\mu(M \dot{-} \bigcup_{p=1}^{n} \langle x_p, x_p + h_p\rangle) < \delta,\ |f(x_p + h_p) - f(x_p)| \leqq \varepsilon h_p\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne ihned

$$(29)\quad \begin{aligned} \beta - \alpha > \sum_{p=1}^{n} h_p = \mu(\bigcup_{p=1}^{n} \langle x_p, x_p + h_p\rangle) > \mu(M) - \delta = \\ = \beta - \alpha - \delta\,. \end{aligned}$$

Za druhé: Pišme pro zkrácení $y_p = x_p + h_p$, $y_0 = \alpha$, $x_{n+1} = \beta$, takže $\alpha = y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n < x_{n+1} = \beta$. Podle (28) jest

$$(30)\quad \sum_{p=1}^{n} |f(y_p) - f(x_p)| \leqq \varepsilon \sum_{p=1}^{n} h_p < \varepsilon(\beta - \alpha)\,;$$

podle (29) je pak zřejmě

$$(31)\quad \sum_{p=0}^{n} (x_{p+1} - y_p) = \beta - \alpha - \sum_{p=1}^{n} h_p < \delta\,,$$

takže (27) dává

$$(32)\quad \sum_{p=0}^{n} |f(x_{p+1}) - f(y_p)| < \varepsilon\,,$$

a tedy podle (30), (32)

$$\begin{aligned} |f(\beta) - f(\alpha)| = |(f(x_{n+1}) - f(y_n)) + (f(y_n) - f(x_n)) + \ldots + \\ + (f(x_1) - f(y_0))| < \varepsilon(\beta - \alpha) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ježto to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $f(\beta) - f(\alpha) = 0$.

Věta 86. *Buďte f, g absolutně spojité v $\langle a, b\rangle$. Budiž $f'(x) = g'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $f - g$ je konstantní v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Funkce $f - g$ je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ (viz **D II**, věta 95); skoro všude v $\langle a, b\rangle$ jsou $f'(x), g'(x)$ konečné (pozn. 5) a stejné, tedy $f - g$ má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ derivaci $f'(x) - g'(x) = 0$. A nyní se užije věty 85.

§ 3*. Měřitelnost horní a dolní derivace.* Tento paragraf nebudeme v dalším potřebovat.

Věta 87. *Budiž f konečná reálná funkce v intervalu $I \subset \mathsf{E}_1$. Potom funkce $\overline{D}f$, $\underline{D}f$ jsou měřitelné v I podle Lebesguea.* •

Poznámka 1. Zajímavé je, že funkce f může býti jakákoliv, i neměřitelná. Pro stručnost položme

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = Q(\beta, \alpha) .$$

Z geometrického významu tohoto výrazu je jasno (a snadno se dokáže aritmeticky), že pro $\alpha < \gamma < \beta$ je

$$\text{(33)} \qquad \operatorname{Min}\,(Q(\alpha, \gamma), Q(\gamma, \beta)) \leqq Q(\alpha, \beta) \leqq \operatorname{Max}\,(Q(\alpha, \gamma), Q(\gamma, \beta))$$

(těchto nerovností jsme užívali též v **D II**, kap. V, § 10).

Důkaz věty 87. Bez újmy obecnosti předpokládejme, že $I = (a, b)$ je otevřený interval ($a < b$). Zvolme libovolné $c \in \mathsf{E}_1$; máme dokázat měřitelnost množiny

$$\text{(34)} \qquad M = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(a < x < b, \overline{D}\, f(x) \geqq c) .$$

Pro každé přirozené číslo n nazvu interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ intervalem n-tého řádu, jestliže je

$$a < \alpha < \beta < b\,, \quad \beta - \alpha < \frac{1}{n}, \quad Q(\alpha, \beta) > c - \frac{1}{n} .$$

Budiž A_n sjednocení všech intervalů n-tého řádu. Je jasno, že $M \subset A_n$, ba dokonce že intervaly n-tého řádu pokrývají M ve smyslu Vitaliově (neboť je-li $x \in M$, existují čísla y libovolně blízká číslu x tak, že $Q(x, y) > c - \frac{1}{n}\Big)$. Tím je též dokázáno, že $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Budiž naopak $x \in \bigcap A_n$. Potom ke každému přirozenému n existuje $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle \subset (a, b)$ tak, že $\alpha_n \leqq x \leqq \beta_n$, $\beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$, $Q(\alpha_n, \beta_n) > c - \frac{1}{n}$; tedy je buďto $Q(x, \alpha_n) > c - \frac{1}{n}$ nebo $Q(x, \beta_n) > c - \frac{1}{n}$ (neboť buďto je $x = \beta_n$ nebo je $x = \alpha_n$ nebo je $\alpha_n < x < \beta_n$, a potom se dá užíti (33)); tedy je $\overline{D}\, f(x) \geqq c$, t. j. $x \in M$; tedy je též $\bigcap A_n \subset M$, tedy celkem

$$\text{(35)} \qquad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Budiž nyní n přirozené číslo. Podle Vitaliovy věty 81 existuje disjunktní posloupnost intervalů n-tého řádu, jejíž sjednocení — označme je B_n — pokrývá skoro celé M, t. j.

$$M \subset B_n \cup T_n\,, \quad \text{kde} \quad \mu(T_n) = 0\,. \tag{36}$$

B_n je ovšem měřitelná, $B_n \subset A_n$. Ježto (36) platí pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, je

$$M \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) \text{ a ovšem } M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\,,$$

takže $M = B \cup T$, kde $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, $T = M \,.\, \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Ovšem B je měřitelná, T nulová; tedy M je měřitelná.

§ 4. Lebesgueův integrál v $\mathbf{E}_r$. Znak μ značí v tomto paragrafu opět Lebesgueovu míru v $\mathbf{E}_r$. Jako v kap. I, § 10 zaveďme tato tři zobrazení prostoru $\mathbf{E}_r$ na $\mathbf{E}_r$:

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_r) = [x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}],\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_r) = [-x_1, x_2, \ldots, x_r]\,,$$
$$\varphi_3(x_1, \ldots, x_r) = [x_1 + a_1, \ldots, x_r + a_r]\,;$$

přitom $p_1, \ldots, p_r$ je jistá permutace čísel $1, 2, \ldots, r$; $a_1, \ldots, a_r$ jsou čísla z $\mathbf{E}_1$. Ve větě 30 a v následující poznámce 2 jsme dokázali: Je-li $M \subset \mathbf{E}_r$, je $\mu_e(M) = \mu_e(\varphi_i(M))$; množina M je měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li $\varphi_i(M)$ měřitelná ($i = 1$ nebo 2 nebo 3). Označíme-li ψ_i zobrazení inversní k φ_i, má ψ_i podobný tvar jako φ_i. Budiž nyní f nějaká funkce r reálných proměnných. Znakem f_i ($i = 1, 2, 3$) označíme funkci takto definovanou: Je-li M_1 oborem funkce f, budiž $\varphi_i(M_1)$ oborem funkce f_i, pro každé $x \in M_1$ budiž pak $f_i(\varphi_i(x)) = f(x)$; jinak řečeno: pro každé $y \in \varphi_i(M_1)$ budiž $f_i(y) = f(\psi_i(y))$.

Věta 88. *Funkce f_i ($i = 1$ nebo 2 nebo 3) je měřitelná v $\varphi_i(M)$ tehdy a jen tehdy, je-li f měřitelná v M.*

Důkaz. Měřitelnost funkce f v M značí: 1. M je měřitelná, 2. f je definována skoro všude v M, t. j. množina N oněch $x \in M$, pro něž $f(x)$ není definováno, má míru nulovou. 3. Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je množina $A = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) > c)$ měřitelná. Ale (podle věty 30): M je měřitelná tehdy a jen tehdy, když $\varphi_i(M)$ je měřitelná; rovnice $\mu(N) = 0$ znamená totéž jako $\mu(\varphi_i(N)) = 0$. A konečně: označíme-li $B = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \varphi_i(M), f_i(x) > c) = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \varphi_i(M), f(\psi_i(x)) > c)$, je zřejmě B množina všech bodů $\varphi_i(z)$, kde $z \in M$, $f(z) > c$, t. j. $B = \varphi_i(A)$, takže B je měřitelná tehdy a jen tehdy, když A je měřitelná.

Věta 89. *Symbol* $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$ *znamená* (pokud se existence i hodnoty týče) *totéž jako* $\int_{\varphi_i(M)} f(\psi_i(y))\,\mathrm{d}y$.[7])

Důkaz. Místo $f(\psi_i(y))$ lze psáti $f_i(y)$. Měřitelnost funkce f v M značí totéž jako měřitelnost funkce f_i v $\varphi_i(M)$ (věta 88). Nechť napřed $f(x)$ není nikde záporná v M; budiž N množina oněch $x \in M$, pro něž $f(x)$ není definováno. Každému rozkladu

$$(\mathfrak{M}):\quad M_1, M_2, \ldots, M_n$$

množiny M přiřaďme rozklad

$$(\mathfrak{M}_i):\quad \varphi_i(M_1), \varphi_i(M_2), \ldots, \varphi_i(M_n)$$

množiny $\varphi_i(M)$. Zřejmě

$$\inf_{x \in M_k - N} f(x) = \inf_{y \in \varphi_i(M_k) - \varphi_i(N)} f(\psi_i(y)) = \inf_{y \in \varphi_i(M_k) - \varphi_i(N)} f_i(y)\,.$$

Tedy: Dolní součet, příslušný funkci f a rozkladu $(\mathfrak{M})$, se rovná dolnímu součtu, příslušnému funkci f_i a rozkladu $(\mathfrak{M}_i)$. Přechodem k supremu dostáváme žádaný výsledek. Jestliže za druhé f nabývá též záporných hodnot, užijeme dokázaného výsledku na funkce f^+, f^-.

Poznámka 1. Položme $g(y) = f(\psi_i(y))$, t. j. $f(x) = g(\varphi_i(x))$. Potom větu 89 lze psáti v tomto snad názornějším tvaru: Jest

$$\int_M g(\varphi_i(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi_i(M)} g(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{37}$$

jakmile jeden z integrálů existuje. (Názorná pomůcka k zapamatování: probíhá-li x množinu M (viz integrál vlevo) a položím-li $\varphi_i(x) = y$, probíhá y množinu $\varphi_i(M)$ (viz integrál vpravo)).

Příklady. Následující rovnice platí, má-li některý z napsaných integrálů smysl:

---

[7]) Jen pro větší názornost píši jednou x, po druhé y.

$$(38)\quad \iint\limits_{\substack{0<x<1\\1<x+2y<3}} \frac{dx\,dy}{x^3+y} = \iint\limits_{\substack{0<y<1\\1<y+2x<3}} \frac{dx\,dy}{y^3+x} = \iint\limits_{\substack{0<-x<1\\1<-x+2y<3}} \frac{dx\,dy}{-x^3+y} =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0<x+2<1\\1<x+2+2(y-1)<3}} \frac{dx\,dy}{(x+2)^3+y-1}\,.$$

$$(39)\quad \int_a^b f(x+p)\,dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx\,.^{8})$$

$$(40)\quad \int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx\,.^{8})$$

Při posledním příkladu byste snadno mohli udělat chybu ve znamení:[9]) Integrační obor vlevo je (a, b); tomu odpovídá v druhém integrálu integrační obor $(-b, -a)$ (neboť $-b < -a$), tedy dolní mez $-b$, horní $-a$. Potom přejdu k třetímu integrálu záměnou mezí (podle úmluvy, učiněné v kap. III, § 7, pozn. 3). Poznamenejme, že ve větě 89 (a ovšem též v příkladech (38), (39), (40)) nejde o nic jiného, než o speciální případy t. zv. substituční methody, kterou se obecně budeme zabývat v kap. VI. Ostatně v E_1 už tuto methodu znáte z **J I**, kap. III, ovšem za předpokladů více omezujících (a pro Riemannovy integrály); na př. (39), (40) lze odvoditi též ihned z věty 55 v **J I**: Substituce $x + p = y$, $dx = dy$ dává $\int_a^b f(x+p)\,dx = \int_{a+p}^{b+p} f(y)\,dy$, substituce $-x = y$, $dx = -dy$ dává $\int_a^b f(-x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(y)\,dy$ — ovšem jen tehdy, je-li $f(y)$ spojitá v příslušném intervalu a jsou-li meze konečná čísla. Zde jsme obdrželi (39), (40) za obecnějších předpokladů.

Cvičení

1. Zaveďte zobrazení φ_4 (prostoru E_r na E_r) jako v kap. I, § 10, cvič. 1:

$$\varphi_4(x_1, \ldots, x_r) = [a_1x_1, \ldots, a_rx_r] \quad (0 < a_j < +\infty)\,.$$

[8]) Míněno je $a < b$; ale výsledek platí i pro $a > b$ (stačí zaměnit meze, t. j. změnit znamení na obou stranách).

[9]) Už jsem upozornil na toto nebezpečí v kap. III, § 7, pozn. 3.

Definujte ψ_4 jako zobrazení inversní k φ_4, $f_4(y) = f(\psi_4(y))$. Dokažte, že věty 88, 89 platí též pro φ_4, až na to, že nyní je

$$\int_{\varphi_4(M)} f(\psi_4(y))\,\mathrm{d}y = a_1 a_2 \ldots a_r \int_M f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Odtud odvoďte rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_A^B f(c + kt)\,\mathrm{d}t$$

$(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty,\ k \neq 0,\ k \in \mathbf{E}_1,\ c \in \mathbf{E}_1,\ A = \frac{1}{k}(a - c),\ B = \frac{1}{k}(b - c)$; rovnost platí, má-li jeden z obou integrálů smysl; pro $k < 0$ musíte užíti též úmluvy $\int_A^B = -\int_B^A$).

§ 5. Neurčitý integrál Lebesgueův v E_1. V celém tomto paragrafu jde o Lebesgueův integrál v $\mathbf{E}_1$. V znaku $\langle a, b\rangle$ je vždy $-\infty < a < b < +\infty$, pokud není jinak poznamenáno. Jestliže konverguje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. je-li $f \in \mathbf{L}(a, b)$,[10]) konverguje též $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$[11]) pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ (věta 42). Každou funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \quad (\text{pro } a \leqq x \leqq b)\,, \tag{41}$$

kde $C \in \mathbf{E}_1$ je konstanta, $f \in \mathbf{L}(a, b)$, nazývejme *neurčitým* (Lebesgueovým) *integrálem funkce f v $\langle a, b\rangle$*. Funkci F budeme krátce nazývati *neurčitým integrálem v $\langle a, b\rangle$*, jestliže F je v $\langle a, b\rangle$ neurčitým integrálem některé funkce.

Poznámka 1. Je-li F v intervalu $\langle a, b\rangle$ neurčitým integrálem funkce f, dostáváme z (41) $F(a) = C$ (dosazením $x = a$) a potom dosazením $x = b$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)\,. \tag{42}$$

[10]) Jestliže v definici 11 do symbolu $\mathbf{L}(M)$ za M dosadím (a, b) nebo $\langle a, b\rangle$ atd., dostanu symbol $\mathbf{L}((a, b))$, $\mathbf{L}(\langle a, b\rangle)$ atd. Ježto u Lebesgueova integrálu je jedno, který z intervalů (a, b), $\langle a, b\rangle$ a pod. vezmu, vynechávám vnitřní závorku a píši $\mathbf{L}(a, b)$.

[11]) „Integrační proměnnou" značím t, aby se nepletla s horní mezí x.

Poznámka 2. Také pro komplexní funkci $f \in \mathbf{L}(a, b)$ definujeme neurčitý integrál rovnicí (41), při čemž připouštíme ovšem i komplexní hodnoty C ($C \in \mathbf{K}_1$). Ježto speciálně reálná funkce f je také komplexní funkcí, vzniká při reálném f jakási nejistota (mám připouštěti všechna komplexní C nebo jen reálná?). Ale není zde nebezpečí nedorozumění, takže nebudeme zaváděti zvláštní název (třeba „komplexně neurčitý integrál" nebo pod.). Viz obdobně **J I**, kap. X, § 1.

Předmětem tohoto paragrafu jsou tyto dva problémy:

1. Kdy je daná funkce F neurčitým integrálem v $\langle a, b \rangle$?

2. Dány jsou dvě funkce F, f. Kdy je F neurčitým integrálem funkce f v $\langle a, b \rangle$?

Odpověď bude shrnuta v pozn. 6.

Věta 90. *Budiž f konečná a neklesající v $\langle a, b \rangle$. Potom je*

$$0 \leqq \int_a^b f'(x)\,dx \leqq f(b) - f(a)\,; \tag{43}$$

tedy je $f' \in \mathbf{L}(a, b)$.

Ježto každá funkce s variací konečnou je rozdílem dvou konečných neklesajících funkcí (**D II**, věta 92), plyne odtud ihned:

Věta 91. *Má-li f v $\langle a, b \rangle$ variaci konečnou (speciálně: je-li f absolutně spojitá), je $f' \in \mathbf{L}(a, b)$.*

Důkazu předešleme několik triviálních poznámek.

Poznámka 3. Každá funkce monotonní v intervalu I je měřitelná v I, neboť množina $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in I,\ f(x) > c)$ je interval.

Poznámka 4. Budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Potom funkce $g(x) = f(x + c)$ je měřitelná v intervalu $\langle a, b \rangle$ tehdy a jen tehdy, je-li $f(x)$ měřitelná v $\langle a + c, b + c \rangle$ (viz větu 88 a 89), načež symbol $\int_a^b f(x + c)\,dx$ má týž smysl (pokud se existence i hodnoty týče) jako symbol $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$.

Poznámka 5. Budiž F funkce definovaná v $\langle a, b \rangle$, která je tam konečná a měřitelná. Nechť skoro všude v $\langle a, b \rangle$ existuje $F'(x)$. Potom F' je funkce měřitelná v $\langle a, b \rangle$. Důkaz: Položím-li $F(x) =$

$= F(b)$ pro $b < x \leqq b + 1$, je $F'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right)$ ve všech bodech $x \in (a, b)$, v nichž $F'(x)$ existuje; a za znamením limitním stojí pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ funkce měřitelná v $\langle a, b\rangle$. Tento výsledek je ovšem také důsledkem daleko obecnější věty 87.

D ů k a z v ě t y 90. Doplňme definici funkce f, kladouce $f(x) = f(b)$ pro $b < x \leqq b + 1$. Tedy f je neklesající a omezená ($f(a) \leqq f(x) \leqq \leqq f(b)$) v $\langle a, b + 1\rangle$. Skoro všude v (a, b) existuje (věta 83) konečná derivace

$$0 \leqq f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right). \tag{44}$$

Za znamením limitním stojí (pro každé přirozené n) funkce nezáporná, měřitelná (pozn. 3) a omezená v $\langle a, b\rangle$, takže následující integrál konverguje (při jeho úpravě viz pozn. 4)

$$\int_a^b n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \mathrm{d}x = n\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x - n\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqq$$

$$\leqq n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,\mathrm{d}x\right) = f(b) - f(a).$$

Podle (44) je f' měřitelná; podle Fatouova lemmatu (viz větu 63 nebo pozn. 9 v kap. III, § 4) je tedy

$$0 \leqq \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqq \sup_{n=1,2,\ldots} \int_a^b n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \mathrm{d}x \leqq f(b) - f(a).$$

Věta 92. *Nechť funkce F je neurčitým integrálem v $\langle a, b\rangle$. Potom F je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Nechť platí (41), kde $f \in \mathbf{L}(a, b)$; pro $a \leqq x < y \leqq b$ je

$$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)\,dt| \leqq \int_x^y |f(t)|\,dt\,. \tag{45}$$

Podle věty 51 existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, že z nerovností $a \leqq x_1 < y_1 \leqq x_2 < y_2 \leqq \ldots \leqq x_n < y_n \leqq b$, $\sum_{p=1}^{n} (y_p - x_p) < \delta$ plyne $\sum_{p=1}^{n} \int_{x_p}^{y_p} |f(t)|\,dt < \varepsilon$ a tedy podle (45) též $\sum_{p=1}^{n} |F(y_p) - F(x_p)| < \varepsilon$.

Věta 93. *Budiž $f \in \mathbf{L}(a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,. \tag{46}$$

Potom skoro všude v $\langle a, b\rangle$ je $F'(x) = f(x)$.

Důkaz. Víme, že konečná F' existuje skoro všude (F je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ podle věty 92, načež viz větu 84). Budiž

$$\begin{aligned} M &= \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in (a, b), F'(x) > f(x))\,, \\ N &= \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in (a, b), F'(x) < f(x))\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Stačí dokázati, že $\mu(M) = \mu(N) = 0$. Je-li $x \in M$, existují racionální čísla p, q tak, že $f(x) < p < q < F'(x)$. Položíme-li tedy (pro racionální $p < q$)

$$M_{p,q} = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in (a, b), f(x) < p < q < F'(x))\,, \tag{48}$$

je $M = \bigcup_{p,q} M_{p,q}$ (sčítá se přes racionální p, q, pro něž $p < q$). Dokážeme, že $\mu(M_{p,q}) = 0$ pro $p < q$; tím bude dokázáno, že

$$\mu(M) = 0\,. \tag{49}$$

Budiž tedy $p < q$. Množina $M_{p,q} \subset (a, b)$ je zřejmě měřitelná (pozn. 5) a podle (48) je

$$\int_{M_{p,q}} f(t)\,dt \leqq p\,\mu(M_{p,q})\,. \tag{50}$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 51 existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(A \subset (a, b), \mu(A) < \delta) \Rightarrow \int_A |f(t)|\,dt < \varepsilon\,. \tag{51}$$

Můžeme přitom zvolit $\delta < \varepsilon$.

Zvolme otevřenou množinu G tak, že

$$M_{p,q} \subset G \subset (a, b)\,, \quad \mu(G \dot{-} M_{p,q}) < \delta\,. \tag{52}$$

Pro každé $x \in M_{p,q}$ platí toto: je-li $h > 0$ dostatečně malé, je

$$\langle x, x + h\rangle \subset G\,, \quad \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x + h) - F(x) > qh$$

(podle (48)). Všechny tyto intervaly $\langle x, x + h\rangle$ pokrývají zřejmě $M_{p,q}$ ve smyslu Vitaliově. Podle věty 81 existuje tedy disjunktní posloupnost intervalů $\langle x_n, x_n + h_n\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, že

$$\begin{gathered} h_n > 0,\ \langle x_n, x_n + h_n\rangle \subset G,\ \int_{x_n}^{x_n+h_n} f(t)\,\mathrm{d}t > qh_n\,, \\ \mu(M_{p,q} \dot{-} P) = 0\,, \end{gathered} \tag{53}$$

kde klademe $P = \bigcup\limits_n \langle x_n, x_n + h_n\rangle$, takže podle (52), (53) je

$$P \subset G,\ \int_P f(t)\,\mathrm{d}t \geqq q\mu(P),\ \mu(P \dot{-} M_{p,q}) < \delta\,. \tag{54}$$

Je tedy především (věta 12) podle (53), (54)

$$|\mu(P) - \mu(M_{p,q})| \leqq \mu(\Delta(P, M_{p,q})) < \delta < \varepsilon\,. \tag{55}$$

Disjunktní rozklady $M_{p,q} \cup (P \dot{-} M_{p,q}) = P \cup (M_{p,q} \dot{-} P)$ dávají dále podle (50), (53), (54), (51), (54), (55)

$$\begin{gathered} p\mu(M_{p,q}) \geqq \int_{M_{p,q}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_P + \int_{M_{p,q} \dot{-} P} - \int_{P \dot{-} M_{p,q}} > \int_P f(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon \geqq \\ \geqq q\mu(P) - \varepsilon \geqq q\mu(M_{p,q}) - |q|\varepsilon - \varepsilon\,, \end{gathered}$$

a to pro každé $\varepsilon > 0$; tedy $p\mu(M_{p,q}) \geqq q\mu(M_{p,q})$. Ježto $p < q$, $0 \leqq \mu(M_{p,q}) \leqq (b - a) < +\infty$, plyne odtud $\mu(M_{p,q}) = 0$. Tedy platí (49). Použijeme-li tohoto výsledku na funkce $g(x) = -f(x)$, $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = -F(x)$, dostaneme ihned, že také $\mu(N) = 0$.

Věta 94. *Každá funkce absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ je v $\langle a, b\rangle$ neurčitým integrálem své derivace.*

Důkaz. Nechť F je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$; tedy existuje konečná $F'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$ (věta 84) a je $F' \in \mathbf{L}(a, b)$ (věta 91). Položme

$G(x) = \int_a^x F'(t)\,dt$. Podle věty 93 je $G'(x) = F'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Ježto také G je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ (věta 92), je podle věty 86 $F - G$ konstantní v $\langle a, b\rangle$, t. j.

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + C \text{ pro } a \leqq x \leqq b\,,$$

kde C je jistá konstanta.

Poznámka 6. Věty tohoto paragrafu dávají velmi úplnou odpověď na otázky položené na jeho počátku. Shrňme tyto výsledky.

I. Kdy je funkce F neurčitým integrálem v $\langle a, b\rangle$? Tehdy a jen tehdy, je-li F absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$. Důkaz: věty 94, 92.

II. Buďte dány funkce F, f. Kdy je F neurčitým integrálem funkce f v $\langle a, b\rangle$? T. j. kdy platí (pro vhodnou konstantu C) vzorec (41)? Tehdy a jen tehdy, je-li F absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je-li $F'(x) = f(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Důkaz: Platí-li (41), je F absolutně spojitá (věta 92) a skoro všude je $F' = f$ (věta 93). Jestliže naopak je F absolutně spojitá a $F' = f$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, je podle věty 94 funkce F neurčitým integrálem funkce F' a tedy též neurčitým integrálem ekvivalentní funkce f.

III. Kdy je $f \in \mathbf{L}(a, b)$? Tehdy a jen tehdy, je-li f skoro všude v $\langle a, b\rangle$ rovna derivaci jisté funkce, jež je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$. To plyne ihned z II.[12])

IV. Z (41) je vidět: neurčitý integrál F je až na aditivní konstantu určen jednoznačně „integrandem" f. Naopak, z věty 93 je patrno, že integrand f je funkcí F určen až na ekvivalenci (neboť $f \sim F'$ v $\langle a, b\rangle$).

Ještě jednu otázku si položíme. Nechť $f \in \mathbf{L}(a, b)$; položme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ pro } a \leqq x \leqq b\,. \tag{56}$$

Víme, že *skoro* všude v $\langle a, b\rangle$ je $F'(x) = f(x)$. Ale v *kterých* bodech to platí? Částečnou odpověď na tuto otázku dávají věty 95, 96.

[12]) Podle věty 91 stačí dokonce, aby f byla skoro všude v $\langle a, b\rangle$ rovna derivaci jisté funkce s variací konečnou: potom je $f \in \mathbf{L}(a, b)$.

Věta 95. *Budiž $f \in \mathbf{L}(a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. F budiž definováno vzorcem* (56).

1. Je-li $x \in \langle a, b)$ a je-li f spojitá zprava v bodě x, je $F'_+(x) = f(x)$ (F'_+, F'_- značí derivaci zprava a zleva).

2. Je-li $x \in (a, b\rangle$ a je-li f spojitá zleva v bodě x, je $F'_-(x) = f(x)$.

Důkaz. Jde o limitu výrazu

$$(57) \qquad \varphi(h) = \frac{1}{h}\,(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Proveďme důkaz na př. pro tvrzení 2 (téměř doslovně jako v **J I**, věta 35). Budiž tedy f spojitá zleva v bodě $x \in (a, b\rangle$.

α) Je-li $f(x) = +\infty$, existuje ke každému $A \in (0, +\infty)$ číslo $\delta \in (0, x - a)$ tak, že $x - \delta < t < x \Rightarrow f(t) \geqq A$. Pro $0 > h > -\delta$ je potom podle (57) $\varphi(h) \geqq \dfrac{1}{-h}\displaystyle\int_{x+h}^{x} A\,\mathrm{d}t = A$. Tedy $F'_-(x) = +\infty$. Podobně pro $f(x) = -\infty$.

β) Je-li $f(x)$ konečné, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta \in (0, x - a)$ tak, že $x - \delta < t < x \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$. Pro $0 > h > -\delta$ je potom

$$\varphi(h) \geqq \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} (f(x) - \varepsilon)\,\mathrm{d}t = f(x) - \varepsilon\,,$$

$$\varphi(h) \leqq \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} (f(x) + \varepsilon)\,\mathrm{d}t = f(x) + \varepsilon\,,$$

tedy $F'_-(x) = f(x)$.

Poznámka 7. Je-li $f \in \mathbf{L}(a, b)$, nemusí být f spojitá v žádném bodě (na př. $f(x) = 0$ pro racionální x, $f(x) = 1$ pro iracionální x). Potom ovšem věta 95 neříká nic. Proto odvodíme ještě další větu o rovnici $F' = f$. Napřed zavedeme tento pojem:

Definice 14. *Budiž $f \in \mathsf{L}(a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Bod $x \in (a, b)$ nazveme lebesgueovským bodem* (funkce f), *jestliže*

$$(58) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt = 0\,.\text{[13]}$$

Věta 96. *Je-li x lebesgueovským bodem funkce f, má neurčitý integrál* (56) *v bodě x derivaci $f(x)$.*

Důkaz.

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \right|,$$

a zde pravá a tedy i levá strana má pro $h \to 0$ limitu 0.

Na rozdíl od věty 95 (viz pozn. 7) týká se věta 96 skoro všech bodů v (a, b). Neboť platí toto:

Věta 97. *Budiž $f \in \mathsf{L}(a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Potom skoro všechny body intervalu (a, b) jsou lebesgueovskými body funkce f.*

Důkaz. Budiž r libovolné racionální číslo. Jest $f(t) - r \in \mathsf{L}(a, b)$, tedy $|f(t) - r| \in \mathsf{L}(a, b)$. Podle věty 93 je tedy

$$(59) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\, dt = |f(x) - r| < +\infty$$

skoro všude v (a, b). Budiž M_r množina těch $x \in (a, b)$, pro něž neplatí (59); tedy $\mu(M_r) = 0$. Budiž $M = \bigcup_r M_r$ (sčítá se přes všechna racionální r); tedy i $\mu(M) = 0$. Budiž $x \in (a, b) \dot{-} M$, tedy $|f(x)| < +\infty$ (viz (59)). Budiž dále $\varepsilon > 0$. Zvolme racionální r tak, že $|f(x) - r| < \varepsilon$.

[13]) Je-li tedy x lebesgueovský bod, je $f(x)$ konečné číslo, neboť jinak by integrál v (58) nemohl míti konečnou hodnotu.

[14]) Znamení absolutní hodnoty „venku" je ostatně zbytečné (i pro $h < 0$) — proč? (viz pozn. 3 v kap. III, § 7).

Tedy $|f(t) - f(x)| \leqq |f(t) - r| + |r - f(x)|$, pokud $f(t)$ je definováno. Odtud

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right| \leqq \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - r|\mathrm{d}t\right| + \varepsilon\,.^{14})$$

Ježto $x \in (a, b) \dot{-} M_r$, platí (59) a tedy existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |h| < \delta$ je

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - r|\,\mathrm{d}t < |f(x) - r| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

a tedy

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right| < 3\varepsilon\,.$$

Tedy platí (58), t. j. každý bod $x \in (a, b) \dot{-} M$ je lebesgueovský.

Poznámka 8. Připojme ještě jednu triviální poznámku, týkající se omezených i neomezených intervalů.

Nechť $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$ a nechť $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existuje. Potom je

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

To plyne na př. ihned z věty 49 (zvolím-li libovolnou posloupnost $x_1 < x_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, je podle věty 49 $\int_a^b = \lim \int_a^{x_n}$). Jestliže $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dokonce konverguje, je mimo to

$$\lim_{x\to b-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a+} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(neboť $\int_x^b = \int_a^b - \int_a^x$ atd.). V případě $b = +\infty$ čti ovšem $x \to +\infty$ místo $x \to b-$; podobně pro $a = -\infty$.

§ 6. Integrace per partes a druhá věta o střední hodnotě. Věta 98. (Integrace per partes.) *Budiž* $-\infty < a < b < +\infty$; *buďte* f, g *absolutně spojité v* $\langle a, b\rangle$. *Potom je*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{60}$$

Poznámka 1. Funkce f, g mohou být i komplexní; komplexní funkce se nazývá absolutně spojitou (zkratka a. s.) v $\langle a, b\rangle$, je-li reálná i imaginární část a. s. v $\langle a, b\rangle$. Při důkazu si myslete f, g komplexní, abyste si ušetřili dodatečný mechanický výpočet. Klademe ovšem $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Věta platí za obdobných předpokladů i pro $-\infty < b < a < +\infty$ (stačí vyměnit meze).

Důkaz. Součin fg je a. s. a má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci $\varphi = fg' + f'g$. Tedy je fg v $\langle a, b\rangle$ neurčitým integrálem funkce φ (věta 94) a podle (42) je

$$f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) = \int_a^b (fg' + f'g)\, \mathrm{d}x\,. \tag{61}$$

Ale f je omezená a měřitelná v $\langle a, b\rangle$, $g' \in \mathbf{L}(a, b)$ (viz větu 91), tedy i $fg' \in \mathbf{L}(a, b)$ (věta 55) a podobně $f'g \in \mathbf{L}(a, b)$, takže pravá strana v (61) je $\int_a^b fg'\, \mathrm{d}x + \int_a^b f'g\, \mathrm{d}x$; z (61) tedy plyne (60).

Poznámka 2. Větu 98 lze vysloviti také takto: Budiž $-\infty < a < b < +\infty$, f absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, $\gamma \in \mathbf{L}(a, b)$. Budiž $c \in \mathbf{K}$, $g(x) = \int_a^x \gamma(t)\, \mathrm{d}t + c$. Potom je

$$\int_a^b f(x)\, \gamma(x)\, \mathrm{d}x = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{62}$$

Důkaz: g je a. s. v $\langle a, b\rangle$, takže platí (60). Ale skoro všude v $\langle a, b\rangle$ je $g' = \gamma$, takže (60) lze psáti ve tvaru (62).

Věta 99. *Budiž* $-\infty < a < b < +\infty$, n *přirozené číslo. Nechť funkce* f, g *mají v* $\langle a, b\rangle$ *absolutně spojitou derivaci řádu* $n - 1$ (*píši ovšem* $f^{(0)} = f$). *Potom*

$$\int_a^b f(x)\, g^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, [f^{(k)}(x)\, g^{(n-k-1)}(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{63}$$

Důkaz indukcí. Pro $n = 1$ je to věta 98. Budiž věta správná pro jisté $n \geqq 1$; nechť $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ jsou a. s. Potom

$$\int_a^b fg^{(n+1)}\,dx = [fg^{(n)}]_a^b - \int_a^b f'g^{(n)}\,dx\,.$$

Jestliže integrál vpravo vyjádřím pomocí (63), kde místo f píši f', dostanu ihned vzorec (63), pouze s hodnotou $n + 1$ místo n.

Jako speciální případ vezměme následující větu; je to Taylorova formule s jinou formou zbytku než v **D I**, věta 153. Závažné je, že tato forma zbytku platí i pro **komplexní** funkci f.

Věta 100. *Budiž $a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$, $a \neq b$, $n \geqq 0$, n celé. Nechť f má absolutně spojitou derivaci n-tého řádu v $\langle a, b\rangle$ (po příp. v $\langle b, a\rangle$, jestliže $b < a$). Potom je*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_{n+1}\,, \tag{64}$$

kde

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx = \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a + t(b-a))(1-t)^n\,dt\,. \end{aligned} \tag{65}$$

Důkaz. $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx$. Položme $g(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(b-x)^n$, takže $g^{(n)}(x) = 1$ a pro $0 \leqq k < n$ je $g^k(b) = 0$, $g^{(k)}(a) = \dfrac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\,.$ $.\,(b-a)^{n-k}$. Použijme nyní vzorce (63), v němž píšeme f' místo f (vzorec platí ovšem i pro $b > a$ -- stačí vyměnit meze). Vychází

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,g^{(n)}(x)\,dx =$$

$$= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(a)\,\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)\,(b-x)^n\,dx\,.$$

Substituce $x = a + t(b - a)$ dává druhou formu zbytku; že lze tuto substituci provésti (způsobem obvyklým z **J I**), najdete v kap. VII, § 1, pozn. 2. Ostatně ten, kdo počítal cvič. 1, 2 k § 4, to již zná.

Věta 101. (2. věta o střední hodnotě.) *Budiž f reálná, $f \in \mathbf{L}(a, b)$, budiž g monotonní a konečná v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx\,. \tag{66}$$

Důkaz. Předpokládejme bez újmy obecnosti, že g je neklesající (a ovšem omezená, ježto $g(a) \leqq g(x) \leqq g(b)$) v $\langle a, b\rangle$.

I. Budiž předně g absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$; položme $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Integrace per partes dává

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = F(b)\, g(b) - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx\,. \tag{67}$$

Ale $g'(x) \geqq 0$ skoro všude a F je spojitá; podle 1. věty o střední hodnotě (věta 66 a pozn. 13 k této větě) existuje tedy $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx = F(\xi) \int_a^b g'(x)\, dx = F(\xi)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Tedy podle (67)

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(b) \int_a^b f(x)\, dx - (g(b) - g(a)) \int_a^\xi f(x)\, dx\,.$$

A to se ihned převede na tvar (66).

II. Budiž g libovolná neklesající. Znakem g_n označme funkci takto definovanou: položme $x_{j,n} = \dfrac{j}{n}\,(b - a) + a$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$; dále položme $g_n(x_{j,n}) = g(x_{j,n})$ pro $j = 0, 1, \ldots, n$ a v každém z intervalů $\langle x_{j-1,n}, x_{j,n}\rangle$ $(j = 1, \ldots, n)$ budiž g_n lineární (načrtněte!). Zřejmě g_n je a. s.[15]) a neklesající, a tedy podle bodu I je (ježto $g_n(a) = g(a)$, $g_n(b) = g(b)$)

$$\int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi_n} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi_n}^b f(x)\, dx\,, \tag{68}$$

[15]) V $\langle a, b\rangle$. Je totiž absolutně spojitá v každém intervalu $\langle x_{j-1,n}, x_{j,n}\rangle$ a tedy i v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ (**D II**, kap. V, § 9, pozn. 13).

kde $a \leqq \xi_n \leqq b$. Tvrdím, že $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ v každém bodě intervalu (a, b), v němž g je spojitá, a tedy skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Důkaz: Budiž g spojitá v bodě x_0 $(a < x_0 < b)$; budiž $\varepsilon > 0$. Pro dosti velká n, řekněme pro $n > n_0$, platí implikace $|x - x_0| \leqq \frac{b-a}{n} \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Budiž $n > n_0$; existuje j tak, že $x_{j,n} \leqq x_0 < x_{j+1,n}$ a ovšem $x_0 - \frac{b-a}{n} \leqq x_{j,n}$, $x_0 + \frac{b-a}{n} \geqq x_{j+1,n}$. Ježto $g_n(x_{i,n}) = g(x_{i,n})$, dostáváme

$$g_n(x_0) \leqq g_n(x_{j+1,n}) = g(x_{j+1,n}) < g(x_0) + \varepsilon\,,$$
$$g_n(x_0) \geqq g_n(x_{j,n}) \quad = g(x_{j,n}) \quad > g(x_0) - \varepsilon\,.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0)$. To platí skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Dále: pro $x \in \langle a, b\rangle$ a pro všechna n je $g(a) \leqq g_n(x) \leqq g(b)$; tedy $|f(x)\, g_n(x)| \leqq |f(x)|\,.\, \mathrm{Max}\,(|g(a)|, |g(b)|)$. Podle věty 65 plyne tedy z (68)

$$(69) \qquad \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(g(a) \int_a^{\xi_n} f(x)\, \mathrm{d}x + g(b) \int_{\xi_n}^b f(x)\, \mathrm{d}x\right).$$

Posloupnost $\xi_1, \xi_2, \ldots$ je omezená a obsahuje tedy vybranou konvergentní posloupnost: $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k} = \xi$. Jestliže v (69) vezmu vpravo limitu vybrané posloupnosti (pro $n = n_1, n_2, n_3, \ldots$), dostanu (66).

Poznámka 3. Je-li na př. g nerostoucí a změníme-li hodnoty $g(a)$, $g(b)$ tak, že $g(a)$ nahradíme jakýmkoliv konečným číslem $A \geqq \lim\limits_{x\to a+} g(x)$ a hodnotu $g(b)$ jakýmkoliv konečným číslem $B \leqq \lim\limits_{x\to b-} g(x)$, zůstane g funkcí nerostoucí v $\langle a, b\rangle$, takže lze opět užíti vzorce (66); přitom levá strana se nezmění (změnili jsme jen dvě hodnoty funkce g), takže dostáváme

$$(70) \qquad \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = A \int_a^{\xi'} f(x)\, \mathrm{d}x + B \int_{\xi'}^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

(číslo $\xi' \in \langle a, b\rangle$ ovšem může být jiné než ξ v (66)). Podrobněji o takových věcech a o významu 2. věty o střední hodnotě viz **J I**, kap. X, § 3; v této knize také ještě často této věty použijeme. Připomínám důrazně, že předpoklad o realitě funkce f je podstatný.

Poznámka 4. Připomínám aspoň jeden případ rovnice (70), uvedený také v **J I**, kterého se často užívá. Je-li g *nezáporná a nerostoucí* v $\langle a, b\rangle$, můžeme v (70) klásti $A = g(a)$, $B = 0$ a dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a \leqq \xi \leqq b)\,. \tag{71}$$