KAPITOLA III

ZÁKLADY THEORIE LEBESGUE-STIELTJESOVA INTEGRÁLU

Všechny funkce v této kapitole až do § 5 včetně jsou reálné.

§ 1. Definice a nejjednodušší vlastnosti. Poznámka 1. Budiž $A \subset \mathsf{E}_1^*$, $B \subset \mathsf{E}_1^*$, $S_1 = \sup A = \sup\limits_{a \in A} a$, $S_2 = \sup\limits_{b \in B} b$. Nechť pro každé $a \in A$, $b \in B$ má $a + b$ smysl; položme $S = \sup\limits_{a \in A,\, b \in B} (a + b)$. Potom je

$$S = S_1 + S_2 \,, \tag{1}$$

má-li pravá strana smysl; podobně pro infimum. Důkaz. Pro $a \in A$, $b \in B$ je $a + b \leqq S_1 + S_2$, tedy $S \leqq S_1 + S_2$. Předpokládejme, že $S < S_1 + S_2$. Je zřejmo, že potom existují konečná čísla T_1, T_2 tak, že $T_1 < S_1$, $T_2 < S_2$, $T_1 + T_2 > S$. Tedy existují $a \in A$, $b \in B$ tak, že $a > T_1$, $b > T_2$, tedy $a + b > T_1 + T_2 > S$, což není možno. Tedy není $S < S_1 + S_2$, tedy platí (1).

Poznámka 2. Pro každé $a \in \mathsf{E}_1^*$ položme

$$a^+ = \operatorname{Max}(a, 0) = \begin{cases} = a = |a| \text{ pro } a \geqq 0 \\ = 0 \text{ pro } a \leqq 0\,; \end{cases}$$

$$a^- = \operatorname{Max}(-a, 0) = \begin{cases} = 0 \text{ pro } a \geqq 0 \\ = -a = |a| \text{ pro } a \leqq 0\,. \end{cases}$$

Aspoň jedno z čísel a^+, a^- je vždy rovno nule;[1]) vždy je $a^+ \geqq 0$, $a^- \geqq 0$. Zřejmě

$$|a| = a^+ + a^-\,; \quad a = a^+ - a^-\,; \quad (-a)^+ = a^-\,; \quad (-a)^- = a^+\,.$$

I. Má-li $a + b$ smysl, je

$$(a + b)^+ \leqq a^+ + b^+\,, \quad (a + b)^- \leqq a^- + b^-\,. \tag{2}$$

Důkaz. $a + b \leqq a^+ + b^+$, $0 \leqq a^+ + b^+$; tedy $\operatorname{Max}(a + b, 0) \leqq$ $\leqq a^+ + b^+$. Druhou nerovnost dostaneme změnou znamení u a, b.

[1]) Říkáme, že a^+ je kladná, a^- záporná část čísla a (vhodněji snad nezáporná, nekladná).

II. Má-li $a - b$ smysl, je

$$|a^+ - b^+| \leqq |a - b|\,, \quad |a^- - b^-| \leqq |a - b|\,. \tag{3}$$

Důkaz. Zase stačí dokázat první nerovnost. Je-li a nebo b nekonečné, je nerovnost splněna.[2]) Jsou-li a, b konečná, je podle I: $b^+ \leqq \leqq a^+ + (b - a)^+ \leqq a^+ + |b - a|$, tedy $b^+ - a^+ \leqq |a - b|$ a podobně $a^+ - b^+ \leqq |a - b|$.

Poznámka 3. Podobného symbolu budeme používati, jde-li o reálnou funkci f v oboru M. Definujeme pak f^+ jakožto funkci v oboru M a to tak, že pro každé $x \in M$ je $f^+(x) = (f(x))^+ = \text{Max}\,(f(x), 0)$, a podobně definujeme f^- rovnicí $f^-(x) = (f(x))^- = \text{Max}\,(-f(x), 0)$. Funkce f je μ-měřitelná v množině M tehdy a jen tehdy, jsou-li f^+, f^- μ-měřitelné v M. Důkaz. Je-li f měřitelná, uvažme, že $f^+ = \text{Max}\,(f, 0)$, $f^- = \text{Max}\,(-f, 0)$. Jsou-li f^+, f^- měřitelné, uvažme, že $f = f^+ - f^-$.

Poznámka 4. Ve všech úvahách této kapitoly je písmenem μ označena jistá funkce s vlastností $\mathbf{S}_r$ (tedy „míra" ve smyslu kap. I, § 8). Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná; budiž f reálná funkce, definovaná skoro všude v M; budiž N množina oněch $x \in M$, pro něž $f(x)$ není definováno. Budiž

$$(\mathfrak{M}): \quad M_1, M_2, \ldots, M_n$$

disjunktní konečný systém měřitelných množin, $M = M_1 \cup \cup \ldots \cup M_n$; budeme krátce říkati, že $\mathfrak{M}$ je „rozklad množiny M".[3]) Položme

$$s_{f,M}(\mathfrak{M}) = s(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \mu(M_i)\,, \tag{4}$$

$$S_{f,M}(\mathfrak{M}) = S(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{n} V_i\, \mu(M_i)\,, \tag{5}$$

kde

$$v_i = \inf_{x \in M_i - N} f(x)\,, \quad V_i = \sup_{x \in M_i - N} f(x)\,. \tag{6}$$

(4), (5) je t. zv. dolní a horní součet, příslušný k rozkladu $\mathfrak{M}$ (a k funkci f a k množině M). Podotkněme ihned, že součty (4), (5) nemusí míti

---

[2]) Ježto $a - b$ má smysl, není $a^+ = b^+ = +\infty$, takže levá strana má smysl.
[3]) Obšírněji: konečný měřitelný rozklad množiny M.

vždy smysl.[4]) Dále, že pro $\mu(M_i) = 0$ je $v_i\,\mu(M_i) = V_i\,\mu(M_i) = 0$ (pamatujme na pravidlo $0 \,.\, (\pm\,\infty) = (\pm\,\infty) \,.\, 0 = 0$). Konečně je zřejmo, že $s(\mathfrak{M}) \leqq S(\mathfrak{M})$, mají-li obě strany smysl. Zřejmá je analogie s dolními a horními součty při Riemannově definici integrálu (**J I**, kap. II).

Ale okolnost, že může býti $v_i = \pm\,\infty$, $V_i = \pm\,\infty$, $\mu(M_i) = +\,\infty$, nás nutí k jisté opatrnosti. Nejsnáze snad se vyhneme obtížím touto definicí:

Definice 10. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ μ-měřitelná, budiž f μ-měřitelná v M a reálná.*

I. Jestliže pro žádné $x \in M$ není $f(x) < 0$, definujeme

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu \tag{7}$$

jako supremum všech dolních součtů $s(\mathfrak{M})$ (pro všechny rozklady $\mathfrak{M}$), popsaných v pozn. 4.

II. V obecném případě pišme $f = f^+ - f^-$ a klaďme

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu = \int_M f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_M f^-\,\mathrm{d}\mu\,, \tag{8}$$

kde integrály vpravo jsou vzaty ve smyslu bodu I, má-li tento rozdíl smysl; nemá-li rozdíl v (8) *vpravo smysl, říkáme, že $\int_M f\,\mathrm{d}\mu$ neexistuje* (nebo že nemá smyslu; podobně místo „existuje" říkáme často „má smysl").

Název: *Integrál* (funkce f přes množinu M při míře μ) — *obšírněji Lebesgue-Stieltjesův integrál.*

Poznámka 5. Existuje-li integrál (8), může míti též hodnotu $\pm\,\infty$. Má-li integrál konečnou hodnotu, budeme říkat, že **konverguje** (nebo že je konvergentní). Jaký je poměr k Riemannovu integrálu, vyšetříme později (částečně již v § 4, pozn. 7, hlavně však v kap. XI).

Poznámka 6. Musíme se podívati, zda definice je v pořádku.

1. V případě I mají všechny součty (4) smysl; zřejmě pak $0 \leqq \int_M f\,\mathrm{d}\mu \leqq +\,\infty$.

[4]) Může se v nich vyskytnout sčítanec $+\,\infty$ i $-\,\infty$ zároveň.

2. Není-li $f(x) < 0$ nikde v M, je $f^+ = f$, $f^- = 0$ v $M \dot{-} N$,[5]) takže ve smyslu bodu I máme $\int_M f^- \, d\mu = 0$ (neboť všechny dolní součty, příslušné k f^-, jsou rovny nule). Pravá strana v (8) je tedy $\int_M f \, d\mu - 0$ (integrál ve smyslu bodu I); tedy v tomto případě je definice integrálu (7) podle bodu II v souhlase s definicí podle bodu I.

Poznámka 7. Podobně jako v diferenciálním počtu si dovolujeme určitou licenci; místo $\int_M f \, d\mu$ píšeme $\int_M f(x) \, d\mu$ nebo $\int_M f(x_1, \ldots, x_r) \, d\mu$, na př. $\int_{(0,1)} \frac{x}{x+1} \, d\mu$ (zde jde o funkci jedné proměnné), $\int_M \frac{x-y}{x^2+y^2+1} \, d\mu$ (zde míním $M \subset \mathbf{E}_2$ a jde o $\int_M f \, d\mu$, kde $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$ je funkce dvou proměnných) a pod. Dále píši $\int_M d\mu$, $\int_M \frac{d\mu}{g} = \int_M \frac{d\mu}{g(x)}$ místo $\int_M 1 \, . \, d\mu$, $\int_M \frac{1}{g} \, d\mu$ atd. Hrozí-li při těchto „licencích" někde nedorozumění, je třeba podati vysvětlení.

Příklad 1. Je-li $\mu(M) = 0$, je $\int_M f \, d\mu = 0$ pro každou funkci f.

Důkaz. Není-li nikde $f(x) < 0$, uvažme, že v (4) je nyní $\mu(M_i) = 0$, tedy $s(\mathfrak{M}) = 0$ a užijeme bodu I v def. 10. V obecném případě $\int_M f \, d\mu = \int_M f^+ \, d\mu - \int_M f^- \, d\mu = 0 - 0 = 0$.

Příklad 2. Je-li M měřitelná, $c \in \mathbf{E}_1^*$, je $\int_M c \, d\mu = c \, \mu(M)$. Důkaz. Míním ovšem integrál funkce f, kde $f(x) = c$ pro každé $x \in M$. Budiž předně $0 \leqq c \leqq +\infty$; ihned zjistíte z (4), že $s(\mathfrak{M}) = c \, \mu(M)$ pro každý rozklad $\mathfrak{M}$.[6]) Tedy vzorec platí pro $c \geqq 0$. Je-li $c < 0$, je $f^+ = 0$, $f^- = |c|$, tedy podle bodu II def. 10 $\int_M c \, d\mu = \int_M 0 \, d\mu - \int_M |c| \, d\mu = 0 - |c| \, \mu(M) = c \, \mu(M)$. Speciálně: $\int_M 0 \, d\mu = 0$, $\int_M d\mu = \mu(M)$, jestliže M je měřitelná.

---

[5]) N je množina těch bodů $x \in M$, kde $f(x)$ nemá smyslu.
[6]) Uvažte, že to platí i pro $c = +\infty$ i pro $\mu(M) = +\infty$.

Příklad 3. Jest $\int\limits_M (-f)\,d\mu = -\int\limits_M f\,d\mu$, má-li aspoň jedna strana rovnice smysl. Důkaz. Stačí se omezit na případ, že f (a tedy i $-f$) je měřitelná v M (jinak ani levá ani pravá strana nemá smysl). Položme $g = -f$, takže $g^+ = f^-$, $g^- = f^+$ a stačí užíti definice: $\int\limits_M g\,d\mu = \int\limits_M f^-\,d\mu - \int\limits_M f^+\,d\mu$, $\int\limits_M f\,d\mu = \int\limits_M f^+\,d\mu - \int\limits_M f^-\,d\mu$.

Poznámka 8. Čtenář má možná k definici 10 tyto poznámky:

1. Proč jsme se omezili na měřitelné množiny M?

2. Proč jsme u nezáporných funkcí mluvili jen o dolních a ne o horních součtech?

3. Proč jsme napřed probrali nezáporné funkce a teprve potom (v rovnici (8)) případ obecný?

4. Proč jsme se od počátku omezili na funkce měřitelné v M?

Ad 1. V nejjednodušším případě $f(x) = 1$ je $s(\mathfrak{M}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(M_i)$; kdybychom připouštěli i neměřitelné M, nemohly by ovšem všechny M_i býti měřitelné, a musili bychom pracovati s vnější měrou; ale potom může býti (i při $M_1 M_2 = \emptyset$) $\mu_e(M_1 \cup M_2) < \mu_e(M_1) + \mu_e(M_2)$ a sotva bychom dostali nějakou rozumnou theorii.

Ad 2. Vyjde nám později, že (při Lebesgueově míře v $\mathbf{E}_1$) $\int\limits_{(1, +\infty)} \frac{1}{x^2}\,d\mu$ konverguje. Ale príslušné horní součty jsou vesměs rovny $+\infty$. Neboť $(1, +\infty)$ má Lebesgueovu míru $+\infty$, takže v (5) je $\mu(M_i) = +\infty$ aspoň pro jedno i, ale příslušné $V_i = \sup\limits_{x \in M_i} \frac{1}{x^2} > 0$,[7]) takže $S(\mathfrak{M}) = +\infty$.

Ad 3. Horní součty, jak jsme právě viděli, se nehodí pro definici integrálu nezáporné funkce; zrovna tak se dolní součty nehodí u nekladných funkcí. A je proto přirozeno, že pro funkce, které mění znamení, se nehodí někdy ani horní ani dolní součty. Proto je vhodné použíti dolních součtů jen pro definici integrálů nezáporných funkcí

[7]) kdežto $v_i = \inf\limits_{x \in M_i} \frac{1}{x^2} = 0$, ježto M_i není omezené.

a potom teprve přejíti (def. 10, bod II) k funkcím s libovolným znamením.

Ad 4. Ovšem: je-li $\mu(M) < +\infty$, f omezená v M (nemusí býti měřitelná), mají všechny horní i dolní součty smysl (množina jejich hodnot je dokonce omezená) a můžeme se zcela analogicky s Riemannovou definicí ptáti po supremu $\mathfrak{s}$ dolních součtů a po infimu $\mathfrak{S}$ horních součtů.[8]) V § 4 (věta 60) dostaneme tento výsledek: Vždy je (v tomto případě) $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{S}$ a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li f měřitelná v M. U neměřitelných funkcí bychom tedy dostali místo integrálu dvě různá čísla, jakýsi dolní a horní integrál. Proto se omezujeme od počátku na měřitelné funkce.

Poznámka 9. Buďte

$$(\mathfrak{M}):\quad M_1, \ldots, M_n\,; \qquad (\mathfrak{N}):\quad N_1, \ldots, N_q$$

dva rozklady měřitelné množiny M (ve smyslu pozn. 4). Říkáme, že $\mathfrak{N}$ je zjemněním rozkladu $\mathfrak{M}$, jestliže každá N_j $(j = 1, \ldots, q)$ je částí některé M_i $(i = 1, \ldots, n)$. Potom lze zřejmě psáti $\mathfrak{N}$ jakožto systém množin

$$(9) \qquad (\mathfrak{N}):\quad M_{ik} \ (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r_i)\,,$$

kde $M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{i,r_i}$ jsou ony množiny systému $\mathfrak{N}$, jejichž sjednocení dává právě množinu M_i.

Je zřejmé, že ke každé dvojici rozkladů existuje jejich společné zjemnění (na př. jestliže $M_1, \ldots, M_n$; $N_1, \ldots, N_q$ jsou dva rozklady množiny M, tvoří systém všech průniků M_iN_j společné zjemnění obou rozkladů).

Je-li nyní funkce f definována skoro všude v M — budiž P množina oněch $x \in M$, pro něž $f(x)$ není definováno — a mají-li součty $s_{f,M}(\mathfrak{M})$, $s_{f,M}(\mathfrak{N})$ smysl, při čemž $\mathfrak{N}$ je zjemněním rozkladu $\mathfrak{M}$, je $s_{f,M}(\mathfrak{M}) \leqq s_{f,M}(\mathfrak{N})$. Důkaz. Při označení (9) svrchu uvedeném položme $v_{ik} = \inf\limits_{x \in M_{ik} \dot{-} P} f(x)$, $v_i = \inf\limits_{x \in M_i \dot{-} P} f(x)$, takže $v_{ik} \geqq v_i$ a tedy

$$s_{f,M}(\mathfrak{N}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} v_{ik}\, \mu(M_{ik}) \geqq \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{k=1}^{r_i} \mu(M_{ik}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \mu(M_i) = s_{f,M}(\mathfrak{M})\,.$$

---

[8]) Viz J I, kap. II.

Z toho plyne tato důležitá poznámka: Zvolím-li libovolný rozklad $\mathfrak{M}_0$ množiny M, potom supremum čísel $s_{f,M}(\mathfrak{M})$ pro všechny rozklady $\mathfrak{M}$ množiny M je rovno supremu čísel $s_{f,M}(\mathfrak{M})$ pro ty rozklady $\mathfrak{M}$, jež jsou zjemněním rozkladu $\mathfrak{M}_0$, takže se při hledání toho suprema mohu omeziti na zjemnění libovolně předepsaného rozkladu $\mathfrak{M}_0$; vše ovšem za předpokladu, že všechny dolní součty mají smysl.

Podobná poznámka platí pro infimum horních součtů.

Věta 41. *Buďte M_1, M_2 disjunktní měřitelné množiny. Potom jest*

$$\int_{M_1 \cup M_2} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{M_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{M_2} f \, \mathrm{d}\mu \,, \tag{10}$$

má-li buďto pravá nebo levá strana smysl.[9])

Důkaz. Není-li f měřitelná buďto v M_1 nebo v M_2 (takže pak není měřitelná ani v $M_1 \cup M_2$), nemá smysl ani pravá ani levá strana. Budiž tedy f měřitelná v M_1 i v M_2 a tedy i v množině $M = M_1 \cup M_2$.

I. Nechť předně není $f(x) < 0$ pro žádné $x \in M$, takže obě strany v (10) mají smysl. Sestrojme rozklad

$$(\mathfrak{M}_0){:}\quad M_1, M_2$$

množiny M a omezme se na ony rozklady $\mathfrak{M}$ množiny M, jež jsou jeho zjemněním. Každý takový rozklad určuje rozklady

$$(\mathfrak{M}_1){:}\quad M_{11}, \ldots, M_{1p}\,; \qquad (\mathfrak{M}_2){:}\quad M_{21}, \ldots, M_{2q}\,,$$

kde M_{1k} (po příp. M_{2k}) jsou ony množiny z $\mathfrak{M}$, které jsou obsaženy v M_1 (po příp. v M_2).[10]) Naopak, každý rozklad $\mathfrak{M}_1$ množiny M_1 a rozklad $\mathfrak{M}_2$ množiny M_2 dávají dohromady tímto způsobem rozklad $\mathfrak{M}$ množiny M, jenž je zjemněním rozkladu $\mathfrak{M}_0$. Ale potom zřejmě

$$s_{f,M}(\mathfrak{M}) = s_{f,M_1}(\mathfrak{M}_1) + s_{f,M_2}(\mathfrak{M}_2)\,,$$

načež přechodem k supremu[11]) obdržím (10).

II. Nepředpokládejme nyní nic o znamení funkce f. Podle I máme

$$\int_M f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_{M_1} f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_{M_2} f^+ \, \mathrm{d}\mu \,, \quad \int_M f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_{M_1} f^- \, \mathrm{d}\mu + \int_{M_2} f^- \, \mathrm{d}\mu \,. \tag{11}$$

---

[9]) T. j.: má-li v (10) smysl jedna strana, mají smysl obě strany a jsou si rovny.

[10]) O prázdné množiny M_{ik} se nemusím starat.

[11]) Viz pozn. 1, kde za A (po příp. B) položím množinu všech čísel $s_{f,M_1}(\mathfrak{M}_1)$ (po příp. $s_{f,M_2}(\mathfrak{M}_2)$).

V těchto rovnicích je levá strana $+\infty$ tehdy a jen tehdy, když aspoň jeden integrál vpravo je $+\infty$. Dále: má-li levá strana v (10) smysl, stojí aspoň v jedné z rovnic (11) jen konvergentní integrály, takže se rovnice (11) dají odečíst a vyjde (10). Má-li pravá strana v (10) smysl, zjistíte opět ihned, že aspoň v jedné z rovnic (11) stojí jen konvergentní integrály, takže opět můžeme odečíst a dostaneme zase (10). (Takovéto diskuse, týkající se zjištění, že určité sečtení nebo odečtení lze provésti, přenechám příště často čtenáři.)

Poznámka 10. Budiž $N \sim M$, $f \sim g\,(M)$. Potom platí $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_N g\,\mathrm{d}\mu$, jakmile jedna strana rovnice má smysl. Důkaz. Stačí se zřejmě omeziti na případ, že f je měřitelná v M (a tedy g měřitelná v N), ježto by jinak ani pravá ani levá strana neměla smyslu. Budiž P množina oněch $x \in M \cup N$, která buďto neleží v MN nebo pro něž není $f(x) = g(x)$, takže $\mu(P) = 0$. Tedy (příkl. 1) $\int\limits_{MP} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{NP} g\,\mathrm{d}\mu = 0$, načež podle věty 41 je $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{M \dot{-} P} f\,\mathrm{d}\mu$, $\int\limits_N g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{N \dot{-} P} g\,\mathrm{d}\mu$ (jakmile jedna strana má smysl, má i druhá strana smysl). Ale $M \dot{-} P = MN \dot{-} P = N \dot{-} P$ a v množině $M \dot{-} P$ je $f(x) = g(x)$. Odtud plyne tvrzení.

Tato drobná poznámka je často užitečná; praví toto: Vyšetřuji-li existenci a hodnotu integrálu $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$, mohu „integrační obor" M nahraditi libovolnou ekvivalentní množinou a „integrand" f libovolnou funkcí ekvivalentní (v množině M); tím se nic nestane.

Na př. je-li f definována skoro všude v M, mohu její definici doplnit tak, aby byla definována všude v M; je-li kladná skoro všude v M, mohu její definici pozměnit (na množině nulové míry) tak, aby byla kladná všude v M. Jde-li o součet $\int\limits_{M_1} f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{M_2} f\,\mathrm{d}\mu$, kde $\mu(M_1M_2) = 0$, smíme předpokládati, že $M_1M_2 = \emptyset$ (neboť místo integračního oboru M_2 mohu vzíti $M_2 \dot{-} M_1M_2$) a pod. Takovéto úpravy budeme často v důkazech prováděti bez dalšího vysvětlování. Ovšem je nutno dáti pozor, zda se v předpokladech nebo v tvrzení dokazované věty nevyskytuje nic, na co by tato změna mohla míti rušivý vliv.

Poznámka 11. Je-li $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná, $f(x) = 0$ skoro všude v $\mathbf{E}_r \dot{-} M$, je $\int\limits_{\mathbf{E}_r} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$, má-li aspoň jedna strana rovnice smysl.

Důkaz. Podle věty 41 je $\int\limits_{E_r} = \int\limits_M + \int\limits_{E_r \dot{-} M}$, má-li levá nebo pravá strana smysl. Ale druhý integrál vpravo je roven nule (příkl. 2 a pozn. 10). Tato poznámka nám dovoluje nahradit libovolný integrační obor M oborem E_r, což je někdy pohodlné. Podobně: Jsou-li M, M_1 měřitelné, $M \subset M_1$, $f(x) = 0$ skoro všude v $M_1 \dot{-} M$, je $\int\limits_{M_1} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu$, má-li aspoň jedna strana smysl.

Věta 42. *Nechť existuje* $I = \int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu$. *Budiž* M_1 *měřitelná,* $M_1 \subset M$. *Potom existuje též* $I_1 = \int\limits_{M_1} f \,\mathrm{d}\mu$ *a platí: Je-li* $I < +\infty$, *je též* $I_1 < +\infty$; *je-li* $I > -\infty$, *je též* $I_1 > -\infty$; *je-li tedy* I *konvergentní, je též* I_1 *konvergentní.*

Důkaz. Do (10) dosadíme $M_2 = M \dot{-} M_1$. Je patrno: je-li $I < < +\infty$, musí oba sčítanci vpravo být $< +\infty$; podobně pro $I > > -\infty$.

Věta 43. *Buďte* f, g *měřitelné v* M. *Budiž* $f(x) \leqq g(x)$ *skoro všude v* M. *Potom je*

$$\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu \leqq \int\limits_M g \,\mathrm{d}\mu \,, \tag{12}$$

jestliže a) buďto $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$, *b) nebo* $\int\limits_M g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, *c) nebo oba integrály v* (12) *existují.*[12])

Důkaz. Smíme předpokládati, že $f(x) \leqq g(x)$ všude v M.

I. Budiž předně $f(x) \geqq 0$ všude v M. Potom $s_{f,M}(\mathfrak{M}) \leqq s_{g,M}(\mathfrak{M})$ a přechodem k supremu plyne (12).

II. V obecném případě uvažme, že $f^+(x) \leqq g^+(x)$, $f^-(x) \geqq g^-(x)$. Tedy podle I

$$\int\limits_M f^+ \,\mathrm{d}\mu \leqq \int\limits_M g^+ \,\mathrm{d}\mu \,, \quad \int\limits_M f^- \,\mathrm{d}\mu \geqq \int\limits_M g^- \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{13}$$

V případě a) je $\int\limits_M f^- \,\mathrm{d}\mu$ konečný, tedy též $\int\limits_M g^- \,\mathrm{d}\mu$; tedy lze provésti odečtení nerovností (13) a obdržíme (12); podobně v případě b). Tím je vyřešen též případ c) až na případ $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu = -\infty$, $\int\limits_M g \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, který je zřejmý.

---

12) T. j.: platí-li buďto a) nebo b) nebo c), mají smysl oba integrály v (12) a platí (12).

Poznámka 12. Buďte M_1, M_2 měřitelné, $M_1 \subset M_2$; budiž f měřitelná v M_2, $f(x) \geqq 0$ skoro všude v M_2. Potom $\int\limits_{M_1} f \, d\mu \leqq \int\limits_{M_2} f \, d\mu$.

Důkaz. Položme $g(x) = f(x)$ pro $x \in M_1$, $g(x) = 0$ pro $x \in M_2 \dot{-} M_1$, takže $0 \leqq g(x) \leqq f(x)$ skoro všude v M_2. Tedy (příkl. 2, věta 41, 43)

$$0 \leqq \int\limits_{M_1} f \, d\mu = \int\limits_{M_1} f \, d\mu + \int\limits_{M_2 \dot{-} M_1} 0 \, d\mu = \int\limits_{M_2} g \, d\mu \leqq \int\limits_{M_2} f \, d\mu \, .$$

Věta 44. *Jestliže pro integrál* $I = \int\limits_M f \, d\mu$ *platí* $I > -\infty$, *je* $f(x) > -\infty$ *skoro všude v* M; *je-li* $I < +\infty$, *je* $f(x) < +\infty$ *skoro všude v* M. *Tedy: je-li* I *konvergentní, je* $f(x)$ *konečné skoro všude v* M.

Důkaz. Budiž na př. $I > -\infty$; potom $I_1 = \int\limits_M f^- \, d\mu \geqq 0$ je konečné číslo. Budiž $M_1 = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) = -\infty)$. Kdyby bylo $\mu(M_1) > 0$, bylo by podle pozn. 12 a příkl. 2

$$I_1 = \int\limits_M f^- \, d\mu \geqq \int\limits_{M_1} f^- \, d\mu = (+\infty) \, . \, \mu(M_1) = +\infty \, ,$$

což dává spor.

Věta 45. *Budiž* f *měřitelná v* M. *Potom platí:*

I. Existuje-li $\int\limits_M f \, d\mu = I$, *je*

$$\left| \int\limits_M f \, d\mu \right| \leqq \int\limits_M |f| \, d\mu \, . \tag{14}$$

II. Integrál I *konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li integrál* $K = \int\limits_M |f| \, d\mu$ *(načež ovšem platí* (14)*).*

Důkaz. Budiž $M_1 = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) \geqq 0)$, $M_2 = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) < 0)$. Položme

$$I_1 = \int\limits_{M_1} f \, d\mu = \int\limits_{M_1} |f| \, d\mu \, ,$$

$$I_2 = -\int\limits_{M_2} f \, d\mu = \int\limits_{M_2} (-f) \, d\mu = \int\limits_{M_2} |f| \, d\mu \text{ (viz příkl. 3)} \, .$$

Tedy $I_1 \geqq 0$, $I_2 \geqq 0$, $K = I_1 + I_2$; existuje-li I, je $I = I_1 - I_2$.[13]) Tedy $|I| \leqq K$, existuje-li I. Dále: I je konečný tehdy a jen tehdy, jsou-li I_1, I_2 konečné, t. j. je-li K konečný.

Věta 46. *Budiž* $\int\limits_M f \, d\mu = 0$; *budiž* $f(x) \geqq 0$ *skoro všude v* M. *Potom* $f(x) = 0$ *skoro všude v* M.

Důkaz. Pro $n = 1, 2, \ldots$ položme $M_n = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x \left(x \in M, f(x) \geqq \frac{1}{n}\right)$. Podle předpokladu, pozn. 12, věty 43 a příkl. 2 je

$$0 = \int\limits_M f \, d\mu \geqq \int\limits_{M_n} f \, d\mu \geqq \int\limits_{M_n} \frac{1}{n} \, d\mu = \frac{1}{n} \, \mu(M_n) \, .$$

Tedy $\mu(M_n) = 0$ a tedy též $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n) = 0$. Ale $\mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) > 0) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, čímž věta dokázána.

Jednoduchých vět a poznámek tohoto paragrafu budeme stále užívati. Upozorňuji zvláště na tyto dvě věci: Budiž f měřitelná v M. Potom předně $\int\limits_M f \, d\mu$ konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li $\int\limits_M |f| \, d\mu$ (říkává se též, že každý konvergentní integrál „konverguje absolutně“). Za druhé: konverguje-li $\int\limits_M f \, d\mu$, konverguje i $\int\limits_{M_1} f \, d\mu$ pro každou měřitelnou $M_1 \subset M$..

§ 2. Závislost integrálu na integračním oboru. Existence a hodnota integrálu $\int\limits_M f \, d\mu$ závisí na „integračním oboru“ M, na „integrandu“ f a na „míře“ μ. V tomto paragrafu budeme vyšetřovati závislost na M (při daném f, μ). Něco jsme o tom řekli již v § 1.

Věta 47. *Budiž dán konečný disjunktní systém měřitelných množin* $M_1, M_2, \ldots, M_n$; *budiž* $M \sim M_1 \cup \ldots \cup M_n$. *Potom*

$$\int\limits_M f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{M_k} f \, d\mu \, , \tag{15}$$

má-li buďto levá nebo pravá strana v (15) *smysl.*

---

[13]) Podle věty 41 existuje I tehdy a jen tehdy, má-li rozdíl $I_1 - I_2$ smysl. Ježto $M \sim M_1 \cup M_2$, je (viz pozn. 10) jedno, zda integruji přes M či přes $M_1 \cup M_2$.

Důkaz. Smíme předpokládati $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$. Pro $n = 1$ je (15) zřejmá, pro $n = 2$ je to věta 41; pro větší n plyne (15) indukcí.

Věta 48. *Budiž $M \sim \bigcup_{z \in Z} M_z$, kde vpravo je disjunktní sjednocení spočetného systému měřitelných množin (t. j. Z je spočetná množina). Potom je*

$$(16) \qquad \int_M f \, d\mu = \sum_{z \in Z} \int_{M_z} f \, d\mu ,$$

má-li levá strana v (16) *smysl.*

Poznámka 1. Vpravo je „zobecněná řada"; přečtěte si proto pečlivě pozn. 1 v kap. I, § 1, po příp. i příslušný § 3 v **D II**, kap. III. Je-li Z nekonečná množina, nestačí — na rozdíl od věty 47 — má-li pravá strana smysl; to ukazuje tento příklad: Při Lebesgueově míře μ v $\mathbf{E}_1$ položme $M_n = \langle 2n - 2, 2n)$, $f(x) = 1$ pro $2n - 2 \leqq x < 2n - 1$, $f(x) = -1$ pro $2n - 1 \leqq x < 2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; je $\langle 0, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Snadno zjistíte, že $\int_{M_n} f \, d\mu = 0$, takže pravá strana v (16) má smysl, avšak $\int_{\langle 0, +\infty)} f^+ \, d\mu \geqq \int_{\langle 0, 2n)} f^+ \, d\mu = n$, takže $\int_{\langle 0, +\infty)} f^+ \, d\mu = +\infty$ a obdobně pro f^-; tedy levá strana nemá smysl.

Důkaz. Pro konečné Z máme větu 47, takže smíme předpokládati, že Z je nekonečná; nahradíme-li M ekvivalentní množinou, můžeme po malé změně označení psáti $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, takže (16) má tvar

$$(16a) \qquad \int_M f \, d\mu = \sum_{n \in N} \int_{M_n} f \, d\mu ,$$

kde $\mathbf{N}$ je množina všech přirozených čísel (pokud jde vpravo o nezáporné členy, lze ovšem místo této zobecněné řady psáti „obyčejnou" řadu $\sum_{n=1}^{\infty}$).

Dále smíme předpokládati, že f je měřitelná v M (jinak nemá levá strana v (16a) smysl) a tedy, že je definována všude v M (§ 1, pozn. 10).

I. Budiž $f(x) \geqq 0$ všude v M, takže obě strany v (16a) mají smysl. Budiž

$$(\mathfrak{A}): \quad A_1, \ldots, A_a$$

libovolný rozklad množiny M na měřitelné množiny. Položíme-li $A_{in} = A_i M_n$ ($i = 1, \ldots, a$; $n = 1, 2, \ldots$), je

$$(\mathfrak{A}_n):\quad A_{1n}, A_{2n}, \ldots, A_{an}$$

rozklad množiny M_n. Je-li $v_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$, $v_{in} = \inf_{x \in A_{in}} f(x)$, je $v_{in} \geqq v_i$, $\mu(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{in})$ (věta 18) a tedy[14])

$$s_{f,M}(\mathfrak{A}) = \sum_{i=1}^{a} v_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_i\, \mu(A_{in}) \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a} v_{in}\, \mu(A_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{f, M_n}(\mathfrak{A}_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Tedy i pro supremum levé strany máme nerovnost

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{17}$$

Ježto pro každé p je $M_1 \cup \ldots \cup M_p \subset M$, je podle věty 47 a pozn. 12 v § 1

$$\sum_{n=1}^{p} \int_{M_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{M_1 \cup \ldots \cup M_p} f \, \mathrm{d}\mu \leqq \int_M f \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

načež limitní přechod $p \to \infty$ dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f \, \mathrm{d}\mu \leqq \int_M f \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{18}$$

Ale z (17), (18) plyne (16a).

II. V obecném případě máme podle I

$$\int_M f^+ \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f^+ \, \mathrm{d}\mu \, , \quad \int_M f^- \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f^- \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{19}$$

Má-li $\int_M f \, \mathrm{d}\mu$ smysl, je aspoň v jedné z obou rovnic (19) levá a tedy i pravá strana konečné číslo, načež lze odečísti a dostaneme

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{20}$$

---

[14]) Vše je nezáporné, lze proto bez obav pracovati se zobecněnými řadami.

Teď máme ještě zjistit, že (20) lze psáti ve tvaru (16a), t. j. že pravou stranu lze psát ve tvaru zobecněné řady. Nechť znak $\sum_n^+$ znamená součet přes ta přirozená n, pro něž $\int_{M_n} f \, d\mu \geqq 0$ a nechť $\sum_n^-$ znamená součet přes ta přirozená n, pro něž $\int_{M_n} f \, d\mu < 0$. Máme dokázati, že aspoň jedna z řad

$$\sum_n^+ \int_{M_n} f \, d\mu \,, \quad \sum_n^- \int_{M_n} f \, d\mu \tag{21}$$ [15])

je konvergentní. To dokážeme takto: Je $-f^-(x) \leqq f(x) \leqq f^+(x)$ a tedy (věta 43 a pozn. 3 z § 1)

$$-\int_{M_n} f^- \, d\mu \leqq \int_{M_n} f \, d\mu \leqq \int_{M_n} f^+ \, d\mu \,.$$

Odtud plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f^+ \, d\mu \geqq \sum_n^+ \int_{M_n} f^+ \, d\mu \geqq \sum_n^+ \int_{M_n} f \, d\mu \geqq 0 \,,$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f^- \, d\mu \leqq -\sum_n^- \int_{M_n} f^- \, d\mu \leqq \sum_n^- \int_{M_n} f \, d\mu \leqq 0 \,;$$

a zde buďto v prvním nebo v druhém řádku stojí vlevo konvergentní řada. Tedy také aspoň jedna z řad (21) je konvergentní.

Věta 49. *Buďte* $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$ *měřitelné množiny,* $M = \lim\limits_{n \to \infty} N_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ (stačí ovšem i $M \sim \lim\limits_{n\to\infty} N_n$). *Potom je*

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{N_n} f \, d\mu \,,$$

má-li levá strana smysl.

Důkaz. Položme $M_1 = N_1$, $M_{i+1} = N_{i+1} \dot{-} N_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, takže $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ (disjunktní sjednocení) a věty 48, 47 dávají ihned

$$\int_M f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f \, d\mu = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{p} \int_{M_n} f \, d\mu =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \int_{M_1 \cup \ldots \cup M_p} f \, d\mu = \lim_{p \to \infty} \int_{N_p} f \, d\mu \,.$$

[15]) Zde není obtíží: první řada má samé nezáporné, druhá samé záporné členy.

Poznámka 2. Budiž $I(n)$ množina $\Omega(o, n)$[16]) nebo její uzávěr. Existuje-li $\int\limits_M f\, d\mu$, dává věta 49 ihned $\int\limits_M f\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{M\, I(n)} f\, d\mu$. Integrál vlevo je tedy limitou integrálů s omezenými integračními obory. Toho se často užívá v praxi k výpočtu integrálu vlevo.

Poznámka 3. Buďte $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ měřitelné množiny, $P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Potom

$$\int\limits_P f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{P_n} f\, d\mu\,, \tag{22}$$

jestliže $\int\limits_{P_n} f\, d\mu$ konverguje aspoň pro jedno n. Důkaz. Vynecháme-li konečný počet členů, můžeme předpokládati, že $\int\limits_{P_n} f\, d\mu$ konverguje pro $n = 1$ a tedy i pro všechna $n > 1$ (viz větu 42). Položme $N_n = P_1 \dot{-} P_n$, $M = P_1 \dot{-} P$, takže $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$, $N_n \subset P_1$, $\lim N_n = \bigcup\limits_n (P_1 \dot{-} P_n) = P_1 \dot{-} \bigcap\limits_n P_n = P_1 \dot{-} P = M$. Podle věty 41 máme (ježto je vše konečné, lze odečítat)

$$\int\limits_P f\, d\mu = \int\limits_{P_1} f\, d\mu - \int\limits_M f\, d\mu\,, \quad \int\limits_{P_n} f\, d\mu = \int\limits_{P_1} f\, d\mu - \int\limits_{N_n} f\, d\mu\,; \tag{23}$$

podle věty 49 je však $\lim \int\limits_{N_n} = \int\limits_M$, načež z (23) plyne (22).

Poznámka 4. Zde nestačí ani existence $\int\limits_{P_n} f\, d\mu$ ani konvergence $\int\limits_P f\, d\mu$. Příklad v $\mathbf{E}_1$: Budiž $f = 1$, μ Lebesgueova míra, $P_n = (n, +\infty)$, tedy $P = \emptyset$. Tedy $\int\limits_{P_n} d\mu = +\infty$ existují, $\int\limits_P d\mu = 0$ konverguje, ale (22) neplatí.

Existuje-li $\int\limits_M f\, d\mu$, existuje též $\int\limits_{M_1} f\, d\mu$ pro všechny měřitelné množiny $M_1 \subset M$ (věta 42). Závislost tohoto integrálu na množině M_1 popisují následující dvě věty.

Věta 50. *Nechť $I(\varrho)$ $(0 < \varrho < +\infty)$ značí buďto množinu $\Omega(o, \varrho)$ (v $\mathbf{E}_r$) nebo její uzávěr. Budiž f měřitelná v $\mathbf{E}_r$, takže existuje $J = \int\limits_{\mathbf{E}_r} |f|\, d\mu$.*

[16]) $\Omega(a, \varrho)$ $(\varrho > 0)$ značí množinu těch bodů z $\mathbf{E}_r$, které mají od bodu a vzdálenost menší než ϱ. Bod $[0, \ldots, 0]$ značím o.

Budiž $T < J$. Potom existuje konečné $\delta > 0$ s touto vlastností: Je-li A jakákoliv měřitelná množina, vyhovující nerovnosti $\mu(A) < \delta$, je

(24)
$$\int_{I\left(\frac{1}{\delta}\right) \dot{-} A} |f| \, \mathrm{d}\mu > T \, .$$

(Zhruba řečeno: hodnotu integrálu J dostaneme s „libovolnou přesností", jestliže místo $\mathbf{E}_r$ vezmeme za integrační obor „dosti velký" interval $I\left(\frac{1}{\delta}\right)$, od něhož ještě můžeme odečísti jakoukoliv — to je důležité — měřitelnou množinu dostatečně malé míry. Ve větě se nepředpokládá, že J je konvergentní.)

Důkaz. Ježto (věta 49) $J = \lim\limits_{p \to \infty} \int_{I(p)} |f| \, \mathrm{d}\mu$, lze zvoliti (což učiníme) přirozené číslo p tak, že

(25)
$$\int_{I(p)} |f| \, \mathrm{d}\mu > T \, .$$

Dokáži nyní tvrzení: Existuje $\eta > 0$ tak, že pro každou měřitelnou A s vlastností $\mu(A) < \eta$ je

(26)
$$\int_{I(p) \dot{-} A} |f| \, \mathrm{d}\mu > T \, .$$ [17])

Nechť toto tvrzení není pravdivé; potom ke každému přirozenému n existuje měřitelná A_n tak, že

(27)
$$\mu(A_n) < 2^{-n} \, , \quad \int_{I(p) \dot{-} A_n} |f| \, \mathrm{d}\mu \leqq T \, .$$

Položme $B_q = \bigcap\limits_{n=q+1}^{\infty} (I(p) \dot{-} A_n)$, takže $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$; položme $B = \lim\limits_{q \to \infty} B_q \subset I(p)$. Podle věty 49 je

(28)
$$\int_B |f| \, \mathrm{d}\mu = \lim_{q \to \infty} \int_{B_q} |f| \, \mathrm{d}\mu \, .$$

---

[17]) Tím bude důkaz hotov. Stačí totiž zvoliti $0 < \delta < \eta$, $\frac{1}{\delta} > p$, načež pro $\mu(A) < \delta$ bude $\mu(A) < \eta$ a podle (26) bude

$$\int_{I\left(\frac{1}{\delta}\right) \dot{-} A} |f| \, \mathrm{d}\mu \geqq \int_{I(p) \dot{-} A} |f| \, \mathrm{d}\mu > T \, .$$

Ale pro $n > q$ je $B_q \subset I(p) \dot{-} A_n$, tedy podle (27)

$$\int\limits_{B_q} |f| \, d\mu \leqq T, \quad \int\limits_{B} |f| \, d\mu \leqq T \tag{29}$$

(viz (28)). Avšak $I(p) \dot{-} B_q = I(p) \bigcup\limits_{n=q+1}^{\infty} A_n$, tedy $\mu(I(p) \dot{-} B_q) \leqq \leqq \sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \mu(A_n) < 2^{-q}$. Ježto $I(p) \dot{-} B \subset I(p) \dot{-} B_q$ pro každé q, je $\mu(I(p) \dot{-} \dot{-} B) = 0$, tedy $B \sim I(p)$ a z (25) plyne $\int\limits_B |f| \, d\mu > T$, což je ve sporu s (29).

V případě, že J konverguje, lze tuto větu vysloviti také jinak; učiňme to pro libovolný integrační obor M.

Věta 51. *Nechť $\int\limits_M f \, d\mu$ konverguje; potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečné $\delta > 0$ s touto vlastností: Pro každou měřitelnou množinu $B \subset M$, vyhovující buďto podmínce $\mu(B) < \delta$ nebo podmínce $B \subset \mathsf{E}_r \dot{-} \dot{-} I\left(\frac{1}{\delta}\right)$*[18]*, je*

$$\left|\int\limits_B f \, d\mu\right| \leqq \int\limits_B |f| \, d\mu < \varepsilon . \tag{30}$$

Důkaz. Klaďme $f(x) = 0$ pro $x \in \mathsf{E}_r \dot{-} M$. Položme $\int\limits_M |f| \, d\mu = = \int\limits_{\mathsf{E}_r} |f| \, d\mu = J$ (tedy $J < +\infty$ podle věty 45). Ve větě 50 položme $T = J - \varepsilon$ a sestrojme příslušné δ. Tedy: Je-li předně $B \subset \mathsf{E}_r \dot{-} \dot{-} I\left(\frac{1}{\delta}\right)$, je

$$\int\limits_B |f| \, d\mu \leqq \int\limits_{\mathsf{E}_r \dot{-} I\left(\frac{1}{\delta}\right)} |f| \, d\mu = J - \int\limits_{I\left(\frac{1}{\delta}\right)} |f| \, d\mu < J - T = \varepsilon .$$

Je-li za druhé $\mu(B) < \delta$, klademe ve větě 50 $A = B$ a máme

$$\int\limits_B |f| \, d\mu = J - \int\limits_{\mathsf{E}_r \dot{-} B} |f| \, d\mu \leqq J - \int\limits_{I\left(\frac{1}{\delta}\right) \dot{-} B} |f| \, d\mu < J - T = \varepsilon .$$

Poznámka 5. Zhruba řečeno: je-li $B \subset M$ a buďto $\mu(B)$ dostatečně malé nebo B dostatečně daleko od počátku, platí (30). Bez před-

[18]) $I\left(\frac{1}{\delta}\right)$ má týž význam jako ve větě 50.

pokladu konvergence integrálu J by tato věta nebyla správná. Vlastnost „je-li $B \subset M$, $\mu(B) < \delta$, platí (30)" se označuje jako „absolutní spojitost integrálu". My jsme zde tuto vlastnost poněkud zobecnili: místo $\mu(B) < \delta$ můžeme také předpokládat $B \subset \mathbf{E}_r \dot{-} I\left(\frac{1}{\delta}\right)$. Toto obecnější znění jsme dokázali proto, aby nám později nevadil případ, kdy $\mu(M) = +\infty$.

Jako aplikaci věty 51 dokažme tuto jednoduchou větu:

Věta 52. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$; budiž f funkce r reálných proměnných. Nechť pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ je $\int_{IM} f \, d\mu = 0$. Potom je $f(x) = 0$ skoro všude v M.*

Důkaz. Rozložíme-li $\mathbf{E}_r$ na jednotkové krychle $K_1 \cup K_2 \cup \ldots$, je předně $K_n M$ měřitelná, f měřitelná v $K_n M$ (ježto $\int_{K_n M} f \, d\mu = 0$ existuje). Ježto $M = K_1 M \cup K_2 M \cup \ldots$, je tedy M měřitelná, f je měřitelná v M. Doplňme definici funkce f, kladouce $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$. Potom je tedy podle předpokladu

$$\int_I f \, d\mu = 0 \tag{31}$$

pro každý omezený interval I. Máme dokázati, že $f(x) = 0$ skoro všude v $\mathbf{E}_r$. Nechť tomu tak není, t. j. nechť $\mu(N) > 0$, kde $N = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \neq 0)$. Potom existuje dokonce omezený interval K tak, že $\mu(KN) > 0$.[19]) Budiž $M_1 = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in K, f(x) > 0)$, $M_2 = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in K, f(x) < 0)$, takže $KN = M_1 \cup M_2$. Tedy je na př. $\mu(M_1) > 0$ (kdyby bylo $\mu(M_1) = 0$, $\mu(M_2) > 0$, vyšetřovali bychom funkci $-f$). Podle věty 42, 46 je

$$+\infty > \int_{M_1} f \, d\mu = S > 0\,. \tag{32}$$

(Integrál konverguje, ježto $\int_K f \, d\mu = 0$). Ježto každá množina z $\mathfrak{A}_r$ (viz

[19]) Můžeme na př. vzíti za K vhodnou jednotkovou krychli, neboť

$$0 < \mu(N) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n N)$$

(vpravo platí dokonce znamení rovnosti).

definici 1 v kap. I, § 5) je disjunktním sjednocením konečného počtu omezených intervalů, plyne z (31) a z věty 47 ihned

$$\int_A f \, d\mu = 0 \text{ pro každé } A \in \mathfrak{A}_r . \tag{33}$$

Užijme nyní věty 51, do níž místo M, ε klademe K, $\frac{1}{2}S$. Obdržíme, že existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace

$$(B \text{ měřitelná, } \mu(B) < \delta) \Rightarrow \left| \int_{BK} f \, d\mu \right| < \tfrac{1}{2}S . \tag{34}$$

Ježto $\mu(M_1) < +\infty$, existuje podle věty 13 množina $A \in \mathfrak{A}_r$ tak, že $\mu(\Delta(M_1, A)) < \delta$, při čemž lze (viz vlastnost VI v kap. I, § 8, pozn. 1) předpokládati $A \subset K$ (jinak vezmu AK místo A). Platí však $M_1 \cup (A \dot{-} M_1) = A \cup (M_1 \dot{-} A)$, kde sjednocení vpravo i vlevo je disjunktní. Tedy

$$\int_{M_1} f \, d\mu + \int_{A \dot{-} M_1} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{M_1 \dot{-} A} f \, d\mu . \tag{35}$$

Ale levá strana[20]) je podle (32), (34) větší než $S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$, pravá strana je podle (33), (34) menší než $0 + \frac{1}{2}S$, což není možno. Tedy $\mu(N) = 0$.

§ 3*. Dodatek k definici integrálu.* Věta 53. *Budiž $\mu(M) < +\infty$; v množině M budiž funkce f měřitelná a skoro všude konečná. Uvažujme všechna možná rozdělení $\mathfrak{D}$ intervalu $(-\infty, +\infty)$ na nekonečně mnoho intervalů pomocí dělicích bodů*

$$\ldots < l_{-2} < l_{-1} < l_0 < l_1 < l_2 < \ldots ,$$

kde $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} l_{-n} = -\infty$, $\|\mathfrak{D}\| = \sup\limits_{n=0,1,-1,2,-2,\ldots} (l_n - l_{n-1}) < +\infty$. *Položme*

$$M_n = \mathop{\mathcal{E}}_x (x \in M, l_{n-1} \leqq f(x) < l_n) ;$$

zvolme ještě libovolný systém čísel

$$(\Xi) \quad \ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$$

tak, že $l_{n-1} \leqq \xi_n \leqq l_n$. Označme znakem $S(\mathfrak{D}, \Xi)$ zobecněnou řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n \, \mu(M_n) . \tag{36}$$

---

[20]) Jest $\mu(A \dot{-} M_1) + \mu(M_1 \dot{-} A) = \mu(\Delta(M_1, A)) < \delta$.

Potom platí: I. Jestliže řada $S(\mathfrak{D}, \Xi)$ konverguje absolutně pro jednu volbu $\mathfrak{D}, \Xi$, konverguje absolutně pro všechny volby $\mathfrak{D}, \Xi$. II. To nastane tehdy a jen tehdy, jestliže integrál $\int_M f \, d\mu$ konverguje, načež

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{\|\mathfrak{D}\| \to 0} S(\mathfrak{D}, \Xi) ; \tag{37}$$

přitom této rovnici je rozuměti v tomto smyslu: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\mathfrak{D}$ s vlastností $\|\mathfrak{D}\| < \delta$ a každé Ξ je

$$\left| \int_M f \, d\mu - S(\mathfrak{D}, \Xi) \right| < \varepsilon .$$

Poznámka 1. Takto (t. j. rovnicí (37)) definoval integrál původně Lebesgue. Větu 53 budeme potřebovati pouze v kap. X.

Důkaz. Změním-li f na množině míry nulové, nezmění se čísla $\mu(M_n)$ a tedy ani (36). Mohu tedy předpokládati, že f je konečná všude v M. Ježto $\mu(M) < +\infty$, existují (věta 43)

$$\int_{M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup \ldots} f \, d\mu \geqq l_{-1} \, \mu(M_0 \cup M_1 \cup \ldots) > -\infty ,$$

$$\int_{M_{-1} \cup M_{-2} \cup \ldots} f \, d\mu \leqq l_{-1} \, \mu(M_{-1} \cup M_{-2} \cup \ldots) < +\infty .$$

Píši-li tedy $M_+ = M_0 \cup M_1 \cup \ldots$, $M_- = M_{-1} \cup M_{-2} \cup \ldots$, je podle věty 48

$$\int_{M_+} f \, d\mu = \sum_{n \geqq 0} \int_{M_n} f \, d\mu , \quad \int_{M_-} f \, d\mu = \sum_{n < 0} \int_{M_n} f \, d\mu \tag{38}$$

a jde o to, kdy obě řady v (38) konvergují. Podotkněme ještě, že první řada v (38) obsahuje nejvýše konečný počet členů záporných, druhá nejvýše konečný počet členů kladných; totéž platí o řadách $\sum_{n \geqq 0} \xi_n \, \mu(M_n)$, $\sum_{n<0} \xi_n \, \mu(M_n)$. Zvolme libovolně $\mathfrak{D}, \Xi$. Ježto pro $x \in M_n$ je $l_{n-1} \leqq f(x) < l_n$, je $l_{n-1} \, \mu(M_n) \leqq \int_{M_n} f \, d\mu \leqq l_n \, \mu(M_n)$; rovněž je $l_{n-1} \, \mu(M_n) \leqq \xi_n \, \mu(M_n) \leqq l_n \, \mu(M_n)$. Tedy

$$\sum_{n \geqq 0} \left| \int_{M_n} f \, d\mu - \xi_n \, \mu(M_n) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n \geqq 0} (l_n - l_{n-1}) \, \mu(M_n) \leqq \|\mathfrak{D}\| \sum_{n \geqq 0} \mu(M_n) \leqq \|\mathfrak{D}\| \, \mu(M)$$

a podobně pro $\sum_{n<0}$. Odtud však plynou všechna tvrzení.

§ 4. Závislost integrálu na integrandu. V tomto paragrafu půjde hlavně o to, jak závisí $\int_M f \, d\mu$ na funkci f (při daném M, μ).

Věta 54. *Budiž $c \in \mathbf{E}_1$, $c \neq 0$. Potom*

$$\int_M c f \, d\mu = c \int_M f \, d\mu , \tag{39}$$

má-li aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Položme $g(x) = c f(x)$.

I. Nechť pravá strana má smysl. Smíme předpokládati, že $f(x)$ je definováno všude v M. Nechť předně $c > 0$, $f(x) \geqq 0$ všude v M. Pro dolní součty (viz § 1, pozn. 4) plyne ihned $s_{g,M}(\mathfrak{M}) = c \, s_{f,M}(\mathfrak{M})$ a přechodem k supremu dostaneme (39). Za druhé: Budiž f libovolné, $c > 0$. Potom je, jak právě bylo dokázáno (neboť $g^+ = cf^+$, $g^- = cf^-$)

$$\int_M g^+ \, d\mu = c \int_M f^+ \, d\mu , \quad \int_M g^- \, d\mu = c \int_M f^- \, d\mu ;$$

zde lze odečísti pravé a tedy i levé strany a obdržíme (39). Nechť konečně je f libovolné, $c < 0$. Potom $-g = |c| f$, tedy $\int_M (-g) \, d\mu = |c| \int_M f \, d\mu = -c \int_M f \, d\mu$ a příkl. 3 z § 1 dá ihned (39).

II. Nechť levá strana v (39), t. j. $\int_M g \, d\mu$ má smysl. Potom podle I je $\displaystyle\int_M \frac{1}{c} g \, d\mu = \frac{1}{c} \int_M g \, d\mu$, což je (39).

Poznámka 1. Je-li $c = 0$, platí (39) zřejmě, má-li pravá strana smysl; existence levé strany nestačí.

Definice 11. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná. Znakem $\mathbf{L}(M)$* (obšírněji *$\mathbf{L}(M; \mu)$) značíme množinu všech funkcí f, pro něž $\int_M f \, d\mu$* konverguje.

Věta 55. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná. Potom platí:*

1. Je-li $f \in \mathbf{L}(M)$, je f měřitelná v M a skoro všude v M konečná.

2. Je-li f měřitelná v M, je $f \in \mathbf{L}(M)$ tehdy a jen tehdy, je-li $|f| \in \mathbf{L}(M)$.

3. Je-li f měřitelná v M, $g \in \mathbf{L}(M)$, $|f(x)| \leqq g(x)$ skoro všude v M, je $f \in \mathbf{L}(M)$.

4. Je-li f měřitelná a omezená v M a je-li $\mu(M) < +\infty$, je $f \in \mathbf{L}(M)$.

5. Je-li $f \in \mathsf{L}(M)$, g měřitelná a omezená v M, je $fg \in \mathsf{L}(M)$.

6. Je-li $f \in \mathsf{L}(M)$, M_1 měřitelná, $M_1 \subset M$, je $f \in \mathsf{L}(M_1)$.

Důkaz. Ad 1 viz větu 44, ad 2 viz větu 45, ad 6 viz větu 42. Ad 3: Podle věty 43 je $\int_M |f| \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_M g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ a užije se 2. Ad 4: Je $|f(x)| \leqq c$ $(0 < c < +\infty)$ a podle příkl. 2 v § 1 je $\int_M c \,\mathrm{d}\mu = c\,\mu(M)$ konečné číslo, načež se užije 3 pro $g(x) = c$. Ad 5: $|g(x)| \leqq c$, $0 < c < +\infty$, načež věta 54 dává $\int_M c|f| \,\mathrm{d}\mu = c\int_M |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ a užije se 3 (neboť $|fg| \leqq c|f|$ a fg je měřitelná v M podle věty 34).

Přistoupíme nyní k hlavnímu předmětu tohoto paragrafu: kdy je

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{40}$$

1. pomocná věta. *Budiž M měřitelná, $\mu(M) < +\infty$; buďte f, g měřitelné v M; budiž $0 < a < +\infty$. Budiž $|f(x) - g(x)| \leqq a$ pro skoro všechna $x \in M$. Potom platí:*

1. Je-li $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, je též $\int_M g \,\mathrm{d}\mu = +\infty$.

2. Je-li $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = -\infty$, je též $\int_M g \,\mathrm{d}\mu = -\infty$.

3. Jestliže $\int_M f \,\mathrm{d}\mu$ konverguje, potom konverguje též $\int_M g \,\mathrm{d}\mu$ a je

$$\left|\int_M f \,\mathrm{d}\mu - \int_M g \,\mathrm{d}\mu\right| \leqq 2a\,\mu(M) \,. \tag{41}$$

Důkaz. Smíme předpokládati, že f, g jsou definovány všude v M a že také $|f(x) - g(x)| \leqq a$ všude v M (takže f, g jsou konečné v M).

I. Buďte f, g nezáporné v M. Je-li $\emptyset \neq M_1 \subset M$, je pro $y \in M_1$ $f(y) \leqq g(y) + a$, tedy $\inf_{x \in M_1} f(x) \leqq g(y) + a$, tedy $\inf_{x \in M_1} f(x) \leqq \inf_{x \in M_1} g(x) + a$; tedy máme pro dolní součty $s_f(\mathfrak{M}) \leqq s_g(\mathfrak{M}) + a\,\mu(M)$, tedy $s_f(\mathfrak{M}) \leqq \int_M g \,\mathrm{d}\mu + a\,\mu(M)$, tedy

$$\int_M f \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_M g \,\mathrm{d}\mu + a\,\mu(M) \,, \quad \int_M g \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_M f \,\mathrm{d}\mu + a\,\mu(M)$$

(druhá nerovnost plyne záměnou f s g). Tedy z $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ plyne

$\int\limits_M g \, d\mu = +\infty$; je-li však první z těchto integrálů konečný, je i druhý konečný a je

$$(42) \qquad |\int\limits_M f \, d\mu - \int\limits_M g \, d\mu| \leqq a \, \mu(M) \, .$$

II. V obecném případě uvažme, že podle (3) v § 1, pozn. 2 je

$$|f^+(x) - g^+(x)| \leqq |f(x) - g(x)| \leqq a \, ,$$
$$|f^-(x) - g^-(x)| \leqq |f(x) - g(x)| \leqq a \, .$$

Tedy podle I platí: Buďto je

$$(43) \qquad \int\limits_M f^+ \, d\mu = \int\limits_M g^+ \, d\mu = +\infty$$

nebo je

$$(44) \quad -\infty < \int\limits_M f^+ \, d\mu - a \, \mu(M) \leqq \int\limits_M g^+ \, d\mu \leqq \int\limits_M f^+ \, d\mu + a \, \mu(M) < +\infty$$

a podobně pro f^-, g^-. Z toho je patrno: Existuje-li $\int\limits_M f \, d\mu$, t. j. lze-li provésti odečtení $\int\limits_M f^+ \, d\mu - \int\limits_M f^- \, d\mu$, lze toto odečtení provésti i u funkce g a z (43), (44) a z příslušných obdobných nerovností pro funkce f^-, g^- plyne ihned tvrzení.

Věta 56. *Budiž M měřitelná, $\mu(M) < +\infty$. Buďte*

$$(45) \qquad f_1, f_2, \ldots$$

funkce měřitelné v M; nechť posloupnost (45) *je stejnoměrně konvergentní v M a nechť existují*[21]) $\int\limits_M f_n \, d\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Položme* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Potom existuje též

$$(46) \qquad \int\limits_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n \, d\mu \, .$$

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje n_0 tak, že

$$(x \in M, n \geqq n_0) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon$$

(odtud samo sebou plyne: f, f_n $(n \geqq n_0)$ jsou funkce konečné v M). Užijeme pomocné věty 1 s hodnotou $a = \varepsilon$: Ježto $\int\limits_M f_n \, d\mu$ existují,

[21]) Nepředpokládá se, že integrály mají konečnou hodnotu.

existuje i $\int\limits_M f\,d\mu$. Je-li $\int\limits_M f\,d\mu = +\infty$, je i $\int\limits_M f_n\,d\mu = +\infty$ pro $n \geqq n_0$, a tedy platí (46); podobně pro $-\infty$. Je-li však $\int\limits_M f\,d\mu$ konečný, je pro $n \geqq n_0$ též $\int\limits_M f_n\,d\mu$ konečný a je $\left|\int\limits_M f\,d\mu - \int\limits_M f_n\,d\mu\right| \leqq 2\varepsilon\,\mu(M)$; odtud však opět plyne (46).

Poznámka 2. Zároveň je z důkazu vidět: Je-li $\int\limits_M f\,d\mu = +\infty$, je též $\int\limits_M f_n\,d\mu = +\infty$ od jistého n počínaje. Podobně pro $-\infty$.

Věta 56 je ještě příliš speciální, hlavně požadavek stejnoměrné konvergence je příliš omezující. Ale odvodíme z ní ihned významnější věty.

Věta 57. *Budiž*

$$0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \dots \tag{47}$$

skoro všude v měřitelné množině M; buďte $f_1, f_2, \dots$ měřitelné v M. Položme $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (tato limita existuje skoro všude v M — jde o limitu monotonní posloupnosti). *Potom*

$$\int\limits_M f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n\,d\mu\,. \tag{48}$$

Důkaz. Změnou na množině míry nulové dosáhneme toho, že (47) platí všude v M. Ježto $f_n(x) \leqq f(x)$, je $\int\limits_M f_n\,d\mu \leqq \int\limits_M f\,d\mu$ a tedy i

$$\int\limits_M f\,d\mu \geqq \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n\,d\mu\,. \tag{49}$$

I. Nechť f je konečná skoro všude v M. Položme $f_n(x) = f(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$. Užijme věty 50. Budiž T libovolné číslo menší než $J = \int\limits_M f\,d\mu = \int\limits_{\mathbf{E}_r} f\,d\mu$. Potom existuje $\delta > 0$ s touto vlastností: Je-li $\mu(A) < \delta$, je $\int\limits_{I\left(\frac{1}{\delta}\right)\dot{-}A} f\,d\mu > T$. Dále užijeme Jegorovovy věty 37: Existuje měřitelná A_0 tak, že $\mu(A_0) < \delta$ a že $\lim f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v $I\left(\frac{1}{\delta}\right) \dot{-} A_0$. Podle věty 56 je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{I\left(\frac{1}{\delta}\right)\dot{-}A_0} f_n\,d\mu = \int\limits_{I\left(\frac{1}{\delta}\right)\dot{-}A_0} f\,d\mu > T$$

a tedy tím spíše $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_M f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{E_r} f_n\,\mathrm{d}\mu > T$. Ježto to platí pro každé $T < J$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_M f_n\,\mathrm{d}\mu \geqq J = \int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$. Odtud a z (49) plyne (48).

II. Nechť $M_0 = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) = +\infty)$ má kladnou míru. Potom existuje také omezená množina $M_1 \subset M$ kladné (a ovšem konečné) míry, na níž je $f(x) = +\infty$. Užijme věty 38, v níž zvolme třeba $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu(M_1)$. Podle této věty existuje množina $M_2 \subset M_1$, $\mu(M_2) < \varepsilon$ tak, že na množině $M_1 \dot{-} M_2$ platí toto: Ke každému K $(0 < K < < +\infty)$ existuje n_0 tak, že

$$(x \in M_1 \dot{-} M_2,\ n \geqq n_0) \Rightarrow f_n(x) \geqq K\,.$$

Pro $n \geqq n_0$ je tedy

$$\int\limits_M f_n\,\mathrm{d}\mu \geqq \int\limits_{M_1 \dot{-} M_2} f_n\,\mathrm{d}\mu \geqq K\,\mu(M_1 \dot{-} M_2) \geqq \tfrac{1}{2}K\,\mu(M_1)\,.$$

Tedy je $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_M f_n\,\mathrm{d}\mu = +\infty$, což spolu s (49) dává opět (48).

Nyní (snad se čtenář podiví, že teprve nyní) dokážeme větu o integraci součtu:

Věta 58. *Jest*

$$\int\limits_M (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M g\,\mathrm{d}\mu\,, \tag{50}$$

má-li pravá strana smysl.

Poznámka 3. Nestačí, má-li levá strana smysl. Neboť se může na př. státi, že f je konečná, $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Položím-li $g = -f$, je levá strana v (50) nula, ale pravá nemá smyslu. Důkazu věty 58 předešleme dvě pomocné věty.

2. pomocná věta. *Budiž M měřitelná. Buďte f, g funkce v oboru M, jednoduché, konečné, nezáporné a měřitelné v M. Potom platí* (50).

Důkaz. Nechť $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ jsou všechny hodnoty, kterých nabývá funkce f; podobně $b_1 < b_2 < \ldots < b_q$ pro funkci g. Položme

$$P_{ij} = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) = a_i,\ g(x) = b_j) \text{ pro } 1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq q\,.$$

To jsou měřitelné množiny. Podle § 1, příkl. 2 je[22])

$$\int_{P_{ij}} f \,\mathrm{d}\mu = a_i\,\mu(P_{ij})\,, \quad \int_{P_{ij}} g\,\mathrm{d}\mu = b_j\,\mu(P_{ij})\,,$$

$$\int_{P_{ij}} (f + g)\,\mathrm{d}\mu = (a_i + b_j)\,\mu(P_{ij}) = \int_{P_{ij}} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{P_{ij}} g\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{51}$$

Je však $M = \bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q} P_{ij}$ (disjunktní sjednocení). Sečteme-li tedy rovnice (51) pro $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$, dostaneme podle věty 47 rovnici (50).

3. pomocná věta. *Funkce f, g buďte měřitelné v M a všude v M nezáporné. Potom platí* (50).

Důkaz. Podle věty 39 existují funkce f_n, g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jednoduché, konečné, nezáporné, měřitelné v M tak, že

$$0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots, \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,,$$

$$0 \leqq g_1(x) \leqq g_2(x) \leqq \ldots, \ \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)\,,$$

načež

$$0 \leqq f_1(x) + g_1(x) \leqq f_2(x) + g_2(x) \leqq \ldots\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) + g_n(x)) = f(x) + g(x)\,.$$

Podle 2. pomocné věty je

$$\int_M (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_M f_n\,\mathrm{d}\mu + \int_M g_n\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Provedu-li zde limitní přechod $n \to \infty$, dává věta 57 rovnici (50).

Při důkazu věty 58 (t. j. pro libovolná znamení funkcí f, g) působí jakési obtíže ta okolnost, že v nerovnostech $(a + b)^+ \leqq a^+ + b^+$, $(a + b)^- \leqq a^- + b^-$ [23]) nemusí platit znamení rovnosti.

Důkaz věty 58. Nechť pravá strana v (50) existuje, takže nemůže býti zároveň jeden integrál roven $+\infty$ a druhý $-\infty$. Tedy jsou možny jen tyto dva případy (jež se ovšem navzájem nevylučují):

[22]) Ježto je vše nezáporné, dají se všechny výkony provésti.
[23]) které platí, když $a + b$ má smysl, viz pozn. 2 v § 1, vzorec (2).

I. $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu > -\infty\,,\quad \int\limits_M g\,\mathrm{d}\mu > -\infty\,;$

II. $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu < +\infty\,,\quad \int\limits_M g\,\mathrm{d}\mu < +\infty\,.$

Případ I. Zde skoro všude v M platí (viz větu 44) $f(x) > -\infty$, $g(x) > -\infty$ a tedy $f(x) + g(x) > -\infty$. Smíme předpokládati, že to platí všude v M. Tedy funkce $f^-, g^-, (f+g)^-$ [24]) jsou všude v M konečné (a ovšem nezáporné). Následkem nerovnosti $(a+b)^- \leqq a^- + b^-$ definuje rovnice

$$(52) \qquad (f(x) + g(x))^- + u(x) = f^-(x) + g^-(x)$$

funkci u, která je konečná, nezáporná a ovšem měřitelná v M. Podle 3. pomocné věty je tedy

$$\int\limits_M ((f+g)^- + u)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M u\,\mathrm{d}\mu\,,$$

$$\int\limits_M (f^- + g^-)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f^-\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M g^-\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Ale podle (52) jsou zde levé a tedy i pravé strany stejné, t. j.

$$(53) \qquad \int\limits_M (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M u\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f^-\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M g^-\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Ježto integrály vpravo jsou v případě I konečné, platí to i o integrálech vlevo. Dále jest

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

(ježto se odečítají jen konečná čísla, není zde obtíží). Odtud a z (52) plyne

$$(f+g)^+ + u = (f+g)^+ - (f+g)^- + f^- + g^- = f^+ + g^+\,,$$

a odtud opět užitím 3. pomocné věty (jako při (52))

$$(54) \qquad \int\limits_M (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M u\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f^+\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M g^+\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Ježto v (53) jsou všechny integrály konečné, lze odečísti (53) od (54) a podle definice integrálu (def. 10, bod II) dostaneme ihned (50).

Případ II. Zde lze užíti případu I na funkce $-f$, $-g$ (neboť na př. podle věty 54 značí $\int\limits_M (-\varphi)\,\mathrm{d}\mu$ totéž jako $-\int\limits_M \varphi\,\mathrm{d}\mu$) a máme

[24]) $(f+g)^-$ značí ovšem funkci, jejíž hodnota v bodě x je $(f(x) + g(x))^-$.

$$\int_M (-f-g)\,\mathrm{d}\mu = \int_M (-f)\,\mathrm{d}\mu + \int_M (-g)\,\mathrm{d}\mu\,,$$

načež věta 54 dává (50).

Věta 59. *Buďte $c_1, \ldots, c_n$ konečná reálná čísla. Potom je*

$$\int_M (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_M f_i(x)\,\mathrm{d}\mu\,, \tag{55}$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Nechť pravá strana má smysl; potom její hodnota je (podle věty 54 a pozn. 1) $\sum_{i=1}^{n} \int_M c_i f_i(x)\,\mathrm{d}\mu$. Pro $n = 1$ je tedy (55) zřejmá, pro $n = 2$ je to věta 58, pro $n > 2$ plyne pak (55) indukcí.

Poznámka 4. Věta 59 nám umožňuje dokázati větu, kterou jsem čtenáři slíbil v § 1, pozn. 8. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná, $\mu(M) < +\infty$; budiž f reálná funkce definovaná v M a omezená v M, takže existuje $K \in \mathbf{E}_1$ tak, že $|f(x)| \leqq K$ pro všechna $x \in M$. Potom můžeme sestrojiti pro každý rozklad

$$(\mathfrak{M}):\quad M_1, M_2, \ldots, M_p$$

množiny M horní a dolní součty (ve smyslu § 1, pozn. 4)

$$s_{f,M}(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{p} v_i\,\mu(M_i)\,, \quad S_{f,M}(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{p} V_i\,\mu(M_i)\,,$$

kde $v_i = \inf_{x \in M_i} f(x)$, $V_i = \sup_{x \in M_i} f(x)$. Zřejmě

$$-K\,\mu(M) \leqq s_{f,M}(\mathfrak{M}) \leqq S_{f,M}(\mathfrak{M}) \leqq K\,\mu(M)\,. \tag{56}$$

Existuje tedy konečné supremum všech dolních součtů — označme je $\mathfrak{s}$ — a konečné infimum všech horních součtů — označme je $\mathfrak{S}$.[25]) Jsou-li $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ dva libovolné rozklady, sestrojím jejich společné zjemnění $\mathfrak{M}'$, načež zřejmě (viz pozn. 9 v § 1) $s_{f,M}(\mathfrak{M}_1) \leqq s_{f,M}(\mathfrak{M}')$, $S_{f,M}(\mathfrak{M}_2) \geqq S_{f,M}(\mathfrak{M}')$, což spolu s nerovností $s_{f,M}(\mathfrak{M}') \leqq S_{f,M}(\mathfrak{M}')$ dává

$$s_{f,M}(\mathfrak{M}_1) \leqq S_{f,M}(\mathfrak{M}_2)\,.$$

Ježto to platí (při zvoleném $\mathfrak{M}_2$) pro všechna $\mathfrak{M}_1$, je $\mathfrak{s} \leqq S_{f,M}(\mathfrak{M}_2)$. A ježto tato (poslední) nerovnost platí pro všechna $\mathfrak{M}_2$, dostáváme konečně $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{S}$.

---

[25]) Jde nyní o úvahy téměř totožné s úvahami v **J I**, kap. II.

Věta 60. *Budiž M měřitelná, $\mu(M) < +\infty$. Budiž f reálná funkce, definovaná a omezená v M. Potom je $\mathfrak{s} = \mathfrak{S}$ tehdy a jen tehdy, je-li f měřitelná v M, načež $\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \mathfrak{s} = \mathfrak{S}$.*

Poznámka 5. Abych se mohl jednoduše vyjadřovati, předpokládal jsem, že f je definována všude (a ne jen skoro všude) v M. To ovšem není žádné podstatné omezení obecnosti.

Důkaz. Nechť v_i, V_i mají význam jako svrchu. Nechť $|f(x)| \leqq K$ pro všechna $x \in M$.

I. Budiž f měřitelná v M. Sestrojme funkce (měřitelné v M) $g_1(x) = K + f(x) \geqq 0$, $g_2(x) = K - f(x) \geqq 0$. Zřejmě

$$\inf_{x \in M_i} g_1(x) = K + \inf_{x \in M_i} f(x), \quad \inf_{x \in M_i} g_2(x) = K - \sup_{x \in M_i} f(x),$$

takže pro jakýkoliv rozklad $\mathfrak{M}$ je

$$s_{g_1,M}(\mathfrak{M}) = K\,\mu(M) + s_{f,M}(\mathfrak{M}), \quad s_{g_2,M}(\mathfrak{M}) = K\,\mu(M) - S_{f,M}(\mathfrak{M}).$$

Přejděme zde k supremu (tedy musím vzíti také supremum členu $-S_{f,M}(\mathfrak{M})$, tedy infimum členu $S_{f,M}(\mathfrak{M})$); obdržíme podle def. 10, bod I:

$$\int_M g_1 \, \mathrm{d}\mu = K\,\mu(M) + \mathfrak{s}, \quad \int_M g_2 \, \mathrm{d}\mu = K\,\mu(M) - \mathfrak{S}. \tag{57}$$

Ale $\int_M f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje (věta 55) a $\int_M K \, \mathrm{d}\mu = K\,\mu(M)$; podle věty 59 je tedy

$$\int_M g_1 \, \mathrm{d}\mu = K\,\mu(M) + \int_M f \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_M g_2 \, \mathrm{d}\mu = K\,\mu(M) - \int_M f \, \mathrm{d}\mu.$$

Srovnáním s (57) plyne $\mathfrak{s} = \mathfrak{S} = \int_M f \, \mathrm{d}\mu$.

II. Nechť $\mathfrak{S} = \mathfrak{s}$. Potom ke každému $\delta > 0$ existují rozklady $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ tak, že

$$s_{f,M}(\mathfrak{M}_1) > \mathfrak{s} - \tfrac{1}{2}\delta^2, \quad S_{f,M}(\mathfrak{M}_2) < \mathfrak{s} + \tfrac{1}{2}\delta^2.$$

Přejdu-li k společnému zjemnění $\mathfrak{M}$, dostanu rozklad $\mathfrak{M}$ s vlastností

$$S_{f,M}(\mathfrak{M}) - s_{f,M}(\mathfrak{M}) = \sum_i (V_i - v_i)\,\mu(M_i) < \delta^2. \tag{58}$$

Sestrojme v M jednoduchou funkci g tak, že pro $x \in M_i$ je $g(x) = v_i$; to je měřitelná funkce. Označme znakem j ty indexy i, pro něž $V_j - v_j < \delta$ a znakem l ty indexy i, pro něž $V_l - v_l \geqq \delta$. Podle (58) je

$$\delta \cdot \mu(\bigcup_l M_l) = \delta \sum_l \mu(M_l) \leqq \sum_l (V_l - v_l)\, \mu(M_l) < \delta^2,$$

tedy $\mu(\bigcup_l M_l) < \delta$. Je-li však x v některém M_j, je $v_j \leqq f(x) \leqq V_j < v_j + \delta$, tedy $0 \leqq f(x) - g(x) = f(x) - v_j < \delta$. Tedy: Ke každému $\delta > 0$ existuje funkce g, měřitelná v M a taková, že pro všechna $x \in M$, neležící v jisté množině míry menší než δ, je $|f(x) - g(x)| < \delta$.

Sestrojme funkci g_n, příslušnou k hodnotě $\delta = 2^{-n}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Tím dostáváme posloupnost funkcí $g_1, g_2, \ldots$ měřitelných v M s touto vlastností: Ke každému n existuje měřitelná množina $P_n \subset M$, $\mu(P_n) < 2^{-n}$ a taková, že pro každé $x \in M \dot{-} P_n$ je $|f(x) - g_n(x)| < 2^{-n}$. Položme $Q_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} P_n$, $Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m$; tedy $\mu(Q_m) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} = 2^{1-m}$, $\mu(Q) = 0$. Nechť $x \in M \dot{-} Q$. Potom existuje m tak, že $x \in M \dot{-} Q_m$, tedy $x \in M \dot{-} P_n$ pro všechna $n \geqq m$. Pro všechna $n \geqq m$ je tedy $|f(x) - g_n(x)| < 2^{-n}$, tedy $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$. Tato rovnice platí tedy skoro všude v M. Ježto g_n jsou měřitelné v M, je i f měřitelná v M, což bylo dokázati.

Poznámka 6. Aby čtenář mohl již teď počítati některé příklady (věnujeme jim sedmý paragraf), připojme některé poznámky. Integrál

$$(59) \qquad \int_M f \, \mathrm{d}\mu \ \ (\text{nebo} \int_M f(x) \, \mathrm{d}\mu \ \text{nebo} \int_M f(x_1, \ldots, x_r) \, \mathrm{d}\mu)$$

nazýváme, jak bylo řečeno, Lebesgue-Stieltjesovým integrálem; je-li to třeba vyznačit, píšeme $(\mathcal{LS}) \int_M f \, \mathrm{d}\mu$. Jestliže speciálně μ je Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_r$,[26]) nazýváme (59) Lebesgueovým integrálem. V tomto případě píšeme často (ve shodě s klasickým označením)

$$\int_M f(x) \, \mathrm{d}x$$

nebo

$$\int_M f(x_1, \ldots, x_r) \, \mathrm{d}x$$

[26]) T. j. $\mu(I)$ je (pro omezený interval I) „objem" intervalu I.

nebo

$$\int\int\limits_M \dots \int f(x)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_r$$

nebo

$$\int\int\limits_M \dots \int f(x_1, \dots, x_r)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_r$$

a podobně. V posledních dvou znacích si myslíme napsáno r symbolů $\int$; je-li r malé, vypisujeme jich vskutku r, na př.

$$\iint\limits_M f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,, \quad \iiint\limits_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

atd. Ovšem lze také užít znaku s jediným symbolem $\int$. Při těchto „licencích" nezáleží na označení „integračních proměnných"; symboly

$$\iint\limits_M f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,, \quad \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

značí totéž, totiž $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$, kde $M \subset \mathbf{E}_2$ a μ je Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_2$. Je-li třeba nějak zvláště vyznačiti, že jde o Lebesgueův integrál, píšeme též $(\mathcal{L}) \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ještě něco o integračním oboru: Je-li M dáno nějakými podmínkami pro souřadnice, vypisujeme někdy tyto podmínky pod integrační symbol. Tak na př. $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ značí integrál, kde integračním oborem je polokruh $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]}(x^2 + y^2 \leqq 1, y \geqq 0)$; v integrálu $\iint\limits_{x>0} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ je integračním oborem polorovina $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]}(x > 0)$.

Ještě jedno speciální označení pro Lebesgueův integrál v případě $r = 1$. Je-li I interval s počátečním bodem a a koncovým bodem b, píšeme též $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ místo $\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x$, na př. $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a pod. Z tohoto označení není sice vidět, počítáme-li krajní body k integračnímu oboru, ale na tom nezáleží, ježto jednobodové množiny mají Lebesgueovu míru rovnu nule. Ovšem $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ježto $\langle a, a\rangle$ má Lebesgueovu míru rovnu nule.

Poznámka 7. Je-li f funkce jedné proměnné, omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, dá se definovati horní a dolní integrál ve smyslu Riemannově; jsou-li si rovny, říká se jejich společné hodnotě (vlastní) Riemannův integrál (viz **J I**, kap. II, § 2),[27]) který označíme, bude-li nutno rozlišení, $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí pak tato věta (v kap. XI odvodíme výsledky mnohem úplnější):

Existuje-li $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, *existuje též* $(\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a oba integrály si jsou rovny.*

Důkaz. Budiž f omezená v $\langle a, b\rangle$. Zvolme (ve smyslu **J I**, kap. II, § 2) libovolné rozdělení D: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a sestrojme dolní a horní součet ve smyslu **J I**, kap. II, § 2:

$$\bar{s}(D) = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i (x_i - x_{i-1}) \,, \quad \bar{S}(D) = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i (x_i - x_{i-1}) \,,$$

kde $\bar{v}_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} f(x)$, $\bar{V}_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} f(x)$.

Rozdělení D přiřaďme rozklad intervalu $\langle a, b\rangle$

$$(\mathfrak{M}): \quad \langle x_0, x_1\rangle, (x_1, x_2\rangle, \ldots, (x_{n-1}, x_n\rangle \,;$$

tyto množiny označme $M_1, M_2, \ldots, M_n$ a sestrojme příslušné horní a dolní součty, nyní ve smyslu pozn. 4 v § 1 této kapitoly:

$$s(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \mu(M_i) \,, \quad S(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{n} V_i\, \mu(M_i) \,.$$

Zde jde o Lebesgueovu míru, tedy $\mu(M_i) = x_i - x_{i-1}$; dále $M_i \subset \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a proto $v_i = \inf\limits_{x \in M_i} f(x) \geqq \bar{v}_i$, $V_i = \sup\limits_{x \in M_i} f(x) \leqq \bar{V}_i$, takže $\bar{s}(D) \leqq s(\mathfrak{M})$, $S(\mathfrak{M}) \leqq \bar{S}(D)$.

Tedy tím spíše $\bar{s}(D) \leqq \mathfrak{s}$, $\mathfrak{S} \leqq \bar{S}(D)$ ($\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$ ve smyslu pozn. 4 a věty 60).

Přejdeme-li k číslům $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup \bar{s}(D)$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf \bar{S}(D)$ (Riemannův horní a dolní integrál), dostaneme

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \mathfrak{s} \leqq \mathfrak{S} \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

[27]) O nevlastních integrálech, zavedených v **J I**, kap. VIII, zde vůbec nemluvím.

Existuje-li tedy Riemannův integrál (t. j. je-li horní integrál roven dolnímu), dostáváme $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = \mathfrak{s} = \mathfrak{S}$, načež věta 60 dává žádaný výsledek.

Tedy: všechny Riemannovy integrály jsou současně Lebesgueovými integrály. Soustavněji se Riemannovým integrálem (nejenom v E_1, nýbrž i v E_r) budeme zabývati v kap. XI. Po těchto poznámkách se vrátíme k hlavnímu předmětu tohoto paragrafu a odvodíme ještě z věty 57 několik dalších vět (užívajíce věty 58 o integraci součtu). Jde zase obecně o Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Věta 61. *Buďte v_n $(n = 1, 2, \ldots)$ funkce měřitelné v M; budiž $v_n(x) \geqq 0$ skoro všude v M pro $n = 1, 2, 3, \ldots$*[28]) *Skoro všude v M existuje tedy (konečný nebo nekonečný) součet řady $s(x) = v_1(x) + v_2(x) + \ldots$ Potom je*

$$\int_M s\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n\,d\mu\,. \tag{60}$$

Důkaz. Klaďme $s_n(x) = v_1(x) + \ldots + v_n(x)$. Podle vět 57, 58 je zřejmě

$$\int_M s\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M s_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_M v_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M v_k\,d\mu\,.$$

Tím je věta 57 přenesena z posloupností na řady. Podobně lze přenésti na řady (stejnoměrně konvergentní) větu 56 a i mnohé další věty. Většinou nebudu dále podobné triviální modifikace uvádět.

Malým zobecněním věty 57 je

Věta 62. *Buďte g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ měřitelné v M; budiž $g_1(x) \leqq \leqq g_2(x) \leqq \ldots$ skoro všude v M. Aspoň pro jednu hodnotu $n \in \mathbf{N}$ budiž $\int_M g_n\,d\mu > -\infty$. Položme $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Potom*

$$\int_M g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n\,d\mu\,. \tag{61}$$

[28]) Úmyslně jsem tento předpoklad řekl zdánlivě dvojznačně. Může to znamenat toto: Existuje $N \subset M$ tak, že $\mu(N) = 0$ a že $v_n(x) \geqq 0$ pro každé $x \in M \dot{-} N$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nebo to může znamenat toto: Ke každému přirozenému n existuje N_n tak, že $\mu(N_n) = 0$ a že $v_n(x) \geqq 0$ pro každé $x \in M \dot{-} N_n$. Ale tato druhá interpretace znamená totéž jako první; neboť položíme-li $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup \ldots$, je $\mu(N) = 0$ a je $v_n(x) \geqq 0$ pro každé $x \in M \dot{-} N$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Poznámky podobného druhu nebudu již opakovati.

Poznámka 8. Změnou znamení (věta 54 pro $c = -1$) dostaneme obdobný výsledek pro $g_1(x) \geqq g_2(x) \geqq \ldots$, $\int_M g_n \, d\mu < +\infty$.

Důkaz. Nic se nestane, vynecháme-li konečný počet členů posloupnosti $g_1, g_2, \ldots$, takže můžeme předpokládati

$$\int_M g_1 \, d\mu > -\infty \,. \tag{62}$$

Je-li $\int_M g_1 \, d\mu = +\infty$, je ovšem (věta 43) $\int_M g_n \, d\mu = \int_M g \, d\mu = +\infty$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, a tedy (61) platí. Nechť tedy (62) je konvergentní. Tedy je g_1 konečné skoro všude, takže funkce $f_n = g_n - g_1$ jsou definovány skoro všude v M, $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots$, $\lim f_n(x) = g(x) - g_1(x)$ skoro všude v M. Podle věty 57 je tedy

$$\int_M (g - g_1) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M (g_n - g_1) \, d\mu \,. \tag{63}$$

Ježto $\int_M g_1 \, d\mu$ je konečné číslo, je podle věty 58

$$\int_M g_n \, d\mu = \int_M (g_n - g_1) \, d\mu + \int_M g_1 \, d\mu \,, \tag{64}$$

$$\int_M g \, d\mu = \int_M (g - g_1) \, d\mu + \int_M g_1 \, d\mu \,, \tag{64a}$$

a tedy podle (63), (64), (64a)

$$\int_M g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M (g_n - g_1) \, d\mu + \int_M g_1 \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n \, d\mu \,.$$

Mluvili jsme dosud hlavně o neklesajících posloupnostech; nyní promluvíme o libovolných posloupnostech. Napřed o posloupnostech nezáporných funkcí:

Věta 63. (T. zv. Fatouovo lemma). *Buďte $f_1, f_2, \ldots$ měřitelné a skoro všude nezáporné v M. Potom*

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu \,. \tag{65}$$

Důkaz. Klademe-li $g_p(x) = \inf (f_p(x), f_{p+1}(x), \ldots)$, je $0 \leqq g_p(x) \leqq$ $\leqq f_p(x)$, $g_p(x) \leqq g_{p+1}(x)$, $g(x) = \lim\limits_{p\to\infty} g_p(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ skoro všude v M. Věta 57 dává $\int_M g \, d\mu = \lim\limits_{p\to\infty} \int_M g_p \, d\mu$; dále $\int_M g_p \, d\mu \leqq \int_M f_p \, d\mu$ a tedy přechodem k lim inf:

$$\lim_{p\to\infty} \int_M g_p \, d\mu \leqq \liminf_{p\to\infty} \int_M f_p \, d\mu \,.$$

Poznámka 9. Někdy stačí tato slabší věta: Buďte f_n ($n = 1, 2, \ldots$) měřitelné a skoro všude nezáporné v M. Nechť skoro všude v M existuje $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Potom

$$\int_M f \, d\mu \leqq \sup_{n=1,2,3\ldots} \int_M f_n \, d\mu . \tag{66}$$

Důkaz ihned z věty 63, neboť lim inf posloupnosti není větší než její supremum. A teď posloupnosti s libovolným znamením:

Věta 64. *Buďte f_n ($n = 1, 2, \ldots$) měřitelné v M. Nechť existuje funkce $\varphi \in \mathbf{L}(M)$ (viz def. 11) tak, že pro $n = 1, 2, \ldots$ je $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$ skoro všude v M. Potom je $f_n \in \mathbf{L}(M)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a platí*

$$\begin{gathered} -\infty < \int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu \leqq \\ \leqq \limsup_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu \leqq \int_M \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu < +\infty . \end{gathered} \tag{67}$$

Důkaz. Že $f_n \in \mathbf{L}(M)$, plyne z věty 55. Tedy jsou f_n, φ konečné skoro všude v M a tedy $2\varphi(x) \geqq f_n(x) + \varphi(x) \geqq 0$ skoro všude v M; z věty 63 tedy plyne

$$0 \leqq \int_M \liminf_{n\to\infty} (\varphi + f_n) \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_M (\varphi + f_n) \, d\mu .$$

Ježto jde vesměs o konvergentní integrály, lze odečísti $\int_M \varphi \, d\mu$ a vyjde ihned

$$-\infty < \int_M (-\varphi) \, d\mu \leqq \int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu ,$$

což je první polovina tvrzení. Druhou polovinu (obsahující lim sup) dostaneme, užijeme-li výsledku právě dokázaného na funkce $-f_n$.

Zvláště důležitý je tento speciální případ:

Věta 65. *Buďte f_n ($n = 1, 2, \ldots$) měřitelné v M. Nechť existuje funkce $\varphi \in \mathbf{L}(M)$ tak, že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$ skoro všude v M. Nechť existuje $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ skoro všude v M. Potom je $f_n \in \mathbf{L}(M)$ ($n = 1, 2, \ldots$), $f \in \mathbf{L}(M)$,*

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu . \tag{68}$$

Důkaz. Plyne ihned z věty 64, neboť skoro všude v M je $f(x) = \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)$.

Poznámka 10. Mám-li nějaký systém $\mathfrak{F}$ funkcí a existuje-li funkce $\varphi \in \mathbf{L}(M)$ a nulová množina N tak, že pro každou funkci $f \in \mathfrak{F}$ a pro každé $x \in M \dot{-} N$ je $|f(x)| \leqq \varphi(x)$, budeme říkati, že funkce systému $\mathfrak{F}$ mají v M společnou integrabilní majorantu (totiž právě funkci φ).

Poznámka 11. Buďte $f_1, f_2, \ldots$ funkce měřitelné v M; budiž

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ skoro všude v } M .$$

Potom rovnice (68) jistě platí, jestliže je splněna aspoň jedna z těchto podmínek:

I. $\mu(M) < +\infty$, $\lim f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M, $\int_M f_n \, d\mu$ existují (věta 56).

II. $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots$ skoro všude v M (věta 57).

III. Funkce $f_1, f_2, \ldots$ mají v M společnou integrabilní majorantu (věta 65). V tomto případě dokonce všechny integrály v (68) mají konečnou hodnotu.

To jsou nejdůležitější věty tohoto paragrafu o platnosti rovnice (68);[29]) později si odvodíme ještě jednu větu jiného charakteru (viz § 5, věta 69).

Těchto vět užíváme ovšem také pro nekonečné řady. Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ skoro všude v M (v_n měřitelné v M), potom je

$$\int_M f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n \, d\mu ,$$

jestliže pro funkce $f_n(x) = v_1(x) + \ldots + v_n(x)$ je splněna některá z podmínek I, II, III a jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ má $\sum_{k=1}^{n} \int_M v_k \, d\mu$ smysl; neboť potom podle (68) a věty 59 je

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_M v_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M v_k \, d\mu .$$

[29]) Mají velký význam pro praktický výpočet integrálů; viz na př. § 7.

Vedle těchto vět je v theoretických úvahách často důležitá věta 63, kterou lze ostatně často nahraditi větou z pozn. 9 (která se snáze pamatuje).

Poznámka 12. Vytkněme ještě zvláště jeden jednoduchý případ, kdy lze použíti věty 65: *Je-li* $\mu(M) < +\infty$ *a existuje-li* $c \in \mathbf{E}_1$ *tak, že pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *je* $|f_n(x)| \leqq c$ *skoro všude v* M, mají funkce f_n v M společnou integrabilní majorantu c, neboť $\int\limits_M c \, d\mu = c\,\mu(M)$ je konečné číslo.

Dokážeme nyní t. zv. *první větu o střední hodnotě* pro Lebesgue-Stieltjesovy integrály.

Věta 66. *Budiž* f *měřitelná v* M. *Budiž* $\varphi \in \mathbf{L}(M)$, $\varphi(x) \geqq 0$ *skoro všude v* M. *Budiž* m *konečné reálné číslo. Potom platí:*

1. Je-li $f(x) \geqq m$ *skoro všude v* M, *je*

$$\int\limits_M f \varphi \, d\mu \geqq m \int\limits_M \varphi \, d\mu . \tag{69}$$

2. Je-li $f(x) \leqq m$ *skoro všude v* M, *je*

$$\int\limits_M f \varphi \, d\mu \leqq m \int\limits_M \varphi \, d\mu . \tag{70}$$

Důkaz. V případě 1 násobíme nerovnost $f(x) \geqq m$ číslem $\varphi(x) \geqq 0$ a dostaneme skoro všude v M nerovnost $f(x)\,\varphi(x) \geqq m\,\varphi(x)$, takže podle věty 54 a 43 (jež zaručuje v následujícím vzorci existenci integrálu vpravo) je

$$-\infty < m \int\limits_M \varphi \, d\mu = \int\limits_M m\varphi \, d\mu \leqq \int\limits_M f \varphi \, d\mu .$$

Případ 2 převedeme na 1 tím, že místo f, m vezmeme $-f$, $-m$.

Poznámka 13. Budiž $\varphi \in \mathbf{L}(M)$, $\varphi(x) \geqq 0$ skoro všude v M. Potom platí:

I. Je-li f měřitelná v M, $m_1 \leqq f(x) \leqq m_2$ skoro všude v M ($m_1 \leqq m_2$ konečná čísla), existuje číslo m tak, že

$$\int\limits_M f \varphi \, d\mu = m \int\limits_M \varphi \, d\mu , \quad m_1 \leqq m \leqq m_2 . \tag{71}$$

II. Je-li $M \neq \emptyset$ kompaktní[30]) a souvislá, f reálná, konečná a spojitá v M, existuje bod $\xi \in M$ tak, že

$$\int_M f \varphi \, d\mu = f(\xi) \int_M \varphi \, d\mu \,. \tag{72}$$

Důkaz. I. Podle věty 66 je

$$m_1 \int_M \varphi \, d\mu \leqq \int_M f \varphi \, d\mu \leqq m_2 \int_M \varphi \, d\mu \,. \tag{73}$$

Je-li $\int_M \varphi \, d\mu = 0$, je podle (73) $\int_M f \varphi \, d\mu = 0$ a (71) platí pro každé m. Je-li však $0 < \int_M \varphi \, d\mu$, leží číslo $m = \int_M f \varphi \, d\mu : \int_M \varphi \, d\mu$ podle (73) v intervalu $\langle m_1, m_2 \rangle$.

II. V tomto případě nabývá funkce f v M své nejmenší hodnoty m_1 a největší hodnoty m_2,[31]) načež platí (71) pro vhodné m. Ale f zobrazuje M na souvislou množinu, tedy na interval $\langle m_1, m_2 \rangle$,[32]) takže ve vhodném bodě ξ nabývá f hodnoty m z rovnice (71), což dává (72).

Věta této poznámky platí zřejmě i tehdy, když $\varphi(x) \leqq 0$ skoro všude v M (stačí násobit (71), (72) číslem -1); nerovnosti (69), (70) obrátí ovšem v tomto případě smysl.

§ 5*. Konvergence podle míry.* Dána je stále jistá míra μ (t. j. rozšíření jisté funkce intervalu s vlastností S_r).

Definice 12. *Buďte $f, f_1, f_2, \dots$ funkce, které jsou konečné skoro všude v množině $M \subset \mathbf{E}_r$. Budeme říkati, že funkce $f_1, f_2, \dots$ konvergují v množině M podle míry (neboli asymptoticky) k funkci f, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ vnější míra množiny*

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon)^{33)} \tag{74}$$

konverguje k nule pro $n \to \infty$; znak

$$\lim_{n \to \infty} \text{as}_M f_n = f \,. \tag{75}$$

---

[30]) T. j. uzavřená a omezená. O pojmu souvislé množiny viz **D II**, kap. VI, § 18.

[31]) Viz **D II**, věta 170, str. 323.

[32]) Viz **D II**, věta 171 a pozn. 5 v kap. VI, § 18 (str. 319).

[33]) Tato množina závisí (při daném ε) na n.

Poznámka 1. Platí-li (75) a je-li $g \sim f\,(M, \mu)$, je zřejmě též

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{as}_M\, f_n = g\,. \tag{76}$$

Naopak, platí-li (75) a (76), je $g \sim f\,(M, \mu)$. Důkaz.[34]) Pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ a jakékoliv n je

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, |f(x) - g(x)| > \varepsilon) \tag{77}$$

částí množiny

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, |f(x) - f_n(x)| > \tfrac{1}{2}\varepsilon) \cup \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, |g(x) - f_n(x)| > \tfrac{1}{2}\varepsilon) \tag{78}$$

(neboť pro bod $x \in M$, jenž nepatří do žádné z těchto dvou množin, je $|f(x) - g(x)| \leqq \varepsilon$). Ale vnější míra množiny (78) má pro $n \to \infty$ limitu 0; tedy (77) má míru 0 a tedy i $\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M,\ |f - g| \neq 0) =$

$$= \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(x \in M,\ |f - g| > \frac{1}{p}\right) \text{ má míru 0.}$$

Věta 67. *Budiž* $\mu(M) < +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *skoro všude v* M, *buďte* f_n, f *konečné skoro všude v* M *a buďte* f_n *měřitelné v* M. *Potom platí* (75).

Důkaz.[34]) Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme ještě libovolně $\delta > 0$. Máme dokázati, že pro všechna dosti velká n má (74) míru menší než δ. Podle Jegorovovy věty 37 existuje množina A míry $\mu(A) < \delta$ tak, že konvergence je stejnoměrná v $M \dot{-} A$. Tedy existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$, $x \in M \dot{-} A$ je $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Pro $n > n_0$ je tedy množina (74) obsažena v A a má tedy míru menší než δ.

Naopak posloupnost konvergující podle míry nemusí konvergovati skoro všude (viz cvič. 1); ale platí aspoň toto:

Věta 68. *Nechť platí* (75). *Potom existuje vybraná posloupnost* f_{k_1}, $f_{k_2}, \ldots$ *tak, že*

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x) \text{ skoro všude v } M\,. \tag{79}$$

Jestliže tedy f_n *jsou měřitelné v* M, *je i* f *měřitelná v* M.

---

[34]) Při důkazu smíme předpokládat, že vyšetřované funkce jsou vesměs konečné všude v M (viz def. 12).

Důkaz. K číslům $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ volme indexy $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ postupně tak, že

$$\mu_e\left(\underset{x}{\mathcal{E}}\left(x \in M,\ |f(x) - f_{k_n}(x)| > \frac{1}{n}\right)\right) < 2^{-n}\,. \tag{80}$$

Množinu zde vlevo uvedenou označme A_n a pišme $A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Podle pozn. 7 v kap. I, § 7 je $\mu(A) = 0$. Je-li $x \in M \dot{-} A$, existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $x \operatorname{non} \in A_n$, tedy $|f(x) - f_{k_n}(x)| \leqq \frac{1}{n}$. Tedy $\lim f_{k_n}(x) = f(x)$ pro $x \in M \dot{-} A$.

Poznámka 2. Zobecníme nyní větu 65. Napřed zavedeme jedno pojmenování. Nechť $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$ konverguje. Potom podle věty 51 platí tento výrok:

(V) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s touto vlastností: Pro každou měřitelnou $B \subset M$, vyhovující buďto podmínce[35]) $B\,I\left(\frac{1}{\delta}\right) = \emptyset$ nebo podmínce $\mu(B) \leqq \delta$, je

$$\int\limits_B |f|\,\mathrm{d}\mu \leqq \varepsilon\,. \tag{81}$$

Jestliže tedy $\mathfrak{F}$ je nějaká množina funkcí, majících konvergentní integrál přes M, potom ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $f \in \mathfrak{F}$ existuje příslušné $\delta > 0$ ve smyslu výroku (V). Jestliže je možno zvoliti totéž δ pro všechny funkce $f \in \mathfrak{F}$ (takže toto δ závisí jen na ε, ale nikoliv na f), říkáme, že funkce $f \in \mathfrak{F}$ *mají v M stejně absolutně spojité integrály.*[36])

Věta 69. *Nechť konvergují integrály*

$$\int\limits_M f_n\,\mathrm{d}\mu \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{82}$$

Nechť funkce $f_1, f_2, \ldots$ mají v M stejně absolutně spojité integrály. Nechť konečně

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{as}_N f_n = f \tag{83}$$

---

[35]) $I(p) = \langle -p, p\rangle \times \langle -p, p\rangle \times \ldots \times \langle -p, p\rangle$.

[36]) To je zřejmě splněno na př. tehdy, když funkce $f \in \mathfrak{F}$ mají v M společnou integrabilní majorantu (§ 4, pozn. 10).

pro každou omezenou množinu $N \subset M$. Potom je

(84) $$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu = \int_M f \, d\mu \, ,$$

při čemž integrál vpravo konverguje.

Poznámka 3. Podle [36]) a podle věty 67 je tato věta vskutku zobecněním věty 65.

Důkaz. f je měřitelná v každé měřitelné omezené části množiny M (věta 68), tedy je měřitelná v M; lze totiž psáti

(85) $$M = \lim_{k\to\infty} M_k, \; M_1 \subset M_2 \subset \ldots, \; M_k \text{ měřitelné a omezené.}$$

Každému $\varepsilon > 0$ přiřaďme podle definice stejné absolutní spojitosti určité číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že platí pro $n = 1, 2, \ldots$:

(86) $$\left(B \subset M, B \text{ měřitelná}, B\, I\left(\frac{1}{\delta}\right) = \emptyset\right) \Rightarrow \int_B |f_n| \, d\mu \leqq \varepsilon \, ,$$

(87) $$(B \subset M, \mu(B) < \delta) \Rightarrow \int_B |f_n| \, d\mu \leqq \varepsilon \, .$$

Tvrdím nyní: *Implikace* (86), (87) *platí i tehdy,*[37]) *píšeme-li v nich f místo f_n.* Důkaz. Budiž předně B omezené a nechť splňuje premisu v (86) nebo (87). Podle věty 68 existuje posloupnost $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots$, konvergující k f skoro všude v B, načež pozn. 9 v § 4 dává

$$\int_B |f| \, d\mu \leqq \sup_{n=1,2,\ldots} \int_B |f_{k_n}| \, d\mu \leqq \varepsilon \, .$$

Je-li B neomezené a splňuje premisu v (86) nebo (87), je (podle (85) a věty 49) opět

$$\int_B |f| \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{BM_k} |f| \, d\mu \leqq \varepsilon \, .$$

Poznamenejme, že podle definice 12 jsou f_n, f konečné skoro všude v M_k (viz (83)) a tedy i skoro všude v M; lze tedy předpokládati, že jsou konečné všude v M.

Budiž nyní $\varepsilon > 0$; zvolme předně $\delta = \delta(\varepsilon)$, takže (podle (86)) je

(88) $$\int_{M \dot{-} I\left(\frac{1}{\delta}\right)} |f - f_n| \, d\mu \leqq \int |f| \, d\mu + \int |f_n| \, d\mu \leqq 2\varepsilon$$

[37]) S týmž $\delta = \delta(\varepsilon)$.

pro $n = 1, 2, \ldots$ Položme nyní $\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^r$,

$$(89) \qquad B_n = \mathop{\mathcal{E}}_x \left(x \in M \,.\, I\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad |f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon_1\right),$$

$$(90) \qquad C_n = \mathop{\mathcal{E}}_x \left(x \in M \,.\, I\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon_1\right).$$

Pro každé n je

$$(91) \qquad \int_{B_n} |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqq \varepsilon_1 \,.\, \mu\left(I\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) = \varepsilon \,.$$

Dále (ježto $\lim \mathrm{as}_{MI\left(\frac{1}{\delta}\right)} f_n = f$) existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\mu(C_n) <$ $< \delta$ a tedy podle (87)

$$(92) \qquad \int_{C_n} |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_{C_n} |f_n| \,\mathrm{d}\mu + \int_{C_n} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqq 2\varepsilon \,.$$

Tedy: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je podle (88), (91), (92)

$$\int_M |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqq 5\varepsilon \,,$$

t. j.

$$(93) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_M |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0 \,.$$

Odtud plyne předně, že $f - f_n$ a tedy i f má konvergentní integrál přes M, a za druhé, že integrál

$$\int_M f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_M f \,\mathrm{d}\mu + \int_M (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu$$

má za limitu $\int_M f \,\mathrm{d}\mu$.

Poznámka 4. Všimněme si, že jsme dokonce dokázali (93), což znamená více než (84) (neboť (84) ihned plyne z (93)).

Cvičení

1. Pro celá $n = 1, 2, 3, \ldots$ a pro celá $k = n, n + 1, n + 2, \ldots, 2^n - 1$ definujme funkce $f_{n,k}$ takto:

$$f_{n,k}(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } \frac{k}{2^n} \leqq x < \frac{k+1}{2^n}, \quad f_{n,k}(x) = 0 \text{ pro ostatní } x \in \mathbf{E}_1 \,.$$

Budiž μ Lebesgueova míra v E_1. Srovnejte všechny tyto funkce v posloupnost podle rostoucího n a při témže n podle rostoucího k, t. j. $f_{1,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{3,3}, f_{3,4}, \ldots, f_{3,7}, f_{4,4}, f_{4,5}, \ldots, f_{4,15}, \ldots$ Zjistěte: Tato posloupnost je konvergentní podle míry k 0 v intervalu (0, 1), ale není konvergentní v žádném bodě intervalu (0, 1). Za druhé: Tato posloupnost má stejně absolutně spojité integrály v (0, 1), ale nemá žádnou společnou integrabilní majorantu. Tedy: jsou splněny podmínky věty 69, ale nejsou splněny podmínky věty 65. Jako ilustraci k větě 68 sestrojte vybranou posloupnost, konvergující k nule skoro všude (ba dokonce všude) v (0, 1).

§ 6. Integrál komplexní funkce. Provedeme opět (podobně jako v **J I**, kap. 9, § 4) malé formální, ale pro praxi užitečné zobecnění definice integrálu — ale jen pro **konvergentní** integrály. Je-li f komplexní funkce, $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ (f_1, f_2 reálné funkce), budeme říkati, že $\int_M f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje* a budeme jej definovati rovnicí

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_M f_1 \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_M f_2 \, \mathrm{d}\mu \,, \tag{94}$$

jestliže oba integrály vpravo konvergují. Přehlédněme krátce, jak nutno modifikovati naše věty při komplexním f. Především z konvergence integrálu (94) plyne, že funkce f_1, f_2 a tedy i f jsou měřitelné a skoro všude konečné v M (věta 44). Dále $(\mu(M) = 0) \Rightarrow (\int_M f \, \mathrm{d}\mu = 0)$.

A) Je-li c konečné komplexní číslo, $\mu(M) < +\infty$, je $\int_M c \, \mathrm{d}\mu = c\, \mu(M)$, neboť $\int_M c_1 \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_M c_2 \, \mathrm{d}\mu = c_1 \mu(M) + \mathrm{i} c_2 \mu(M)$ (příkl. 2 v § 1).[38])

B) Je-li $N \sim M$, $f \sim g\,(M)$, je $\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_N g \, \mathrm{d}\mu$, jakmile jeden z obou integrálů konverguje.

C) Je-li M měřitelná, $f(x) = 0$ skoro všude v $E_r \dot{-} M$, je $\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_r} f \, \mathrm{d}\mu$, jakmile jeden z integrálů konverguje.

D) Je-li M_1 měřitelná, $M_1 \subset M$, a konverguje-li $\int_M f \, \mathrm{d}\mu$, konverguje i $\int_{M_1} f \, \mathrm{d}\mu$ (viz konec věty 42).

---

[38]) Takové důkazy, které se dostanou prostě aplikací příslušného výsledku v reálném oboru na reálnou a imaginární část, nebudu většinou dále prováděti.

E) Budiž f měřitelná v M. Potom $\int\limits_M f\,d\mu = I$ konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li $\int\limits_M |f|\,d\mu = K$, načež $|I| \leqq K$ (zobecnění věty 45). Důkaz. Víme (viz větu 34), že $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ je měřitelná v M (píši stále $f = f_1 + if_2$). Ale $|f_1| + |f_2| \geqq \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \geqq \operatorname{Max}(|f_1|, |f_2|) \geqq \frac{1}{2}|f_1| + \frac{1}{2}|f_2|$. Tedy podle vět 55, 58 konverguje K tehdy a jen tehdy, konvergují-li integrály funkcí $|f_1|$, $|f_2|$, t. j. konvergují-li integrály funkcí f_1, f_2 (věta 45), t. j. — podle definice — konverguje-li I. Jde ještě o nerovnost $|I| \leqq K$ (v případě $K < +\infty$). Nechť především f je jednoduchá a konečná v M, nabývající navzájem různých hodnot $a_k + ib_k$ ($k = 1, \ldots, p$). Položme $M_k = \mathop{\mathcal{E}}\limits_x(x \in M, f(x) = a_k + ib_k)$. Potom $I = \sum\limits_{k=1}^{p} (a_k + ib_k)\,\mu(M_k)$, $K = \sum\limits_{k=1}^{p} |a_k + ib_k|\,\mu(M_k)$. Podle věty o absolutní hodnotě součtu plyne odtud vskutku $|I| \leqq K$. V obecném případě existují podle věty 39 (viz též pozn.[15]) u této věty) dvě posloupnosti jednoduchých konečných měřitelných funkcí $f_1^{(n)}$ ($n = 1, 2, \ldots$), $f_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, \ldots$) tak, že pro $k = 1, 2$ je stále $|f_k^{(n)}| \leqq |f_k|$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_k^{(n)} = f_k$, takže jednak je $\lim\limits_{n\to\infty} |f_1^{(n)}(x) + i f_2^{(n)}(x)| = |f_1(x) + i f_2(x)| = |f(x)|$ a za druhé je $|f(x)|$ zřejmě společnou integrabilní majorantou funkcí $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$, $|f_1^{(n)} + if_2^{(n)}|$. Ale víme již, že

$$\left|\int\limits_M (f_1^{(n)} + if_2^{(n)})\,d\mu\right| \leqq \int\limits_M |f_1^{(n)} + if_2^{(n)}|\,d\mu\,;$$

podle věty 65 (kterou aplikujeme vlevo na reálné funkce $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$, vpravo na reálnou funkci $|f_1^{(n)} + if_2^{(n)}|$, můžeme v této nerovnosti přejíti k limitě $n \to \infty$, což dává vskutku

$$\left|\int\limits_M (f_1 + if_2)\,d\mu\right| \leqq \int\limits_M |f_1 + if_2|\,d\mu.$$

F) Pokud se vět § 2 týče, platí pro komplexní f v tomto smyslu: Ve větě 47 čti na konci „jsou-li buďto integrály vpravo nebo integrál vlevo konvergentní"; ve větě 48 čti na konci „konverguje-li integrál vlevo", podobně ve větě 49; také v pozn. 2, § 2 čti „konverguje-li" místo „existuje-li"; pozn. 3 v § 2 platí beze změny. Věta 51 se týká vlastně integrálu reálné funkce $|f|$, platí tedy beze změny (viz **E)**). Věta 52 platí beze změny.

Přistupme k § 4.

G) Věta 54 má pro komplexní $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$ tento tvar: Je-li $c = c_1 + \mathrm{i}c_2 \neq 0$ konečné komplexní číslo, je $\int\limits_M cf\,\mathrm{d}\mu = c\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$, jakmile jeden z integrálů konverguje. (Je-li $c = 0$, platí rovnice zřejmě tehdy, jestliže integrál vpravo konverguje.)

Důkaz. I. Konverguje-li integrál vpravo, je hodnota pravé strany

$$(c_1 + \mathrm{i}c_2)(\int\limits_M f_1\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int\limits_M f_2\,\mathrm{d}\mu) =$$

$$= (c_1\int\limits_M f_1\,\mathrm{d}\mu - c_2\int\limits_M f_2\,\mathrm{d}\mu) + \mathrm{i}(c_1\int\limits_M f_2\,\mathrm{d}\mu + c_2\int\limits_M f_1\,\mathrm{d}\mu)\,,$$

což podle věty 59 pro reálné funkce a podle definice dává

$$\int\limits_M (c_1f_1 - c_2f_2)\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int\limits_M (c_1f_2 + c_2f_1)\,\mathrm{d}\mu =$$

$$\int\limits_M ((c_1f_1 - c_2f_2) + \mathrm{i}(c_1f_2 + c_2f_1))\,\mathrm{d}\mu\,;$$

ale poslední integrand je právě cf.

II. Konverguje-li integrál vlevo, užijeme bodu I na funkci $g = cf$ a konstantu $d = c^{-1}$.

H) Jestliže do $\mathbf{L}(M)$ zařadím také komplexní funkce s konvergentním $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$, platí věta 55 beze změny (prohlédněte si její kratičký důkaz).

K) Ve větě 56 je nutno (dvakráte) nahraditi slovo „existuje“ slovem „konverguje“.[39]) Věta 57 spočívá podstatně na realitě funkcí.

L) Ve větě 58, 59 čti na konci „konvergují-li integrály vpravo“. Ve větě 59 škrtni slovo „reálná“.

M) Důležité je, že věta 65 platí beze změny (uvažte, že z $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$ plyne $|\Re f_n(x)| \leqq \varphi(x)$, $|\Im f_n(x)| \leqq \varphi(x)$). Ve větě 66 (1. věta o střední hodnotě) a v pozn. 13 za touto větou je ovšem realita obou funkcí f, φ podstatná (proto jsem to u funkce f v pozn. 13, II zvláště poznamenal, protože ze znění textu to není vidět).

[39]) Všimněte si pozn. 2 za větou 56; z ní je vidět, že konvergují-li $\int\limits_M f_n\,\mathrm{d}\mu$, konverguje i $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu$.

Pokud se týče § 5, lze říci toto: Definice 12 i definice stejné absolutní spojitosti v pozn. 2 podržují smysl i pro komplexní funkce. Zároveň je patrno: (75) platí pro komplexní funkce $f_n = \varphi_n + i\psi_n$, $f = \varphi + i\psi$ tehdy a jen tehdy, je-li $\lim \mathrm{as}_M \varphi_n = \varphi$, $\lim \mathrm{as}_M \psi_n = \psi$; podobně pro stejnou absolutní spojitost. Odtud je (rozkladem na reálnou a imaginární část) ihned patrno, že pozn. 1 i věty 67, 68, 69 platí i pro komplexní funkce.

§ 7. Příklady na výpočet Lebesgueových integrálů $\int_a^b f(x)\,dx$. Tento paragraf vlastně porušuje systematický chod výkladu. Je určen k tomu, aby si čtenář již nyní mohl oživiti obecné výklady několika jednoduchými příklady. Kdo však dává přednost tomu, aby se napřed systematicky seznámil s theorií, může tento paragraf zatím vynechat a přečísti si jej až před začátkem kap. VII.

V celém tomto paragrafu půjde o Lebesgueův integrál v $\mathbf{E}_1$ (t. zv. jednoduchý integrál), a to pouze o případ, že integračním oborem je interval, t. j. o integrál

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)\,.\text{[40]} \tag{95}$$

První otázka, která se zde naskýtá, je otázka, zda f je měřitelná v integračním intervalu $I = (a, b)$. Poznamenejme (viz Luzinovu větu 40), že f je jistě měřitelná v I, jestliže lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézti množinu M míry menší než ε tak, že f je spojitá v $I \dot{-} M$. Speciálně tedy je f měřitelná v I, existuje-li spočetná množina M tak, že f je spojitá v $I \dot{-} M$.[41]) Tak na př. funkce, rovná 0 pro iracionální x a rovná 1 pro racionální x, je měřitelná v $(-\infty, +\infty)$, neboť je spojitá v množině $\mathbf{E}_1 \dot{-} \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je množina všech racionálních čísel. Měřitelnost funkcí, které se vyskytnou v příkladech tohoto paragrafu, bude tak zřejmá, že o ní vůbec nebudu mluvit.

Jestliže je nyní měřitelnost funkce f zjištěna, jde o to, zda integrál (95) existuje, v případě existence o zjištění, zda má hodnotu $+\infty$

---

[40]) Jest ovšem $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ pro $a \in \mathbf{E}_1$.

[41]) Neboť každá jednobodová a tedy (věta 11) i každá spočetná množina má Lebesgueovu míru 0.

nebo $-\infty$ či zda **konverguje** a v případě konvergence jde o jeho **výpočet** nebo aspoň **odhad**. Zde především víme (pozn. 7 v § 4): Existuje-li integrál (95) jako vlastní integrál Riemannův[42]) (mající tedy konečnou hodnotu), konverguje též (95) jakožto Lebesgueův integrál a oba mají touž hodnotu. Máme tedy k disposici celý aparát z **J I**, kap. II—IV. Dále: Integrál (95) existuje (ale nemusí konvergovati), je-li $f(x) \geqq 0$ skoro všude v I. Jak zjistiti nyní, zda v případě $f(x) \geqq 0$ (95) konverguje (t. j. zda $f \in L(I)$)? K tomu cíli můžeme užíti na př. věty 49: sestrojíme posloupnost intervalů $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ tak, aby bylo $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$ (nebo aspoň $I \sim \lim\limits_{n\to\infty} I_n$), načež $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Tak se nám často podaří zjistit, zda integrál konverguje, ba dokonce vypočísti jeho hodnotu.

Příklad 1. Budiž $a > 0$; potom

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\,(n^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})\,, \tag{96}$$

pokud $\alpha \neq 1$; pro $\alpha = 1$ máme

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} (\lg n - \lg a) = +\infty\,. \tag{96a}$$

Z (96) a (96a) plyne:

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = +\infty \text{ pro } \alpha \leqq 1, \quad \int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \text{ pro } \alpha > 1 \tag{97}$$

(konvergence).

Příklad 2. Budiž $-\infty < a < b < +\infty$; potom pro $\alpha \neq 1$ máme[43])

[42]) V tomto případě netřeba zjišťovati měřitelnost funkce f.

[43]) Kdo zde chce mít posloupnost, může nechat ε probíhat třeba čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right),$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\lg (b-a) - \lg \varepsilon) = +\infty\,,$$

tedy

(98)
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = +\infty \text{ pro } \alpha \geqq 1,$$
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ pro } \alpha < 1\,.$$

Podobně

(99)
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = +\infty \text{ pro } \alpha \geqq 1\,,$$
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ pro } \alpha < 1\,.$$

Příklad 3. Je-li $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ skoro všude v I, je $0 \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \leqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Tedy: konverguje-li druhý integrál, konverguje i první; diverguje-li první, diverguje i druhý (srovnej obdobnou větu 82 v **D I** pro řady s nezápornými členy). Ježto jsme v příkl. 1, 2 zjistili konvergenci a divergenci některých integrálů, můžeme srovnáváním zjišťovat konvergenci a divergenci dalších integrálů — i když jsou tak složité, že je nedovedeme „vypočísti“.[44])

[44]) Řekli jsme v **D I**, kap. IV, § 6, jak je možno rozuměti slovům „stanoviti součet nekonečné řady“; podobně je rozuměti slovům „vypočísti hodnotu integrálu“.

Příklad 4.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^4+1}\,(1-e^{-x})}\,dx$$

konverguje, ježto integrand má zřejmě tvar $\frac{g(x)}{x^{2-\frac{1}{3}}}$, kde $g(x)$ je omezená v $(1, +\infty)$ (je totiž $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$); tedy integrand je menší než $\frac{c}{x^{\frac{5}{3}}}$, kde c je vhodně volená konstanta, načež konvergence plyne z příkl. 1 (neboť $\frac{5}{3} > 1$).[45]

Příklad 5. Podobně je vidět, že $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^4+1}\,(1+e^{-x})}\,dx$ diverguje (integrand je větší než $\frac{c}{x}$ pro vhodné c, $0 < c < +\infty$), $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ konverguje (neboť $\frac{e^x}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} < \frac{c}{\sqrt{x-1}}$ pro $1 < x < 2$ a užije se příkl. 2), $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ diverguje (neboť $\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} > \frac{c}{1-x}$ $(0 < c < +\infty)$ a užije se příkl. 2); $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx$ konverguje pro každé $\alpha \in \mathsf{E}_1$ (neboť víme z **D I**, kap. XI, § 1, příkl. 9, že e^{-x} konverguje k nule tak rychle, že na příklad $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x} = 0$, takže $x^\alpha e^{-x} = \frac{1}{x^2}\,g(x)$, kde g je spojitá v $\langle 1, +\infty)$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, takže g je omezená v $\langle 1, +\infty)$).

Poznámka 1. Ježto $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje tehdy a jen tehdy, jestliže konverguje $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ (věta 45), můžeme předešlých method užíti i na

[45]) Zřejmě: je-li $\varphi \in \mathsf{L}(M)$, $c \in \mathsf{E}_1$, je též $c\varphi \in \mathsf{L}(M)$.

případy, kdy integrand mění své znamení. Má-li na př. f v integračním intervalu „integrabilní majorantu" φ, t. j. je-li $|f(x)| \leqq \varphi(x)$ pro skoro všechna $x \in (a, b)$, $\varphi \in \mathbf{L}(M)$, potom (95) konverguje. Naopak, existuje-li φ tak, že $0 \leqq \varphi(x) \leqq |f(x)|$ pro skoro všechna $x \in (a, b)$ a je-li $\int_a^b \varphi(x)\, dx = + \infty$, potom $\int_a^b |f(x)|\, dx$ nekonverguje, a tedy ani $\int_a^b f(x)\, dx$. Tento integrál tedy buďto neexistuje nebo má hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$. Rozlišení těchto případů nebývá obyčejně ani zvláště důležité ani zvláště obtížné; viz k tomu příkl. 6.

P o z n á m k a 2. Je-li $-\infty \leqq a < b < c < d \leqq +\infty$, je podle věty 47

$$\int_a^d f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx\,,$$

má-li buďto levá nebo pravá strana smysl. Tedy speciálně: integrál vlevo konverguje tehdy a jen tehdy, konvergují-li všechny integrály vpravo. Při vyšetřování konvergence integrálu můžeme tedy rozděliti integrační interval na několik (konečný počet) částečných intervalů a vyšetřovat integrály přes tyto jednotlivé intervaly. Následuje několik příkladů k pozn. 1, 2.

P ř í k l a d 6. Budiž $\alpha \in \mathbf{E}_1$. Vyšetřujme

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin 5x}{(1 - x^2)^\alpha}\, dx\,. \tag{100}$$

„Obtížné" jsou jen body -1, 1. Zvolme proto $0 < \varepsilon < 1$ a pišme

$$I_1 = \int_{-1}^{-1+\varepsilon}, \quad I_2 = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}, \quad I_3 = \int_{1-\varepsilon}^{1}.$$

Zručný počtář přehlédne situaci ihned takto: Ježto $\sin 5 \neq 0$, $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, je integrand pro x blízké jedničce „téhož řádu" jako $(1 - x)^{-\alpha}$, pro x blízké číslu -1 „téhož řádu" jako $(1 + x)^{-\alpha}$, tedy I_1, I_3 jsou konvergentní pro $\alpha < 1$, nejsou konvergentní pro $\alpha \geqq 1$. I_2 je Riemannův (tedy konvergentní) integrál. Tedy: I konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha < 1$.

Přesně ovšem náš náznak znamená toto: Jest

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sin 5x}{(1-x^2)^\alpha} : \frac{1}{(1-x)^\alpha} = \frac{\sin 5}{2^\alpha} \neq 0 ;$$

je-li tedy ε dosti malé, je pro $1 - \varepsilon < x < 1$

$$(1-x)^{-\alpha} \cdot \frac{1}{2} \frac{|\sin 5|}{2^\alpha} < \frac{|\sin 5x|}{(1-x^2)^\alpha} < (1-x)^{-\alpha} \cdot 2 \frac{|\sin 5|}{2^\alpha} ;$$

odtud plyne, že I_3 pro $\alpha < 1$ konverguje, pro $\alpha \geqq 1$ nikoliv; podobně I_1.

Zručný počtář ovšem postupuje ještě rychleji, nepíše ε, I_1, I_2, I_3, nýbrž odhadne: Ježto $\sin 5 \neq 0$, je integrand pro x blízko 1 téhož řádu jako $(1-x)^{-\alpha}$, pro x blízko -1 téhož řádu jako $(1+x)^{-\alpha}$; ostatní x nevadí. Tedy: I konverguje pro $\alpha < 1$, nekonverguje pro $\alpha \geqq 1$. Takto by měl čtenář umět o k a m ž i t ě rozhodnout o konvergenci integrálu I a podobných integrálů.

Jako cvičení zjistěte, že pro $\alpha \geqq 1$ je $I_1 = -I_3 = +\infty$, takže I nejenom nekonverguje, ale vůbec neexistuje.

P o z n á m k a 3. Pro početní praxi je užitečno, zavésti Lebesgueův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ i pro $a > b$, a to rovnicí

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx ,$$

jestliže integrál vpravo existuje. Věc je čtenáři běžná pro Riemannovy integrály z **J I**, kap. II, § 10 a nepotřebuje dalších výkladů. Poznamenejme jenom: Pro j a k á k o l i v a, b, c platí nyní rovnice

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx , \tag{101}$$

jestliže b u ď t o dva z těchto integrálů konvergují n e b o jestliže konverguje integrál přes „nejdelší“ z těchto tří integračních intervalů. Důkaz: V rovnici (101) vyměním meze (a současně změním znamení) tak, aby v žádném integrálu nebyla dolní mez větší než horní a členy se znamením „minus“ převedu na druhou stranu (viz důkaz obdobné věty 42 v **J I**). Na to užiji pozn. 2.

Při integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ $(a > b)$ si uvědomte, že je to jisté „výjimečné“ označení (aspoň v rámci této knihy), které nespadá pod naše obecné označení $\int\limits_M f(x)\,dx$. Integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ při $a > b$ *není* vůbec integrál funkce f přes nějaký integrační obor, nýbrž *integrál funkce* f (přes obor (b, a)), *násobený číslem* -1. Užíváte-li tedy na symbol $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $(a > b)$ pravidel, odvozených pro obecný symbol $\int\limits_M f(x)\,dx$, nezapomeňte na toto výjimečné postavení: jinak můžete snadno udělat chybu ve znamení. Hlavně u nerovností je nutno dáti pozor. Na př.: je-li $f(x) \leqq g(x)$, je $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqq \int\limits_a^b g(x)\,dx$ pro $a < b$, tedy $\int\limits_b^a g(x)\,dx \leqq$ $\leqq \int\limits_b^a f(x)\,dx$. Podobně je $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \geqq 0$ pro $a < b$, tedy $\int\limits_b^a |f(x)|\,dx \leqq 0$. Avšak $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \geqq 0$ pro $a < b$ i pro $a > b$ (proč?). (Vše ovšem za předpokladu, že uvedené integrály existují.)

Následuje několik příkladů na integraci nekonečnými řadami. Nedovedu-li vypočísti $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, vede někdy k cíli vhodný rozvoj $f(x) =$ $= v_1(x) + v_2(x) + \ldots$, načež za jistých podmínek (viz pozn. 11 v § 4) je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b v_n(x)\,dx\,.^{46)}$$

Příklad 7. Budiž $0 < k < 1$; položme

$$(102)\qquad I = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (\varphi \text{ konečné})\,.$$

Do rozvoje $(1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3 + \ldots$, konvergentního pro $|x| < 1$, dosaďme $x = -k^2 \sin^2 \psi$, takže

$$(103)\quad (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)}\, k^{2n} \sin^{2n} \psi\,.$$

Kdybychom vpravo $\sin \psi$ nahradili jedničkou, dostali bychom konvergentní řadu, majorantní k řadě v (103). Tedy je (viz větu 54 v **D II**)

[46]) Říkáme potom, že řadu $v_1 + v_2 + \ldots$ integrujeme „člen po členu“.

řada v (103) stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$. Podle pozn. 11 v § 4 lze tedy integrovati člen po členu:

$$(104) \qquad I = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n)} k^{2n} \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \psi \, d\psi$$

(to platí ovšem i pro $\varphi < 0$; stačí napřed spočítati $\int_{\varphi}^{0}$ a potom změnit znamení). Integrály v (104) vpravo dovedeme vypočísti; speciálně pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ dostaneme (viz **J I**, kap. III, § 5, příklad 2)

$$(105) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \tfrac{1}{2}\pi \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\right)^2 k^{2n}\right).$$

Bližší viz v kapitole XIX (o eliptických integrálech).

Místo stejnoměrné konvergence jsme mohli užít také toho, že řada v (103) má nezáporné členy, takže podle věty 61 se dá integrovati člen po členu.

Příklad 8. Pro $|t| < 1$ je (geometrická řada)

$$(106) \qquad (1 + t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots$$

V intervalu $(-1, 1)$ jsou částečné součty omezeny, ježto

$$|1 - t^2 + t^4 - \ldots \pm t^{2n}| = \left|\frac{1 \pm t^{2n+2}}{1 + t^2}\right| < 2 \text{ [47]) pro } |t| < 1\,;$$

tedy lze podle pozn. 11 a 12 v § 4 integrovati člen po členu od 0 do x, je-li $|x| \leqq 1$ (v podstatě jde o větu 65).[48]) Tím dostáváme

$$(107) \qquad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ pro } |x| \leqq 1\,.$$

Vidíte, jak snadno jsme vyřídili i „choulostivý" případ $x = \pm 1$.

Příklad 9. Jestliže do rozvoje pro $(1 + x)^{-\frac{1}{2}}$ dosadíme $x = -t^2$, obdržíme

$$(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} t^{2n} \text{ pro } |t| < 1\,.$$

---

[47]) Dokonce $\leqq 1$. Proč?

[48]) To platí i pro $x = \pm 1$. Neboť buďto mohu bráti interval **otevřený** od 0 do ± 1, a tam platí (106) všude — nebo, chci-li, mohu bráti interval **uzavřený**, a tam platí (106) skoro všude (totiž všude až na jeden bod).

Ježto jde o řadu s nezápornými členy, můžeme integrovat (pozn. 11 v § 4) od 0 do x, pokud $|x| \leqq 1$; vyjde

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Pokud je $|x| < 1$, je integrál vlevo Riemannův a jeho hodnota je $\arcsin x$. Ale druhé tvrzení platí i pro $x = \pm 1$. Neboť na př. (podobně jako v příkl. 1, 2)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1$$

(neboť $\arcsin x$ je spojitý v $\langle -1, 1\rangle$. Tedy máme celkem

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pro} \quad |x| \leqq 1\,. \tag{108}$$

Příklad 10. Integrál

$$I(x) = -\int_0^x \frac{\lg(1-t)}{t}\,dt \tag{109}$$

konverguje pro každé $x \leqq 1$. Rozvoj integrandu (viz **D I**, kap. XII, § 3, vzorec (29) a věta 158)

$$-\frac{\lg(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + \ldots, \tag{110}$$

platný pro $0 < |t| < 1$, ukazuje totiž, že bod $t = 0$ nečiní obtíží. Bod $t = 1$ pak nečiní obtíží, ježto integrand je tam jen „logaritmicky nekonečný", takže na př. $|\lg(1-t)| < \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$, je-li t ($t < 1$) dosti blízko jedničky; viz **D I**, kap. XI, § 2, příkl. 1. Budiž nyní $|x| \leqq 1$ a integrujme (110) od 0 do x. Pro $x > 0$ jde v (110) (pro t v integračním intervalu) o řadu s kladnými členy. Pro $x < 0$ uvažme: Je-li $-1 < t < 0$, je každý člen v řadě (110) v absolutní hodnotě větší než následující a znamení se střídají. Z toho je ihned vidět, že částečný součet s_{m+2} řady (110) leží mezi částečnými součty s_m, s_{m+1}. Odtud pak indukcí plyne, že každé s_m $(m > 2)$ leží mezi čísly $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}t > \frac{1}{2}$. Částečné součty řady (110) mají tedy v intervalu $(-1, 0)$ číslo 1 za integrabilní majorantu. Tedy: Je-li $|x| \leqq 1$, můžeme (110) integrovati člen po členu od 0 do x, a to pro $0 < x \leqq 1$ na př. podle věty 61, pro $-1 \leqq x < 0$ na př. podle věty 65. Tedy

$$I(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \ldots \text{ pro } |x| \leqq 1 .$$

Příklad 11. Nechť $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ konverguje. Nechť v_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jsou měřitelné a omezené v (a, b) (řekněme $|v_n(x)| \leqq c_n$ pro všechna $x \in (a, b)$). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ konverguje stejnoměrně v (a, b). Potom

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi(x)\, v_n(x)\, dx . \tag{111}$$

Důkaz. Existuje n_0 tak, že pro všechna přirozená p a pro všechna $x \in (a, b)$ je $|v_{n_0+1}(x) + \ldots + v_{n_0+p}(x)| < 1$. Tedy mají všechny částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x)\, v_n(x)$ společnou integrabilní majorantu $(c_1 + c_2 + + \ldots + c_{n_0} + 1)\, |\varphi(x)|$. Tedy platí (111). Na př.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x}}\, dx . \tag{112}$$

Viz ještě výpočet integrálů vpravo ve vzorcích (121) až (123).

Příklady 7—11 měly tento společný charakter: Vyjádřili jsme integrand jako součet nekonečné řady (neboli jako limitu posloupnosti — totiž posloupnosti částečných součtů) a integrovali jsme člen po členu; tím jsme dostali integrál vyjádřen nekonečnou řadou.[49]) Přitom nezáleželo mnoho na hodnotě integračních mezí. Následující příklad je trochu jiného druhu. Opět vyjádříme integrál limity jako limitu integrálu (v tomto případě bude přirozenější mluviti o posloupnosti než o řadě), avšak hodnotu integrálu dostaneme přímo jako číslo známé

[49]) Která může býti užitečná k numerickému výpočtu integrálu i k zkoumání jeho vlastností.

odjinud (vyjde $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$); mimo to úspěch našeho postupu bude podstatně záviseti na speciální hodnotě mezí.

Příklad 12. Počítejme důležitý t. zv. **Laplaceův integrál**

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,. \tag{113}$$

Konvergence je jasná: e^{-x^2} konverguje pro $x \to +\infty$ k nule rychleji na př. než x^{-2} (viz **D I**, kap. XI, § 1, příkl. 9). Vzpomeňme si, že $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ je posloupnost klesající, mající limitu e (viz **D I**, kap. II, § 4, příkl. 1.[50]). Tedy $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ je posloupnost rostoucí, mající limitu e^{-1}. Dokažme obecněji, že funkce $(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ je klesající pro $0 < \varepsilon < 1$ a má pro $\varepsilon \to 0+$ limitu e^{-1}. To plyne ihned z rovnice $\frac{1}{\varepsilon} \lg (1 - \varepsilon) = -\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^3}{4} + \ldots\right)$, podle níž levá strana klesá pro $0 < \varepsilon < 1$ a má limitu -1 pro $\varepsilon \to 0+$. Tedy $0 < (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} < e^{-1}$ pro $0 < \varepsilon < 1$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e^{-1}$. Je-li tedy $x \neq 0$, je $0 < \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{nx^{-2}} < e^{-1}$ pro celé $n > x^2$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{nx^{-2}} = e^{-1}$. Umocním-li na exponent x^2, dostanu

$$0 < \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n < e^{-x^2} \text{ pro celé } n > x^2,\ \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}\,. \tag{114}$$

Položme pro $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ pro } 0 < x < \sqrt{n},\ f_n(x) = 0 \text{ pro } x \geqq \sqrt{n}\,. \tag{115}$$

Podle (114) mají funkce f_n v intervalu $(0, +\infty)$ společnou integrabilní majorantu e^{-x^2} a pro každé $x > 0$ je podle (114) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = e^{-x^2}$

---

[50]) Jde o posloupnost $b_1, b_2, b_3, \ldots$ z **D I**, str. 104.

$\left(\text{neboť pro všechna } n > x^2 \text{ je } f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\right)$. Podle věty 65 je tedy

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx\,.$$

Substituce $\frac{x}{\sqrt{n}} = \cos t$, $dx = -\sqrt{n}\sin t\,dt$ dává pro poslední integrál hodnotu

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} t\,dt = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\,.\,\sqrt{2n+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} t\,dt\,.$$

Ale v **J I**, kap. III, § 5 v příkladu 2 nám vzorec (36) ukazuje, že poslední výraz má pro $n \to \infty$ limitu $\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. Tedy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,. \tag{116}$$

Poznámka 4. Pro výpočet vlastních Riemannových integrálů máme k disposici na př. methodu substituční a methodu integrace per partes. Těchto method můžeme však použíti i na některé integrály Lebesgueovy, které nejsou vlastními Riemannovými integrály. Budiž na př. φ funkce spojitá a ryze monotonní v intervalu (α, β) a nechť $\lim_{t\to\alpha+} \varphi(t) = a$, $\lim_{t\to\beta-} \varphi(t) = b$, takže $\varphi(t)$ nabývá v (α, β) právě všech hodnot mezi a, b. Ptáme se, zda platí rovnice

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,. \tag{117}$$

Tato rovnice jistě platí, jsou-li splněny tyto předpoklady:

I. Oba (Lebesgueovy) integrály v (117) existují.

II. Pro každou dvojici čísel α', β', vyhovujících nerovnostem $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, platí rovnice

$$\int_{\varphi(\alpha')}^{\varphi(\beta')} f(x)\,dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,. \tag{118}$$

Důkaz. Ježto oba integrály v (117) existují, je podle věty 49

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \lim_{\substack{\alpha'\to\alpha+\\ \beta'\to\beta-}} \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,, \tag{119}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha'\to\alpha+\\ \beta'\to\beta-}} \int_{\varphi(\alpha')}^{\varphi(\beta')} f(x)\,dx\,. \tag{120}$$

Ale podle (118) jsou pravé a tedy i levé strany v (119), (120) stejné.

Jako příklad vypočtěme integrál

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{121}$$

Substituce $\sqrt{1-x} = t$, $x = 1 - t^2$, $dx = -2t\,dt$ (známá z **J I**, kap. IV, § 4) vede při mechanické aplikaci k rovnici

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\int_1^0 (1-t^2)^{2n+1}\,dt\,. \tag{122}$$

A tato rovnice je vskutku správná; neboť předně oba integrály existují (dokonce konvergují) a za druhé pro každé ε $(0 < \varepsilon < 1)$ platí příslušná rovnice, píšeme-li vlevo integrál od 0 do $1 - \varepsilon$ (a vpravo ovšem integrál od 1 do $\sqrt{\varepsilon}$) — takže limitní přechod $\varepsilon \to 0+$ dává ihned (122).[51])

Jiná pohodlná substituce v (121) je $x = \sin^2 t$ $(0 < t < \frac{1}{2}\pi)$, $\sqrt{1-x} = \cos t$, $dx = 2\sin t\cos t\,dt$ a vychází $I_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{4n+3} t\,dt$; že tato rovnice platí, je opět ihned patrno, integrujeme-li podle t od 0 do $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ (tedy podle x od 0 do $\sin^2(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon)$) a provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 0+$. Poslední integrál jsme vypočítali v **J I**, kap. III, § 5, příkl. 2. Dosazením do (112) obdržíme

[51]) Proti obecnému případu právě probranému je zde zjednodušení v tom, že v I_n dolní mez nevadí.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(4n+2)}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(4n+3)} =$$

$$(123)\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n+2}}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(4n+3)}\,.$$

Podobně je tomu s integrací per partes. Jestliže oba integrály

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx\,,\quad \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \quad (a < b)$$

konvergují a jestliže pro každé $b' \in (a, b)$ je

$$\int_a^{b'} f(x)\,g'(x)\,dx = f(b')\,g(b') - f(a)\,g(a) - \int_a^{b'} f'(x)\,g(x)\,dx\,,$$

dostáváme limitním přechodem $b' \to b -$ ihned

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \lim_{b'\to b-} f(b')\,g(b') - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Na př. pro $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ dostáváme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\beta}\,e^{-\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx\,,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}\cos\beta x + \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx\,.$$

Ježto limity vpravo jsou rovny nule, obdržíme odtud pro $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,,\quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

(je ihned vidět, že výsledek platí i pro $\beta = 0$).

Methodou substituční i integrací per partes se budeme později zabývati podrobněji a odvodíme obecnější věty; tyto drobnosti jsem uvedl jen proto, aby si čtenář v nejjednodušších případech věděl už nyní rady.

Příklad 13. Ještě jeden drobný příklad, souvisící s Laplaceovým integrálem (příklad 12)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Substituce $x = \sqrt{a}t$ $(a > 0)$ dává

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \tag{124}$$

Substituce $x = \sqrt{t}$ dává

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \sqrt{\pi}\,. \tag{125}$$

Položíme-li $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}x^n\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, dostáváme integrací per partes

$$I_n = -\lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{2}e^{-x^2}x^{n-1} + \tfrac{1}{2}(n-1)\,I_{n-2}$$

pro $n = 2, 3, \ldots$ Limita je rovna nule, tedy

$$I_{2n} \;\; = (n - \tfrac{1}{2})(n - \tfrac{3}{2})\ldots\tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,I_0\,,$$
$$I_{2n+1} = n\,.\,(n-1)\ldots 2\,.\,1\,.\,I_1\,.$$

Zde pak $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \tfrac{1}{2}\,.$$

Čtenář si sám rozváží, že všechny tyto formule vskutku platí (zkušený počtář to v takovýchto jednoduchých případech pozná na první pohled, bez jakéhokoliv psaní).