KAPITOLA II

MĚŘITELNÉ FUNKCE

§ 1. Definice a nejjednodušší vlastnosti měřitelných funkcí. V celém tomto paragrafu je pevně dána funkce μ s vlastností $\mathbf{S}_r$, takže mluvíme většinou krátce o míře místo o μ-míře atd. Vše se odehrává v $\mathbf{E}_r$. Funkce, o něž jde, jsou vesměs (s výjimkou § 5) reálné funkce r reálných proměnných, nemusí však býti konečné, t. j. mohou nabývati též hodnot $+\infty$, $-\infty$.[1])

V **D II**, kap. II, § 1 jsme zavedli již některá pravidla pro počítání s čísly z $\mathbf{E}_1^*$ (t. j. včetně čísel $+\infty$, $-\infty$). Nyní doplníme tato pravidla ještě tím, že definujeme: *Součin* $a_1 a_2 \ldots a_n$ *čísel z* $\mathbf{E}_1^*$ *je vždy roven nule, jakmile aspoň jeden činitel je roven nule* (i když se v součinu vyskytuje činitel $+\infty$ nebo $-\infty$; na př. $0 \,.\, (+\infty) = 0$, $0 \,.\, (-\infty) = 0$). Účelnost této definice vysvitne později. Součin je tedy definován vždy; naproti tomu ostatní symboly dříve nedefinované, jako $(+\infty) + (-\infty)$, $\frac{a}{0}$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, zůstávají i nadále bez významu.

V dalším nám často nebude mnoho záležeti na množinách nulových. Abychom se mohli stručně vyjadřovati, zavedeme tato rčení: Říkáme, že vlastnost $V(x)$ bodu x platí skoro všude (podrobněji μ-skoro všude) v množině M, jestliže množina oněch $x \in M$, jež nemají vlastnost $V(x)$, je množina nulová. Místo „skoro všude v $\mathbf{E}_r$“ říkáme někdy kratčeji „skoro všude“. Doufám, že čtenáři je již jasný smysl výroků jako: Funkce f je definována skoro všude, funkce f je konečná skoro všude v M, posloupnost $f_1(x), f_2(x), \ldots$ je konvergentní skoro všude v M atd.

Množiny M, N nazvu *ekvivalentními* (μ-ekvivalentními), je-li $\mu(\Delta(M, N)) = 0$. Značíme-li ekvivalenci symbolem $M \sim N$, platí zřejmě: $M \sim M$; je-li $M \sim N$, je $N \sim M$; je-li $M \sim N$, $N \sim P$, je (podle vzorce (59) v kap. I, § 8) $M \sim P$. Lze tedy všechny množiny $M \subset \mathbf{E}_r$ rozdělit na disjunktní třídy tak, že dvě množiny patří do téže

[1]) V § 5 přeneseme část výsledků též na komplexní funkce.

třídy tehdy a jen tehdy, jsou-li ekvivalentní. Je-li M měřitelná, $N \sim M$, je (viz větu 16) také N měřitelná, $\mu(N) = \mu(M)$. Je-li třeba vyznačit míru, píšeme $M \sim N\ (\mu)$ místo $M \sim N$.

Podobný pojem zavedeme pro funkce. Budeme říkati, že dvě funkce f, g jsou ekvivalentní (μ-ekvivalentní) v množině M, jestliže $f(x) = g(x)$ skoro všude v M (odtud speciálně plyne, že $f(x)$ i $g(x)$ má smysl skoro všude v M, t. j. f, g jsou definovány skoro všude v M). Znak $f \sim g\ (M)$ nebo obšírněji $f \sim g\ (M;\ \mu)$. Místo „ekvivalentní v $\mathbf{E}_r$" říkáme někdy prostě „ekvivalentní".

Poznámka 1. Zřejmě platí toto: I. Je-li $f \sim g\ (M)$, $N \subset M$, je též $f \sim g\ (N)$. II. Je-li $f \sim g\ (M_n)$ pro každé $n \in \mathfrak{N}$, kde $\mathfrak{N}$ je jistá spočetná množina, je též $f \sim g\ (\bigcup\limits_{n \in \mathfrak{N}} M_n)$. III. Je-li $f \sim g\ (M)$, $M \sim N$, je $f \sim g\ (N)$.

Poznámka 2. Opět je patrno, že (při daném M) lze všechny funkce, které jsou definovány skoro všude v M, rozděliti do disjunktních tříd tak, že dvě funkce patří do téže třídy tehdy a jen tehdy, jsou-li ekvivalentní v M.

Definice 7. *Říkáme, že funkce f je měřitelná (μ-měřitelná) v množině M, jestliže platí:*

I. M je měřitelná.

II. f je definována skoro všude v M.

III. Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je množina

(1) $$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M,\ f(x) > c)\ ^{2})$$

měřitelná.

Místo „měřitelná v $\mathbf{E}_r$" říkáme též kratčeji „měřitelná".

Věta 32. *Je-li f spojitá v měřitelné množině M, je f měřitelná v M.*

Důkaz. Budiž $c \in \mathbf{E}_1$; mám dokázati, že množina (1) je měřitelná. Budiž x nějaký bod množiny (1). Ježto $f(x) > c$, plyne ze spojitosti toto: Existuje číslo $\varepsilon_x > 0$ tak, že pro každý bod y množiny $A_x = \mathop{\mathcal{E}}_{y}(\varrho(x, y) < \varepsilon_x)$,[3]) který leží v M, je $f(y) > c$. Přiřaďme každému

[2]) Čtěme: množina těch x z M, pro něž je $f(x) > c$.

[3]) Značím $\varrho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq r} |x_i - y_i|$. Připomeňme: Říkáme, že funkce f je spojitá v M, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M vzhledem k M.

bodu x množiny (1) takové okolí A_x. Je patrno, že $x \in MA_x$ a že MA_x je částí množiny (1). Tedy množina (1) je rovna průniku otevřené (tedy měřitelné) množiny[4]) $\bigcup A_x$ s měřitelnou množinou M a je tedy sama měřitelná.

Poznámka 3. Je zřejmé: Kdyby M byla Borelova množina prostoru $\mathbf{E}_r$[5]), byla by (při f spojitém v M) i (1) jakožto průnik dvou Borelových množin Borelovou množinou. Toho použijeme ve cvičeních k tomuto paragrafu.

Poznámka 4.[6]) Je-li $M \sim N$, $f \sim g\,(M)$ a je-li f měřitelná v M, je g měřitelná v N.

Důkaz. Množiny $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M,\ f(x) > c)$, $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in N,\ g(x) > c)$ jsou ekvivalentní, načež se užije věty 16.

Poznámka 5. Je-li M nulová množina, je každá funkce f měřitelná v M. Důkaz: $\mu(\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) > c)) = 0$.

Poznámka 6. Je-li f měřitelná v M a je-li N měřitelná, $N \subset M$, je f měřitelná v N.

Důkaz. Množina $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in N, f(x) > c) = N \,.\, \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) > c)$ je měřitelná.

Poznámka 7. Je-li dán spočetný systém množin M_n ($n \in \mathfrak{N}$, kde $\mathfrak{N}$ je spočetná množina) a je-li f měřitelná v každé M_n, je f také měřitelná v množině $\bigcup\limits_{n \in \mathfrak{N}} M_n$. Důkaz: $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \bigcup\limits_{n \in \mathfrak{N}} M_n,\ f(x) > c) = \bigcup\limits_{n \in \mathfrak{N}} \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M_n, f(x) > c)$.

Poznámka 8. *Je-li M měřitelná, $\mu(N) = 0$, a je-li f spojitá v $M \dot{-} N$, je f měřitelná v M.* Důkaz. Parciální funkce $g = f_{M \dot{-} N}$[7]) je spojitá a tedy (věta 32) měřitelná v $M \dot{-} N$, načež se užije pozn. 4.

Poznámka 9. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná. Budiž f definována skoro všude v M. Budiž $g \sim f\,(M)$, $g \sim 0\ (\mathbf{E}_r \dot{-} M)$. Tvrdím: f je měřitelná v M tehdy a jen tehdy, když g je měřitelná v $\mathbf{E}_r$. Důkaz. I. Nechť g je

---

[4]) Sjednocení se bere pro všechna x, jež leží v (1).
[5]) Viz pozn. 6 a větu 15 v kap. I, § 8.
[6]) V těchto (a mnoha jiných) poznámkách neověřuji podmínky I, II, jež jsou zřejmě splněny.
[7]) Je-li funkce F definována v množině A a je-li $B \subset A$, značí „parciální funkce" F_B funkci G s oborem B, pro kterou $G(x) = F(x)$ pro $x \in B$.

měřitelná v $\mathbf{E}_r$, tedy též v M (pozn. 6); tedy i f je měřitelná v M (pozn. 4). II. Nechť f a tedy i g je měřitelná v M. Funkce nulová (a tedy i funkce g) je podle věty 32 měřitelná v $\mathbf{E}_r \dot{-} M$. Tedy (pozn. 7) g je měřitelná v $\mathbf{E}_r$.

Této poznámky se často užívá. Zhruba řečeno: rozšířím-li obor funkce f z M (ovšem: když M je měřitelná) na $\mathbf{E}_r$ tím, že pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$ kladu $f(x) = 0$, nezmění se nic na měřitelnosti funkce (ovšem: jednou jde o měřitelnost v M, po druhé o měřitelnost v $\mathbf{E}_r$).

Věta 33. *Budiž f funkce definovaná skoro všude v měřitelné množině M. Potom každé dvě z následujících čtyř podmínek jsou ekvivalentní:*[8])

I. *Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) > c)$ měřitelná.*

II. *Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \leqq c)$ měřitelná.*

III. *Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) < c)$ měřitelná.*

IV. *Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \geqq c)$ měřitelná.*

Důkaz. Nic se nestane, vynechám-li z M množinu (nulovou) těch bodů, v nichž f není definována. Smíme proto předpokládati, že f je definována všude v M. Potom však platí (pro krátkost vynechávám $x \in M$) $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) > c) = M \dot{-} \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq c)$, $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq c) = M \dot{-} \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) > c)$, takže I, II jsou ekvivalentní; podobně jsou ekvivalentní III, IV. Dále je zřejmě

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{x}{\mathcal{E}}\left(f(x) \geqq c + \frac{1}{n}\right),$$

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \geqq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underset{x}{\mathcal{E}}\left(f(x) > c - \frac{1}{n}\right).$$

První vzorec ukazuje (s pomocí věty 14), že z IV plyne I; druhý ukazuje, že z I plyne IV. Tedy II $\Leftrightarrow$ I $\Leftrightarrow$ IV $\Leftrightarrow$ III.

Krátce řečeno: smysl definice 7 se nezmění, píšeme-li v ní místo $>$ buďto $\geqq$ nebo $\leqq$ nebo $<$.

---

[8]) T. j.: funkce f a množina M splňují buďto všechny čtyři podmínky nebo žádnou z nich.

Poznámka 10. Jsou-li f, g měřitelné v M, $c \in \mathbf{E}_1$, jsou měřitelné také tyto množiny:

$$A_1 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) = c)\,;$$
$$A_2 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) = +\infty)\,;$$
$$A_3 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) = -\infty)\,;$$
$$A_4 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) < +\infty)\,;$$
$$A_5 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) > -\infty)\,;$$
$$A_6 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) < g(x))\,;$$
$$A_7 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) \geqq g(x))\,;$$
$$A_8 = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) = g(x))\,.$$

Důkaz. Smíme předpokládati, že f, g jsou definovány všude v M. Potom je

$$A_1 = \mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) \geqq c)\,.\,\mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) \leqq c)\,;\text{[9]}$$
$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) > n)\,;$$
$$A_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) < -n)\,;$$
$$A_4 = M \dot{-} A_2\,,$$
$$A_5 = M \dot{-} A_3\,.$$

Dále: nerovnost $f(x) < g(x)$ platí tehdy a jen tehdy, existuje-li $r \in \mathbf{P}$ (t. j. racionální r) tak, že $f(x) < r < g(x)$. Tedy

$$A_6 = \bigcup_{r \in \mathbf{P}} \mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) < r)\,.\,\mathop{\mathcal{E}}_x(g(x) > r)\,;$$
$$A_7 = M \dot{-} A_6\,;$$
$$A_8 = \mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) \leqq g(x))\,.\,\mathop{\mathcal{E}}_x(f(x) \geqq g(x))\,.$$

[9]) Vynechávám znak $x \in M$.

Víme, že funkce spojitá v měřitelné M (nebo aspoň v množině ekvivalentní s M) je měřitelná v M (věta 32 a pozn. 8). Dokážeme nyní, že aritmetické a limitní operace, provedené na měřitelné funkce, vedou opět k měřitelným funkcím.

Věta 34. *Buďte f, g měřitelné v M, $a \in \mathbf{E}_1^*$, $0 < \alpha < +\infty$. Potom také funkce*

$$a\,f(x),\ \mathrm{Max}\,(f(x), g(x)),\ \mathrm{Min}\,(f(x), g(x)),\ f(x)\,g(x),\ |f(x)|^\alpha$$
$$(\text{speciálně } |f(x)|)^{10})$$

jsou měřitelné v M. Funkce $f(x) + g(x)$ je měřitelná v množině oněch bodů $x \in M$, v nichž je definována; totéž platí o funkci $f(x) : g(x)$.

Důkaz. Bez újmy obecnosti buďte f, g definovány všude v M.

I. Pro $a = 0$ je $a\,f(x) = 0$ spojitá v M. Pro $0 < a < +\infty$ je $\underset{x}{\mathcal{E}}(a\,f(x) > c) = \underset{x}{\mathcal{E}}\left(f(x) > \dfrac{c}{a}\right)$, podobně pro $0 > a > -\infty$. Pro $a = +\infty$ je funkce $a\,f(x)$ rovna $+\infty$[11]) na měřitelné množině $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) > 0)$, je rovna $-\infty$[11]) na měřitelné množině $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) < 0)$ a je rovna 0[11]) na měřitelné množině $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) = 0)$, načež se užije pozn. 7.

II. $\underset{x}{\mathcal{E}}(\mathrm{Max}\,(f(x), g(x)) > c) = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) > c) \cup \underset{x}{\mathcal{E}}(g(x) > c)$. Podobně pro Min (se znamením $<$).

III. $\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|^\alpha < c) = \underset{x}{\mathcal{E}}(-c^{\frac{1}{\alpha}} < f(x) < c^{\frac{1}{\alpha}})$ pro $c > 0$ (pro $c \leqq 0$ vyjde ovšem prázdná množina).

IV. Množina L těch $x \in M$, pro něž je $f(x) = -g(x) = \pm\infty$, je měřitelná (pozn. 10, množiny A_2, A_3). Položme $N = M \dot{-} L$. Pro $c \in \mathbf{E}_1$ je $c - g(x)$ měřitelná v M (a tedy v N), neboť pro $c_1 \in \mathbf{E}_1$ je $\underset{x}{\mathcal{E}}(c - g(x) > c_1) = \underset{x}{\mathcal{E}}(g(x) < c - c_1)$. Pro $c \in \mathbf{E}_1$ je dále $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in N, f(x) + g(x) > c) = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in N, f(x) > c - g(x))$, a to je měřitelná množina podle pozn. 10, ježto $c - g(x)$ je měřitelná v N.

---

[10]) Definujeme $(+\infty)^\alpha = +\infty$ pro $\alpha > 0$.
[11]) Tedy spojitá, tedy měřitelná.

V. Jako pomůcku pro součin a podíl dokažme: Je-li g konečná, různá od nuly a měřitelná v M, je $\frac{1}{g}$ měřitelná v M. Neboť pro $0 < c < +\infty$ je $\mathop{\mathcal{E}}_x\left(\frac{1}{g(x)} > c\right) = \mathop{\mathcal{E}}_x\left(0 < g(x) < \frac{1}{c}\right)$, pro $-\infty < c < 0$ je $\mathop{\mathcal{E}}_x\left(\frac{1}{g(x)} > c\right) = \mathop{\mathcal{E}}_x(g(x) > 0) \cup \mathop{\mathcal{E}}_x\left(g(x) < \frac{1}{c}\right)$ a pro $c = 0$ je $\mathop{\mathcal{E}}_x\left(\frac{1}{g(x)} > c\right) = \mathop{\mathcal{E}}_x(g(x) > 0)$.

VI. Součin. Množiny těch $x \in M$, kde $f(x)\, g(x)$ je rovno nule, po příp. $+\infty$, po příp. $-\infty$, jsou měřitelné (na každé z nich je fg spojitá). Na zbývající množině M_1 jsou f, g konečné, různé od nuly. Je pak (vynechávám znak $x \in M_1$)

$$\mathop{\mathcal{E}}_x(f(x)\, g(x) > c) = \mathop{\mathcal{E}}_x\left(f(x) > \frac{c}{g(x)}\right) \mathop{\mathcal{E}}_x(g(x) > 0) \cup$$
$$\cup \mathop{\mathcal{E}}_x\left(f(x) < \frac{c}{g(x)}\right) \mathop{\mathcal{E}}_x(g(x) < 0);$$

vpravo jsou měřitelné množiny podle V, I a pozn. 10.

VII. Podíl. Vyloučím měřitelné množiny M_1, na níž $|f(x)| = |g(x)| = +\infty$, a M_2, na níž $g(x) = 0$. Ve zbývající množině je $f : g$ definováno. Měřitelná je dále ta množina, kde $f : g = 0$ ($f = 0$, $g \neq 0$ nebo $|f| < +\infty$, $|g| = +\infty$). Ve zbývající množině je $0 < |g| < +\infty$ a užije se V, VI na součin $f \cdot \frac{1}{g}$.

Věta 35. *Budiž $f_1, f_2, \ldots$ nekonečná posloupnost funkcí měřitelných v M. Potom také funkce*

$$\varphi_1(x) = \sup_{n=1,2,\ldots} f_n(x)\,, \quad \varphi_2(x) = \inf_{n=1,2,\ldots} f_n(x)\,,$$
$$\varphi_3(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad \varphi_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

jsou měřitelné v M.

Dodatek. *Existuje-li tedy* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *skoro všude v M, je f měřitelná v M*, neboť $f \sim \varphi_3$ (M). Obecněji: *Je-li N množina těch $x \in M$, pro něž existuje* $\lim f_n(x)$, *je N měřitelná;* neboť $N = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, \varphi_3(x) =$

$= \varphi_4(x))$. Ovšem $\lim f_n(x)$ je měřitelná v N (podle věty 35 a pozn. 6). Tedy na př. množina těch $x \in M$, pro něž $\lim f_n(x) = +\infty$, je měřitelná atd.

Důkaz věty 35. Je-li P_n množina oněch bodů $x \in M$, pro něž f_n není definována, je $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots$ nulová množina. Můžeme se tedy omeziti na množinu $M \dot{-} P$, t. j. smíme předpokládati, že f_n jsou definovány v M. Potom pro $c \in \mathbf{E}_1$ je (vynechávám znak $x \in M$)

$$\mathop{\mathcal{E}}_x(\varphi_1(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathcal{E}}_x(f_n(x) > c)\,, \quad \mathop{\mathcal{E}}_x(\varphi_2(x) < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathcal{E}}_x(f_n(x) < c)\,.$$

Tedy φ_1, φ_2 jsou měřitelné v M. A tedy též $\psi_p(x) = \sup\limits_{n=p,p+1,\dots} f_n(x)$ je měřitelná v M, a tedy též $\inf\limits_{p=1,2,\dots} \psi_p(x)$ je měřitelná v M. Ale $\psi_p(x) \geqq \psi_{p+1}(x)$, takže $\varphi_3(x) = \lim\limits_{p\to\infty} \psi_p(x) = \inf\limits_{p=1,2,\dots} \psi_p(x)$. Podobně pro φ_4.

Poznámka 11. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ měřitelná. Budiž P metrický prostor; bod $a \in P$ budiž hromadným bodem množiny $A \subset P$. Budiž $f(x, \alpha)$ reálná funkce, definovaná pro $x \in M$, $\alpha \in A$. Nechť pro každé $\alpha \in A$ je $f(x, \alpha)$ (jakožto funkce x) měřitelná v M. Nechť pro skoro všechna $x \in M$ existuje $\lim\limits_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha\in A}} f(x, \alpha) = \varphi(x)$. Potom φ je funkce měřitelná v M. **Důkaz.** Existuje posloupnost $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ tak, že $\alpha_n \in A$, $\alpha_n \neq \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Potom funkce $\varphi_n(x) = f(x, \alpha_n)$ jsou měřitelné v M a pro skoro všechna $x \in M$ je $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ (to je triviální část věty 143 z **D II**), načež se užije dodatku k větě 35.

Věta 36. *Budiž φ reálná funkce, monotonní v množině $P \subset \mathbf{E}_1^*$. Budiž f měřitelná v $M \subset \mathbf{E}_r$ a pro skoro všechna $x \in M$ budiž $f(x) \in P$ (takže $\varphi(f(x))$ má smysl). Potom „složená funkce“ $\varphi(f(x))$ je měřitelná v M.*

Poznámka 12. $\varphi(t)$ tedy může býti definována i pro $t = \pm\infty$. Nejčastěji budeme této věty užívat na funkci φ v oboru $\mathbf{E}_1^*$ takto definovanou: $\varphi(t) = \dfrac{t}{1 + |t|}$ pro $t \in \mathbf{E}_1$, $\varphi(+\infty) = 1$, $\varphi(-\infty) = -1$, po příp. na její funkci inversní.[12])

[12]) Blíže o této funkci viz **D II**, kap. VI, § 4, příkl. 1.

Důkaz. Smíme předpokládati, že $f(x) \in P$ pro všechna $x \in M$. Budiž $c \in \mathbf{E}_1$ a budiž φ na př. neklesající. Budiž $a \in \mathbf{E}_1^*$ infimum oněch $t \in P$, pro něž $\varphi(t) > c$. Pro $t \in P$, $t < a$ je tedy $\varphi(t) \leqq c$, pro $t \in P$, $t > a$ je $\varphi(t) > c$. Pro $t = a$ buďto $\varphi(a)$ není definováno nebo je $\varphi(a) \leqq$ $\leqq c$ nebo $\varphi(a) > c$. V prvních dvou případech je $\mathcal{E}_x(x \in M, \varphi(f(x)) >$ $> c) = \mathcal{E}_x(x \in M, f(x) > a)$, ve třetím případě je $\mathcal{E}_x(x \in M, \varphi(f(x)) > c) =$ $= \mathcal{E}_x(x \in M, f(x) \geqq a)$. Ale vpravo stojí měřitelné množiny.

Věty tohoto paragrafu jsou celkem formální důsledky definice 7. V následujících paragrafech přistoupíme k podstatnějším věcem.

Cvičení

1. Budiž H množina hustá v $\mathbf{E}_1$. Jestliže množina (1) v def. 7 je měřitelná pro každé $c \in H$, potom je měřitelná i pro každé $c \in \mathbf{E}_1$.

2. V kap. I, § 8, pozn. 6 jsme zavedli Borelovy množiny prostoru $\mathbf{E}_r$; ty jsou podle věty 15 μ-měřitelné pro každé μ s vlastností $\mathbf{S}_r$; říká se jim také množiny *B-měřitelné.*[13]) Analogicky s def. 7 zaveďme tento pojem: Říkáme, že funkce f je *B-měřitelná* v M, jestliže M je B-měřitelná, f je definována všude v M a množina (1) je B-měřitelná pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ (zase by stačilo, kdyby to platilo pro každé $c \in H$, kde H je husté v $\mathbf{E}_1$). Taková funkce je ovšem také μ-měřitelná v M pro každé μ s vlastností $\mathbf{S}_r$ (viz větu 15). Dokažte, že věty 32, 33, 34, 35 (i s dodatkem), 36 a pozn. 6, 7, 10, 11 tohoto paragrafu zůstávají v platnosti, jestliže slova μ-měřitelný, skoro všude nahradíme slovy B-měřitelný, všude.

§ 2. Jegorovova věta.

Věta 37. *Budiž M měřitelná, $\mu(M) < +\infty$. Budiž $f_1, f_2, \ldots$ posloupnost funkcí měřitelných v M, která má skoro všude v M konečnou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina N míry menší než ε tak, že posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k f stejnoměrně v $M \dot{-} N$.*

Poznámka 1. Velmi důležitá věta; stačí si uvědomiti, jakou důležitou roli hrála stejnoměrná konvergence v **D II** (kap. IV a kap. VI, § 21). Ježto $\mu(N) < \varepsilon$, existuje (viz větu 10, číslo σ_1) otevřená množina $N_1 \supset N$ tak, že $\mu(N_1) < \varepsilon$. T. j. ve větě 37 lze požadovati, aby N byla otevřená množina.

[13]) B je počáteční písmeno jména Borel.

Poznámka 2. Nezapomeňte, že předpokládáme, že M má konečnou míru a že limita je konečná skoro všude v M.

Důkaz. Budiž M_1 množina oněch bodů z M, pro něž $f_1(x), f_2(x), \ldots$ jsou definovány a $\lim f_n(x) = f(x)$ existuje a je konečná; tedy $\mu(M \dot{-} M_1) = 0$.

Pro celá kladná k, m položme

$$(2) \qquad K_{m,k} = \mathcal{E}_x\left(x \in M_1, \sup_{n=m, m+1, \ldots} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right).$$

Je zřejmo, že při každém přirozeném k je $K_{1,k} \supset K_{2,k} \supset K_{3,k} \supset \ldots$, $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_{m,k} = \emptyset$ (neboť pro každé $x \in M_1$ existuje $m_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq m_0$ je $|f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{k}$ a tedy x non $\in K_{m_0,k}$). Ježto jde vesměs o měřitelné množiny, obsažené v M (při čemž $\mu(M) < +\infty$), je podle věty 24

$$(3) \qquad \lim_{m\to\infty} \mu(K_{m,k}) = \mu(\lim_{m\to\infty} K_{m,k}) = \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} K_{m,k}) = \mu(\emptyset) = 0\,.$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Podle (3) existuje ke každému $k \in \boldsymbol{N}$ přirozené m_k tak, že $\mu(K_{m_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Pro jednoduchost položme $K_{m_k,k} = L_k$. Pro každé $x \in M_1 \dot{-} L_k$ je

$$(4) \qquad \sup_{n \geqq m_k} |f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{k}\,.$$

Položme $L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$. Tedy předně $\mu(L) < \varepsilon$. Za druhé: je-li $x \in M_1 \dot{-} L$, platí (4) pro každé k. To jest: Je-li k libovolné přirozené číslo, je $|f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{k}$ pro všechna $x \in M_1 \dot{-} L$ a všechna $n \geqq m_k$. Tedy je konvergence stejnoměrná v $M_1 \dot{-} L$, t. j. v množině $M \dot{-} N$, kde $N = (M \dot{-} M_1) \cup L$, takže $\mu(N) = \mu(L) < \varepsilon$.

Poznámka 3. Mějme nyní posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ funkcí měřitelných v M, která má skoro všude v M limitu (konečnou nebo nekonečnou) $\lim f_n(x) = f(x)$. Rozdělme M na čtyři množiny: $M = A \cup B \cup C \cup D$ takto: V bodech množiny A limita neexistuje (takže $\mu(A) =$

$= 0$), v bodech množiny B je limita konečná, v bodech množiny C je limita $+\infty$ a v bodech množiny D je limita $-\infty$. Jak je to se „stejnoměrností“ v množině B, říká věta 37; jak je tomu v množině C a D, říká věta následující:

Věta 38. *Budiž M měřitelná, $\mu(M) < +\infty$. Budiž $f_1, f_2, \ldots$ posloupnost funkcí měřitelných v M, která skoro všude v M má limitu $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná (ba dokonce otevřená) množina N tak, že je $\mu(N) < \varepsilon$ a že ke každému $a \in \mathbf{E}_1$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna $x \in M \dot{-} N$ a všechna $n > n_0$ je $f_n(x) > a$.*

(Tedy jakási „stejnoměrná divergence“ k $+\infty$. Změnou znamení dostaneme obdobnou větu pro $-\infty$.)

D ů k a z. Vynecháme-li vhodnou nulovou množinu, můžeme předpokládati, že f_n jsou definovány všude v M a že $\lim f_n(x) = +\infty$ pro každé $x \in M$. Vezměme tuto rostoucí funkci φ v oboru $\mathbf{E}_1^*$: $\varphi(t) = \dfrac{t}{1 + |t|}$ pro $t \in \mathbf{E}_1$, $\varphi(+\infty) = 1 = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$, $\varphi(-\infty) = -1 = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$. Funkce $F_n(x) = \varphi(f_n(x))$ jsou měřitelné v M (věta 36) a zřejmě $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1$. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 37 (a pozn. 1) existuje otevřená množina N tak, že $\mu(N) < \varepsilon$ a že $\lim F_n(x) = 1$ s t e j n o m ě r n ě v $M \dot{-} N$. Je-li $a \in \mathbf{E}_1$, je $\varphi(a) = \dfrac{a}{1 + |a|} < 1$, a tedy existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $x \in M \dot{-} N$ je $F_n(x) > \varphi(a)$, t. j. $\varphi(f_n(x)) > \varphi(a)$; ježto pak φ je rostoucí, plyne odtud $f_n(x) > a$.

§ 3. Charakteristické funkce. Jednoduché funkce. Definice 8. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$. Charakteristickou funkcí χ_M množiny M nazýváme funkci v oboru $\mathbf{E}_r$ takto definovanou: Je-li $x \in M$, je $\chi_M(x) = 1$; je-li $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$, je $\chi_M(x) = 0$.*

Označení χ_M budeme užívat pouze pro charakteristickou funkci. Index M zde nemá ovšem nic společného se symbolem pro parciální funkci. Zřejmě je $\chi_M = \chi_N$ tehdy a jen tehdy, je-li $M = N$.

Poznámka 1. Následující zřejmé vztahy si čtenář dokáže sám.

I. Jest $M \subset N$ tehdy a jen tehdy, jestliže $\chi_M(x) \leqq \chi_N(x)$ pro každé $x \in \mathbf{E}_r$.

II. Je-li $M = \bigcup_{z \in Z} M_z$, $N = \bigcap_{z \in Z} M_z$, je

$$\chi_M(x) = \operatorname*{Max}_{z \in Z} \chi_{M_z}(x)\,, \quad \chi_N(x) = \operatorname*{Min}_{z \in Z} \chi_{M_z}(x)\,.$$

III. Je-li $M = \bigcup_{z \in Z} M_z$ disjunktní sjednocení spočetného systému množin (t. j. Z spočetná), je $\chi_M(x) = \sum_{z \in Z} \chi_{M_z}(x)$.

IV. Budiž $M_1, M_2, \ldots$ nekonečná posloupnost množin; položme $A = \limsup_{n \to \infty} M_n$, $B = \liminf_{n \to \infty} M_n$. Potom $\chi_A(x) = \limsup_{n \to \infty} \chi_{M_n}(x)$, $\chi_B(x) = \liminf_{n \to \infty} \chi_{M_n}(x)$. Speciálně: $L = \lim_{n \to \infty} M_n$ existuje tehdy a jen tehdy, je-li $A = B$, t. j. $\chi_A = \chi_B$, t. j. existuje-li $\lim_{n \to \infty} \chi_{M_n}(x)$ pro každé $x \in \mathbf{E}_r$, načež

$$\chi_L(x) = \lim_{n \to \infty} \chi_{M_n}(x)\,.$$

Důkazy jsou jasné. Na př. $\chi_A(x) = 1$ značí totéž jako „$x \in M_n$ pro nekonečně mnoho n“, t. j. „$\chi_{M_n}(x) = 1$ pro nekonečně mnoho n“, t. j. $\limsup_{n \to \infty} \chi_{M_n}(x) = 1$ a pod.

Poznámka 2. Je-li a buďto vnitřním nebo vnějším bodem množiny M, je funkce χ_M zřejmě spojitá v bodě a. Je-li však a hraničním bodem množiny M, je χ_M nespojitá v bodě a, ježto v každém okolí $\Omega(a; \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) existují body x, y tak, že $\chi_M(x) = 1$, $\chi_M(y) = 0$.

Poznámka 3. Definici 8 je možno ovšem zobecnit: Je-li P jakákoliv množina (abstraktní), $M \subset P$, můžeme definovati χ_M v oboru P takto: $\chi_M(x) = 1$ pro $x \in M$, $\chi_M(x) = 0$ pro $x \in P \dot{-} M$. Pozn. 1 platí i v tomto případě (ovšem P musí zůstat pevné a místo $\mathbf{E}_r$ je nutno psáti P). Je-li P speciálně metrický prostor, platí i pozn. 2. Vraťme se nyní opět k množinám v $\mathbf{E}_r$.

Poznámka 4. Množina M je měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li funkce χ_M měřitelná (v $\mathbf{E}_r$). Důkaz. Množina $\mathcal{E}_x(x \in \mathbf{E}_r,\ \chi_M(x) > c)$ je rovna $\emptyset$ pro $c \geqq 1$, je rovna M pro $0 \leqq c < 1$ a je rovna $\mathbf{E}_r$ pro $c < 0$; množiny $\emptyset$, $\mathbf{E}_r$ jsou měřitelné.

Definice 9. *Budiž f funkce v oboru A. Říkáme, že f je jednoduchá funkce, nabývá-li f jen konečného počtu hodnot, t. j. je-li $f(A)$ konečná množina. Říkáme, že funkce f je jednoduchá v M, je-li parciální funkce f_M jednoduchá.*

Poznámka 5. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$; budiž f funkce jednoduchá v M. Nechť každá z hodnot $f(x)$ (pro $x \in M$) je rovna některému z čísel $c_1, c_2, \ldots, c_p$ (navzájem různých; $p \geqq 1$).[14]) Položme $M_i = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) = c_i)$, takže $M = M_1 \cup \ldots \cup M_p$ (disjunktní sjednocení). Potom je zřejmě

$$(5) \qquad f = c_1\chi_{M_1} + \ldots + c_p\chi_{M_p} \text{ v množině } M\,.$$

Za druhé: *f je měřitelná v M tehdy a jen tehdy, jsou-li množiny M_i ($i = 1, \ldots, p$) měřitelné.* Důkaz. I. Je-li f měřitelná v M, jsou M_i měřitelné podle pozn. 10 v § 1. II. Jsou-li M_i měřitelné, je f konstantní v M_i a tedy spojitá a tedy měřitelná v M_i (věta 32) a tedy i měřitelná v M (pozn. 7 v § 1).

Odvodíme jednoduchou, ale důležitou větu o aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými měřitelnými funkcemi:

Věta 39. *Budiž M měřitelná množina, f měřitelná v M.*

Potom existuje posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ jednoduchých konečných funkcí v oboru M, jež má tyto vlastnosti:

I. f_n jsou funkce měřitelné v M.

II. Je-li $x \in M$ a $f(x)$ není definováno, je $f_n(x) = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

III. Je-li $x \in M$, $f(x) \geqq 0$, je $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots, f_n(x) \leqq f(x)$.

IV. Je-li $x \in M$, $f(x) \leqq 0$, je $0 \geqq f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq \ldots, f_n(x) \geqq f(x)$.[15])

V. Je-li $f(x) \in M$, $|f(x)| < n$ ($n \in \mathbf{N}$), je $|f(x) - f_n(x)| < 2^{-n+1}$.

VI. Je-li $f(x) \in M$, $f(x) \geqq n$ ($n \in \mathbf{N}$), je $f_n(x) = n$.

VII. Je-li $f(x) \in M$, $f(x) \leqq -n$ ($n \in \mathbf{N}$), je $f_n(x) = -n$.

---

[14]) Může být též $c_i = +\infty$, $c_i = -\infty$.
[15]) Z III a IV plyne: je-li $x \in M$ a $f(x)$ definováno, je $|f_n(x)| \leqq |f(x)|$, $f(x) \cdot f_n(x) \geqq 0$.

VIII. Z V až VII zřejmě plyne: Je-li $x \in M$ a je-li $f(x)$ definováno, je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$; je-li f omezená v jisté množině $M_1 \subset M$, je dokonce $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M_1.

Důkaz provedeme tím, že takové funkce f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sestrojíme. Pro každé přirozené n definujeme: Je-li $x \in M$ a $f(x)$ není definováno, klademe $f_n(x) = 0$ (tedy platí II). Je-li $x \in M$, $f(x) \geqq n$, položíme $f_n(x) = n$; je-li $x \in M$, $f(x) \leqq -n$, položíme $f_n(x) = -n$ (tedy platí VI, VII). Je-li $x \in M$, $0 \leqq f(x) < n$, najdeme celé číslo k tak, že $\frac{k}{2^{n-1}} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^{n-1}}$ $(0 \leqq k < n \,.\, 2^{n-1})$, a položíme $f_n(x) = \frac{k}{2^{n-1}}$. Je-li konečně $x \in M$, $0 > f(x) > -n$, najdeme celé číslo k tak, že $-\frac{k+1}{2^{n-1}} < f(x) \leqq -\frac{k}{2^{n-1}}$ $(0 \leqq k < n \,.\, 2^{n-1})$, a položíme $f_n(x) = -\frac{k}{2^{n-1}}$. Je zřejmo, že platí též III, IV, V.[16]) Měřitelnost funkce f_n pak plyne takto (viz pozn. 5):

$$\mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f_n(x) = n) = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) \geqq n)\,;$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_x\left(x \in M, f_n(x) = \frac{k}{2^{n-1}}\right) = \mathop{\mathcal{E}}_x\left(x \in M, \frac{k}{2^{n-1}} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^{n-1}}\right)$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n \,.\, 2^{n-1} - 1$;

$$\mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f_n(x) = 0) = \mathop{\mathcal{E}}_x\left(x \in M, |f(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cup N\,,$$

kde N je nulová množina oněch $x \in M$, pro něž $f(x)$ není definováno; podobně pro $f_n(x) = -k \,.\, 2^{-n+1}$, $f_n(x) = -n$.

Cvičení

1. Jestliže funkce f z věty 39 je B-měřitelná v M (viz cvič. 2 k § 1), jsou i funkce f_n, sestrojené v jejím důkazu, B-měřitelné v M.

---

[16]) Vše je velmi názorné: Interval $\langle -n, n\rangle$ rozdělím „dělicími body“ tvaru $k \,.\, 2^{-n+1}$ na $n2^n$ intervalů délky 2^{-n+1}, načež hodnoty $f(x) \geqq n$ „srazím“ na n; hodnoty $f(x)$ intervalu $\langle 0, n)$ „srazím“ na nejbližší hodnotu $k \,.\, 2^{-n+1}$; podobně pro $f(x) < 0$. Uvažte, že všechny „dělicí body“ $k \,.\, 2^{-n+1}$ při n-tém kroku jsou také „dělicími body“ tvaru $l \,.\, 2^{-n}$ (při $(n + 1)$-vém kroku).

§ 4. Luzinova věta. Poznámka 1. Je-li $f_1, f_2, \ldots$ posloupnost funkcí spojitých v množině M, která pro každé $x \in M$ má (konečnou nebo nekonečnou) limitu $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, říkáme, že f je *funkce 1. třídy v M*. Podobně dále: limitu posloupnosti funkcí 1. třídy (v M) nazýváme funkcí 2. třídy (v M) atd. Ale my budeme potřebovati jen funkce 1. třídy. Podobně jako jsme na př. ve větách 21, 22 dokázali, že měřitelné množiny lze charakterisovati jako ty množiny, které se „málo" liší od množin uzavřených (a ještě méně od množin typu F_σ), ukážeme v následující důležité větě, že funkce měřitelné lze charakterisovati jako funkce, které se v jistém smyslu „málo" liší od funkcí spojitých (a ještě méně od funkcí 1. třídy).

Věta 40. *Budiž M měřitelná; budiž f definována skoro všude v M. Potom každé dvě z těchto čtyř podmínek jsou ekvivalentní (t. j. f, M splňují buďto všechny čtyři podmínky nebo žádnou z nich):*

I. f je měřitelná v M.

II. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina N tak, že $\mu(N) < \varepsilon$ a že f je spojitá v $M \dot{-} N$ (t. j. parciální funkce $f_{M \dot{-} N}$ je spojitá).

III. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina N a funkce F tak, že F je spojitá v M a konečná v NM, dále $\mu(N) < \varepsilon$ a konečně $F(x) = f(x)$ pro každé $x \in M \dot{-} N$.

IV. Existuje nulová množina P tak, že f je funkcí 1. třídy v $M \dot{-} P$.

Poznámka 2. Máme dokázati implikace I $\Rightarrow$ II, II $\Rightarrow$ III, III $\Rightarrow$ IV, IV $\Rightarrow$ I. Z nich nejdůležitější je I $\Rightarrow$ II. Ostatní jsou téměř samozřejmé, jak uvidíme.

Ale v dalším budeme potřebovati jen ekvivalenci podmínek I, II. Pro čtenáře, který se nezajímá o podmínky III, IV, dokáži nyní, že II $\Rightarrow$ I. Z důkazu věty 40 si pak tento čtenář přečte pouze důkaz implikace I $\Rightarrow$ II.

Nechť tedy platí II. Ke každému přirozenému n existuje tedy množina N_n tak, že $\mu(N_n) < \frac{1}{n}$ a že $f_{M \dot{-} N_n}$ je spojitá, takže f je měřitelná v $M \dot{-} N_n$ (věta 32). Tedy je f měřitelná i v množině $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \dot{-}$

$\dot{-} N_n$) (§ 1, pozn. 7). Ale $M \dot{-} P \subset N_n$ pro každé n, tedy $\mu(M \dot{-} P) = 0$, takže f je měřitelná i v množině $M \sim P$ (§ 1, pozn. 4).

Důkaz věty 40. II $\Rightarrow$ III. Platí-li II, je v prostoru M množina MN otevřená (viz **D II**, věta 129) a tedy množina $M \dot{-} NM = M \dot{-} N$ uzavřená. Ke spojité funkci $f_{M \dot{-} N}$ existuje tedy podle věty o rozšíření oboru spojitých funkcí (**D II**, věta 175) funkce F s žádanými vlastnostmi.

III $\Rightarrow$ IV. Z III plyne, že ke každému $n \in \mathbf{N}$ existuje otevřená N_n a funkce F_n spojitá v M tak, že $\mu(N_n) < 2^{-n}$ a že pro $x \in M \dot{-} N_n$ je $f(x) = F_n(x)$. Položme $P = \limsup_{n \to \infty} N_n$, takže $P \subset N_k \cup N_{k+1} \cup N_{k+2} \cup \ldots$ pro každé k, tedy $\mu(P) \leqq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1}$, tedy $\mu(P) = 0$. Je-li $x \in M \dot{-} P$, je $x \in M \dot{-} N_k$ pro všechna dosti velká k, třeba pro $k \geqq k_0$. Pro $k \geqq k_0$ je tedy $F_k(x) = f(x)$. Tedy $\lim_{k \to \infty} F_k(x) = f(x)$ pro každé $x \in M \dot{-} P$, takže f je 1. třídy v $M \dot{-} P$.

IV $\Rightarrow$ I. Z IV plyne, že $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pro každé $x \in M \dot{-} P$, kde f_n jsou spojité a tedy měřitelné v $M \dot{-} P$, takže f je měřitelná v $M \dot{-} P$ a tedy i v množině $M \sim M \dot{-} P$.

I $\Rightarrow$ II. Budiž f měřitelná v M; máme dokázati, že platí II.

α) Budiž především f *konečná* měřitelná *jednoduchá* funkce v oboru M. Buďte $c_1, c_2, \ldots, c_p$ navzájem různé hodnoty, kterých nabývá funkce f, takže množiny $M_i = \mathcal{E}_x(x \in M, f(x) = c_i)$ jsou měřitelné a je $M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$ (disjunktní sjednocení). Budiž $\varepsilon > 0$; podle věty 21 existují uzavřené F_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) tak, že $F_i \subset M_i$, $\mu(M_i \dot{-} F_i) < \frac{\varepsilon}{p}$. Položíme-li $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, $N_0 = \bigcup_{i=1}^{p} (M_i \dot{-} F_i)$, je $\mu(N_0) < \varepsilon$, $F = M \dot{-} N_0$. Funkce f je konstantní v F_i, a tedy je spojitá v F.[17]) Existuje ovšem otevřená $N \supset N_0$ tak, že $\mu(N) < \varepsilon$ a funkce f je ovšem spojitá v $M \dot{-} N \subset M \dot{-} N_0$.

[17]) Uvažte, že žádný bod F_i není hromadným bodem ostatních F_j (uzavřenost!).

β) Budiž za druhé f měřitelná v M a budiž $|f(x)| \leqq 1$ ve všech bodech $x \in M$, pro něž $f(x)$ je definováno. Budiž P množina těch bodů $x \in M$, pro něž $f(x)$ není definováno. Sestrojme posloupnost jednoduchých konečných měřitelných funkcí $f_1, f_2, \ldots$ v oboru M, aproximujících funkci f ve smyslu věty 39.

Budiž $\varepsilon > 0$. Budiž $N_0 \supset P$, N_0 otevřená, $\mu(N_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ budiž N_n otevřená množina míry $\mu(N_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-1}$ a taková, že f_n je spojitá v $M \dot{-} N_n$ (takové N_n existuje podle α). Položme $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, takže N je otevřená, $\mu(N) < \varepsilon$. Funkce f_n jsou spojité v $M \dot{-} N$ a pro $n > 1$, $x \in M \dot{-} N_0$ (a tím spíše pro $x \in M \dot{-} N$) je $|f_n(x) - f(x)| < 2^{-n+1}$ podle vlastnosti V ve větě 39. Tedy $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ *stejnoměrně* v $M \dot{-} N$, takže i funkce f je spojitá v $M \dot{-} N$.[18])

γ) Budiž f měřitelná v M. Budiž φ naše známá funkce z pozn. 12, § 1 (nebo **D II**, kap. VI, § 4, příkl. 1), ψ funkce k ní inversní. Funkce $\varphi(f(x))$ vyhovuje (viz větu 36) předpokladům bodu β, takže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená N tak, že $\mu(N) < \varepsilon$ a že $\varphi(f(x))$ je spojitá v $M \dot{-} N$. Tedy i $\psi(\varphi(f(x))) = f(x)$ je spojitá v $M \dot{-} N$ (neboť $|\varphi(f(x))| \leqq 1$ a funkce ψ je spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$).

§ 5. Komplexní měřitelné funkce. V praxi bývá často výhodné vyšetřovati komplexní funkce reálných proměnných (na př. je často pohodlnější vyšetřovati e^{ix} než dvojici funkcí $\cos x$. $\sin x$). Proto rozšíříme naše definice také na komplexní funkce reálných proměnných, ale jen takové, které jsou skoro všude (ve vyšetřované množině) konečné. Je-li tedy $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, $g(x) = g_1(x) + i g_2(x)$ (f_1, f_2, g_1, g_2 reálné a skoro všude v M konečné), budeme říkati, že $f \sim g\ (M)$, je-li $f(x) = g(x)$ skoro všude v M. Budeme říkati, že f je měřitelná v M, jsou-li f_1, f_2 měřitelné v M. Použijeme-li výsledků této kapitoly na reálnou a imaginární část příslušných funkcí, vidíme ihned, že i pro konečné komplexní funkce platí pozn. 1, 2,[19]) z § 1, věta 32,[19]) pozn. 4, 5, 6, 7, 8,[19]) 9 z § 1. Z věty 34 plyne: Jsou-li f, g konečné měřitelné v M, $0 < \alpha < +\infty$, jsou měřitelné v M

[18]) Viz **D II**, věta 174, kde y znamená nyní náš index n (t. j. ve větě 174 je klásti $b = +\infty$, $B = \mathbf{N}$, $R = \mathbf{E}_1{}^*$).

[19]) Konečnost funkce nutno předpokládat.

i funkce $f \pm g = (f_1 \pm g_1) + i(f_2 \pm g_2)$, $fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1)$, $|f| = (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{2}}$ a tedy i $|f|^\alpha$ ($|f|$ je již reálná) a konečně $f : g = ((f_1g_1 + f_2g_2) + i(f_2g_1 - f_1g_2)) : (g_1^2 + g_2^2)$ je měřitelná v množině $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, g(x) \neq 0)$. Z dodatku k větě 35 pak plyne toto: jsou-li φ_n ($n = 1, 2, \ldots$) komplexní funkce měřitelné v M a je-li N množina oněch $x \in M$, pro něž existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, je φ měřitelná v N. Také výsledek pozn. 11 v § 1 platí, je-li $\lim f(x, \alpha)$ konečná skoro všude v M. Také Jegorovova věta 37 platí pro komplexní f_n a rovněž Luzinova věta 40, předpokládám-li v ní f konečnou skoro všude v M. Vidíte, že naše zobecnění je čistě formální — ale bývá užitečné v praxi.

Zároveň vidíte, že některé věty se přenášejí na funkce komplexní beze změny, jiné s jistým omezením nebo změnou, jiné pak vůbec ne. Také je vidět, že některé věty je nutno (nebo aspoň užitečno) dokázati napřed pro reálné funkce, načež důkaz pro komplexní funkce plyne často okamžitě aplikací dokázaného výsledku na reálnou a imaginární část. Aby měl čtenář přehled o tom, které výsledky platí pro komplexní funkce, a aby přitom nebylo nutno stále opakovati tytéž triviální úvahy, budeme se říditi tímto principem: Pokud není jinak řečeno, je slovem „funkce" v kap. III—VI, IX—XII míněna vždy reálná funkce. Ty věty, poznámky a pod., které — po případě s jistou modifikací — platí i pro komplexní funkce, jsou uvedeny ve zvláštním seznamu na konci knihy, při čemž jsou uvedeny změny, které je ve znění vět a poznámek provésti, mají-li býti platny pro komplexní funkce. Pokud se důkazů pro komplexní funkce týče, je možno rozeznávati tři případy:

1. Důkaz je výslovně prováděn pro komplexní funkce.

2. Důkaz je napřed proveden pro reálné funkce a potom provedeno (obyčejně v „Poznámce") jeho zobecnění (s případnou modifikací věty) na komplexní funkce.

3. Ale u většiny výsledků, platných pro komplexní funkce, není vůbec zmínky o komplexních funkcích. To znamená: zajímá-li se čtenář o komplexní funkce, najde si ve zmíněném seznamu, jak příslušný výsledek vypadá pro komplexní funkce, načež si (obyčejně jediným pohledem na reálnou a imaginární část) ověří správnost výsledku.