KAPITOLA I

THEORIE MÍRY

§ 1. Úvodní poznámky. Tento paragraf má čtenáři připomenout některé pojmy, označení a věty z **D II**, kterých budeme užívat, a podat některé jednoduché důsledky a úpravy těchto vět, pokud je budeme potřebovat v trochu jiné formě, než jak byly uvedeny v **D II**.

Přidržíme se těchto označení z **D II**, kap. I: $x \in M$ (prvek množiny), $M \subset N$ (část množiny), $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$, $A_1 \cup A_2$ (sjednocení), $\bigcap_{n=1}^{k} A_n$, $A_1 \cap A_2$ nebo A_1A_2 (průnik), $A \dot{-} B$ (rozdíl), $A \times B$ (kartézský součin), (a, b, c) (množina o prvcích a, b, c), $\emptyset$ (prázdná množina). $\boldsymbol{N}$ (množina všech přirozených čísel), $\boldsymbol{P}$ (množina všech racionálních čísel), $\boldsymbol{E}_r$ (množina všech systémů $[x_1, \ldots, x_r]$, kde $x_1, \ldots, x_r$ jsou konečná reálná čísla), podobně $\boldsymbol{K}_r$ (x_k jsou teď konečná komplexní). V $\boldsymbol{E}_r$ zavádíme vzdálenost $\varrho(x, y)$ bodů $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $y = [y_1, \ldots, y_r]$ rovnicí $\varrho(x, y) = \operatorname{Max}_{1 \leq k \leq r} |x_k - y_k|$ nebo $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_k - y_k|^2}$ (t. zv. eukleidovská metrika); poslední definice užíváme též v $\boldsymbol{K}_r$. V $\boldsymbol{E}_r$ užíváme první rovnice, není-li jinak řečeno. Místo $\varrho(x, y)$ píšeme též $\|x - y\|$. Místo $\boldsymbol{K}_1$ píšeme též $\boldsymbol{K}$.[1]) Je-li x bod, $0 < R < +\infty$, značí $\Omega(x, R)$ množinu těch bodů y, pro něž je $\varrho(x, y) < R$.

Znak $\mathop{\mathcal{E}}_{z}(V(z))$ znamená množinu těch z, pro která platí výrok $V(z)$. Na př. $\mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}(0 < x < 1, 0 < y < 1)$ znamená množinu oněch bodů $[x, y]$, pro které je $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ (čtverec).

Je-li $c = a + ib$ ($a \in \boldsymbol{E}_1$, $b \in \boldsymbol{E}_1$) komplexní číslo, značíme často $a = \Re c$, $b = \Im c$. Je-li $b \neq 0$, nazýváme číslo c nereálným nebo imaginárním; je-li $a = 0$, nazýváme číslo c ryze imaginárním (a to i v případě $a = b = 0$, takže 0 není imaginární, ale je ryze imaginární).

$\boldsymbol{E}_1$ je množina všech konečných neboli vlastních reálných čísel; přidáme-li k ní nekonečná neboli nevlastní reálná čísla $+\infty$, $-\infty$,

[1]) Viz **D II**, kap. VI, § 1 a počátek § 3.

dostáváme prostor $\mathbf{E}_1^*$, v němž obyčejně zavádíme t. zv. redukovanou metriku ϱ^*.[2]) Podobně k množině $\mathbf{K}$ všech konečných neboli vlastních komplexních čísel přidáváme někdy ještě nekonečné neboli nevlastní komplexní číslo ∞, čímž dostáváme prostor $^*\mathbf{K}$; někdy tento prvek ∞ přidáváme též k $\mathbf{E}_1$, čímž dostáváme prostor $^*\mathbf{E}_1$ (vyskytne se nám jen v kap. XIX). V $^*\mathbf{K}$, $^*\mathbf{E}_1$ zavádíme obyčejně metriku $^*\varrho$.[2])

Mluvíme také o konečné neboli vlastní a nekonečné neboli nevlastní derivaci a limitě. Slovem funkce, pokud nebude řečeno nebo ze souvislosti patrno něco jiného, rozumím komplexní funkci jedné nebo několika reálných proměnných. U reálných funkcí připouštím též hodnoty $+\infty$, $-\infty$; funkci, která nabývá jen konečných hodnot, nazývám konečnou. Rozlišujte tento pojem od funkce omezené v M (to znamená: existuje konečné číslo K tak, že $|f(x)| < K$ pro všechna $x \in M$).

Jak se počítá s čísly $+\infty$, $-\infty$, viz v **D II**, kap. II, § 1.

O spojitosti funkce mluvím (na rozdíl od některých autorů) i v těch bodech, ve kterých funkce má nekonečnou hodnotu. Krátce to lze říci takto:[3]) Nechť funkce f (reálná nebo komplexní) je definována v bodě $c \in M$. Je-li c isolovaným bodem množiny M, říkáme vždy, že f je spojitá v bodě c vzhledem k M; je-li však c hromadným bodem množiny M, říkáme, že f je spojitá v bodě c vzhledem k M tehdy a jen tehdy, je-li $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in M}} f(x) = f(c)$; přitom $f(c)$ smí býti po případě také některá z nekonečných hodnot $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Naproti tomu o stejnoměrné konvergenci mluvím[4]) jen v tomto smyslu: Říkáme, že je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ stejnoměrně v } M\,,$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$\text{(I)} \qquad (n > n_0,\, x \in M) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,;^{5)}$$

[2]) Viz **D II**, kap. VI, § 4.
[3]) Viz **D II**, kap. VI, § 9, pozn. 3 (str. 268).
[4]) V této knize; v **D II**, kap. VI je to obecněji.
[5]) Jinými slovy: za prostor, v němž leží hodnoty funkce, bereme $\mathbf{E}_1$ nebo $\mathbf{K}_1$ (nikoliv tedy $\mathbf{E}_1^*$ nebo $^*\mathbf{K}_1$) s obvyklou metrikou $\varrho(X, Y) = |Y - X|$; potom je to ve shodě s def. 35, 36 v **D II**, kap. VI, § 21, str. 328.

podobně pro pojem (trochu obecnější)

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y) = F(x) \text{ stejnoměrně v } M\,.$$

Z (I) plyne, že f je konečná v M a rovněž všechny f_n pro $n > n_0$.

Příležitostně budeme mluvit také o vztahu

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \textit{ stejnoměrně uvnitř } I\,,$$

kde I je nějaký otevřený interval v $\mathbf{E}_1$. Tím rozumíme, že tento vztah platí stejnoměrně v každém kompaktním intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset I$.[6]) (Potom je ovšem konvergence stejnoměrná v každé neprázdné kompaktní množině $M \subset I$, ježto čísla $\alpha = \inf M$, $\beta = \sup M$ leží v I, a tedy $M \subset \langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ a konvergence je stejnoměrná v $\langle \alpha, \beta \rangle$).

Pro množiny v metrickém prostoru[7]) užívám znaků $\overline{M}$ (uzávěr), M° (vnitřek), M' (derivace, derivovaná množina), $\mathbf{H}(M)$ (hranice). Pokud jde o množiny v $\mathbf{E}_r$, rozumím tím vždy uzávěr, vnitřek, ... v $\mathbf{E}_r$. Podobně množina uzavřená = množina uzavřená v $\mathbf{E}_r$.

Je-li M množina uzavřená (otevřená) v metrickém prostoru P a je-li N uzavřená (otevřená) v metrickém prostoru Q, je $M \times N$ uzavřená (otevřená) v $P \times Q$.

Množina tvaru $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou množiny uzavřené v P, se nazývá množinou typu F_σ (v prostoru P). Množina tvaru $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n jsou otevřené v P, se nazývá množinou typu G_δ v P.[8]) Je-li $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ typu G_δ v P (G_n otevřené v P) a je-li $H = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m$ typu G_δ v Q (H_m otevřené v Q), je $G \times H$ typu G_δ v $P \times Q$, neboť $G \times H = \bigcap_{n,m=1}^{\infty} (G_n \times H_m)$ a $G_n \times H_m$ jsou otevřené v $P \times Q$. Podobně pro F_σ.

Znakem $f(x)$ + konst značím někdy funkci $f(x) + C$, kde C je (konečná) konstanta.

---

[6]) Pojem kompaktní množiny jsme zavedli v **D II**, kap. VI, § 16; v $\mathbf{E}_r$ i v $\mathbf{K}_r$ splývá tento pojem s pojmem množiny uzavřené a omezené. Také pojem konvergence „stejnoměrné uvnitř I" byl zaveden v **D II**, kap. VI, § 21, pozn. 5, a to i v obecnějších případech.

[7]) Viz **D II**, kap. VI, § 5.

[8]) **D II**, kap. VI, § 6.

Zbytek tohoto paragrafu obsahuje některé poznámky, kterých budeme porůznu užívati; čtenář je nemusí čísti teď, může počkat, až jich bude potřebovati.

Poznámka 1. Velmi často budeme pracovati s t. zv. zobecněnými řadami, tak jak jsme je zavedli v **D II**, kap. III, § 3. Je-li $\mathfrak{M}$ nějaká spočetná množina a je-li každému prvku $m \in \mathfrak{M}$ přiřazeno reálné číslo $a(m)$[9]) (které však smí býti také $+\infty$ nebo $-\infty$), mluvíme o zobecněné řadě

$$\text{(II)} \qquad \sum_{m \in \mathfrak{M}} a_m \, .$$

Vezměme všechny nezáporné členy řady (II) a srovnejme je nějak v řadu $x_1 + x_2 + \ldots$ (která může mít po případě i jen konečný počet členů); ta má jistý součet s_1 $(0 \leqq s_1 \leqq +\infty)$.[10]) Zrovna tak vezměme záporné členy řady (II); ty mají jistý součet s_2 $(0 \geqq s_2 \geqq -\infty)$. Jestliže součet $s_1 + s_2$ má smysl, t. j. jestliže aspoň jedno z obou čísel s_1, s_2 je konečné, definujeme, že součtem zobecněné řady nazýváme číslo $s_1 + s_2$. Potom platí ovšem, že při libovolném uspořádání zobecněné řady (II) v „řadu" v obvyklém smyslu slova $a(m_1) + a(m_2) + \ldots$ má tato řada součet $s_1 + s_2$. Za druhé platí v tomto případě věty 39 a 39a v **D II**, které říkají zhruba toto: Abychom dostali součet zobecněné řady (II), můžeme členy této řady libovolným způsobem rozdělit do skupin, sečísti vždy členy každé skupiny a potom sečíst tyto součty jednotlivých skupin. V případě, že $s_1 = +\infty$, $s_2 = -\infty$, nepřisuzujeme řadě (II) žádný součet.

V případě řady $\sum\limits_{n \in N} a_n$, kde N znamená množinu všech přirozených čísel, musíme dáti pozor na jistý jemný rozdíl mezi touto zobecněnou řadou a „obyčejnou" řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (kde je určeno p o ř a d í členů). Může se státi, že „zobecněná" řada nemá součet (protože $s_1 = +\infty$, $s_2 = -\infty$), zatím co „obyčejná" řada má součet (ovšem nemůže býti absolutně konvergentní). Na př. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} = \lg 2$, kdežto

[9]) Píši a_m nebo $a(m)$ — jak se mně to hodí.

[10]) Tento součet nezávisí na tom, jak jsme řadu $x_1 + x_2 + \ldots$ srovnali. Je-li tento součet „prázdný", znamená ovšem nulu.

táž řada, pojímaná jako „zobecněná", nemá součtu. Ovšem u řad (II) s nezápornými členy nemůže nastat žádná obtíž — s těmi lze počítat „bez rozmýšlení".

Má-li zobecněná řada konečný součet, t. j. je-li součet nezáporných a rovněž součet záporných členů konečné číslo, nazývá se řada (II) absolutně konvergentní. Případ absolutně konvergentní řady můžeme zobecnit i na řady s komplexními členy; takovou řadu (II) nazvu absolutně konvergentní, má-li zobecněná řada $\sum_{m \in \mathfrak{M}} |a_m|$ konečný součet. Uvedené věty platí zřejmě i pro absolutně konvergentní řadu s komplexními členy; stačí jich užít na řadu reálných a na řadu imaginárních částí.

Poznámka 2. Budiž $f(x)$ neklesající v intervalu $I \subset \mathbf{E}_1$. Potom v každém vnitřním bodě c intervalu I existují tyto limity:

$$\inf_{\substack{x \in I \\ x > c}} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x) \geqq f(c) \geqq \lim_{x \to c-} f(x) = \sup_{\substack{x \in I \\ x < c}} f(x) \,.$$ [11]

Tyto limity se někdy značí $f(c+)$, $f(c-)$. Bod c je bodem nespojitosti tehdy a jen tehdy, je-li $f(c-) < f(c+)$. Podobně pro nerostoucí funkce. Odtud plyne, že množina bodů nespojitosti monotonní funkce je spočetná (**D II**, věta 75, str. 169).

Některých vět budeme potřebovat v trochu jiném tvaru, než jak byly vysloveny v **D II**. Věnuji jim proto následující poznámky.

Poznámka 3. Budiž I omezený interval (nezvrhlý) v $\mathbf{E}_1$. Budiž P metrický prostor, $B \subset P$, $b \in P$, $b \in B'$. Budiž $f(\alpha, \beta)$ konečná komplexní funkce, definovaná pro $\alpha \in I$, $\beta \in B \dot{-} (b)$. Nechť aspoň pro jedno $\alpha \in I$ existuje konečná limita $\lim_{\substack{\beta \to b \\ \beta \in B}} f(\alpha, \beta)$. Nechť za druhé pro každé $\beta \in B \dot{-} (b)$ a každé $\alpha \in I$ existuje konečná derivace

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta)}{h}$$ [12]

a nechť za třetí existuje pro každé $\alpha \in I$ limita (konečná)

---

[11]) Jak je tomu v krajních bodech intervalu I, zodpoví čtenář sám.

[12]) V počátečním, po příp. koncovém bodě intervalu I, pokud patří k I, míním derivaci zprava po příp. zleva.

$$\text{(IV)} \qquad \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta\in B}} \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = F(\alpha)\,,$$

a to stejnoměrně v I.

Potom předně existuje konečná limita

$$\text{(V)} \qquad \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta\in B}} f(\alpha, \beta) = G(\alpha)$$

pro každé $\alpha \in I$[13]) a za druhé je

$$\frac{\mathrm{d}G(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = F(\alpha) \text{ pro každé } \alpha \in I\,.$$[13])

Jinak psáno:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta\in B}} f(\alpha, \beta) = \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta\in B}} \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\,;$$

heslo: Derivace limity rovná se limitě derivace.

Důkaz stačí provésti pro reálné f (v obecném případě pak sečtu výsledek pro reálnou a pro imaginární část). V **D II**, věta 57 jsme již probrali jeden speciální případ, totiž ten, že $B = \boldsymbol{N}$, $b = +\infty$, $P = \mathbf{E}_1^*$; píši-li tedy $f(\alpha, n) = f_n(\alpha)$, jde o limitu posloupnosti funkcí $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots$[14]) Obecný případ převedeme pak na případ posloupnosti podle věty 143 v **D II**.

Buďte tedy splněny předpoklady věty, kterou máme dokázati. Budiž $\beta_1, \beta_2, \ldots$ jakákoliv posloupnost taková, že $\beta_n \in B, \beta_n \neq b$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = b$. Potom aspoň pro jedno $\alpha \in I$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha, \beta_n)$ a dále je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial f(\alpha, \beta_n)}{\partial \alpha} = F(\alpha)$ stejnoměrně v I. Podle věty 57 v **D II** tedy existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha, \beta_n) = G(\alpha)$ pro každé $\alpha \in I$ a je $\dfrac{\mathrm{d}G(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = F(\alpha)$ pro každé $\alpha \in I$. Ježto $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha, \beta_n)$ existuje pro **každou** takovou posloupnost $\beta_1, \beta_2, \ldots$, platí podle věty 143 v **D II** rovnice (V), čímž naše věta dokázána.

---

[13]) Dokonce stejnoměrně v I, ale toho nebudeme potřebovat.

[14]) Místo α jsme v **D II** psali x. Mimo to jsme předpokládali interval I otevřený. Ale pohledem na důkaz věty 57 se čtenář přesvědčí, že důkaz platí i pro ostatní druhy intervalů. Ostatně: kdo se tím nechce zdržovat, nechť předpokládá I otevřený; pro naše pozdější aplikace to stačí.

Poznámka 4. Nechť P je metrický prostor, $A \subset P$, $a \in P$, $a \in A'$; nechť reálná (konečná nebo nekonečná) funkce f je definována pro všechna $x \in A$, pro něž $0 < \varrho(x, a) < \Delta$ $(\Delta > 0)$. Tedy mají smysl čísla

$$S = \limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) , \quad s = \liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

(viz **D II**, kap. VI, § 12). Tvrdím: Existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ taková, že

$$\text{(VI)} \qquad x_n \neq a , \quad x_n \in A , \quad \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

a že současně $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = S$; avšak neexistuje posloupnost s vlastnostmi (VI), pro kterou by bylo $\lim_{n \to \infty} f(x_n) > S$. Podobně pro limes inferior.

Důkaz. Je-li $\Phi(\delta) = \sup\limits_{\substack{x \in A \\ 0 < \varrho(x, a) < \delta}} f(x)$, je

$$S = \lim_{\delta \to 0+} \Phi(\delta) = \inf_{0 < \delta < \Delta} \Phi(\delta) .$$

I. Zvolme posloupnost čísel $c_1, c_2, \ldots$ tak, že $c_n < \Phi\left(\frac{1}{n}\right), \lim\limits_{n \to \infty} c_n = S$ (to je zřejmě možné, je-li $S > -\infty$[15])). Potom podle definice suprema existují čísla $x_1, x_2, \ldots$ tak, že $x_n \neq a$, $x_n \in A$, $\varrho(x_n, a) < \frac{1}{n}$ a $f(x_n) > c_n$. Tedy platí (VI) a dále $c_n < f(x_n) \leqq \Phi\left(\frac{1}{n}\right)$, tedy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = S$.

II. Nechť platí (VI) a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = T > S$; z toho odvodíme spor. Zvolme V tak, že $S < V < T$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\Phi(\delta) < V$. Dále existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\varrho(x_n, a) < \delta$, tedy $f(x_n) \leqq \Phi(\delta) < V$, takže nemůže býti $\lim f(x_n) > V$ — spor.

[15]) V případě $S = -\infty$ je však $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = S$ dokonce pro každou posloupnost s vlastnostmi (VI).

§ 2. Posloupnosti množin. Budiž dána nekonečná posloupnost jakýchkoliv množin

$$(1) \qquad M_1, M_2, \dots$$

Posloupnost se nazývá *rostoucí*, je-li $M_n \subset M_{n+1}$, a nazývá se *klesající*, je-li $M_n \supset M_{n+1}$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$ (Přiléhavější by byl název neklesající a nerostoucí, ježto případ $M_n = M_{n+1}$ není vyloučen.) Znakem $\limsup\limits_{n\to\infty} M_n$ označujeme množinu těch prvků, které leží v nekonečně mnoha M_n (t. j. leží v M_n pro nekonečně mnoho hodnot n). Znakem $\liminf\limits_{n\to\infty} M_n$ označujeme množinu těch prvků, které leží ve všech M_n až na konečný počet hodnot n. Příklad: Budiž M_n množina všech čísel tvaru $\frac{k}{n}$, kde k probíhá všechna celá čísla. Potom $\limsup M_n$ je množina všech racionálních čísel, neboť $\frac{k}{n} = \frac{mk}{mn}$ pro každé $m \geqq 1$; $\liminf M_n$ je množina všech celých čísel, neboť $\frac{a}{b}$ (a, b celá, nesoudělná, $b > 1$) neleží v žádné z nekonečně mnoha množin M_n, kde n je jakékoliv přirozené číslo, jež není dělitelno číslem b.

Zřejmě je vždy

$$(2) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \subset \liminf_{n\to\infty} M_n \subset \limsup_{n\to\infty} M_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n .$$

Jestliže $\liminf M_n = \limsup M_n$, nazýváme tuto množinu $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ a mluvíme o *konvergentní* posloupnosti. To tedy znamená, že každý prvek, ležící v nekonečně mnoha M_n, leží ve všech M_n až na konečný počet.

$x \in \limsup M_n$ znamená: Ať je n jakékoliv, leží x v některé M_k, kde $k \geqq n$. Za druhé $x \in \liminf M_n$ znamená: Existuje n tak, že x leží v každé M_k, kde $k \geqq n$. Tedy zřejmě

$$(3) \qquad \liminf M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} M_k , \quad \limsup M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} M_k .$$

Poznámka 1. *Je-li* (1) *rostoucí, je*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n . \tag{4}$$

Důkaz. Je-li $x \in M_n$, je též $x \in M_k$ pro všechna $k \geqq n$. Tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset$ $\subset \liminf M_n$; odtud a z (2) plyne (4). *Je-li* (1) *klesající, je*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n . \tag{5}$$

Důkaz. Je-li $x \in \limsup M_n$, potom ke každému n existuje $k \geqq n$ tak, že $x \in M_k \subset M_n$. Tedy $x \in M_n$ pro každé n, $\limsup M_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Odtud a z (2) plyne (5).

Poznámka 2. Z definice je zřejmo, že $\limsup M_n$, $\liminf M_n$, $\lim M_n$ se nezmění, jestliže v (1) vynechám, přidám nebo změním konečný počet členů (t. j. množin M_n).

Poznámka 3. Sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ lze psáti v disjunktním tvaru

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

klademe-li $A_1 = M_1$, $A_n = M_n \dot{-} (M_1 \cup \ldots \cup M_{n-1})$ pro $n > 1$, takže $A_n A_m = \emptyset$ pro $n \neq m$. Sjednocení a průnik lze psáti též ve tvaru

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n , \quad B_n \subset B_{n+1} ;$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n , \quad C_n \supset C_{n+1} ,$$

klademe-li $B_n = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$, $C_n = M_1 M_2 \ldots M_n$. Podobné úpravy lze provésti u konečných posloupností.

Cvičení

1. Dokažte (vynechávám znak $n \to \infty$):

$$\limsup (A \dot{-} M_n) = A \dot{-} \liminf M_n\,;$$
$$\limsup AM_n = A \limsup M_n\,;$$
$$\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n\,;$$
$$\limsup (A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n\,;$$

zde nemusí platit znamení rovnosti. Pro vybranou posloupnost je $\limsup A_{k_n} \subset \subset \limsup A_n$.

2. Jak se změní tvrzení cvič. 1, zaměníme-li lim sup s lim inf?

3. Sestrojte posloupnost $A_1, A_2, \ldots$ konečných množin, jež má tuto vlastnost: pro žádnou vybranou posloupnost není ani $\lim A_{k_n} = \limsup A_n$ ani $\lim A_{k_n} = \liminf A_n$.

4. Dokažte však: z každé posloupnosti spočetných množin lze vybrati vybranou posloupnost, která má limitu.

§ 3. Množinové okruhy a tělesa. Budiž $\mathfrak{A}$ nějaká neprázdná množina množin (budeme raději říkati systém množin, je to přehlednější[16])). Systém $\mathfrak{A}$ se nazývá **aditivní**, platí-li toto: Je-li $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, je též $A \cup B \in \mathfrak{A}$. Odtud ihned plyne: Je-li $A_k \in \mathfrak{A}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, je $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathfrak{A}$. Systém $\mathfrak{A}$ se nazývá σ-**aditivní**, platí-li toto: Je-li $A_n \in \mathfrak{A}$ pro všechna přirozená n, je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Systém σ-aditivní je aditivní; neboť je-li $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, je $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup A_2 \cup \cup \ldots \in \mathfrak{A}$. Systém $\mathfrak{A}$ se nazývá (množinovým) **okruhem**, má-li tyto dvě vlastnosti: 1. Je aditivní. 2. Je-li $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, je též $A \dot{-} B \in \mathfrak{A}$ (odtud plyne ihned též $AB \in \mathfrak{A}$, neboť $AB = A \dot{-} (A \dot{-} B) \in \mathfrak{A}$). Okruh, který je σ-aditivní, nazveme σ-**okruhem**. Jestliže v okruhu (po příp. v σ-okruhu) $\mathfrak{A}$ je „největší" prvek (t. j. množina systému $\mathfrak{A}$, obsahující všechny množiny systému $\mathfrak{A}$, t. j. je-li $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A \in \mathfrak{A}$), říkáme okruhu **těleso** (po příp. σ-**těleso**; též se říkává: **algebra** a σ-**algebra**).

Poznámka 1. Je-li $\mathfrak{A}$ okruh, je $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Neboť $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, tedy existuje $A \in \mathfrak{A}$, tedy $\emptyset = A \dot{-} A \in \mathfrak{A}$.

---

[16]) Slovo „systém" si vypůjčuji z běžné řeči; zde ho užívám ve smyslu „množina" — někdy ho budu užívati ve smyslu trochu jiném, ale čtenáře to nezmate — ze souvislosti bude vždy patrno, oč jde.

Poznámka 2. Je-li $\mathfrak{A}$ σ-okruh a je-li $A_n \in \mathfrak{A}$ pro každé přirozené n, je též $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$.

Důkaz. Položme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, takže $A \in \mathfrak{A}$, $A \dot{-} A_n \in \mathfrak{A}$. Podle věty 1 v **D II** je

$$A \dot{-} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \dot{-} A_n) \in \mathfrak{A} ,$$

tedy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \dot{-} (A \dot{-} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathfrak{A} .^{17})$$

Příklad 1. Budiž $\mathfrak{A}_1$ systém, složený ze všech konečných množin reálných čísel. To je okruh, ale ne těleso. Budiž $\mathfrak{A}_2$ systém, složený ze všech konečných množin reálných čísel a ze všech jejich „doplňků", t. j. ze všech množin tvaru $\mathbf{E}_1 \dot{-} A$, kde A je konečná množina. $\mathfrak{A}_2$ je těleso. Ani $\mathfrak{A}_1$ ani $\mathfrak{A}_2$ není σ-aditivní. Jestliže však v jejich definici slovo „konečný" nahradíte slovem „spočetný", dostanete σ-okruh, po příp. σ-těleso.

Poznámka 3. *Je-li $M_1, M_2, \ldots$ nekonečná posloupnost množin σ-okruhu $\mathfrak{A}$, je také*

$$\liminf_{n\to\infty} M_n \in \mathfrak{A} , \quad \limsup_{n\to\infty} M_n \in \mathfrak{A} .$$

Důkaz plyne ihned ze vzorců (3), uvědomíme-li si, že sjednocení a průnik posloupnosti množin z $\mathfrak{A}$ patří do $\mathfrak{A}$.

Poznámka 4. Mějme nějaký neprázdný systém σ-okruhů $\mathfrak{A}_z$ $(z \in Z)$.[18] Potom průnik všech $\mathfrak{A}_z$ je opět σ-okruh. Důkaz. Je-li $A_n \in \bigcap_{z\in Z} \mathfrak{A}_z$,[19] pro každé $n \in \boldsymbol{N}$, je $A_n \in \mathfrak{A}_z$ pro každé z $(n = 1, 2, \ldots)$, tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}_z$ pro každé z, tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{z\in Z} \mathfrak{A}_z$. Podobně pro rozdíl. Podobně průnik okruhů je okruhem.

[17]) Je-li $B \subset A$, je $B = A \dot{-} (A \dot{-} B)$.
[18]) Každé $\mathfrak{A}_z$ je tedy jistá množina množin.
[19]) Čtěte správně: tento průnik znamená množinu těch množin, jež patří ke všem systémům $\mathfrak{A}_z$.

Poznámka 5. Budiž dán nějaký neprázdný systém množin $\mathfrak{A}$; potom existuje nejmenší σ-okruh $\mathfrak{B}$, obsahující $\mathfrak{A}$ (t. j. je $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ a je-li $\mathfrak{C}$ nějaký σ-okruh, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$, je $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$; takový σ-okruh $\mathfrak{B}$ je zřejmě jen jeden). $\mathfrak{B}$ se nazývá *Borelovým okruhem nad systémem* $\mathfrak{A}$.

Důkaz. Budiž $P = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$, budiž $\mathfrak{P}$ množina všech částí množiny P; to je σ-okruh, obsahující $\mathfrak{A}$. Budiž $\mathfrak{B}$ průnik všech σ-okruhů, obsažených v $\mathfrak{P}$ a obsahujících $\mathfrak{A}$. Podle pozn. 4 je $\mathfrak{B}$ σ-okruh, obsahující $\mathfrak{A}$. Budiž $\mathfrak{C}$ libovolný σ-okruh, obsahující $\mathfrak{A}$. Potom $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ je σ-okruh, obsahující $\mathfrak{A}$ a obsažený v $\mathfrak{P}$, tedy (podle definice $\mathfrak{B}$) je $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, t. j. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$. Tedy má $\mathfrak{B}$ žádané vlastnosti.

Podobně existuje nejmenší okruh $\mathfrak{B}_0$, obsahující systém $\mathfrak{A}$. Říkáme, že $\mathfrak{B}_0$ resp. $\mathfrak{B}$ je okruh resp. σ-okruh, *vytvořený systémem* $\mathfrak{A}$.

Cvičení

1. Budiž P neprázdná množina; $\mathfrak{A}$ budiž systém „jednobodových" částí množiny P. Potom $\mathfrak{B}_0$ resp. $\mathfrak{B}$ je systém všech konečných resp. spočetných částí P.

2. Budiž $\mathfrak{A}$ systém všech polouzavřených intervalů $\langle a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Potom se $\mathfrak{B}_0$ skládá jednak z prázdné množiny, jednak ze všech sjednocení konečného počtu takových intervalů, t. j. množin tvaru $\bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i)$.

§ 4. Poznámky o kartézských součinech. Buďte dány libovolné množiny $P_1, \ldots, P_r$. Položme $P = P_1 \times \ldots \times P_r$, takže P je množina všech prvků $x = [x_1, \ldots, x_r]$, kde $x_1 \in P_1, \ldots, x_r \in P_r$. Dále buďte dány množiny $A_j \subset P_j$, $B_j \subset P_j$ $(j = 1, \ldots, r)$; položme

$$A = A_1 \times \ldots \times A_r\,, \quad B = B_1 \times \ldots \times B_r\,.$$

Odvodíme několik drobných vět.

Poznámka 1. $AB = A_1B_1 \times A_2B_2 \times \ldots \times A_rB_r$. To je zřejmé.

Poznámka 2. Je-li $\emptyset \neq A \subset B$, je $A_j \subset B_j$ pro $j = 1, \ldots, r$. Důkaz. Kdyby nebylo na př. $A_1 \subset B_1$, existoval by prvek $a_1 \in A_1 \dot{-} B_1$; ježto $A \neq \emptyset$, existují $a_2 \in A_2, \ldots, a_r \in A_r$, načež $[a_1, \ldots, a_r]$ by patřil k A, ale nepatřil k B — spor.

Poznámka 3. Je-li tedy $\emptyset \neq A = B$, je $A_j \subset B_j$ a současně $B_j \subset A_j$, tedy $A_j = B_j$. Jinak řečeno, ve vzorci $A = A_1 \times \ldots \times A_r$ jsou množiny A_j množinou A jednoznačně určeny. Pro $A = \emptyset$ to není pravda (je-li $r > 1$), ježto potom na př. $A = \emptyset \times A_2 \times \ldots \times A_r$ při libovolných $A_2, \ldots, A_r$.

Poznámka 4. Nechť také množinu $C = A \cup B$ lze psáti ve tvaru

(6) $$C = C_1 \times \ldots \times C_r \quad (C_j \subset P_j)$$

(to ovšem není vždy možno) a nechť $A \neq C$, $B \neq C$ (takže nutně $B \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$). Potom existuje index k tak, že

(7) $$A_k \neq C_k\,, \quad B_k \neq C_k\,, \quad C_k = A_k \cup B_k\,,$$

kdežto pro všechna ostatní j je

(8) $$A_j = B_j = C_j \quad (\text{pro } j \neq k)\,.$$ [20]

Jsou-li speciálně A, B disjunktní, jsou též A_k, B_k disjunktní.

Důkaz (podle J. Maříka). Z pozn. 2 plyne $A_j \subset C_j$, $B_j \subset C_j$. Ježto $A \neq C$, existuje k tak, že $A_k \neq C_k$. Tvrdím, že odtud plyne $B_j = C_j$ pro všechna $j \neq k$. Kdyby totiž pro některé $m \neq k$ bylo $B_m \neq C_m$, zvolili bychom $c_k \in C_k \dot{-} A_k$, $c_m \in C_m \dot{-} B_m$ a dále $c_j \in C_j$ pro $j \neq k$, $j \neq m$, načež by prvek $[c_1, \ldots, c_r]$ ležel v C, ale neležel ani v A ani v B—spor. Tedy $B_j = C_j$ pro všechna $j \neq k$. Ježto však $B \neq C$, je nutně $B_k \neq C_k$, a odtud stejně jako dříve $A_j = C_j$ pro $j \neq k$. Tedy platí (8), načež zřejmě $A \cup B = A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times (A_k \cup B_k) \times \times A_{k+1} \times \ldots \times A_r$; odtud pak srovnáním s (6) podle pozn. 3 plyne (7). Nechť nyní $AB = \emptyset$. Kdyby bylo $A_kB_k \neq \emptyset$, bylo by možno zvoliti $c_k \in A_kB_k$, $c_j \in A_j = B_j$ pro $j \neq k$, tedy $[c_1, \ldots, c_r] \in AB$, což je spor.

Poznámka 5. Je-li na př. $A = \emptyset$ (a tedy $C = A \cup B = B$), lze psáti A také v takové formě, aby pro jisté k platilo, že $C_j = A_j = B_j$ pro $j \neq k$, $C_k = A_k \cup B_k$; na př. $A = \emptyset \times B_2 \times \ldots \times B_r$, $C = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_r$.

[20]) Odtud plyne, že nutně $A_k \neq C_k$ (jinak by bylo $A = C$) a podobně $B_k \neq C_k$.

§ 5. Některé systémy množin, složených z intervalů. Budeme nyní pracovati v $\mathbf{E}_r$. Pro intervaly v $\mathbf{E}_r$ užíváme označení z **D II**, kap. VI, § 8; zopakujte si tento paragraf, jakož i § 5 a 6 téže kap. VI. Snad by neškodil ani poslední odstavec v **D II** na str. 354 (v úvodu ke kap. VII), v němž je ukázáno, jak se lze v $\mathbf{E}_r$ vyhnouti „neasociativnosti" kartézského součinu. Slova jako uzávěr, uzavřený, vnitřek, otevřený, hranice atd. znamenají uzávěr v $\mathbf{E}_r$ atd. Mezi intervaly v $\mathbf{E}_1$ počítáme též „zvrhlé" intervaly: množinu prázdnou a jednobodové množiny. Uzavřeným (otevřeným) intervalem nazýváme takový, který je uzavřenou (otevřenou) množinou, takže v $\mathbf{E}_1$ je $(-\infty, b\rangle$ uzavřený, $(-\infty, +\infty)$ uzavřený a současně otevřený interval. Každý interval v $\mathbf{E}_r$ lze psáti ve tvaru

$$I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r\,, \tag{9}$$

kde i_k jsou intervaly v $\mathbf{E}_1$. Je-li $I \neq \emptyset$, existuje jediné takové vyjádření. Jest (vpravo jde ovšem o uzávěr a vnitřek v $\mathbf{E}_1$)

$$\overline{I} = \overline{i_1} \times \ldots \times \overline{i_r}\,, \quad I^\circ = i_1^\circ \times \ldots \times i_r^\circ\,. \tag{10}$$

Interval (9) se nazývá zvrhlým, je-li aspoň jeden i_k zvrhlý, t. j. je-li $I^\circ = \emptyset$. Je-li $I \neq \emptyset$, je I uzavřený (otevřený) tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny i_k uzavřené (otevřené).

Podobně lze na př. každý interval v $\mathbf{E}_{r+s+t}$ psáti ve tvaru $I = I_1 \times I_2 \times I_3$, kde I_1, I_2, I_3 jsou po řadě intervaly v $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_t$, načež platí podobné poznámky jako pro vyjádření (9).

Poznámka 1. *Průnik konečného počtu intervalů v $\mathbf{E}_r$ je interval.*

Důkaz. Je-li $I = i_1 \times \ldots \times i_r$, $J = j_1 \times \ldots \times j_r$, je $IJ = i_1 j_1 \times \ldots \times i_r j_r$ a pro intervaly v $\mathbf{E}_1$ je zřejmě $i_k j_k$ interval (po příp. prázdný). Odtud indukcí pro průnik více než dvou intervalů.

Pomocná věta 1. *Buďte I, J intervaly.*[21]) *Potom $I \dot{-} J$ lze psáti jako disjunktní sjednocení konečného počtu intervalů.*

Důkaz. 1. Pro $r = 1$ je to zřejmé. 2. Budiž věta dokázána pro jisté $r \geqq 1$. Buďte $I = i_1 \times I_r$, $J = j_1 \times J_r$ intervaly v $\mathbf{E}_{r+1}$ (i_1, j_1 jsou v $\mathbf{E}_1$; I_r, J_r jsou v $\mathbf{E}_r$). Jest zřejmě

$$I \dot{-} J = ((i_1 \dot{-} j_1) \times I_r) \cup (i_1 j_1 \times (I_r \dot{-} J_r))\,,$$

[21]) Není-li řečeno nic jiného, míní se intervaly, body, množiny v $\mathbf{E}_r$.

což je disjunktní sjednocení. Podle 1. a podle indukčního předpokladu je $i_1 \dot{-} j_1 = \bigcup_{n=1}^{p} l_n$, $I_r \dot{-} J_r = \bigcup_{m=1}^{q} L_m$ (disjunktní sjednocení), takže

$$I \dot{-} J = (l_1 \times I_r) \cup \ldots \cup (l_p \times I_r) \cup (i_1 j_1 \times L_1) \cup \ldots \cup (i_1 j_1 \times L_q) .$$

Pomocná věta 2. *Buďte $I, J_1, J_2, \ldots, J_p$ intervaly. Potom $I \dot{-}$ $\dot{-} (J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_p)$ lze psáti jako disjunktní sjednocení konečného počtu intervalů.*

Důkaz. 1. Pro $p = 1$ je to předešlá pomocná věta. 2. Budiž $p > 1$ a budiž již dokázáno, že

$$I \dot{-} (J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_{p-1}) = \bigcup_{n=1}^{q} K_n ,$$

kde vpravo je disjunktní sjednocení intervalů. Potom je

$$I \dot{-} (J_1 \cup \ldots \cup J_p) = \bigcup_{n=1}^{q} (K_n \dot{-} J_p) ,$$

a zde každý člen vpravo je podle pomocné věty 1 disjunktním sjednocením konečného počtu intervalů. Tím je pomocná věta indukcí dokázána.

Zavedeme nyní tento systém množin v $\boldsymbol{E}_r$:

Definice 1. *$\mathfrak{A}_r$ značí systém všech množin v $\boldsymbol{E}_r$, jež lze vyjádřiti jako sjednocení konečného počtu omezených intervalů (ježto $\emptyset$ je interval, je $\emptyset \in \mathfrak{A}_r$).*

Věta 1. *$\mathfrak{A}_r$ je okruh.*

Důkaz. Aditivnost je zřejmá. Budiž $A \in \mathfrak{A}_r$, $B \in \mathfrak{A}_r$. Máme dokázati, že $A \dot{-} B \in \mathfrak{A}_r$. Jest $A = \bigcup_p I_p$, $B = \bigcup_q J_q$ (konečný počet omezených intervalů), tedy $A \dot{-} B = \bigcup_p (I_p \dot{-} \bigcup_q J_q)$, a zde každý „sčítanec“ vpravo patří k $\mathfrak{A}_r$ podle 2. pomocné věty.

Věta 2. *Každou množinu $A \in \mathfrak{A}_r$ lze psáti jako* **disjunktní** *sjednocení konečného počtu omezených intervalů.*

Důkaz. Budiž $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ (I_i omezené intervaly). Tedy je též $A =$

$= \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, kde $A_1 = I_1$, $A_{p+1} = I_{p+1} \dot{-} (I_1 \cup \ldots \cup I_p)$, takže $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je disjunktní sjednocení. Stačí tedy dokázat, že A_i je pro $i = 1, \ldots, n$ disjunktním sjednocením žádaného tvaru. Ale pro A_1 je to zřejmé a pro ostatní A_i to plyne z pomocné věty 2.

Definice 2. *$\mathfrak{B}_r$ značí systém všech množin $B \subset \mathbf{E}_r$ takových, že pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ je $BI \in \mathfrak{A}_r$.*

Poznámka 2. Je $\mathfrak{A}_r \subset \mathfrak{B}_r$. Je-li totiž $A \in \mathfrak{A}_r$, I omezený interval, je $I \in \mathfrak{A}_r$, tedy $AI \in \mathfrak{A}_r$ (viz větu 1 a definici okruhu), tedy $A \in \mathfrak{B}_r$.

Věta 3. *Jest $\mathbf{E}_r \in \mathfrak{B}_r$. Systém $\mathfrak{B}_r$ je těleso.*

Důkaz. Je-li I omezený interval, platí předně $\mathbf{E}_r I = I \in \mathfrak{A}_r$, tedy $\mathbf{E}_r \in \mathfrak{B}_r$; za druhé, je-li $A \in \mathfrak{B}_r$, $B \in \mathfrak{B}_r$, je $AI \in \mathfrak{A}_r$, $BI \in \mathfrak{A}_r$, a tedy podle věty 1 $(A \cup B) I = AI \cup BI \in \mathfrak{A}_r$, tedy $A \cup B \in \mathfrak{B}_r$ a podobně pro rozdíl. Tedy je $\mathfrak{B}_r$ okruh s největším prvkem $\mathbf{E}_r$, t. j. těleso.

Poznámka 3. Buďte dána celá čísla $m_1, \ldots, m_r$. Označme

(11) $K_{m_1,\ldots,m_r} = \langle m_1, m_1 + 1) \times \langle m_2, m_2 + 1) \times \ldots \times \langle m_r, m_r + 1)$.

Zřejmě je $\mathbf{E}_r = \bigcup K_{m_1,\ldots,m_r}$, kde se sčítá přes všechny systémy celých čísel $m_1, \ldots, m_r$; sjednocení vpravo je disjunktní. Mluvíme o rozkladu prostoru $\mathbf{E}_r$ na jednotkové krychle; je to velmi názorné. Zřejmě má každý omezený interval pouze s konečným počtem krychlí (11) neprázdný průnik.

Poznámka 4. Systém $\mathfrak{B}_r$ je pouze pomocný. Popišme jej ještě jinak. Tvrdím: Budiž $B \subset \mathbf{E}_r$. Potom je $B \in \mathfrak{B}_r$ tehdy a jen tehdy, lze-li psáti

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n , \tag{12}$$

kde I_n jsou omezené intervaly s touto vlastností: Je-li J libovolný omezený interval, je $I_n J \neq \emptyset$ jenom pro konečný počet hodnot n.

Důkaz. I. Má-li B popsaný tvar a je-li J omezený interval, je $BJ = \bigcup_n I_n J$, kde pouze konečný počet sčítanců je neprázdný. Tedy $BJ \in \mathfrak{A}_r$, $B \in \mathfrak{B}_r$. — II. Budiž $B \in \mathfrak{B}_r$; jest

$$B = \bigcup B_{m_1,\ldots,m_r} , \tag{13}$$

kde $B_{m_1,\ldots,m_r} = BK_{m_1,\ldots,m_r} \in \mathfrak{A}_r$ (označení z pozn. 3). Každé $B_{m_1,\ldots,m_r}$ je tedy sjednocením konečného počtu intervalů; dosadím-li toto sjednocení do (13), dostanu vyjádření (12) žádaného tvaru.

Definice 3. $\mathfrak{C}_r$ *značí systém všech množin* $A \subset \mathbf{E}_r$, *které lze psáti jako sjednocení spočetného systému omezených intervalů, t. j. ve tvaru*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n . \tag{14}$$

(Spočetný systém lze totiž srovnati v posloupnost; je-li konečná, doplním ji sčítanci $\emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$)

Poznámka 5. Podle pozn. 2 a 4 je $\mathfrak{A}_r \subset \mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{C}_r$. Každý interval I lze psáti jako sjednocení spočetného systému *omezených* intervalů (označení z (11)): $I = \bigcup IK_{m_1,\ldots,m_r}$. Tedy se definice nezmění, vynechám-li v ní slovo „omezených".

Věta 4. *Průnik konečného počtu a sjednocení spočetného systému množin z* $\mathfrak{C}_r$ *jsou množiny z* $\mathfrak{C}_r$.

Důkaz. Budiž $C_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{i,n}$ ($I_{i,n}$ omezené intervaly) pro $i = 1, 2, \ldots$ Potom je $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i,n=1}^{\infty} I_{i,n}$; $C_1C_2 = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} I_{1,m}I_{2,n}$; množina všech dvojic přirozených čísel je spočetná a $I_{1,m}I_{2,n}$ je interval (pozn. 1).

Věta 5. *Každou množinu z* $\mathfrak{C}_r$ *lze psáti jako* **disjunktní** *sjednocení spočetného systému omezených intervalů.*

Důkaz. Jsou-li I_n omezené intervaly, je $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_1 = I_1$, $A_{n+1} = I_{n+1} \dot{-} (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$, $A_mA_n = \emptyset$ pro $m \neq n$. Množiny A_n patří do $\mathfrak{A}_r$, lze je tedy vyjádřiti podle věty 2 jako disjunktní sjednocení konečného počtu omezených intervalů.

Poznámka 6. Každá otevřená množina je sjednocení spočetného systému *otevřených*[22]) intervalů (**D II**, věta 141, str. 266), tedy patří do $\mathfrak{C}_r$, tedy je také sjednocením *disjunktního* spočetného systému omezených intervalů. Ale nemusí býti, je-li $r > 1$, sjednocením disjunktního spočetného systému otevřených intervalů; viz **D II**, kap. VI, § 8, cvič. 1, str. 266.

---

[22]) a omezených, chcete-li.

Poznámka 7. $\mathfrak{G}_r$ je σ-aditivní, ale není okruhem. Neboť $\mathfrak{G}_r$ obsahuje každou otevřenou množinu G (tedy také prostor $\mathbf{E}_r$); kdyby tedy $\mathfrak{G}_r$ byl okruhem, musil by obsahovati všechny množiny tvaru $\mathbf{E}_r \dot{-} G$, t. j. všechny množiny uzavřené — my však dokážeme, že tomu tak není. Pro $r > 1$ stačí vzíti množinu všech bodů $[x_1, \ldots, x_r]$, pro něž je $x_1 = x_2 = \ldots = x_r$ (přímka). To je nespočetná uzavřená množina, ale neobsahuje žádné více než jednobodové intervaly, nemůže tedy být sjednocením spočetného systému intervalů. Pro $r = 1$ je nutno vzíti složitější příklad: stačí vzíti Cantorovo diskontinuum (**D II**, kap. V, § 1, pozn. 8, str. 156—158); to je opět množina uzavřená, nespočetná a neobsahuje žádné více než jednobodové intervaly.

§ 6. Aditivní funkce intervalu. Napřed malou orientační poznámku. Každému omezenému intervalu I v $\mathbf{E}_r$ se v geometrii přiřazuje jisté číslo $\mu(I)$ jakožto objem tohoto intervalu (pro $r = 2$ se říkává obsah, pro $r = 1$ délka). To je tedy jistá konečná reálná funkce, jejímž oborem je množina všech omezených intervalů v $\mathbf{E}_r$. Tato funkce má pak tuto vlastnost: Jsou-li I_1, I_2 dva disjunktní intervaly a je-li $I_1 \cup I_2 = I$ také interval, je

$$\mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_2)\,. \tag{15}$$

Představte si za druhé hmotu, rozloženou v prostoru $\mathbf{E}_3$. Opět každý omezený interval I obsahuje určitou hmotu $\mu(I)$, která opět má vlastnost (15). Podobně, kdybyste místo o hmotě mluvili o elektrickém náboji (zde by ovšem $\mu(I)$, na rozdíl od prvních dvou případů, mohlo nabývat i záporných hodnot). Bude tedy asi účelno studovati tyto funkce obecně:

Definice 4. *Budiž r přirozené číslo. Budiž každému omezenému intervalu $I \subset \mathbf{E}_r$ přiřazeno konečné reálné číslo $\mu(I)$. Jsou-li $J \subset \mathbf{E}_r$, $K \subset \mathbf{E}_r$ jakékoliv dva disjunktní omezené intervaly takové, že*

$$I = J \cup K \tag{16}$$

je také interval, potom nechť

$$\mu(I) = \mu(J) + \mu(K)\,. \tag{17}$$

Potom říkáme, že μ je konečná aditivní funkce intervalu (v $\mathbf{E}_r$).

Oborem této funkce je tedy množina všech omezených intervalů v $\mathbf{E}_r$. Ovšem v geometrii mluvíme také o objemu složitějších těles, ve fysice mluvíme také o hmotě, obsažené v kouli, jehlanu atd.; proto se budeme snažit, rozšířit definici aditivních funkcí intervalu i na obecnější množiny a tyto rozšířené funkce pak studovati. To je úkolem této kapitoly. Funkci μ nazýváme ovšem **nezápornou,** jestliže pro každý omezený interval I je $\mu(I) \geqq 0$.

Poznámka 1. Kdy mezi třemi omezenými intervaly I, J, K, z nichž poslední dva jsou disjunktní, platí vztah (16)? Podle § 4, pozn. 4 a 5 tehdy a jen tehdy, lze-li psáti (vpravo jsou omezené intervaly v $\mathbf{E}_1$)

$$J = i_1 \times \ldots \times i_{k-1} \times i_k' \times i_{k+1} \times \ldots \times i_r\,, \tag{18}$$

$$K = i_1 \times \ldots \times i_{k-1} \times i_k'' \times i_{k+1} \times \ldots \times i_r\,, \tag{19}$$

kde $i_k' i_k'' = \emptyset$ a $i_k = i_k' \cup i_k''$ je opět interval, načež ovšem

$$I = J \cup K = i_1 \times \ldots \times i_k \times \ldots \times i_r\,.\text{[23]}) \tag{20}$$

Stačí tedy, verifikujeme-li rovnici (17) pro všechny trojice intervalů I, J, K právě popsaného druhu.

Poznámka 2. Je-li μ konečná aditivní funkce intervalu, je $\mu(\emptyset) = 0$. Neboť $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ (disjunktní sjednocení), takže $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$.

Příklad 1.[24]) Má-li omezený interval $I \subset \mathbf{E}_1$ počáteční bod a, koncový b, klaďme $\mu(I) = b - a$ (délka intervalu). Pro $a = b$ (jednobodový interval) je ovšem $\mu(I) = 0$.

Příklad 2. Budiž f konečná reálná funkce v oboru $\mathbf{E}_1$. Má-li omezený interval $I \subset \mathbf{E}_1$ počáteční bod a, koncový b, položme $\mu(I) = f(b) - f(a)$. Zřejmě μ je nezáporná tehdy a jen tehdy, je-li f neklesající.

Příklad 3. Budiž M konečná množina bodů v $\mathbf{E}_r$. Budiž $\mu(I)$ rovno počtu bodů z M, ležících v I. Je vidět, že i pro zvrhlý interval může býti $\mu(I) > 0$.

---

[23]) Toho lze podle pozn. 5 v § 4 dosáhnouti i tehdy, je-li $J = \emptyset$ nebo $K = \emptyset$.
[24]) Ve všech následujících příkladech kladu ovšem $\mu(\emptyset) = 0$.

Že v těchto příkladech jde o aditivní funkce, je jasné. Důležité jsou další dva příklady:

Příklad 4. Budiž μ_1 konečná aditivní v $\mathsf{E}_{r_1}, \ldots$, budiž μ_t konečná aditivní v E_{r_t}. Každému omezenému intervalu

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_t \tag{21}$$
$$(I_j \text{ je omezený interval v } \mathsf{E}_{r_j})$$

z E_r $(r = r_1 + r_2 + \ldots + r_t)$ přiřaďme číslo

$$\mu(I) = \mu_1(I_1) \,.\, \mu_2(I_2) \ldots \mu_t(I_t) \,. \tag{22}$$

Tvrdím, že μ je konečná aditivní funkce v E_r. Důkaz. Buďte

$$J = J_1 \times \ldots \times J_t \,, \quad K = K_1 \times \ldots \times K_t \tag{23}$$

disjunktní omezené intervaly v E_r, jejichž sjednocením je interval (21). Máme dokázati (17). Podle pozn. 4 a 5 v § 4 existuje m tak, že

$$\begin{aligned} J &= I_1 \times I_2 \times \ldots \times J_m \times \ldots \times I_t \,, \\ K &= I_1 \times I_2 \times \ldots \times K_m \times \ldots \times I_t \,, \end{aligned}$$

kde $J_m K_m = \emptyset$, $J_m \cup K_m = I_m$, takže $\mu_m(I_m) = \mu_m(J_m) + \mu_m(K_m)$. Z definice (22) pak ihned plyne (17).

Příklad 5. Speciální případ: Budiž μ_1 funkce zavedená v příkl. 1 („délka intervalu"). Je-li $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r$ (i_j omezené intervaly v E_1), klaďme

$$\mu_r(I) = \mu_1(i_1) \ldots \mu_1(i_r) \,; \tag{24}$$

t. zv. (r-rozměrný) objem intervalu I.

Je-li $I \neq \emptyset$ a má-li i_j počáteční bod a_j, koncový b_j, je $\mu_r(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_r - a_r)$. Tehdy a jen tehdy je $\mu_r(I) = 0$, je-li I zvrhlý. Z poslední rovnice je patrno na př.: Jsou-li I_1, I_2, I_3 omezené intervaly v $\mathsf{E}_r, \mathsf{E}_s, \mathsf{E}_t$, je

$$\mu_{r+s+t}(I_1 \times I_2 \times I_3) = \mu_r(I_1)\, \mu_s(I_2)\, \mu_t(I_3) \,.$$

Poznámka 3. Budiž nyní

$$I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r \tag{25}$$
$$(i_k \text{ omezené jednorozměrné intervaly}) \,.$$

Rozložme každý i_k na konečný disjunktní systém intervalů:

(26) $$i_k = j_k^1 \cup j_k^2 \cup \ldots \cup j_k^{q_k} \quad (q_k \geqq 1)$$

a položme

(27) $$I^{m_1, \ldots, m_r} = j_1^{m_1} \times \ldots \times j_r^{m_r} \quad (m_k = 1, 2, \ldots, q_k)\,.$$

To je disjunktní systém $q_1 q_2 \ldots q_r$ intervalů (v E_r), jejichž sjednocením je právě interval I. Budeme říkati, že intervaly (27) tvoří *kanonický rozklad* intervalu I.

Jestliže speciálně jedno q_k se rovná 2, a ostatní $q_h = 1$, dostáváme zřejmě rozklad $I = J \cup K$, popsaný v pozn. 1.

Pomocná věta. *Budiž μ konečná aditivní funkce intervalu v E_r. Budiž* (27) *nějaký kanonický rozklad intervalu* (25). *Potom*

(28) $$\mu(I) = \sum_{m_1=1}^{q_1} \sum_{m_2=1}^{q_2} \ldots \sum_{m_r=1}^{q_r} \mu(I^{m_1, \ldots, m_r})\,.$$

Smysl je tento: Je-li jedno $q_k = 2$, ostatní $q_h = 1$, není (28) nic jiného než rovnice (17), jež platí podle definice aditivní funkce. Nyní dokážeme, že (28) platí i pro složitější kanonické rozklady.

Důkaz. Položme $q_1 q_2 \ldots q_r = q$. Důkaz provedeme indukcí podle q. Pro $q = 1$ se systém (27) skládá z jediného intervalu I a (28) je zřejmá. Budiž tedy $q > 1$ a věta budiž dokázána až do hodnoty $q - 1$. Aspoň jedno z čísel q_h je > 1, na př. $q_1 > 1$. Mysleme si intervaly $j_1^1, \ldots, j_1^{q_1}$ (jejichž sjednocení je i_1) uspořádány tak, že j_1^1 je buďto prázdný nebo leží „vlevo“ ode všech ostatních neprázdných j_1^m. Potom množina $j_1^0 = j_1^2 \cup \ldots \cup j_1^{q_1}$ je rovněž interval; položíme-li

$$I^1 = j_1^1 \times i_2 \times \ldots \times i_r\,, \quad I^2 = j_1^0 \times i_2 \times \ldots \times i_r\,,$$

je $I = I^1 \cup I^2$, $I^1 I^2 = \emptyset$, a tedy podle definice aditivnosti

(29) $$\mu(I) = \mu(I^1) + \mu(I^2)\,.$$

Nyní ony intervaly (27), pro něž $m_1 = 1$ (jejich počet je $q_2 \ldots q_r = \dfrac{q}{q_1} < q$), tvoří kanonický rozklad intervalu I^1, kdežto ony intervaly (27), pro něž $m_1 > 1$ (jejich počet je $(q_1 - 1)\, q_2 \ldots q_r < q$), tvoří kanonický rozklad intervalu I^2. Podle indukčního předpokladu je tedy

$$\mu(I^1) = \sum_{m_2=1}^{q_2} \dots \sum_{m_r=1}^{q_r} \mu(I^{1,m_2,\dots,m_r}) ,$$

$$\mu(I^2) = \sum_{m_1=2}^{q_1} \sum_{m_2=1}^{q_2} \dots \sum_{m_r=1}^{q_r} \mu(I^{m_1,m_2,\dots,m_r}) .$$

Dosadím-li odtud do (29), obdržím (28).

Poznámka 4. Buďte $I, L_1, L_2, \dots, L_m$ neprázdné omezené intervaly v $\mathbf{E}_r$, při čemž

$$L_1 \cup \dots \cup L_m \subset I .$$

Dokážeme, že existuje kanonický rozklad[25] (27) intervalu I, který má tuto vlastnost: Ony z intervalů (27), které mají neprázdný průnik s některým intervalem L_n, tvoří kanonický rozklad intervalu L_n. Takový rozklad nazveme *simultánním kanonickým rozkladem* intervalů $I, L_1, \dots, L_m$.

Důkaz. Položme

$$I = i_1 \times \dots \times i_r , \quad L_n = l_{1n} \times \dots \times l_{rn} .$$

Pro každé k ($1 \leqq k \leqq r$) sestrojme počáteční a koncové body intervalů $i_k, l_{k1}, \dots, l_{km}$ a srovnejme je (píšíce každý jen jednou) v rostoucí konečnou posloupnost $c_k^1 < c_k^2 < \dots < c_k^{p_k}$. Interval i_k vyjádříme nyní jako disjunktní sjednocení

$$i_k = j_k^1 \cup j_k^2 \cup \dots \cup j_k^{q_k} ,$$

kde vpravo jsou tyto intervaly:

$$(c_k^1), (c_k^1, c_k^2), (c_k^2), \dots, (c_k^{p_k-1}, c_k^{p_k}), (c_k^{p_k}) .$$

Přitom první (po příp. poslední) z těchto intervalů jest vynechati, jestliže bod c_k^1 (po příp. $c_k^{p_k}$) nepatří k i_k. Intervaly (27), definované pomocí takto zvolených $j_k^{m_k}$, tvoří zřejmě žádaný simultánní kanonický rozklad.

Věta 6. *Budiž μ konečná aditivní funkce intervalu. Budiž*

$$\bigcup_{m=1}^{q} J_m = \bigcup_{n=1}^{p} I_n , \tag{30}$$

[25]) Složený z neprázdných intervalů.

kde vlevo i vpravo jsou disjunktní sjednocení omezených intervalů. Potom je

$$\sum_{m=1}^{q} \mu(J_m) = \sum_{n=1}^{p} \mu(I_n) . \tag{31}$$

Důkaz. Vynechme prázdné intervaly (tím se nic nestane). Sestrojme omezený interval I, obsahující množinu (30). Sestrojme (viz pozn. 4) intervaly (neprázdné)

$$K_1, K_2, \ldots, K_s , \tag{32}$$

které tvoří simultánní kanonický rozklad intervalů $I, I_1, \ldots, I_p$, $J_1, \ldots, J_q$. Potom každý interval I_n, J_m lze psáti jako disjunktní sjednocení oněch K_t, jež leží v I_n, po příp. v J_m:

$$I_n = \bigcup_{K_t \subset I_n} K_t , \quad J_m = \bigcup_{K_t \subset J_m} K_t . \tag{33}$$

Ježto to jsou kanonické rozklady, je podle pomocné věty

$$\mu(I_n) = \sum_{K_t \subset I_n} \mu(K_t) , \quad \mu(J_m) = \sum_{K_t \subset J_m} \mu(K_t) . \tag{34}$$

Ježto (32) tvoří simultánní kanonický rozklad, je každý interval K_t, který má s některým I_n společný bod, úplně obsažen v I_n. Ježto I_n jsou disjunktní, je každý K_t obsažen nejvýše v jednom I_n. Z prvního vzorce (34) tedy plyne, že

$$\sum_{n=1}^{p} \mu(I_n) = \sum_t{}' \mu(K_t) , \tag{35}$$

kde se vpravo sčítá přes ony intervaly K_t, které mají aspoň jeden společný bod s $\bigcup_{n=1}^{p} I_n$. Podobně z druhého vzorce (34) plyne, že

$$\sum_{m=1}^{q} \mu(J_m) = \sum_t{}'' \mu(K_t) , \tag{36}$$

kde se vpravo sčítá přes ony intervaly K_t, které mají aspoň jeden společný bod s $\bigcup_{m=1}^{q} J_m$. Ale z rovnosti (30) plyne, že pravé strany v (35), (36) a tedy i levé strany se sobě rovnají.

Poznámka 5. Tato věta nám dovoluje rozšířiti definiční obor funkce μ na celý systém $\mathfrak{A}_r$. Je-li $A \in \mathfrak{A}_r$, dá se A podle věty 2 vyjádřiti jako disjunktní sjednocení omezených intervalů $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$, načež položíme $\mu'(A) = \mu(I_1) + \ldots + \mu(I_n)$. Takových vyjádření množiny A je sice více, ale podle věty 6 dávají všechny touž hodnotu $\mu'(A)$. Je-li speciálně A omezený interval, je nejjednodušší vyjádření žádaného tvaru $A = A$, takže $\mu'(A) = \mu(A)$. Nedojde tedy k nedorozumění, budeme-li místo μ' psáti prostě μ, což učiníme. *Tím je tedy* $\mu(A)$ *definováno pro všechna* $A \in \mathfrak{A}_r$. Hlavní vlastnosti funkce μ jsou dány touto větou:

Věta 7. *Budiž μ konečná aditivní funkce intervalu. Buďte $A, B, A_1, \ldots, A_p$ množiny z $\mathfrak{A}_r$. Potom platí:*

I. Je-li $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$, kde sjednocení je disjunktní, je

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_p) .$$

II. Je-li μ nezáporná, $A \subset B$, je $\mu(A) \leqq \mu(B)$.

III. Je-li μ nezáporná, $A \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$,

$$\mu(A) \leqq \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_p) .$$

Důkaz. I. Každé A_j je podle věty 2 disjunktním sjednocením omezených intervalů $A_j = \bigcup_{m=1}^{p_j} I_{j,m}$, načež $A = \bigcup_{j=1}^{p} (\bigcup_{m=1}^{p_j} I_{j,m})$ a systém všech intervalů $I_{j,m}$ je disjunktní, takže definice funkce μ z pozn. 5 dává ihned

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=1}^{p_j} \mu(I_{j,m}) = \sum_{j=1}^{p} \mu(A_j) .$$

II. V tomto případě je $B = A \cup (B \dot{-} A)$; přitom $B \dot{-} A \in \mathfrak{A}_r$ (věta 1) a sjednocení je disjunktní. Bod I dává $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \dot{-} A) \geqq \geqq \mu(A)$.

III. V tomto případě položme $B_1 = A_1$, $B_{j+1} = A_{j+1} \dot{-} (A_1 \cup \cup \ldots \cup A_j)$, takže máme disjunktní sjednocení $A = AB_1 \cup AB_2 \cup \cup \ldots \cup AB_p$ a ovšem $AB_j \subset A_j$. Podle I a II je tedy $\mu(A) = \mu(AB_1) + + \ldots + \mu(AB_p) \leqq \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_p)$.

Rozšíříme nyní definiční obor funkce μ na celý systém $\mathfrak{C}_r$; abychom to však mohli provésti, je nutno o funkci μ učiniti jisté předpoklady. Abychom je nemusili stále obšírně opakovati, zaveďme tento název:

Budeme říkati, že funkce μ má vlastnost $\boldsymbol{S}_r$, jestliže jsou splněny tyto dvě podmínky:

I. μ je konečná nezáporná aditivní funkce intervalu v $\mathbf{E}_r$.

II. Je-li I libovolný omezený interval v $\mathbf{E}_r$, potom $\mu(I)$ se rovná infimu čísel $\mu(I_1)$ pro všechny omezené otevřené intervaly $I_1 \supset I$ a současně se rovná supremu všech čísel $\mu(I_2)$ pro všechny uzavřené intervaly $I_2 \subset I$. Jinými slovy (ježto z $I_2 \subset I \subset I_1$ plyne podle věty 7 $\mu(I_2) \leqq \leqq \mu(I) \leqq \mu(I_1)$): ke každému $\varepsilon > 0$ existuje omezený otevřený interval I_1 a uzavřený interval I_2 tak, že

$$I_2 \subset I \subset I_1\,, \quad \mu(I_2) > \mu(I) - \varepsilon\,, \quad \mu(I_1) < \mu(I) + \varepsilon\,. \tag{37}$$

Příklad 6. Značí-li $\mu_1(I)$ (viz příkl. 1) „délku“ intervalu $I \subset \mathbf{E}_1$, lze zřejmě zvoliti I_2, I_1 tak, aby platilo (37) (je-li I zvrhlý, a tedy uzavřený, volím $I_2 = I$). Tedy μ_1 má vlastnost $\mathbf{S}_1$.

Poznámka 6. Vlastnost $\mathbf{S}_r$ lze charakterisovati ještě trochu jinak: Budiž μ konečná nezáporná aditivní funkce intervalu v $\mathbf{E}_r$. Potom μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$ tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému omezenému intervalu I existují otevřené omezené intervaly I_1^n a uzavřené intervaly I_2^n $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, že

$$I_1^n \supset I \supset I_2^n\,, \quad \lim_{n\to\infty} \mu(I_2^n) = \lim_{n\to\infty} \mu(I_1^n) = \mu(I)\,. \tag{38}$$

Důkaz.[26]) Existují-li takové intervaly I_1^n, I_2^n, lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézti n tak, že $\mu(I_2^n) > \mu(I) - \varepsilon$, $\mu(I_1^n) < \mu(I) + \varepsilon$; tedy (viz (37)) μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$. Nechť naopak μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$. Potom podle (37) lze ke každému přirozenému n nalézti omezený interval otevřený $I_1^n \supset I$ a uzavřený $I_2^n \subset I$ tak, že $\mu(I) - \dfrac{1}{n} < \mu(I_2^n) \leqq \leqq \mu(I) \leqq \mu(I_1^n) < \mu(I) + \dfrac{1}{n}$. Potom však platí (38). S tímto tvarem podmínky $\mathbf{S}_r$ (t. j. se vztahy (38)) se často velmi snadno pracuje.

Příklad 7. Nechť μ_1 má vlastnost $\mathbf{S}_r$ (takže μ_1 je funkce intervalu v $\mathbf{E}_r$), nechť μ_2 má vlastnost $\mathbf{S}_s$. Definujme funkci μ_{12} takto: Je-li $I = J \times K$ ($J \subset \mathbf{E}_r$, $K \subset \mathbf{E}_s$ omezené intervaly), kladme $\mu_{12}(I) = \mu_1(J)\,\mu_2(K)$, takže podle příkl. 4 je μ_{12} konečná aditivní funkce intervalu v $\mathbf{E}_{r+s}$, ovšem nezáporná. Užitím pozn. 6 ukáži nyní, že μ_{12} má vlastnost $\mathbf{S}_{r+s}$. Ježto μ_1 (μ_2) má vlastnost $\mathbf{S}_r$ ($\mathbf{S}_s$), existují intervaly

[26]) V důkazu značí I libovolný omezený interval.

omezené otevřené[27]) $J_1^n \supset J$, $K_1^n \supset K$ a uzavřené $J_2^n \subset J$, $K_2^n \subset K$ tak, že

$$(39) \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_1(J_i^n) = \mu_1(J)\,, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_2(K_i^n) = \mu_2(K) \quad \text{pro } i = 1, 2\,.$$

Položme $I_1^n = J_1^n \times K_1^n \supset I$, $I_2^n = J_2^n \times K_2^n \subset I$, načež $\mu_{12}(I_i^n) = \mu_1(J_i^n)\,\mu_2(K_i^n)$ a tedy podle (39) $\lim_{n\to\infty} \mu_{12}(I_i^n) = \mu_1(J)\,\mu_2(K) = \mu_{12}(I)$ pro $i = 1, 2$; tedy μ_{12} má vlastnost $\boldsymbol{S}_{r+s}$ podle pozn. 6.

Indukcí lze okamžitě tuto úvahu rozšířiti na případ libovolného konečného počtu „činitelů“.

Příklad 8. Z příkl. 6 a 7 plyne, že funkce μ_r, zavedená v příkl. 5 (objem intervalu), má vlastnost $\boldsymbol{S}_r$. To bude pro nás velmi důležité později.

Věta 8. *Nechť μ má vlastnost $\boldsymbol{S}_r$. Budiž $\bigcup_n I_n$ a rovněž $\bigcup_m J_m$ sjednocení spočetného systému[28]) omezených intervalů. Potom platí:*

I. Je-li

$$(40) \qquad \bigcup_n I_n \subset \bigcup_m J_m$$

a sjednocení vlevo je disjunktní, je

$$(41) \qquad \sum_n \mu(I_n) \leqq \sum_m \mu(J_m)\,.$$

II. Je-li

$$(42) \qquad \bigcup_n I_n = \bigcup_m J_m$$

a je-li sjednocení vlevo disjunktní a rovněž sjednocení vpravo, je

$$(43) \qquad \sum_n \mu(I_n) = \sum_m \mu(J_m)\,.$$

Poznámka 7. Symboly v (41), (43) jsou součty zobecněných řad; viz **D II**, kap. III, § 3, str. 92—99 nebo kap. I, § 1, pozn. 1 v této knize. Ježto jde o nezáporné členy, není zde obtíží.

Důkaz. I. Prvky množin Z_1, Z_2 (viz [28])) mohu srovnati v posloup-

[27]) Ovšem: J_1^n je otevřený v $\mathbf{E}_r$, K_1^n je otevřený v $\mathbf{E}_s$; podobně J_2^n, K_2^n.
[28]) Tedy n probíhá jistou spočetnou množinu Z_1, m probíhá spočetnou množinu Z_2.

nosti, takže jde o $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$ (po malé změně označení[29])). Položme

$$(44) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = S\,, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(J_m) = T\,.$$

Máme dokázati, že $S \leqq T$. Je-li $T = +\infty$, je to zřejmé. Tedy buď $T < +\infty$. Stačí dokázati: Je-li $-\infty < S' < S$, $+\infty > T' > T$, je $S' < T'$ (odtud vskutku plyne $S \leqq T$; neboť kdyby bylo $S > T$, existovala by S', T' tak, že $S > S' > T' > T$). Buďte tedy S', T' konečná čísla, $S' < S$, $T' > T$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že $S' + \varepsilon < S$, $T' - \varepsilon > T$. Podle (44) existuje přirozené p tak, že

$$(45) \qquad \sum_{n=1}^{p} \mu(I_n) > S' + \varepsilon\,.$$

Podle vlastnosti $\mathbf{S}_r$ lze volit uzavřené intervaly $I_n^1 \subset I_n$ $(n = 1, \ldots, p)$ tak, že $\mu(I_n^1) > \mu(I_n) - \frac{\varepsilon}{p}$. Sjednocení

$$(46) \qquad M = \bigcup_{n=1}^{p} I_n^1$$

je disjunktní, a tedy[30]) (věta 7, I)

$$(47) \qquad \mu(M) = \sum_{n=1}^{p} \mu(I_n^1) > \sum_{n=1}^{p} \mu(I_n) - \varepsilon > S'\,.$$

Jest ovšem $M \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$. Podle vlastnosti $\mathbf{S}_r$ existují omezené otevřené intervaly $J_m^1 \supset J_m$ tak, že $\mu(J_m^1) < \mu(J_m) + \varepsilon\,.\,2^{-m}$.

Tedy

$$(48) \qquad M \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m^1\,, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(J_m^1) < T + \varepsilon < T'\,.$$

Ale M (viz (46)) je omezená a uzavřená, tedy kompaktní, J_m^1 jsou otevřené množiny. Z Borelovy věty (**D II**, věta 158, str. 311) plyne, že existuje přirozené q tak, že

---

[29]) Kdyby šlo o konečný systém $\bigcup_{n=1}^{p} I_n$, přidám $\emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$

[30]) M je množina ze systému $\mathfrak{A}_r$.

(49) $$M \subset \bigcup_{m=1}^{q} J_m^1 .$$

Nyní však již lze užíti věty 7, III a obdržíme podle (49), (48)

(50) $$\mu(M) \leqq \sum_{m=1}^{q} \mu(J_m^1) \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(J_m^1) < T' .$$

Ale z (47), (50) plyne $S' < T'$.

II. V případě II platí podle I nerovnost (41) i nerovnost opačná, tedy platí (43).

Poznámka 8. Věta 8, II nám dovoluje *rozšířiti definiční obor funkce* μ, *mající vlastnost* $\mathbf{S}_r$, *na celý systém* $\mathfrak{C}_r$ takto: Každou množinu $C \in \mathfrak{C}_r$ lze vyjádřiti jako disjunktní sjednocení spočetného systému omezených intervalů $C = \bigcup_n I_n$, načež *definujeme*

(51) $$\mu(C) = \sum_n \mu(I_n) .$$[31]

Takových vyjádření množiny C je více, ale podle věty 8, II dávají všechny touž hodnotu v (51). Je-li systém intervalů I_n konečný (a tedy $C \in \mathfrak{A}_r$), je (51) ve shodě s definicí obsaženou v pozn. 5. Je-li tedy μ funkce s vlastností $\mathbf{S}_r$ (definovaná původně pouze v množině všech omezených intervalů), rozšiřujeme její definiční obor na systém $\mathfrak{C}_r$ rovnicí (51). Potom má μ tyto vlastnosti:

Věta 9. *Nechť* μ *má vlastnost* $\mathbf{S}_r$. *Budiž* $C \in \mathfrak{C}_r$ *a nechť* $C_1, C_2, \ldots$ *je spočetný systém množin z* $\mathfrak{C}_r$. *Potom platí:*

I. Je-li $C \subset \bigcup_n C_n$, *je*

(52) $$\mu(C) \leqq \sum_n \mu(C_n) .$$

Speciálně: Je-li $C \subset C_1$, *je* $\mu(C) \leqq \mu(C_1)$.

II. Je-li $C = \bigcup_n C_n$ *a sjednocení je disjunktní, je*

(53) $$\mu(C) = \sum_n \mu(C_n) .$$

---

[31]) Toto číslo (na rozdíl od $\mu(A)$ pro $A \in \mathfrak{A}_r$) může býti též $+\infty$. Na př. $\mu(\mathbf{E}_1) = +\infty$ při funkci, zavedené v příkl. 1.

Důkaz. Pišme $C = \bigcup_p I_p$, $C_n = \bigcup_q J_{n,q}$ (disjunktní sjednocení). Jest

(54) $$\bigcup_p I_p \subset \bigcup_{n,q} J_{n,q}$$

a podle věty 8, I je tedy

(55) $$\sum_p \mu(I_p) \leqq \sum_{n,q} \mu(J_{n,q}) = \sum_n \sum_q \mu(J_{n,q}),$$

což je (52). V případě II je i sjednocení vpravo v (54) disjunktní a levá strana je rovna pravé; podle věty 8, II platí tedy (55) se znamením rovnosti.

Poznámka 9. Důležitost vlastnosti S_r je patrna z toho, že nám umožnila dokázat větu 8 a tím rozšířit obor funkce μ na $\mathfrak{C}_r$; účelnost tohoto rozšíření je vidět z věty 9. Je proto zajímavo, že formulaci vlastnosti S_r lze zjednodušit; viz cvič. 1.

Cvičení

1. Budiž μ konečná nezáporná aditivní funkce intervalu v E_r. Říkáme, že má vlastnost S_r, má-li tyto dvě vlastnosti:

A) Ke každému $\varepsilon > 0$ a každému omezenému intervalu I existuje omezený otevřený interval $I_1 \supset I$ tak, že $\mu(I_1) < \mu(I) + \varepsilon$.

B) Ke každému $\varepsilon > 0$ a každému omezenému intervalu I existuje uzavřený interval $I_2 \subset I$ tak, že $\mu(I_2) > \mu(I) - \varepsilon$.

Dokažte, že z **A** plyne **B**. Návod: Platí věta 7. Budiž dáno I, ε. Sestrojme omezený uzavřený interval $I_3 \supset I$. Množinu $I_3 \dot{-} I$ lze psáti jako disjunktní sjednocení intervalů $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Jest $\mu(I) = \mu(I_3) - \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i)$. Každý K_i nahradím podle **A)** otevřeným omezeným intervalem L_i ($K_i \subset L_i$) tak, že $\mu(L_i) < \mu(K_i) + \frac{\varepsilon}{n}$. Položme $M = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$. Potom $N = I_3 \dot{-} M$ je uzavřená, $N \subset I$ a podle věty 7 dostanete $\mu(N) = \mu(I_3) - \mu(MI_3) > \mu(I_3) - \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) - \varepsilon = \mu(I) - \varepsilon$. Budiž I_2 nejmenší uzavřený interval, obsahující N. Snadno zjistíte, že $I_2 \subset I$, $\mu(I_2) > \mu(I) - \varepsilon$.

Podobně dokážete, že z **B** plyne **A**. Tedy: vlastnost S_r by bylo možno formulovati jednodušeji: buďto **B** nebo **A** by se mohlo vynechat; t. j. v (37) by se buďto mohlo vynechat to, co se týče intervalu I_1, nebo to, co se týče intervalu I_2.

2. Dokažte o následující funkci μ, že je to konečná, aditivní a nezáporná funkce intervalu v $\mathbf{E}_1$, která **nemá** vlastnost $\mathbf{S}_1$.

Položme $\mu(I) = 1$, jestliže bod 0 je hromadným bodem intervalu I zleva (t. j. jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $(-\delta, 0) \subset I$); v ostatních případech klademe $\mu(I) = 0$.

Sestrojte dále omezené intervaly $I, I_1, I_2, \ldots$ tak, že je $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (disjunktní sjednocení), ale $\mu(I) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$.

§ 7. Vnější míra. Definice 5. *Nechť μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$. Položme*

$$\mu_e(M) = \inf_{M \subset C \in \mathfrak{C}_r} \mu(C) \tag{56}$$

(název: *vnější μ-míra množiny M*). T. j.: Sestrojme množinu všech čísel $\mu(C)$ pro všechna $C \in \mathfrak{C}_r$, obsahující M. Infimum této množiny nazveme $\mu_e(M)$.

Poznámka 1. Číslo $\mu_e(M)$ je infimum neprázdné[32]) množiny nezáporných čísel; tedy $0 \leqq \mu_e(M) \leqq +\infty$.

Poznámka 2. Pro $M \in \mathfrak{C}_r$ je $\mu_e(M) = \mu(M)$. Neboť pro každé $C \in \mathfrak{C}_r$, $C \supset M$ je $\mu(C) \geqq \mu(M)$ a pro $C = M$ je $\mu(C) = \mu(M)$, takže infimum v (56) je $\mu(M)$. Funkce μ_e je tedy „rozšířením" funkce μ; je definována pro *všechny* množiny v $\mathbf{E}_r$. Věc vypadá na první pohled velmi uspokojivě, ale zmíníme se na začátku příštího paragrafu o obtížích, na které později narazíme.

Poznámka 3. Z technických důvodů je dobře uvědomiti si několik odlišných znění definice 5. Položme $\sigma_1 = \inf \mu(C)$, kde C probíhá všechny otevřené množiny $C \supset M$.

Budiž dále $\mathfrak{S} = (I_1, I_2, \ldots)$ libovolný spočetný systém omezených intervalů; pišme $\lambda(\mathfrak{S}) = \sum_n \mu(I_n)$ a definujme: σ_2 je infimum čísel $\lambda(\mathfrak{S})$ pro všechny systémy $\mathfrak{S}$, jež pokrývají M;[33]) σ_3 je infimum čísel $\lambda(\mathfrak{S})$ pro všechny disjunktní systémy $\mathfrak{S}$, jež pokrývají M; σ_4 je infimum čísel $\lambda(\mathfrak{S})$ pro všechny systémy otevřených intervalů, jež pokrývají M.

---

[32]) Neboť $\mathbf{E}_r$ patří do $\mathfrak{C}_r$ a obsahuje M.
[33]) T. j. $M \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots$

Věta 10. $\mu_e(M) = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$.

Poznámka 4. Smysl věty je ten, že v praxi můžeme užíti toho z těchto pěti čísel, které se nám nejlépe hodí. Všimněme si, že jsme nemluvili o systémech $\mathfrak{S}$, které jsou disjunktní a *současně* jsou složeny z otevřených intervalů: ty by nás v $\mathbf{E}_r$ pro $r > 1$ obecně nevedly k číslu $\mu_e(M)$.

Důkaz. Položme ještě $\mu_e(M) = \sigma_5$. Ježto každá otevřená množina patří do $\mathfrak{C}_r$, je $\sigma_1 \geqq \sigma_5$. Ježto každý systém $\mathfrak{S}$, použitelný při σ_3 nebo σ_4, je použitelný i při σ_2, je $\sigma_3 \geqq \sigma_2$, $\sigma_4 \geqq \sigma_2$. Dále: Je-li $\mathfrak{S} = (I_1, I_2, \ldots)$ disjunktní spočetný systém omezených intervalů pokrývající M, je $C = \bigcup\limits_n I_n$ množina z $\mathfrak{C}_r$, obsahující M; a naopak, každou množinu $C \in \mathfrak{C}_r$, obsahující M, lze takto vyjádřit, načež $\mu(C) = \sum\limits_n \mu(I_n) = \lambda(\mathfrak{S})$. Tedy zřejmě $\sigma_3 = \sigma_5$. Je-li dále $\mathfrak{S} = (I_1, I_2, \ldots)$ spočetný systém omezených intervalů, pokrývající M, je $C = \bigcup\limits_n I_n \in \mathfrak{C}_r$, $C \supset M$ a podle věty 9 je $\mu(C) \leqq \lambda(\mathfrak{S})$. Tedy je $\sigma_5 \leqq \sigma_2$ a vzhledem k $\sigma_2 \leqq \sigma_3 = \sigma_5$ máme $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5$, $\sigma_4 \geqq \sigma_5$, $\sigma_1 \geqq \sigma_5$. Jde ještě o nerovnosti $\sigma_4 \leqq \sigma_5$, $\sigma_1 \leqq \sigma_5$, jež jsou zřejmé pro $\sigma_5 = +\infty$. Budiž tedy $\sigma_5 < +\infty$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existují tedy omezené intervaly $I_1, I_2, \ldots$ tak, že $M \subset \bigcup\limits_n I_n$, $\sum\limits_n \mu(I_n) < \sigma_2 + \frac{1}{2}\varepsilon = \sigma_5 + \frac{1}{2}\varepsilon$. Podle vlastnosti $\mathbf{S}_r$ existují otevřené omezené intervaly $J_n \supset I_n$ tak, že $\mu(J_n) < \mu(I_n) + \varepsilon \,.\, 2^{-n-1}$, takže $\sum\limits_n \mu(J_n) < \sigma_5 + \varepsilon$; tedy předně $\sigma_4 < \sigma_5 + \varepsilon$. Za druhé $C = \bigcup\limits_n J_n$ je otevřená a obsahuje M; podle věty 9 pak je $\mu(C) \leqq \sum\limits_n \mu(J_n) < \sigma_5 + \varepsilon$. Tedy $\sigma_1 < \sigma_5 + \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $\sigma_4 \leqq \sigma_5$, $\sigma_1 \leqq \sigma_5$.

Věta 11. *Nechť μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$; nechť $M \subset \bigcup\limits_n M_n$, kde vpravo je sjednocení spočetného systému množin $M_n \subset \mathbf{E}_r$. Potom*

$$\mu_e(M) \leqq \sum_n \mu_e(M_n)\,. \tag{57}$$

Speciálně: Je-li $M \subset M_1$, je $\mu_e(M) \leqq \mu_e(M_1)$.

Důkaz. Pravou stranu v (57) označme T. Pro $T = +\infty$ je vše zřejmé, tedy budiž $T < +\infty$. Budiž $\varepsilon > 0$ a mysleme si označení tak pozměněno, že v (57) jde o $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(M_n)$ (to vždy jde). Ke každému n existuje systém omezených intervalů $I_{n,p}$ tak, že $M_n \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} I_{n,p}$, $\sum_{p=1}^{\infty} \mu(I_{n,p}) < \mu_e(M_n) + \varepsilon \,.\, 2^{-n}$ (užívám výrazu σ_2 z pozn. 3). Odtud $M \subset \bigcup_{n,p=1}^{\infty} I_{n,p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \mu(I_{n,p}) < T + \varepsilon$, tedy $\mu_e(M) < T + \varepsilon$, tedy $\mu_e(M) \leqq \leqq T$.

Poznámka 5. Je-li M omezená, je $\mu_e(M) < +\infty$. Neboť existuje otevřený omezený interval $I \supset M$, načež $\mu_e(M) \leqq \mu_e(I) = \mu(I) < < +\infty$. Ale také u některých neomezených množin může vnější míra býti konečná.

Poznámka 6. Je-li $\mu_e(M) = 0$, t. j. jestliže (viz definici 5) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje množina $C \in \mathfrak{C}_r$ taková, že $M \subset C$, $\mu(C) < \varepsilon$, říkáme, že množina M je *μ-nulová.*[34]) Podle věty 11 *každá část μ-nulové množiny je μ-nulová* a rovněž *sjednocení spočetného systému μ-nulových množin je množina μ-nulová.* Tedy systém všech μ-nulových množin je zřejmě *σ-okruh* (uvažme, že z $\mu_e(M) = 0$ plyne $\mu_e(M \dot{-} N) = 0$).

Poznámka 7. Velmi jednoduchý, ale v praxi často důležitý, je tento důsledek věty 11: *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(M_n)$ je konvergentní, potom $\mu_e(\limsup_{n\to\infty} M_n) = 0$.*

Důkaz. Pro každé přirozené k je $\limsup_{n\to\infty} M_n \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} M_n$, tedy podle věty 11 platí pro číslo $A = \mu_e(\limsup_{n\to\infty} M_n)$ nerovnost $0 \leqq A \leqq \leqq \sum_{n=k}^{\infty} \mu_e(M_n)$; ale vpravo je zbytek konvergentní řady a nerovnost platí pro každé k. Tedy $A = 0$.

Poznámka 8. Budiž $\mu_e(M) = 0$. Potom pro každou množinu A je $\mu_e(A) = \mu_e(A \cup M) = \mu_e(A \dot{-} M)$.

[34]) Na př. prázdná množina je μ-nulová.

Důkaz. Podle věty 11 je

$$\mu_e(A) \leqq \mu_e(A \cup M) \leqq \mu_e(A) + \mu_e(M) = \mu_e(A)\,,$$
$$\mu_e(A) \leqq \mu_e(A \dot{-} M) + \mu_e(M) = \mu_e(A \dot{-} M) \leqq \mu_e(A)\,.$$

§ 8. Měřitelné množiny. Základní věty theorie míry. Jestliže μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$, potom vnější míra $\mu_e(M)$ je definována pro každou $M \subset \mathbf{E}_r$. Ale, jak uvidíte později (věta 31), existují ve velmi důležitých případech (na př. vezmu-li za $\mu(I)$ délku intervalu $I \subset \mathbf{E}_1$) disjunktní množiny M, N, pro něž platí nepříjemná nerovnost $\mu_e(M \cup N) \neq \mu_e(M) + \mu_e(N)$. Proto si položíme nyní úkol, nalézti takovou dostatečně širokou třídu množin (t. zv. měřitelných množin), pro kterou takové zjevy nemohou nastati. Budou to — zhruba řečeno — množiny, které se „málo liší" od množin z $\mathfrak{E}_r$.

Poznámka 1. Napřed zavedeme jeden důležitý pomocný pojem. Jsou-li A, B dvě jakékoliv množiny, nazveme množinu

$$\Delta(A, B) = (A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} A) = (A \cup B) \dot{-} AB \tag{58}$$

symetrickou diferencí množin A, B. Je to zřejmě množina těch prvků, které jsou obsaženy právě v jedné z obou množin (proveďte schematický náčrtek).

Tato symetrická diference má mnohé jednoduché vlastnosti:

I. $\Delta(A, B) = \Delta(B, A)$.

II. $(\Delta(A, B) = \emptyset) \Leftrightarrow (A = B)$.

III. $(\Delta(A, B) = A) \Leftrightarrow (B = \emptyset)$.

IV. Je-li $A \subset D$, $B \subset D$, je $\Delta(A, B) = \Delta(D \dot{-} A,\ D \dot{-} B)$; neboť $A \dot{-} B = (D \dot{-} B) \dot{-} (D \dot{-} A)$ a podobně pro $B \dot{-} A$.

V. $\Delta(AC, BC) \subset \Delta(A, B)$; neboť $AC \dot{-} BC \subset A \dot{-} B$ atd.[35])

VI. Tedy: je-li $A \subset C$, je $\Delta(A, BC) \subset \Delta(A, B)$.

VII. $\Delta(A, C) \subset \Delta(A, B) \cup \Delta(B, C)$, neboť $A \dot{-} C \subset (A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} C)$ atd.

VIII. $\Delta(\bigcup_{z \in Z} A_z, \bigcup_{z \in Z} B_z) \subset \bigcup_{z \in Z} \Delta(A_z, B_z)$, neboť $\bigcup A_z \dot{-} \bigcup B_z \subset \bigcup (A_z \dot{-} B_z)$ atd.

[35]) „Atd." značí obdobný vztah pro $BC \dot{-} AC$.

Jde-li speciálně o množiny v $\mathbf{E}_r$, plyne z věty 11 a z VII, VIII

(59) $$\mu_e(\Delta(A, C)) \leqq \mu_e(\Delta(A, B)) + \mu_e(\Delta(B, C))\,;$$

(60) $$\mu_e(\Delta(\bigcup_{z \in Z} A_z, \bigcup_{z \in Z} B_z)) \leqq \sum_{z \in Z} \mu_e(\Delta(A_z, B_z))\,,$$

jestliže Z je *spočetná* množina.

Definice 6. *Nechť μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$. Množinu $M \subset \mathbf{E}_r$ nazveme μ-měřitelnou, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje množina $C \in \mathfrak{C}_r$ tak, že*

(61) $$\mu_e(\Delta(M, C)) < \varepsilon\,.$$

Číslo $\mu_e(M)$ nazýváme pak μ-měrou množiny M.

Poznámka 2. Je-li speciálně $M \in \mathfrak{C}_r$, lze v (61) klásti $C = M$, načež $\mu_e(\Delta(M, C)) = \mu_e(\emptyset) = 0$, takže každá množina z $\mathfrak{C}_r$ je μ-měřitelná. Podle pozn. 2 v § 7 je $\mu_e(M) = \mu(M)$ pro $M \in \mathfrak{C}_r$, takže nedojdeme ke kolisi s dřívějším označením, zavedeme-li tento **dodatek k definici 6:** *μ-míru μ-měřitelné množiny M budeme značiti* $\mu(M)$. Tím jsme definitivně rozšířili definiční obor funkce μ: je to množina všech μ-měřitelných množin. Naproti tomu je μ_e definována vůbec pro všechny množiny v $\mathbf{E}_r$; pro μ-měřitelné množiny je $\mu_e(M) = \mu(M)$.

Poznámka 3. Je-li M množina μ-nulová (viz § 7, pozn. 6), t. j. je-li $\mu_e(M) = 0$, položme v (61) $C = \emptyset \in \mathfrak{C}_r$. Potom $\mu_e(\Delta(M, \emptyset)) = \mu_e(M) = 0 < \varepsilon$, takže *každá množina μ-nulová je μ-měřitelná;* zřejmě $(\mu_e(M) = 0) \Leftrightarrow (\mu(M) = 0)$.

Poznámka 4. Je-li jasno, o kterou funkci μ jde, říkáme též kratčeji míra, měřitelný, nulový atd.

Následující dvě věty pomocného rázu nám budou užitečné.

Věta 12. *Nechť μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$. Budiž $M \in \mathbf{E}_r$, $N \in \mathbf{E}_r$. Potom*

(62) $$\mu_e(M) \leqq \mu_e(N) + \mu_e(\Delta(M, N))$$

a tedy též (symetrie!)

(63) $$\mu_e(N) \leqq \mu_e(M) + \mu_e(\Delta(M, N))\,.$$

Tedy speciálně: Je-li $\mu_e(\Delta(M, N)) = 0$, je $\mu_e(N) = \mu_e(M)$. Je-li aspoň jedno z čísel $\mu_e(M)$, $\mu_e(N)$ konečné, je

(64) $$|\mu_e(N) - \mu_e(M)| \leqq \mu_e(\Delta(M, N))\,.$$

Důkaz nerovnosti (62): $M \subset N \cup (M \dot{-} N) \subset N \cup \Delta(M, N)$ a věta 11.

Věta 13. *Budiž M množina μ-měřitelná (μ nechť má vlastnost $\mathbf{S}_r$).*

I. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje množina $C \in \mathfrak{B}_r$ tak, že platí (61).

II. Je-li mimo to $\mu_e(M) < +\infty$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dokonce množina $C \in \mathfrak{A}_r$ tak, že platí (61).

Důkaz. Dokažme napřed II. Budiž $\mu_e(M) < +\infty$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $C \in \mathfrak{C}_r$ tak, že

$$\mu_e(\Delta(M, C)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{65}$$

Podle věty 12 je

$$\mu(C) = \mu_e(C) \leqq \mu_e(M) + \mu_e(\Delta(M, C)) < +\infty\,. \tag{66}$$

Pišme $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ (disjunktní sjednocení omezených intervalů). Tedy $\mu(C) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < +\infty$ (podle (66) a (51)). Lze tedy voliti p tak, že $C = A \cup R$, kde

$$A = \bigcup_{n=1}^{p} I_n\,, \quad R = \bigcup_{n=p+1}^{\infty} I_n\,, \quad \mu(R) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \mu(I_n) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{67}$$

Je tedy $A \in \mathfrak{A}_r$, $\Delta(C, A) = R$, tedy podle (59)

$$\mu_e(\Delta(M, A)) \leqq \mu_e(\Delta(M, C)) + \mu_e(\Delta(C, A)) < \varepsilon\,.$$

Dokažme nyní tvrzení I. Budiž M μ-měřitelná a proveďme rozklad prostoru $\mathbf{E}_r$ na jednotkové krychle (viz pozn. 3 v § 5), které očíslujeme takto:

$$K_1, K_2, \ldots \tag{68}$$

Ke každému $\eta > 0$ existuje $C \in \mathfrak{C}_r$ tak, že $\mu_e(\Delta(M, C)) < \eta$, takže (viz V v pozn. 1) $\mu_e(\Delta(MK_n, CK_n)) < \eta$, a ovšem $CK_n \in \mathfrak{C}_r$. Tedy podle definice jsou MK_n μ-měřitelné a ovšem omezené.

Podle II plyne nyní toto: Budiž $\varepsilon > 0$; potom ke každému n existuje $A_n \in \mathfrak{A}_r$ tak, že

$$\mu_e(\Delta(MK_n, A_n)) < \varepsilon\,.\,2^{-n}\,, \tag{69}$$

při čemž lze předpokládati $A_n \subset K_n$ (jinak vezmu $A_n K_n$ místo A_n a užiji V z pozn. 1). Podle (60) a (69) je

$$\mu_e(\Delta(M, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \mu_e(\Delta(\bigcup_{n=1}^{\infty} MK_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(\Delta(MK_n, A_n)) < \varepsilon .$$

Dále je patrno, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}_r$. Neboť je-li I libovolný omezený interval, má pouze konečný počet krychlí K_n neprázdný průnik s I, takže vzhledem k $A_n \subset K_n$ je $I . \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{p} IA_n \in \mathfrak{A}_r$. Tím je I dokázáno.

Význam této pomocné věty je v tom, že v definici 6 místo $\mathfrak{C}_r$ (což je σ-aditivní systém, ale ne okruh) lze psáti $\mathfrak{B}_r$ (což je okruh, dokonce těleso, ale ne σ-aditivní) — podle toho, jak se nám to hodí.

Věta 14.[36]) *Všechny množiny μ-měřitelné tvoří σ-těleso $\mathfrak{M}$, jež obsahuje všechny množiny otevřené, množiny uzavřené a množiny μ-nulové.*

Poznámka 5. Jsou-li tedy M_n μ-měřitelné, jsou i množiny $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$, $\liminf_{n\to\infty} M_n$, $\limsup_{n\to\infty} M_n$, $M_1 \dot{-} M_2$ μ-měřitelné (viz vlastnosti σ-okruhů v § 3).

Důkaz věty 14. I. Buďte M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ měřitelné. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle definice existují $C_n \in \mathfrak{C}_r$ tak, že $\mu_e(\Delta(M_n, C_n)) < \varepsilon . 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Podle (60) je pak $\mu_e(\Delta(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)) < \varepsilon$ a přitom $\bigcup C_n \in \mathfrak{C}_r$, tedy $\bigcup M_n$ je měřitelná. Tedy systém $\mathfrak{M}$ všech měřitelných množin je σ-aditivní.

II. Budiž M měřitelná. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 13 existuje $B \in \mathfrak{B}_r$ tak, že $\mu_e(\Delta(M, B)) < \varepsilon$, a odtud podle IV v pozn. 1 $\mu_e(\Delta(\mathbf{E}_r \dot{-} M, \mathbf{E}_r \dot{-} B)) < \varepsilon$. Ale $\mathbf{E}_r \dot{-} B \in \mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{C}_r$ podle věty 3 a pozn. 5 v § 5, takže $\mathbf{E}_r \dot{-} M$ je měřitelná.

[36]) Stále předpokládám — pokud není jinak řečeno — že μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$.

III. Buďte M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ měřitelné. Potom $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \mathbf{E}_r \dot{-} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\mathbf{E}_r \dot{-} M_n)$ je měřitelná podle I, II.

IV. Buďte M_1, M_2 měřitelné. Potom $M_1 \dot{-} M_2 = M_1(\mathbf{E}_r \dot{-} M_2)$ je měřitelná podle II, III.

Podle I, IV je $\mathfrak{M}$ σ-okruh, mající ovšem největší prvek $\mathbf{E}_r$. K němu patří všechny množiny μ-nulové (pozn. 3), dále množiny z $\mathfrak{C}_r$, tedy také všechny otevřené množiny G a tedy také všechny uzavřené množiny $\mathbf{E}_r \dot{-} G$.

Poznámka 6. Budiž P libovolný metrický prostor. Sestrojme Borelův okruh nad systémem všech množin otevřených v P (viz pozn. 5 v § 3). Ježto prostor P je otevřený v P, je tento Borelův okruh σ-tělesem. Množiny tohoto σ-tělesa se nazývají *Borelovými množinami* prostoru P. Z věty 14 ihned plyne

Věta 15. *Má-li μ vlastnost $\mathbf{S}_r$, jsou všechny Borelovy množiny prostoru $\mathbf{E}_r$ μ-měřitelné.*

Důkaz. Borelovy množiny tvoří *nejmenší* σ-těleso (nebo σ-okruh, to je zde totéž) nad systémem všech otevřených množin.

Věta 16. *Je-li M_1 μ-měřitelná, $\mu_e(\Delta(M_1, M_2)) = 0$, je též M_2 μ-měřitelná a ovšem $\mu(M_1) = \mu(M_2)$.*[37]

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; podle definice existuje $C \in \mathfrak{C}_r$ tak, že $\mu_e(\Delta(M_1, C)) < \varepsilon$, takže podle (59) je $\mu_e(\Delta(M_2, C)) \leqq \mu_e(\Delta(M_2, M_1)) + \mu_e(\Delta(M_1, C)) < \varepsilon$.

Věta 14 nás poučuje o struktuře množiny $\mathfrak{M}$. Následující dvě věty (z nichž věta 18 je základní) nás učí počítati s měrou.

Věta 17. *Jsou-li M, M_n μ-měřitelné a je-li $M \subset \bigcup\limits_n M_n$, kde vpravo je sjednocení spočetného systému množin, je*

$$\mu(M) \leqq \sum_n \mu(M_n) \,. \tag{70}$$

Speciálně: je-li $M \subset M_1$, je $\mu(M) \leqq \mu(M_1)$.

Důkaz ihned z věty 11.

---

[37]) Tato rovnost plyne z věty 12.

Věta 18. *Buďte M_n μ-měřitelné,*

$$M = \bigcup_n M_n\,, \tag{71}$$

kde vpravo stojí disjunktní sjednocení spočetného systému množin. Potom

$$\mu(M) = \sum_n \mu(M_n) \tag{72}$$

(říká se proto, že μ je σ-aditivní funkcí měřitelné množiny; M je měřitelná podle věty 14).

Důkaz. Je-li $\mu(M_n) = +\infty$ pro některé n, je podle věty 17 $\mu(M) = +\infty$ a (72) platí. Tedy budiž $\mu(M_n) < +\infty$.

I. Nechť jde především o dvě množiny:

$$M = M_1 \cup M_2\,, \quad M_1 M_2 = \emptyset\,.$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto M_1, M_2 mají konečnou míru, existují podle věty 13 $A_1 \in \mathfrak{A}_r$, $A_2 \in \mathfrak{A}_r$ tak, že[38])

$$\mu(\Delta(M_1, A_1)) < \varepsilon\,, \quad \mu(\Delta(M_2, A_2)) < \varepsilon\,. \tag{73}$$

Jest[39])

$$A_2 = (A_2 \dot{-} A_1) \cup A_1 A_2\,, \quad A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \dot{-} A_1)\,, \tag{74}$$

kde na pravých stranách jsou disjunktní sjednocení. Všechny napsané množiny patří do $\mathfrak{A}_r$, takže podle věty 7 je

$$\begin{aligned} \mu(A_2) &= \mu(A_2 \dot{-} A_1) + \mu(A_1 A_2)\,, \\ \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_2 \dot{-} A_1) + \mu(A_1)\,, \end{aligned} \tag{75}$$

a odtud (všechny míry jsou konečné!)

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 A_2)\,. \tag{76}$$

Z (73) a z (60) plyne

$$\mu(\Delta(M_1 \cup M_2, A_1 \cup A_2)) < 2\varepsilon\,, \tag{77}$$

takže podle věty 12 (vzorec (64)) plyne z (73), (76)

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(A_1 A_2) + 4\Theta\varepsilon\,, \tag{78}$$

---

[38]) Jde zřejmě o měřitelné množiny.

[39]) Kreslete si náčrtek! Je to názorné.

kde $|\Theta| < 1$. Odhadněme ještě $\mu(A_1A_2)$. Je $A_1A_2 \subset (A_1 \dot{-} M_1) \cup \cup (A_2 \dot{-} M_2) \cup M_1M_2$, ale $M_1M_2 = \emptyset$, takže $A_1A_2 \subset \Delta(A_1, M_1) \cup \cup \Delta(A_2, M_2)$ a (73) dává $\mu(A_1A_2) < 2\varepsilon$, takže podle (78) je

$$|\mu(M_1 \cup M_2) - \mu(M_1) - \mu(M_2)| < 6\varepsilon .$$

To platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$. To byl hlavní bod důkazu.

II. Budiž za druhé $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$ (disjunktní sjednocení). Indukcí podle p plyne ihned z I

$$\mu(M_1 \cup \ldots \cup M_p) = \sum_{n=1}^{p} \mu(M_n) .$$

III. Budiž za třetí $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Pro každé přirozené p je $M_1 \cup \cup \ldots \cup M_p \subset M$, a tedy podle II a věty 17 $\sum_{n=1}^{p} \mu(M_n) = \mu(M_1 \cup \cup \ldots \cup M_p) \leqq \mu(M)$, odkudž $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \mu(M_n) \leqq \mu(M)$. Obrácená nerovnost platí též podle věty 17.

Poznámka 7. V důsledku věty 18 platí toto: Jsou-li A_1, A_2 μ-měřitelné, platí (74) a tedy (75); přičtu-li k první z těchto rovnic $\mu(A_1)$, k druhé $\mu(A_1A_2)$, dostanu srovnáním levých stran

(79) $$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1A_2) .$$

Odtud pak

(80) $$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1A_2) \text{ pro } \mu(A_1A_2) < +\infty .$$

V případě $A_1 \subset A_2$ plyne z (75)

(81) $$\mu(A_2 \dot{-} A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1), \text{ je-li } A_1 \subset A_2,\ \mu(A_1) < +\infty .$$

Příklad 1. Cantorovo diskontinuum D (viz **D II**, kap. V, § 1, pozn. 8, str. 156—158) vzniká tak, že se z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ odstraní disjunktní spočetný systém otevřených intervalů: jeden délky $\frac{1}{3}$, dva délky $\frac{1}{9}$, čtyři délky $\frac{1}{27}$ atd. Položíme-li $M = \langle 0, 1\rangle \dot{-} D$ a vezmeme-li za μ funkci μ_1 definovanou v § 6, příkl. 1 („délka" intervalu), je podle věty 18

$$\mu(M) = \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \ldots) = 1 ,$$

tedy podle pozn. 7 $\mu(D) = \mu(\langle 0, 1\rangle) - \mu(M) = 0$, ač D je nespočetná, ba má dokonce mohutnost kontinua.

Cvičení

1. Budiž O jakákoliv množina, v níž jsou definovány dvě operace, které nazveme sčítáním a násobením, t. j. každé uspořádané dvojici a, b prvků z O jsou přiřazeny prvky $a + b \in O$, $ab \in O$. Říkáme, že O je (vzhledem k těmto operacím) okruhem,[40]) jestliže platí tato pravidla: $a + b = b + a$; $ab = ba$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$; $a(b + c) = ab + ac$; existuje „nulový" prvek $o \in O$ tak, že pro každé $a \in O$ je $a + o = a$; ke každému $a \in O$ existuje „opačný" prvek $x \in O$ tak, že $a + x = o$. Někdy se též požaduje existence „jednotkového" prvku j, t. j. prvku takového, že pro každé $a \in O$ je $aj = a$. Jestliže pro každé $a \in O$ je $a \,.\, a = a$, $a + a = o$, nazývá se O Booleovým okruhem. Příklady: Okruh všech polynomů v jedné proměnné s reálnými koeficienty, okruh všech celých čísel, okruh všech sudých čísel $(0, 2, -2, 4, -4, \ldots)$ s obvyklou definicí sčítání a násobení. Nejsou to ovšem Booleovy okruhy; první dva z nich mají jednotkový prvek, třetí nikoliv. Viz Kořínek, Základy algebry, definice 10,2, str. 108.

2. Budiž P jakákoliv množina; nazveme-li $\mathfrak{P}$ systém všech jejích částí a nazveme-li na chvíli součtem dvou množin jejich symetrickou diferenci a součinem jejich průnik, je $\mathfrak{P}$ Booleovým okruhem s nulovým prvkem $\emptyset$ a jednotkovým prvkem P. Dokažte! Návod: Pišme pro větší přehlednost $A \varDelta B$ místo $\varDelta(A, B)$. Asociativnost „sčítání" $A \varDelta (B \varDelta C) = (A \varDelta B) \varDelta C$ dokážete takto: Levá strana je množina oněch prvků, které leží buďto ve všech třech množinách A, B, C, nebo právě v jedné z nich; stejně pravá strana. Ostatní věci (komutativnost atd.) jsou zřejmé.

3. Budiž $\mathfrak{A}$ systém některých částí množiny P (označení jako v cvič. 2). Potom $\mathfrak{A}$ je okruhem (ovšem Booleovým) ve smyslu cvič. 1 a 2 tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{A}$ okruhem ve smyslu § 3. $\mathfrak{A}$ má jednotkový prvek ve smyslu cvič. 1 tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{A}$ tělesem ve smyslu § 3. Návod: Je nutno sjednocení a rozdíl dvou množin vyjádřit symetrickou diferencí a průnikem a obráceně.

§ 9. Další věty o míře, vnější míře a měřitelnosti. Stále předpokládám, že je dána funkce μ s vlastností $\mathbf{S}_r$. Podle věty 14 jsou μ-měřitelnými nejenom množiny otevřené a uzavřené, nýbrž i množiny typu F_σ (sjednocení spočetného systému množin uzavřených, viz **D II**, kap. VI, § 6) a množiny typu G_δ (průnik spočetného systému množin otevřených), dále množiny typu $F_{\sigma\delta}$ (průnik spočetného systému množin typu F_σ), $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$ atd.; nebudeme to rozebírati (množiny typu $F_{\sigma\sigma}$ jsou, jak snadno nahlédnete, množinami typu F_σ, proto se zvláště nezavádějí; podobně $G_{\delta\delta}$ atd.).

---

[40]) Podrobněji: komutativním okruhem. Někdy se totiž nepožaduje rovnost $ab = ba$.

Odvodíme nyní čtyři (navzájem příbuzné) věty o měřitelnosti.

Věta 19. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je μ-měřitelná tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina G tak, že*

$$M \subset G\,, \quad \mu_e(G \dot{-} M) < \varepsilon\,. \tag{82}$$

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. V (82) je $G \in \mathfrak{C}_r$, $\Delta(G, M) = G \dot{-} M$, tedy $\mu_e(\Delta(G, M)) < \varepsilon$; tedy je M měřitelná podle definice 6.

II. Nechť M je μ-měřitelná. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $C \in \mathfrak{C}_r$ tak, že $\mu_e(\Delta(C, M)) < \frac{1}{4}\varepsilon$. Lze psáti $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ (I_n omezené intervaly). Podle vlastnosti $\mathbf{S}_r$ existuje ke každému přirozenému n otevřený omezený interval J_n tak, že $J_n \supset I_n$, $\mu(J_n) < \mu(I_n) + \varepsilon \,.\, 2^{-n-2}$, takže (viz (81) na konci § 8) $\mu(J_n \dot{-} I_n) = \mu(J_n) - \mu(I_n) < \varepsilon \,.\, 2^{-n-2}$. Položme $C_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n$; potom C_1 je otevřené, $C \subset C_1$, $C_1 \dot{-} C = \bigcup J_n \dot{-} \bigcup I_n \subset \bigcup (J_n \dot{-} I_n)$, takže (věta 17)

$$\mu(\Delta(C_1, C)) = \mu(C_1 \dot{-} C) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n \dot{-} I_n) < \tfrac{1}{4}\varepsilon\,,$$

načež podle (59)

$$\mu_e(\Delta(C_1, M)) < \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Tedy předně $\mu_e(C_1 \dot{-} M) < \frac{1}{2}\varepsilon$, za druhé $\mu_e(M \dot{-} C_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Existuje tedy (podle věty 10, užívám σ_1) otevřená C_2 tak, že $M \dot{-} C_1 \subset C_2$, $\mu(C_2) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Položme $C_1 \cup C_2 = G$. Potom G je otevřená a platí (82), neboť $M \subset C_1 \cup (M \dot{-} C_1) \subset C_1 \cup C_2$, $\mu_e(G \dot{-} M) \leqq \mu_e(C_1 \dot{-} M) + \mu_e(C_2) < \varepsilon$.

Věta 20. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je μ-měřitelná tehdy a jen tehdy, existuje-li množina N typu G_δ tak, že*

$$M \subset N\,, \quad \mu(N \dot{-} M) = 0\,. \tag{83}$$

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna, je N měřitelná, $N \dot{-} M$ měřitelná a tedy $M = N \dot{-} (N \dot{-} M)$ měřitelná. II. Je-li M měřitelná, existuje ke každému přirozenému n otevřená G_n tak, že $M \subset G_n$,

$\mu(G_n \dot{-} M) < \frac{1}{n}$. Položme $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, takže N je typu G_δ, $M \subset N$, $N \dot{-} M \subset G_n \dot{-} M$ a tedy $\mu(N \dot{-} M) < \frac{1}{n}$ pro každé přirozené n.

„Duální" jsou následující dvě věty:

Věta 21. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je μ-měřitelná tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená množina F tak, že*

$$F \subset M\,, \quad \mu_e(M \dot{-} F) < \varepsilon\,. \tag{84}$$

Důkaz. Položíme-li $G = \mathbf{E}_r \dot{-} F$, $N = \mathbf{E}_r \dot{-} M$, je $G \dot{-} N = M \dot{-} F$, a dále je $F \subset M$ tehdy a jen tehdy, je-li $N \subset G$. Odtud ihned zjistíte, že podmínka z věty 21 není nic jiného než podmínka z věty 19 pro měřitelnost množiny $N = \mathbf{E}_r \dot{-} M$, t. j. pro měřitelnost naší množiny $M = \mathbf{E}_r \dot{-} N$.

Věta 22. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je měřitelná tehdy a jen tehdy, jestliže existuje množina N typu F_σ tak, že*

$$N \subset M\,, \quad \mu(M \dot{-} N) = 0\,. \tag{85}$$

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna, je $M = N \cup (M \dot{-} N)$ měřitelná. II. Je-li M měřitelná, existuje podle věty 21 ke každému přirozenému n uzavřená F_n tak, že $F_n \subset M$, $\mu(M \dot{-} F_n) < \frac{1}{n}$. Položíme-li $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, platí zřejmě (85).

Příklad 1. Věta 22 by se stala nesprávnou, kdybychom v ní slova „množina N typu F_σ" nahradili slovy „uzavřená množina N"; ukažme to na příkladě v $\mathbf{E}_1$. Za μ vezměme funkci z § 6, příkl. 1 ($\mu(I)$ je délka intervalu I). Položme $M = (0, 1)$ a budiž N uzavřená, $N \subset M$. Ježto M není uzavřená, je $N \neq M$, tedy otevřená množina $M \dot{-} N$ obsahuje aspoň jeden bod, tedy i jisté jeho okolí, t. j. jistý nezvrhlý interval I, takže $\mu(M \dot{-} N) \geqq \mu(I) > 0$. Tedy vskutku (85) nemůže platit. Podobně ve větě 20 nesmíme slova „množina N typu G_δ" nahraditi slovy „otevřená množina N".

Poznámka 1. Podle věty 22 jsou všechny μ-měřitelné množiny dány vzorcem $A \cup B$, kde A je typu F_σ, B je μ-nulová. Ježto definice množin typu F_σ nezávisí na funkci μ, je patrno, že rozsah systému $\mathfrak{M}$ všech μ-měřitelných množin závisí jen na tom, které množiny mají vnější μ-míru rovnu nule.

Kdežto dosud (i ještě v důkazu věty 19) jsme se opírali o definici 6, jsou následující věty 23—26 pouhými početními důsledky vět 14, 17, 18; jsou ovšem velmi důležité.

Věta 23. *Budiž $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$ nekonečná rostoucí posloupnost μ-měřitelných množin. Položme $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ (zde tedy $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$). Potom*

$$\mu(M) = \mu\,(\lim_{n\to\infty} M_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(M_n)\,. \tag{86}$$

Důkaz. Je-li $\mu(M_n) = +\infty$ pro některé n (a tedy i pro všechna větší n), je též $\mu(M) = +\infty$ a (86) platí. Budiž tedy $\mu(M_n) < +\infty$ pro každé n. Jest

$$M = M_1 \cup (M_2 \dot{-} M_1) \cup (M_3 \dot{-} M_2) \cup \ldots$$

(disjunktní sjednocení); dále je podle věty 18 $\mu(M_{n+1}) = \mu(M_n) + \mu(M_{n+1} \dot{-} M_n)$,

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \mu(M_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_{n+1} \dot{-} M_n) = \\ &= \mu(M_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(M_{n+1}) - \mu(M_n))\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Ale součet prvních $n + 1$ členů vpravo je $\mu(M_1) + \mu(M_{n+1}) - \mu(M_1) = \mu(M_{n+1})$, takže z (87) plyne $\mu(M) = \lim \mu(M_{n+1})$.

Věta 24. *Budiž $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ nekonečná klesající posloupnost μ-měřitelných množin a předpokládejme, že $\mu(M_1) < +\infty$. Položme opět $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Potom opět platí* (86).

Důkaz. Položme $M_1 \dot{-} M_n = A_n$, $M_1 \dot{-} M = A$, takže $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ Podle věty 23 je tedy $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$, t. j. $\mu(M_1 \dot{-} M) = \lim \mu(M_1 \dot{-} M_n)$. Podle vzorce (81) ke konci § 8 lze tuto rovnici psáti $\mu(M_1) - \mu(M) = \lim (\mu(M_1) - \mu(M_n)) = \mu(M_1) - \lim \mu(M_n)$, a ježto jsou zde všude konečná čísla, plyne odtud (86).

Poznámka 2. Ani $\lim M_n$, ani $\lim \mu(M_n)$ se nezmění, vynecháme-li konečný počet členů. Stačí proto místo $\mu(M_1) < +\infty$ předpokládati ve větě 24, že je $\mu(M_n) < +\infty$ *aspoň pro jedno* n (a tedy i pro všechna větší n). Je-li však $\mu(M_n) = +\infty$ pro všechna n, nemusí (86) platit. Příklad: $M_n = (n, +\infty)$; vezmu za μ funkci z příkl. 1 v § 6 (délka intervalu). Ježto M_n obsahuje intervaly libovolně velké konečné délky, je $\mu(M_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_n) = +\infty$. Ale $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset$, tedy $\mu(M) = 0 \neq \lim \mu(M_n)$.

Věta 25. *Budiž $M_1, M_2, \ldots$ libovolná nekonečná posloupnost μ-měřitelných množin.*

I. Potom

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} M_n) \leqq \liminf_{n\to\infty} \mu(M_n) . \tag{88}$$

II. Je-li mimo to

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) < +\infty , \tag{89}$$

je také

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} M_n) \geqq \limsup_{n\to\infty} \mu(M_n) . \tag{90}$$

Důkaz. I. Kladu $\bigcap\limits_{p=n}^{\infty} M_p = A_n$, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, takže (viz (3) v § 2) $B = \liminf\limits_{n\to\infty} M_n$. Je $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, takže věta 23 dává $\mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Ale $A_n \subset M_n$, tedy $\mu(A_n) \leqq \mu(M_n)$; vezmu-li po obou stranách limes inferior (vlevo ovšem existuje limita), dostávám $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(M_n)$. Ale vlevo stojí právě $\mu(B)$.

II. Kladu $\bigcup\limits_{p=n}^{\infty} M_p = C_n$, $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, takže (viz (3) v § 2) $D = \limsup\limits_{n\to\infty} M_n$. Je $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, $\mu(C_1) < +\infty$, takže podle věty 24 je $\mu(D) = \lim \mu(C_n)$. Ale $C_n \supset M_n$, tedy $\mu(C_n) \geqq \mu(M_n)$, tedy $\mu(D) = \lim \mu(C_n) \geqq \limsup \mu(M_n)$.

Speciální případ:

Věta 26. *Budiž $M_1, M_2, \ldots$ nekonečná posloupnost μ-měřitelných množin. Nechť platí* (89) *a nechť existuje $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$. Potom platí opět* (86).

Důkaz. Věta 25 dává

$$\mu(M) \leqq \liminf \mu(M_n) \leqq \limsup \mu(M_n) \leqq \mu(M) .$$

Poznámka 3. Ve větách 25 II, 26 ovšem opět stačí, jestliže místo (89) předpokládáme, že pro jisté k platí

$$\mu(\bigcup_{n=k}^{\infty} M_n) < +\infty . \tag{91}$$

Věta 24 je ovšem obsažena ve větě 26. Uvědomte si rozdíl mezi větami 23, 26: Rovnice (86) platí, jestliže *buďto* $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ *nebo* jestliže všechna M_n až na konečný počet jsou obsažena v jedné a téže množině konečné míry. Věta 23 a první část věty 25 platí i pro vnější míru jakýchkoliv (i neměřitelných) množin. To si dokážeme. Ale napřed uvedeme tuto poznámku:

Poznámka 4. Ke každé množině $M \subset \mathbf{E}_r$ existuje množina N typu G_δ (a tedy μ-měřitelná) tak, že

$$M \subset N , \quad \mu(N) = \mu_e(M) .$$ [41]

Důkaz. Je-li $\mu_e(M) = +\infty$, stačí voliti $N = \mathbf{E}_r$. Budiž tedy $\mu_e(M) = T < +\infty$. Ke každému přirozenému n existuje podle věty 10 (užívám σ_1) otevřená $G_n \supset M$ tak, že $\mu(G_n) < T + \frac{1}{n}$. Stačí položiti $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, neboť potom $M \subset N \subset G_n$, a tedy $T = \mu_e(M) \leqq \leqq \mu_e(N) \leqq \mu_e(G_n) < T + \frac{1}{n}$ pro každé n.

Věta 27. *Budiž $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ nekonečná rostoucí posloupnost jakýchkoliv množin v $\mathbf{E}_r$; položme $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Potom*

---

[41]) Ježto nemusí býti $\mu(N) = \mu_e(M) + \mu_e(N \dot{-} M)$, neplyne odtud (ani v případě $\mu(N) < +\infty$) rovnice $\mu_e(N \dot{-} M) = 0$. Ostatně z této rovnice by ihned plynula měřitelnost množiny M. Srovnej větu 20.

(92) $$\mu_e(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_e(M_n)\,.$$[42]

Důkaz. $\mu_e(M) \geqq \mu_e(M_n)$ a odtud

(93) $$\mu_e(M) \geqq \lim_{n\to\infty} \mu_e(M_n)\,.$$

Podle pozn. 4 existují měřitelné N_n tak, že $M_n \subset N_n$, $\mu(N_n) = \mu_e(M_n)$. Položme $A_p = \bigcap_{n=p}^{\infty} N_n$, takže A_p je měřitelné, $N_p \supset A_p \supset \bigcap_{n=p}^{\infty} M_n = M_p$, tedy také $\mu(A_p) = \mu_e(M_p)$. Je $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, takže věta 23 dává $\mu(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p) = \mu(\lim_{p\to\infty} A_p) = \lim_{p\to\infty} \mu(A_p) = \lim_{p\to\infty} \mu_e(M_p)$. Ale $M \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$, a tedy

$$\mu_e(M) \leqq \mu(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p) = \lim_{p\to\infty} \mu_e(M_p)\,.$$

Odtud a z (93) plyne (92).

Věta 28. *Budiž $M_1, M_2, \ldots$ nekonečná posloupnost množin z $\mathbf{E}_r$. Potom*

(94) $$\mu_e(\liminf_{n\to\infty} M_n) \leqq \liminf_{n\to\infty} \mu_e(M_n)\,.$$

Důkaz: Plyne z věty 27 zcela obdobně jako I. část věty 25 z věty 23.

Nakonec podáme ještě jednu charakteristiku měřitelných množin, zcela odlišnou od definice 6 a od vět 19 až 22.

Věta 29. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je μ-měřitelná tehdy a jen tehdy, jestliže pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ je*

(95) $$\mu_e(MI) + \mu_e(I \dot{-} M) = \mu(I)\,.$$

Důkaz. I. Ježto $I = MI \cup (I \dot{-} M)$ (disjunktní sjednocení), plyne (95) z měřitelnosti množiny M podle věty 18. II. Nechť naopak množina M je taková, že (95) platí pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$. Vezměme tedy nějaký omezený interval I a budiž $\varepsilon > 0$. Existují množiny $C_1 \in \mathfrak{C}_r$, $C_2 \in \mathfrak{C}_r$ tak, že

(96) $$\begin{aligned} MI \subset C_1\,, \quad & \mu(C_1) < \mu_e(MI) + \varepsilon\,, \\ I \dot{-} M \subset C_2\,, \quad & \mu(C_2) < \mu_e(I \dot{-} M) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

---

[42]) Limita vpravo je limitou neklesající posloupnosti, a tedy existuje.

Podle pozn. 7 v § 8 platí

$$(97)\qquad \mu(C_1 \cup C_2) = \mu(C_1) + \mu(C_2) - \mu(C_1C_2)\,.$$

Ježto $C_1 \cup C_2 \supset I$ (podle (96)), je $\mu(C_1 \cup C_2) \geqq \mu(I)$; dosadíme-li odtud a z (96) do (97), obdržíme

$$\mu(I) < \mu_e(MI) + \mu_e(I \dot{-} M) + 2\varepsilon - \mu(C_1C_2)\,,$$

takže (95) dává $\mu(C_1C_2) < 2\varepsilon$. Ale $IC_1 \dot{-} IM \subset (I \dot{-} M)\,C_1 \subset C_1C_2$, $IM \dot{-} IC_1 = \emptyset$ (viz (96)). Tedy

$$\mu_e(\Delta(IC_1, IM)) \leqq \mu(C_1C_2) < 2\varepsilon\,.$$

Podle definice 6 je tedy IM měřitelná (a to pro každý omezený interval). Ale lze psáti $\boldsymbol{E}_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (I_n omezené intervaly); tedy také množina $M = M\boldsymbol{E}_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_nM$ je měřitelná.

Poznámka 5. Všimněme si, že jsme v bodě II dokázali: Platí-li (95) pro jistý omezený interval I, je MI měřitelná. Tedy: *Je-li M omezená a jestliže pro jistý omezený interval $I \supset M$ je $\mu_e(M) + \mu_e(I \dot{-} M) = \mu(I)$, je M μ-měřitelná.*

Poznámka 6. Věta 29 je zajímavá ještě s jiného hlediska. My jsme definovali $\mu_e(M)$ pro všechna M. Systém všech μ-měřitelných množin označme $\mathfrak{M}$. Ptejme se, zda existuje nějaký rozsáhlejší systém $\mathfrak{S}$ množin, který má aspoň tyto „rozumné" vlastnosti:

I. $\mathfrak{S}$ je okruh, k němuž patří všechny omezené intervaly.

II. Je-li $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{S}$, $AB = \emptyset$, je $\mu_e(A \cup B) = \mu_e(A) + \mu_e(B)$.[43]

Nechť $\mathfrak{S}$ má vlastnosti I, II; budiž $M \in \mathfrak{S}$. Budiž I libovolný omezený interval; potom je $MI \in \mathfrak{S}$, $I \dot{-} M \in \mathfrak{S}$, a podle II je $\mu_e(MI) + \mu_e(I \dot{-} M) = \mu_e(I)$, takže podle věty 29 je M μ-měřitelná, t. j. $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}$. Tedy: $\mathfrak{M}$ je „největší" okruh, obsahující všechny omezené intervaly, ve kterém platí II. Naše definice měřitelných množin byla tedy velmi vhodná: není možno sestrojiti žádný okruh, obsahující všechny omezené intervaly a vyhovující podmínce II, který by obsahoval aspoň jednu μ-neměřitelnou množinu. Zhruba řečeno: μ-měřitelné množiny jsou nejobecnější množiny, pro něž funkce μ_e má ještě rozumné vlastnosti.

[43]) Systém $\mathfrak{M}$ má tyto vlastnosti a ještě mnohé jiné; viz větu 14.

Cvičení

1. Buďte $A_1, A_2, \ldots$ disjunktní μ-měřitelné množiny; budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ jakákoliv množina. Potom

$$\mu_e(M \,.\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(M \,.\, A_n) \,.$$

(To je zajímavé: měřitelné disjunktní množiny A_n vytínají z jakékoliv — i neměřitelné — množiny M části MA_n, jejichž vnější míry se chovají „aditivně".) Návod: Podle pozn. 4 sestrojím měřitelnou $N \supset M \,.\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tak, že $\mu(N) = \mu_e(M \,.\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, a dále pokračujeme: $\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(MA_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(NA_n) = \mu(N \,.\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqq \mu(N)$. Tedy musí všude platit rovnost.

2. Speciálně: Je-li A μ-měřitelná, M jakákoliv, je $\mu_e(M) = \mu_e(AM) + \mu_e(M \dot{-} A)$. Srovnejte s větou 29: Je-li naopak M měřitelná, A neměřitelná, nemusí tato rovnice platit.

3. Dokažte toto zobecnění pozn. 4: Ke každé množině $M \subset \mathbf{E}_r$ existuje μ-měřitelná $N \supset M$ tak, že pro každou μ-měřitelnou A je $\mu(NA) = \mu_e(MA)$. Návod: je-li $\mu_e(M) < +\infty$, můžete vzít přímo N z pozn. 4. V obecném případě rozdělte napřed $\mathbf{E}_r$ na jednotkové krychle. Užitím věty 20 můžete dodatečně dosáhnouti toho, aby N byla typu G_δ.

§ 10. Lebesgueova míra. V tomto paragrafu vezmeme za funkci μ funkci μ_r z § 6 příkl. 5; t. j.: $\mu(\emptyset) = 0$; je-li $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r$ neprázdný omezený interval v $\mathbf{E}_r$, je $\mu(I)$ rovno součinu „délek" intervalů $i_1, \ldots, i_r$ (délka jednobodového intervalu v $\mathbf{E}_1$ je rovna 0). Zřejmě $\mu(I) = 0$ tehdy a jen tehdy, když I je zvrhlý. Víme (viz příkl. 8 v § 6), že tato funkce μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$. Ihned zjistíte, že při této míře má každý neomezený nezvrhlý interval míru $+\infty$, každý zvrhlý (i neomezený) míru 0. To zjistíte, když každý neomezený interval i_h v rovnici $I = i_1 \times \ldots \times i_r$ nahradíte disjunktním sjednocením nekonečně mnoha intervalů délky 1, na př. $(a, +\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (a + n, a + n + 1\rangle$ a užijete věty 18. Místo μ-míra atd. budeme při této funkci říkat též Lebesgueova (vnější) míra, lebesgueovsky měřitelné (neměřitelné) množiny atd.; je-li nutno připomenouti „dimensi" r, mluvíme o r-rozměrné Lebesgueově míře atd. Její důležitost je jasná: jde o míru, při které měrou omezeného intervalu je jeho „objem" ve smyslu elementární geometrie.

Poznámka 1. Buďte $a_1, \ldots, a_r$ čísla z $\mathbf{E}_1$; budiž $p_1, \ldots, p_r$ nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, r$. Zaveďme tato tři zobrazení $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ prostoru $\mathbf{E}_r$ na $\mathbf{E}_r$:

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_r) = [x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}]$$
(permutace souřadnic);

$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_r) = [-x_1, x_2, \ldots, x_r]$$
(souměrnost podle nadroviny $\underset{x}{\mathcal{E}}(x_1 = 0)$);

$$\varphi_3(x_1, \ldots, x_r) = [x_1 + a_1, \ldots, x_r + a_r]$$
(posunutí) .

Lebesgueova míra má tyto téměř samozřejmé vlastnosti symetrie:

Věta 30. *Budiž μ Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_r$; buďte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zobrazení z pozn. 1. Potom pro každou množinu $M \subset \mathbf{E}_r$ a pro $i = 1, 2, 3$ platí: Jest*

$$\mu_e(M) = \mu_e(\varphi_i(M)) \; ; \tag{98}$$

je-li M měřitelná, je též $\varphi_i(M)$ měřitelná (lebesgueovsky).

Poznámka 2. Zobrazení inversní k φ_i má podobný tvar jako φ_i. Proto lze větu obrátiti: Je-li některá ze tří množin $\varphi_i(M)$ měřitelná, je i M měřitelná.

Důkaz. Je-li I omezený interval, je $\varphi_i(I)$ interval se stejnými délkami hran (až na pořadí v případě $i = 1$), tedy $\mu(\varphi_i(I)) = \mu(I)$. Pokrývá-li nějaký systém intervalů I_n množinu M, pokrývá systém intervalů $\varphi_i(I_n)$ množinu $\varphi_i(M)$.[44]) Užiji-li ve větě 10 čísla σ_2, dostanu ihned (98). Speciálně je $\mu(M) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $\mu(\varphi_i(M)) = 0$. Ježto φ_i je isometrické zobrazení (viz **D II**, kap. VI, § 3), je obrazem uzavřené množiny množina uzavřená, a tedy obrazem množiny typu F_σ je množina typu F_σ. Tedy obrazem množiny, jež je sjednocením množiny typu F_σ a množiny nulové, je množina téhož druhu. Tedy (věta 22) obrazem měřitelné množiny je měřitelná množina.

[44]) A naopak, pokrývají-li $\varphi_i(I_n)$ množinu $\varphi_i(M)$, pokrývají I_n množinu M.

Věta 31. *Budiž $r \geqq 1$, r celé. Potom v $\mathbf{E}_r$ existuje lebesgueovsky neměřitelná množina.*

Důkaz. I. Budiž $r = 1$. Jsou-li x, y konečná reálná čísla, pišme $x \sim y$, jestliže $x - y$ je racionální. Zřejmě: Jest $x \sim x$; je-li $x \sim y$, je $y \sim x$; je-li $x \sim y$, $y \sim z$, je $x \sim z$. Všechna čísla z $\mathbf{E}_1$ se tedy rozpadají na disjunktní třídy tak, že x, y patří do téže třídy tehdy a jen tehdy, je-li $x \sim y$. Podle axiomu výběru existuje množina $M \subset \mathbf{E}_1$, která z každé třídy obsahuje právě jedno číslo. T. j. ke každému $x \in \mathbf{E}_1$ existuje v M jedno a jen jedno y tak, že $x \sim y$, t. j. že $x - y$ je racionální.

Pro libovolné racionální s budiž M_s množina všech čísel $x + s$, kde $x \in M$; tedy speciálně $M = M_0$. Tedy M_s vzniká z M „posunutím". Tvrdím, že

$$\mathbf{E}_1 = \bigcup_s M_s\,, \tag{99}$$

kde s probíhá všechna racionální čísla, a že sjednocení vpravo je disjunktní. Neboť je-li $x \in \mathbf{E}_1$, existuje $y \in M$ tak, že $x - y = s$ je racionální, tedy $x \in M_s$; je-li však současně též $x \in M_t$ (t racionální), je $x = z + t$, $z \in M$, $z \sim y$, tedy $z = y$ a tedy i $s = t$.

Předpokládejme, že M je lebesgueovsky měřitelná; z toho odvodíme spor. Podle věty 30 je též M_s lebesgueovsky měřitelná, $\mu(M) = \mu(M_s) = a$ ($0 \leqq a \leqq +\infty$). Podle (99) a podle věty 18 je

$$\mu(\mathbf{E}_1) = +\infty = \sum_s \mu(M_s) = a + a + a + \dots,$$

tedy $a > 0$. Ale $M = \lim_{n\to\infty} M\,.\,(-n, n)$; ježto jde o limitu rostoucí posloupnosti množin, je podle věty 23 $a = \lim_{n\to\infty} \mu(M\,.\,(-n, n))$; tedy existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $\mu(M\,.\,(-n, n)) = b > 0$. Opět podle věty 30 je $\mu(M_s\,.\,(-n + s, n + s)) = b$. Položme $N = \bigcup_{0<s<1} M_s\,.\,(-n + s, n + s)$ (s probíhá racionální čísla intervalu $(0, 1)$). Podle věty 18 (disjunktnost v (99)!) je $\mu(N) = b + b + b + \dots = +\infty$, ale současně $N \subset (-n, n + 1)$ a tedy $\mu(N) \leqq 2n + 1$ — spor.

M'1 1'

II. Budiž $r > 1$. Zvolme nezvrhlý omezený interval $I \subset \mathsf{E}_{r-1}$, takže $\mu(\mathsf{E}_1 \times I) = +\infty$, a položme[45] $A = M \times I$, $A_s = M_s \times I$. Tedy podle (99)

$$\mathsf{E}_1 \times I = \bigcup_s A_s \quad \text{(disjunktní sjednocení)}\,.$$

Opakováním dalších úvah obdržíme jako dříve, že A není měřitelná. Probral jsem případ $r = 1$ zvláště jen proto, že je průhlednější.

Poznámka 3. Budiž $\mathfrak{N}$ množina všech lebesgueovsky neměřitelných množin v E_1. Dokázali jsme právě, že existuje množina $M \in \mathfrak{N}$, t. j. že $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Naproti tomu se nám nepodařilo (a dosud se to nepodařilo nikomu) definovati jednoznačně určitý prvek z $\mathfrak{N}$ (t. j. určitou neměřitelnou množinu), t. j. udati předpis, kterým by byl jednoznačně určen jeden prvek z $\mathfrak{N}$. Při našem důkazu by k tomu bylo nutno definovati jednoznačně jeden z nekonečně mnoha výběrů, vybírajících po jednom čísle z každé třídy.[46] Zde se velmi jasně jeví „nekonstruktivní" charakter axiomu výběru.

Je možno říci, že v „praksi" nenarazíte nikdy na neměřitelnou množinu. Jestliže tedy u některé množiny, se kterou se setkáte, neověříte její měřitelnost, dopustíte se sice logické chyby, ale můžete se „vsadit", že měřitelná je; totéž platí o pojmu měřitelné funkce, který zavedeme v kap. II.

Cvičení

Jde o Lebesgueovu míru v E_r (znak μ). Cvičení se připínají hlavně k větě 30.

1. Budiž φ_4 zobrazení E_r na E_r takto definované ($a_1, \ldots, a_r$ jsou konečná kladná čísla):

$$\varphi_4(x_1, \ldots, x_r) = [a_1 x_1, \ldots, a_r x_r]\,.$$

Dokažte, že $\mu_e(\varphi_4(M)) = a_1 \ldots a_r\, \mu_e(M)$ a že M je měřitelná tehdy a jen tehdy, když $\varphi_4(M)$ je měřitelná.

2. Uzavřenou koulí o středu $s = [s_1, \ldots, s_r]$ a poloměru R ($0 < R < +\infty$) nazvu množinu

$$K = \mathop{\mathcal{E}}_{x}((x_1 - s_1)^2 + \ldots + (x_r - s_r)^2 \leqq R^2)\,.$$

Pomocí zobrazení φ_3 a φ_4 dokažte, že existuje číslo V_r ($0 < V_r < +\infty$), závislé pouze na r tak, že míra koule K je rovna $V_r \,.\, R^r$ (číslo V_r určíme v kap. VII).

---

[45]) M, M_s značí množiny z bodu I.

[46]) Kdybychom to dovedli, nepotřebovali bychom ovšem axiom výběru.

3. Krychlovým intervalem nazveme interval (nezvrhlý a omezený), jehož strany jsou všechny stejně dlouhé. Dokažte: Každý nezvrhlý omezený interval I lze pokrýti konečným počtem krychlových intervalů, jejichž míry mají součet menší než $2^{r-1}\mu(I)$. Návod: Budiž l délka nejkratší hrany intervalu I. Sestrojím-li interval $I_1 \supset I$, jehož všechny hrany mají délky rovné celistvým násobkům čísla l, lze I_1 rozložit na krychlové intervaly.

4. Užitím věty 10 a cvič. 3 dokažte: Tehdy a jen tehdy je $\mu_e(M) = 0$, existuje-li ke každému $\varepsilon > 0$ spočetný systém krychlových intervalů I_1, $I_2, \ldots$ tak, že $M \subset \bigcup I_n$, $\Sigma\mu(I_n) < \varepsilon$.

5. Užitím cvič. 2 ukažte, že v cvič. 4 lze krychlové intervaly nahradit uzavřenými koulemi.

6. Dokažte, že číslo 2^{r-1} v cvič. 3 lze nahraditi kterýmkoliv číslem větším než 1.

7. Užitím věty 10 a cvič. 6 dokažte: $\mu_e(M)$ je infimum součtů $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$ pro všechny posloupnosti uzavřených krychlových intervalů $I_1, I_2, \ldots$, pokrývající M.