Kapitola V

LAPLACEOVY ROVNICE

Jestliže lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (vyšetřovaná v kap. III) splňuje v bodě a Fuchsovu podmínku, je každé její řešení, jak víme, lineární kombinací konečného počtu výrazů tvaru

$$(x - a)^{\varrho} \log^{k} (x - a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n .$$

Nechť poloměr konvergence napsané mocninné řady je R $(0 < R \leqq +\infty)$; nechme stranou jednoduchý případ, kdy tato mocninná řada je polynomem. Potom tato řada konverguje velmi dobře, je-li $|x - a|$ malé, ale konverguje velmi špatně, je-li $|x - a|$ blízko R. Následkem toho se tato řada obyčejně nehodí ani pro numerické výpočty, ani pro studium obecných vlastností řešení uvažované rovnice, když $|x - a|$ je blízko R. Proto je vhodné sáhnout k jinému vyjádření řešení. Často se osvědčuje vyjádření řešení ve tvaru jistého křivkového integrálu. (Jeden příklad jsme již poznali v kap. IV, věta 36.)

V této kapitole se budeme zabývat jistou třídou rovnic, které mají v $\boldsymbol{E}$ jediný singulární bod, a v něm splňují Fuchsovu podmínku; řešení těchto rovnic budeme hledat právě ve tvaru křivkových integrálů.

§ 1

Řešení Laplaceových rovnic křivkovými integrály

Budeme vyšetřovat rovnici (Laplaceovu)

$$L(y) = 0\,, \quad \text{kde} \quad L(y) = (a_0 x + b_0)\, y^{(n)} + \tag{1}$$

$$+ (a_1 x + b_1)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_n x + b_n)\, y\,, \quad a_j, b_j \in \boldsymbol{E}\,, \quad |a_0| + |b_0| > 0$$

(aby to byla rovnice n-tého řádu).

Všechny body v konečnu jsou obyčejné, až snad na bod $-b_0/a_0$, když $a_0 \neq 0$; v tomto bodě je zřejmě splněna Fuchsova podmínka; v bodě ∞ nemusí být splněna.

Hledejme řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y(x) = \int_{\varphi;\mathscr{E}} U(z)\, e^{xz}\, \mathrm{d}z\,, \tag{2}$$

kde φ je prozatím křivka s konečnou délkou: $\varphi(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, $\varphi(t_1) = \alpha$, $\varphi(t_2) = \beta$, U je analytická funkce, $\mathscr{E}$ jeden její element o středu α, který lze holomorfně pokračovat podél φ. Rozdělíme-li vhodně $\langle t_1, t_2 \rangle$ na konečný počet intervalů, jak to bylo vylíčeno v § 1, kap. III (str. 58), a užijeme-li na každý z nich věty 158 z Černého (str. 273), vidíme, že $y(x)$ je holomorfní v E (tedy celistvá funkce),

$$y^{(k)}(x) = \int_{\varphi} U(z)\, e^{xz} z^k\, \mathrm{d}z$$

(vynecháváme pro stručnost symbol $\mathscr{E}$), a tedy

$$\mathsf{L}(y) = \int_{\varphi} U(z)\, e^{xz}(x\, P(z) + Q(z))\, \mathrm{d}z\,, \tag{3}$$

kde

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\,, \quad Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n\,.$$

Abychom se zbavili činitele x při $P(z)$, integrujeme per partes (rozepište si podle definice):

$$\int_{\varphi} e^{xz} x\, P(z)\, U(z)\, \mathrm{d}z = \left[e^{xz}\, U(z)\, P(z)\right]_{\alpha}^{\beta} - \\ - \int_{\varphi} e^{xz} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(U(z)\, P(z))\, \mathrm{d}z\,.$$

Přitom první člen vpravo znamená toto: Nechť $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\alpha, u_1) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(\beta, u_2)$; potom ten člen znamená $e^{x\beta} u_2(\beta)\, P(\beta) - e^{x\alpha} u_1(\alpha)\, P(\alpha)$ (může tedy mít nenulovou hodnotu, i když $\beta = \alpha$). Dosazení do (3) dává

$$\mathsf{L}(y) = \left[e^{xz}\, U(z)\, P(z)\right]_{\alpha}^{\beta} + \\ + \int_{\varphi} e^{xz}\left(U(z)\, Q(z) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(U(z)\, P(z))\right) \mathrm{d}z\,. \tag{4}$$

Výraz se zjednoduší, bude-li U takové, aby

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(UP) = UP \,.\, \frac{Q}{P}\,. \tag{5}$$

Předpokládejme, že P není nulový polynom (v tom případě bychom měli rovnici s konstantními koeficienty, kterou dovedeme řešit elementárním a zcela uspokojivým způsobem). Rovnici (5) řešíme obvyklým způsobem, tj. sestrojíme funkci f primitivní k $\frac{Q}{P}$ v nějakém okolí takového bodu z křivky φ, v němž je $P(z) \neq 0$, vytvoříme funkci e^f a funkci V získáme analytickým pokračováním. Vztah (5) má potom zřejmě řešení

$$U(z)\,P(z) = e^{V(z)}\,, \quad U(z) = e^{V(z)} \cdot \frac{1}{P(z)}\,. \tag{6}$$

Potom je podle (4)

$$\mathsf{L}(y) = \left[e^{xz + V(z)}\right]_\alpha^\beta \tag{7}$$

a půjde nám o to, volit φ tak, aby se pravá strana rovnala nule. φ musíme ovšem volit tak, aby neprocházela nulovými body polynomu P. Budeme se zabývat dále jen tím případem, že $a_0 \neq 0$ a P má jen jednoduché nulové body, tj.

$$P(z) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)\,, \quad a_0 \neq 0\,, \quad \alpha_j \neq \alpha_k \quad \text{pro} \quad j \neq k\,. \tag{8}$$

Rozklad na částečné zlomky dává

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - \alpha_k}\,, \quad A = \lim_{z \to \infty} \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{b_0}{a_0}\,. \tag{9}$$

Potom je (integrační konstantu vhodně volíme)

$$V(z) = Az + \sum_{k=1}^{n} A_k \log(z - \alpha_k) + \log a_0\,,$$

$$e^{V(z)} = a_0 e^{Az} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k}\,,$$

$$U(z) = e^{Az} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1}\,.$$

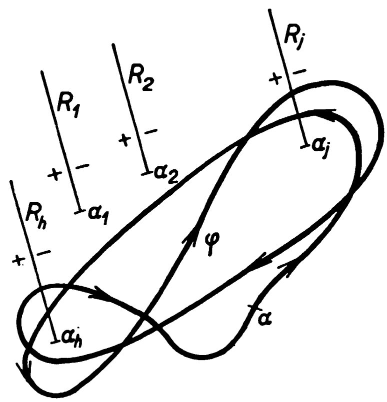
Máme tedy tento výsledek: Položíme-li

$$y(x) = \int_\varphi e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1}\, \mathrm{d}z\,, \tag{10}$$

je

$$\mathsf{L}(y) = a_0 \left[e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k}\right]_\alpha^\beta\,. \tag{11}$$

Přitom pravé strany budou jednoznačně určeny, zvolím-li určité jednoznačné větve $\arg(z - \alpha_k)$ podél φ a k nim příslušné hodnoty mocnin $z - \alpha_k$. Opakuji: φ může být libovolná křivka konečné délky, neprocházející body $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Jde nyní o to, zvolit φ tak, aby se pravá strana v (11) rovnala nule. Jedna možnost je tato (pro $n > 1$): Veďme z bodů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ polopřímky $R_1, \ldots, R_n$, jež se v E neprotínají (např.



Obr. 12.

rovnoběžné a takové, aby každá z nich obsahovala jen jeden z bodů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). V jednoduše souvislé oblasti $\Omega = E - \bigcup_{k=1}^{n} R_k$ má součin

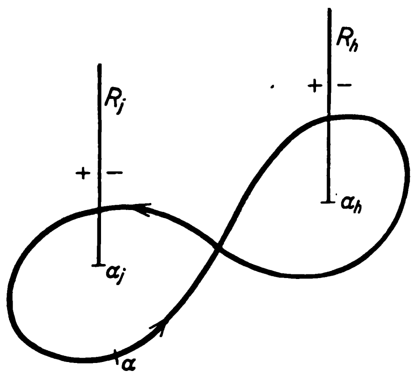
$$\prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k} \tag{12}$$

vesměs jednoznačné větve $f_1, f_2, \ldots$ (viz obr. 12). Přejde-li z řez R_k ze záporné strany na kladnou, přejde každá větev f_m v $e^{2\pi i A_k} f_m$ (čtenář mně jistě rozumí). Zvolme nyní dva indexy j, h ($j \neq h$; $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq h \leqq n$) a volme φ takto: počátek má v bodě $\alpha \in \Omega$; přejde jednou řez R_j ze záporné strany na kladnou, potom R_h rovněž ze záporné na kladnou, potom R_j z kladné strany na zápornou a konečně R_h z kladné strany na zápornou a vrátí se do bodu α; řezy R_m ($m \neq j$, $m \neq h$) neprotne. Je ihned vidět, že součin (12) se vrátí do bodu α s touž hodnotou, se kterou z něho vyšel, takže podle (11) je $L(y) = 0$. Poznamenejme: je-li $A_j - A_h = 0$ (nebo obecněji celé číslo), vyhovuje též křivka z obr. 13; je-li $A_j + A_h$ celé číslo, vyhovuje křivka z obr. 14.

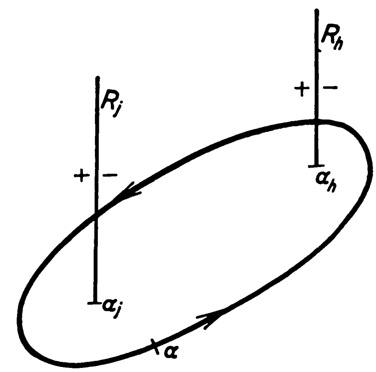
Tohoto postupu je leckdy možno použít. Ale čtenář sám nahlédne, že k nalezení úplného systému řešení tyto křivky asi sotva postačí. Především jsou tato řešení celistvé funkce a řešení naší rovnice sice nemusí, ale mohou mít v bodě $-\frac{b_0}{a_0}$ singularitu. Např. $xy''' + y'' = 0$ má řešení $1, x, x \log x$; kdežto $xy''' - y'' = 0$ má řešení $1, x, x^3$. Za druhé se může stát, že A_j, A_h jsou celá kladná, načež součin

$\prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1}$ má jednoznačné holomorfní větve v $E - \bigcup_{k=1}^{n} R_k$ (tj. řezy R_j, R_h jsou „zbytečné“ a integrál (10) se podle Cauchyovy věty rovná nule), takže dostáváme nulové řešení. Je tedy třeba hledat ještě jiné křivky φ.

Zavedeme křivky φ tohoto typu[1]): φ je spojitá ve svém definičním oboru $\langle t_1, t_2 \rangle$. Pro $t_1 < t < t_2$ je $\varphi(t)$ různá od ∞, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dále nechť křivka φ_{τ_1, τ_2} (tj. křivka



Obr. 13.



Obr. 14.

$\varphi(t)$, $\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2$) má konečnou délku, jestliže $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$. Pro některou hodnotu t_0 ($t_1 < t_0 < t_2$) zvolím hodnoty $\arg(\varphi(t_0) - \alpha_k)$ ($k = 1, \ldots, n$) a z nich vycházeje sestrojím jednoznačné větve $\arg(z - \alpha_k)$ podél „křivky“ $\varphi(t)$ ($t_1 < t < t_2$) (čtenář mně rozumí; do bodu t_1 (a podobně t_2) se nemusím dostat, ježto může být $\varphi(t_1) = \infty$ nebo $\varphi(t_1) = \alpha_k$). Tím je pro $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $t_1 + \varepsilon < t_2 - \eta$ určen integrál

$$y_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_{\varphi_{t_1+\varepsilon, t_2-\eta}} e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1} \, dz \tag{13}$$

a je

$$L(y_{\varepsilon,\eta}) = a_0 \left[e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k} \right]_{\varphi(t_1+\varepsilon)}^{\varphi(t_2-\eta)}. \tag{14}$$

Jestliže nyní integrál (13) konverguje pro $\varepsilon \to 0+$, $\eta \to 0+$ lokálně stejnoměrně vzhledem k x v jisté oblasti $M \subset E$ k jisté funkci $y(x)$, potom i jeho derivace konvergují lokálně stejnoměrně v M k derivacím funkce $y(x)$, tedy (14) konverguje k $L(y)$, a tedy

$$L(y) = a_0 \lim_{\varepsilon \to 0+, \eta \to 0+} \left[e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k} \right]_{\varphi(t_1+\varepsilon)}^{\varphi(t_2-\eta)}. \tag{15}$$

---

[1]) Viz také § 4, kap. IV (zejména str. 140).

Jestliže limita integrálu v (13) pro $\varepsilon \to 0+$, $\eta \to 0+$ existuje a je konečná, označíme ji $\int_\varphi$. Tedy ve vzorci (15) je

$$(16) \qquad y(x) = \int_\varphi e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1} \, dz .$$

Nás bude nejvíce zajímat případ, kdy

$$(17) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k} \right)_{z = \varphi(t_1 + \varepsilon)} = 0 ,$$

$$(18) \qquad \lim_{\eta \to 0+} \left(e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k} \right)_{z = \varphi(t_2 - \eta)} = 0 .$$

Celkem: Jestliže $y_{\varepsilon,\eta}(x)$ konverguje v jisté oblasti $M \subset E$ pro $\varepsilon \to 0+$, $\eta \to 0+$ lokálně stejnoměrně k funkci $y(x)$ (kterou potom označujeme integrálem (16)) a jestliže platí (17), (18) pro všechna $x \in M$, potom je $\mathbf{L}(y) = 0$ pro $x \in M$.

Vyšetřujme dva případy:

1) Nechť φ začíná v některém bodě α_k, třeba v α_1, a je v jistém intervalu $\langle t_1, t_1 + \Delta \rangle$ ($\Delta > 0$) lineární. Omezíme se na nějakou omezenou množinu $|x| < X_0$. V intervalu $\langle t_1, t_1 + \Delta \rangle$ je $\varphi(t) - \alpha_1 = c_1(t - t_1)$ s konstantním c_1. Pro $0 < \varepsilon < \Delta$ je[2])

$$\left| \int_{\varphi_{t_1, t_1 + \varepsilon}} e^{(x+A)z} (z - \alpha_1)^{A_1 - 1} \prod_{k=2}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1} \, dz \right| \leqq c_2 \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon} (t - t_1)^{\operatorname{Re} A_1 - 1} \, dt$$

(c_2 nezávisí na x, pokud $|x| < X_0$). A tento integrál – nezávislý na x – konverguje pro $\varepsilon \to 0+$ k nule, když $\operatorname{Re} A_1 > 0$. Ještě jednodušší je důkaz (17); stačí uvážit, že $(\varphi(t) - \alpha_1)^{A_1} \to 0$ pro $t \to t_1 +$, jestliže $\operatorname{Re} A_1 > 0$. (Uvažte, že odhady pro $(z - \alpha_1)^{A_1}$ závisely na tom, že $\arg (z - \alpha_1)$ byl konstantní; kdyby se φ nějak spirálovitě ovinovala okolo bodu $\alpha_1 = \varphi(t_1)$, nemusilo by to platit.)

Tedy: úsečka (lineárně parametrisovaná), vycházející z α_k nebo (obdobně) končící v bodě α_k, se nám „hodí", když $\operatorname{Re} A_k > 0$; konvergence v (17) nebo (obdobně) v (18) je lokálně stejnoměrná v E.

2) Nechť φ končí polopřímkou (lineárně parametrisovanou) $\varphi(t) = te^{i\lambda} + C$ ($C \in E$), $t \geqq 0$, „končící v bodě ∞" a neobsahující žádný bod α_k. Ježto zvolené větve $\arg (z - \alpha_k)$ mají na φ zřejmě konečné limity pro $t \to +\infty$ (tvaru $\lambda + 2\pi m_k$, m_k celé), je pro velká t součin (12) téhož řádu jako t^b, kde $b = \operatorname{Re} A_1 + \ldots + \operatorname{Re} A_n$ (beru kladnou hodnotu mocniny). Hlavní úlohu pro $t \to +\infty$ asi bude hrát exponenciální činitel

$$\exp \{(x + A)(te^{i\lambda} + C)\} = \exp \{(x + A) te^{i\lambda}\} \, . \, e^{C(x+A)} .$$

[2]) Existence integrálu nám — za jisté podmínky — vyjde z odhadu integrandu.

Druhý činitel je omezený, probíhá-li x omezenou množinu. Označme $\arg(x + A) = \psi = \psi(x)$ (ježto jde o jednoznačnou funkci, nezáleží na tom, kterou hodnotu argumentu vezmeme). Je

$$|\exp \{(x + A)\, te^{i\lambda}\}| = \exp \{|x + A|\, t \cos(\psi + \lambda)\}\,.$$

Zvolme δ, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ a omezme se na x taková, že

$$\delta < |x + A| < \frac{1}{\delta}\,, \quad \frac{1}{2}\pi - \lambda + \delta < \arg(x + A) < \frac{3}{2}\pi - \lambda - \delta\,; \tag{19}$$

je pak

$$\cos(\psi + \lambda) < \cos\left(\frac{1}{2}\pi + \delta\right) = -\sin\delta\,,$$

$$|\exp \{(x + A)\, te^{i\lambda}\}| < \exp(-t|x + A| \sin\delta) < \exp(-t\delta\sin\delta)\,; \tag{20}$$

stačí tedy odhadnout, zda výrazy (nezávislé na x)

$$\int_T^{+\infty} t^{b-n} \,.\, \exp(-t\delta\sin\delta)\, dt\,, \quad T^b \exp(-T\delta\sin\delta)$$

mají limitu 0 pro $T \to +\infty$. Ale to je zřejmé.

Ježto δ lze volit libovolně malé a konvergence je stejnoměrná v (19), je lokálně stejnoměrná v polorovině

$$\frac{1}{2}\pi - \lambda < \arg(x + A) < \frac{3\pi}{2} - \lambda \tag{21}$$

(konstrukci viz na obr. 15, kde je tato polorovina vyznačena šrafováním). Tedy polopřímka končící (nebo začínající) v ∞ se nám „hodí", ale jen pro x určité poloroviny, závislé na směru té polopřímky.

Zvolím nyní reálné číslo λ a najdu n řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ v polorovině (21); v příštím paragrafu dokážeme, že tvoří fundamentální systém (jsou to funkce holomorfní v této polorovině). Přitom y_k je určitým způsobem přiřazeno kořenu α_k; jistě stačí, když popíši y_1.

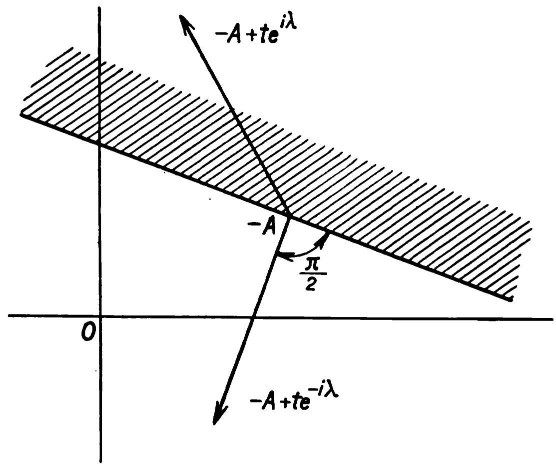
y_1 bude vyjádřeno integrálem

$$y_1(x) = \int_{\varphi_1} e^{(x+A)z} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1}\, dz \tag{22}$$

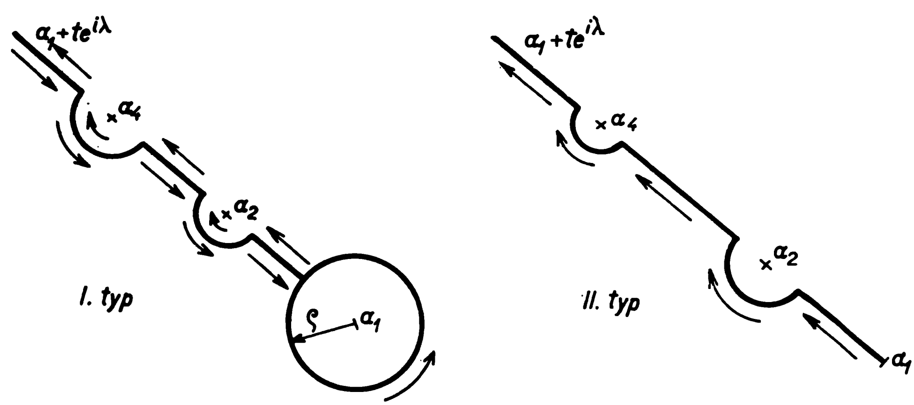
(v polorovině (21)) a jde o to, zvolit vhodně křivku φ_1. Volíme křivky dvojího typu.

I. typ. Sestrojím polopřímku $z = \alpha_1 + te^{i\lambda}$ ($t \geqq 0$). Zvolím $\varrho > 0$ tak malé, aby kruh $|z - \alpha_1| \leqq \varrho$ neobsahoval žádný z bodů $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dráhu φ_1 volím takto:

jdu napřed po naší polopřímce z ∞ do bodu $z = \alpha_1 + \varrho e^{i\lambda}$; potkám-li přitom některé z bodů $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, vyhnu se jim malými polokružnicemi. Potom proběhnu kružnici $z = \alpha_1 + \varrho e^{it}$, $\lambda - 2\pi \leqq t \leqq \lambda$, a vrátím se po naší polopřímce (modifikované popříp. těmi polokružnicemi) do bodu ∞; viz obr. 16. Přitom volíme ty polokružnice tak malé, aby neměly společných bodů mezi sebou ani s kružnicí o středu α_1 a poloměru ϱ.



Obr. 15.



Obr. 16.

Je-li Re $A_1 > 0$, mohu volit za φ_1 také dráhu **II. typu**, která jde z α_1 po polopřímce $\alpha_1 + te^{i\lambda}$ do ∞ (modifikované popříp. těmi polokružnicemi).

Aby integrál (16) byl jednoznačně určen, je nutno určit větve $\arg(z - \alpha_k)$ podél φ_1. Především volíme $\arg(z - \alpha_1)$ takto: Při dráze II. typu budiž na přímých částech dráhy $\arg(z - \alpha_1) = \lambda$. Při dráze I. typu volím $\arg(z - \alpha_1)$ tak, aby při proběhnutí kružnice $z = \alpha_1 + \varrho e^{it}$ $(\lambda - 2\pi \leqq t \leqq \lambda)$ vzrostl z hodnoty $\lambda - 2\pi$ na λ. Tedy na přímých částech, jdoucích z ∞ do $\alpha_1 + \varrho e^{i\lambda}$, je $\arg(z - \alpha_1) = \lambda - 2\pi$, na přímých částech, jdoucích od $\alpha_1 + \varrho e^{i\lambda}$ do ∞, je $\arg(z - \alpha_1) = \lambda$.

Jde ještě o hodnotu součinu $\sigma = \prod_{k=2}^{n} (z - \alpha_k)^{A_k - 1}$. Zřejmě můžeme (sestrojením vhodných polopřímek $R_2, \ldots, R_n$ z bodů $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ do ∞) sestrojit jednoduše souvislou oblast $\Omega = E - \bigcup_{k=2}^{n} R_k$, která obsahuje celou křivku φ_1 a (v případě I. typu) též celý kruh $|z - \alpha_1| \leqq \varrho$. Součin σ má vesměs jednoznačné větve v Ω, lišící se jenom konstantními nenulovými činiteli. K určení jeho hodnot na φ_1 stačí tedy např. zvolit určitou hodnotu v bodě α_1, tj. určitou hodnotu P součinu $P = \prod_{k=2}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k)^{A_k - 1}$, k čemuž stačí volit hodnotu $\arg(z - \alpha_k)$ v bodě $z = \alpha_1$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$. Tím je integrál v (16) úplně určen.

Poznamenejme: Je-li A_1 celé kladné, je také $(z - \alpha_1)^{A_1 - 1}$ holomorfní v Ω. Z toho podle Cauchyovy věty snadno plyne, že integrál přes křivku φ_1 prvního typu se rovná nule, dostáváme tedy nulové řešení. Proto v tomto případě nebudeme užívat dráhy I. typu.

Je snad zbytečné popisovat dráhu φ_k, příslušnou k bodu α_k (na obr. 16 pište α_k místo α_1; polokružnice se týkají bodů α_h, $h \neq k$).

Máme tedy pro každé $k = 1, \ldots, n$ k dispozici aspoň jednu křivku φ_k:

1. *Je-li* $\operatorname{Re} A_k > 0$, A_k *necelé, mohu volit podle libosti* φ_k *I. nebo II. typu.*
2. *Je-li* A_k *celé kladné, volím* φ_k *II. typu.*
3. *Je-li* $\operatorname{Re} A_k \leqq 0$, *volím* φ_k *I. typu.*

Tak dostávám n řešení $y_k(x) = \int_{\varphi_k} \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$; v příštím paragrafu dokážeme, že jsou lineárně nezávislá.

Poznamenejme dále, že poloměry polokružnic a v případě I. typu též poloměr ϱ můžeme dále zmenšovat, aniž se tím změní hodnota integrálu (to plyne snadno z Cauchyovy věty).

Konečně poznamenejme: kdybychom volili jiné větve $\arg(z - \alpha_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ podél φ_k, změnil by se integrál $y_k(x)$ pouze o konstantní nenulový činitel.

Cvičení. Pro rovnici $xy'' - (x + 2)\,y = 0$ najdete

$$A = 0\,; \quad \alpha_1 = 1\,, \quad A_1 = -1\,; \quad \alpha_2 = -1\,, \quad A_2 = 1\,;$$

$y_k(x) = \int_{\varphi_z} e^{xz}(z - 1)^{-2}\,dz$. Jak zvolíte φ_1, φ_2, aby y_1, y_2 dávaly řešení v polorovině

$$\text{a) } \operatorname{Im} x > 0\,; \quad \text{b) } \operatorname{Re} x > 0\,; \quad \text{c) } \frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{4\pi}{3}$$

(volíte ovšem φ_2 II. typu).

§ 2

Asymptotické rozvoje řešení Laplaceovy rovnice

Rovnici (1) můžeme řešit jako rovnici Fuchsova typu v bodě $-A$; dostali bychom rozvoje platné v celém prstenci $P(-A, \infty)$. V § 1 jsme dostali řešení, platné pouze v polorovině, mající bod $-A$ na hranici. Proč jsme tedy vůbec řešení (22) a další řešení $y_2, \ldots, y_n$ sestrojovali? V řešení podle Fuchsovy metody vystupují mocninné řady o středu $-A$ a poloměru konvergence $+\infty$. Neredukují-li se tyto řady na polynomy, konvergují pro velká $|x + A|$ velmi špatně a obyčejně se nehodí k vyšetřování řešení rovnice (1) pro velká $|x + A|$. Význam řešení z předešlého paragrafu je právě v tom, že připouštějí tzv. asymptotické rozvoje, které dovolují jejich studium právě pro velké hodnoty $|x + A|$. Tyto asymptotické rozvoje nyní odvodíme (s jejich pomocí také nakonec zjistíme, že řešení $y_1, \ldots, y_n$ z předešlého paragrafu tvoří fundamentální systém). Kdo dosud nic neslyšel o asymptotických rozvojích, může si přečíst např. elementární výklad v **J II**, kap. XV, § 1, str. 585–591.

Vedeni odhady (20), zvolíme δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$ a omezíme x na oblast

$$|x + A| > \delta\,, \quad \frac{\pi}{2} - \lambda + \delta < \arg(x + A) < \frac{3\pi}{2} - \lambda - \delta\,. \tag{23}$$

Do integrálu (22) zavedu novou integrační proměnnou $Z = z - \alpha_1$ (ale hned zase píši z místo Z). Dostanu

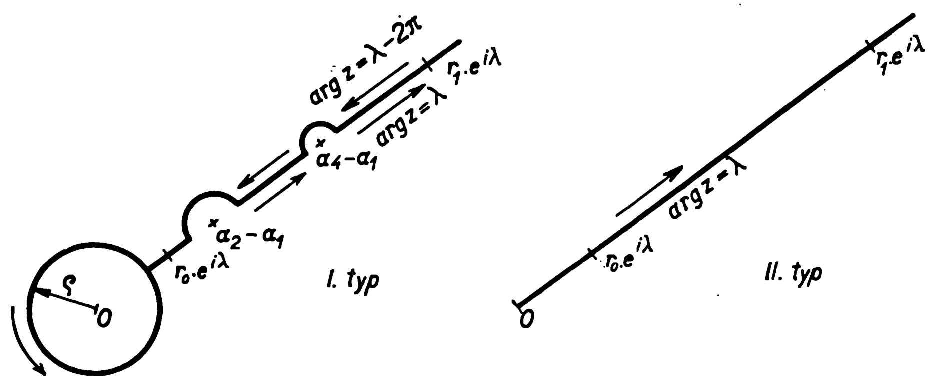
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{(x+A)\alpha_1}\, I(x)\,, \\ I(x) &= \int_{\psi_1} e^{(x+A)z} z^{A_1 - 1} f(z)\, dz\,, \\ f(z) &= \prod_{k=2}^{n} (z + \alpha_1 - \alpha_k)^{A_k - 1}\,, \quad f(0) = b_{10}\,, \end{aligned} \tag{24}$$

kde smysl tohoto zápisu uvedeme přesně níže. Přitom dráha ψ_1 vzniká z φ_1 posunutím (viz obr. 17). Zvolme dále body $r_0 e^{i\lambda}$, $r_1 e^{i\lambda}$ $(0 < r_0 < r_1 < +\infty)$ tak, aby $r_0 \leqq \frac{1}{2}|\alpha_1 - \alpha_k|$ pro všechna $k = 2, \ldots, n$ a aby část integrační dráhy „mezi" body $r_0 e^{i\lambda}$, $r_1 e^{i\lambda}$ obsahovala všechny eventuální polokružnice o středech $\alpha_k - \alpha_1$ $(k > 1)$; z obr. 17 je jistě všechno jasně vidět. Při křivce I. typu volím ještě $\varrho < r_0$. Rozdělím

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)\,, \tag{25}$$

kde I_1 je integrál přes tu část ψ_1, kde $|z| \leqq r_0$, I_2 je integrál přes tu část, kde $r_0 \leqq$

$\leqq |z| \leqq r_1$, I_3 je integrál přes tu část, kde $|z| \geqq r_1$. Odhadněme I_3. Znaky $c_1, c_2, \ldots$ budu značit kladná čísla, závislá jen na operátoru $\mathbf{L}$ (tj. na a_j, b_j), na λ a na volbě čísel $b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{n0}$, kde b_{j0} je zvolená hodnota součinu $\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\alpha_j - \alpha_k)^{A_k - 1}$. Kladná čísla, závislá ještě na dalších parametrech, např. u, v, budu značit $c_1(u, v)$, $c_2(u, v)$



Obr. 17.

atd. Čísla r_0, r_1 lze zvolit, jakmile je dáno $\mathbf{L}$, proto závislost na r_0, r_1 není třeba vypisovat. V I_3 je, jak jsme již zjistili (píši $z = te^{i\lambda}$, $t \geqq r_1$),

$$|\exp((x + A) z)| < \exp(-|x + A| t \sin \delta),$$

což je nejvýše

$$\exp\{\tfrac{1}{2}(-|x + A| r_1 \sin \delta)\} \exp\{\tfrac{1}{2}(-|x + A| t \sin \delta)\},$$

takže

$$|I_3(x)| < c_1(\delta) . \exp(-c_2(\delta)| x + A|) . \int_{r_1}^{\infty} e^{-1/2 t \delta \sin \delta} t^{c_3} \, dt,$$

tedy

$$(26) \qquad |I_3(x)| < c_4(\delta) \, e^{-c_2(\delta)|x - A|}.$$

Odhadněme I_2. Polokružnice volme tak malé, aby na nich bylo $z = |z| \, e^{i\mu}$, kde $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{2} \delta$, načež podle (23) je

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} < \arg(x + A) + \mu < \frac{3\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$$

a podobně jako v I_3 dostaneme

$$\left|\exp\{|x + A|\, z\}\right| < \exp\left\{-|z| \,.\, |x + A| \,.\, \sin\frac{1}{2}\delta\right\}$$

na dráze integrálu I_2. Na této dráze je $\left|z^{A_1 - 1} f(z)\right| < c_5(\delta)$, délka integrační dráhy je menší než $\pi r_1 = c_6$, takže

$$|I_2(x)| < c_7(\delta)\, e^{-c_8(\delta)|x+A|}\,. \tag{27}$$

Integrační dráhu v I_1 označme χ. Ježto $r_0 \leqq \frac{1}{2}|\alpha_k - \alpha_1|$ pro $k = 2, \ldots, n$, lze každou větev funkce $f(z) = \prod_{k=2}^{n} (z + \alpha_1 - \alpha_k)^{A_k - 1}$ rozvinout v mocninnou řadu o středu 0, konvergentní pro $|z| < 2r_0$. Speciálně námi zvolenou větev lze rozvinout v řadu

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{1j} z^j\,, \tag{28}$$

kde $b_{10} = f(0)$ je námi zvolená hodnota součinu $\prod_{k=2}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k)^{A_k - 1}$. Ostatní b_{1j} dostaneme takto:

$$f(z) = b_{10} \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{z}{\alpha_1 - \alpha_k}\right)^{A_k - 1},$$

kde součin má pro $z = 0$ mít hodnotu 1; stačí tedy rozvinout v binomickou řadu

$$\left(1 + \frac{z}{\alpha_1 - \alpha_k}\right)^{A_k - 1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{A_k - 1}{m} \frac{z^m}{(\alpha_1 - \alpha_k)^m}$$

a vynásobit.

Zvolme nyní celé číslo $q \geqq 0$ a rozdělme řadu (28) na „počátek“ a „zbytek“:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{q} b_{1j} z^j + g(z)\,, \tag{29}$$

kde

$$|g(z)| \leqq c_9(q)\, |z|^{q+1} \quad \text{pro} \quad |z| \leqq r_0\,. \tag{30}$$

Abychom se nemusili stále starat o indexy, smluvme se, že budeme (aspoň většinou) psát c, $c(\delta)$, $c(q)$ místo c_m, $c_m(\delta)$, $c_m(q)$, ... Čtenář si jenom musí uvědomit, že např. $c(\delta)$ může na různých místech znamenat různá $c_m(\delta)$ (bude jich jen konečný počet).

Odhadněme napřed

$$K_1(x) = \int_{\chi} e^{(x+A)z} z^{A_1 - 1}\, g(z)\, \mathrm{d}z\,.$$

Za poloměr ϱ vezměme číslo $\varrho = \dfrac{1}{|x + A|}$ (v případě I); to je dovoleno, pokud vyjde $\varrho < r_0$, tj. pokud

$$|x + A| > \frac{1}{r_0} = c\,. \tag{31}$$ [3])

Potom na kružnici $|z| = \varrho$ je

$$\left|e^{(x+A)z}\right| \leqq e\,, \quad \left|z^{A_1-1}\, g(z)\right| \leqq c(q)\, \frac{1}{|x + A|^{\operatorname{Re}A_1+q}}\,,$$

délka kružnice je $\dfrac{2\pi}{|x + A|}$, takže absolutní hodnota integrálu přes kružnici je menší než $c(q)\,|x + A|^{-\operatorname{Re}A_1-q-1}$. Integrál přes rovnou část dráhy je v absolutní hodnotě nejvýše

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &2\int_{\varrho}^{r_0} \exp\{-|x + A|\, t \sin \tfrac{1}{2}\delta\}\,.\, c(q)\, t^{\operatorname{Re}A_1+q}\, \mathrm{d}t \leqq \\ &\leqq 2|x + A|^{-\operatorname{Re}A_1-q-1}.\int_1^{+\infty} \exp(-r \sin \tfrac{1}{2}\delta)\,.\, c(q)\, r^{\operatorname{Re}A_1+q}\, \mathrm{d}r \leqq \\ &\leqq c(q, \delta)\, |x + A|^{-\operatorname{Re}A_1-q-1}\,. \end{aligned}\right.$$

V případě II nemáme integrál přes kružnici; integrál přes přímou část se odhadne jako v (32), ale meze jsou teď 0, $+\infty$ místo 1, $+\infty$. Ježto v tomto případě je $\operatorname{Re} A_1 > 0$, neruší dolní mez 0, a tedy máme obdobný odhad. Ježto

$$c(\delta)\, e^{-c(\delta)|x+A|} < \frac{c(q, \delta)}{|x + A|^{\operatorname{Re}A_1+q+1}}$$

pro $|x + A| > \dfrac{1}{r_0}$, máme podobný odhad jako pro $I_2(x)$, $I_3(x)$ (viz (26), (27)). Tedy: v oboru (23), (31) je

$$I(x) = \sum_{j=0}^{q} b_{1j} \int_{\chi} e^{(x+A)z} z^{A_1+j-1}\, \mathrm{d}z + \Delta_1(x)\,,$$

kde

$$|\Delta_1(x)| \leqq \frac{c(q, \delta)}{|x + A|^{\operatorname{Re}A_1+q+1}}\,.$$

---

[3]) Tento předpoklad nám příliš nevadí: náš konečný výsledek bude mít význam jen pro velké hodnoty $|x + A|$. Viz také pozn. na str. 189.

Zjistěme, jakou chybu uděláme, když dráhu χ „protáhneme do nekonečna", tj. když ji nahradíme drahou γ podobnou jako ψ_1, pouze už tam nemusím brát žádné polokružnice. K tomu cíli stačí jako v I_3 (viz str. 185) odhadnout pro $j = 0, 1, \ldots, q$ integrály

$$c(\delta, j) \exp\left(-|x + A| \frac{r_0}{2} \sin\delta\right) \int_{r_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} t\delta \sin\delta\right) . t^{\mathrm{Re}A_1 - 1 + j} \, dt \leqq$$

$$\leqq c(\delta, j) \exp\left(-c(\delta) |x + A|\right) .$$

Jestliže za $c(\delta, q)$ vezmu největší z čísel $c(\delta, j)$ (pro $j = 0, 1, \ldots, q$), dostanu odhad téhož druhu jako dříve. Tedy konečně

(33) $$I(x) = \sum_{j=0}^{q} b_{1j} \int_{\gamma} e^{(x+A)z} z^{A_1 + j - 1} \, dz + \Delta_2(x) ,$$

kde $|\Delta_2(x)| \leqq c(q, \delta) |x + A|^{-\mathrm{Re}A_1 - q - 1}$ pro x v oboru (23) (viz poznámku [3])). Integrály přes křivku γ jsou známé integrály, které se dají vyjádřit hodnotami funkce Γ.

Označme dráhu γ podrobněji $\gamma(\lambda)$, abychom vyznačili jednak směr polopřímky, jednak větev arg z, které užíváme. Poznamenejme, že na polopřímce směřující do ∞ klademe arg $z = \lambda$; v případě I klademe na polopřímce vycházející z bodu ∞ arg $z = \lambda - 2\pi$. Jde tedy o integrály

(34) $$K(x, s, \lambda) = \int_{\gamma(\lambda)} e^{(x+A)z} z^{s-1} \, dz ;$$

při dráze II. typu je přitom Re $s > 0$ (ježto Re $A_1 > 0$). Zavedeme novou integrační proměnnou ζ:

(35) $$(x + A) z = -\zeta .$$

Abychom mohli psát $(x + A)^a z^a = (-1)^a \zeta^a$, musíme volit arg ζ a arg (-1) tak, aby arg $(x + A)$ + arg z = arg (-1) + arg ζ. Volme arg $(-1) = \pi$, takže $(-1)^a = e^{\pi i a}$.

Položme $\alpha = \arg(x + A) + \lambda - \pi$, takže $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ a

(36) $$K(x, s, \lambda) = \frac{e^{\pi i s}}{(x + A)^s} \int_{\gamma(\alpha)} e^{-\zeta} \zeta^{s-1} \, d\zeta .$$

(Že se v příp. I změnil poloměr kružnice, nemá vliv na hodnotu integrálu.)

Dráhu $\gamma(\alpha)$ označme ještě $\gamma(\alpha; I)$, popříp. $\gamma(\alpha; II)$, podle toho, o který typ jde (viz str. 183). Z § 3, kap. IV (viz str. 141–3) použijeme následující:

Lemma 1. *Nechť* $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *Potom platí předně* $\int_{\gamma(\alpha,I)} e^{-\zeta}\zeta^{s-1}\,d\zeta = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-s)}\,e^{-\pi i s}$ *pro každé* $s \in E$.

Za druhé

$$\int_{\gamma(\alpha,II)} e^{-\zeta}\zeta^{s-1}\,d\zeta = \Gamma(s) \quad \textit{pro} \quad \operatorname{Re} s > 0\,.$$

Na základě tohoto lemmatu určíme integrály v (36). Dosadíme-li ještě do (24) dostaneme tento výsledek:

Budiž λ *reálné,* $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$, q *celé,* $q \geqq 0$. *Potom v oboru*

$$-\lambda + \frac{\pi}{2} + \delta < \arg(x + A) < -\lambda + \frac{3\pi}{2} - \delta\,, \quad |x + A| > \delta$$

platí: Je-li y_1 *dáno integrálem* (24) *s drahou I. typu, je*

$$y_1(x) = e^{(x+A)\alpha_1}\,\frac{2\pi i}{(x+A)^{A_1}}\left(\sum_{j=0}^{q}\frac{b_{1j}}{\Gamma(1-A_1-j)}\,\frac{1}{(x+A)^j} + \Delta\right); \tag{37}$$

je-li $\operatorname{Re} A_1 > 0$ *a je-li* y_1 *dáno integrálem* (24) *s drahou II. typu, je*

$$y_1(x) = e^{(x+A)\alpha_1}\,\frac{e^{\pi i A_1}}{(x+A)^{A_1}}\left(\sum_{j=0}^{q}\frac{(-1)^j\,b_{1j}\,\Gamma(A_1+j)}{(x+A)^j} + \Delta\right), \tag{38}$$

kde v obou případech je

$$|\Delta| < \frac{c(\delta, q)}{|x + A|^{q+1}}\,. \tag{39}$$

Poznámka 1. Uvažme ještě, že podmínku (31) lze vynechat i z těchto důvodů: Je-li totiž $\delta < \frac{1}{r_0}$, jsou $I(x)$ a rovněž $\sum_{j=0}^{q}\ldots$ v (33) holomorfní funkce v uzavřeném omezeném oboru

$$\delta \leqq |x + A| \leqq \frac{1}{\mu_0}\,, \quad \frac{\pi}{2} - \lambda + \delta \leqq \arg(x + A) \leqq \frac{3\pi}{2} - \lambda - \delta\,,$$

které závisí jen na zvolené hodnotě b_{10}, λ, q a na tvaru rovnice (viz lemma 1, (29), (30)). Tedy je v našem oboru podle (33) $|\Delta_2(x)| < c_1(\delta, q)$.

Za druhé je v našem oboru

$$|x + A|^{\operatorname{Re} A_1 + q + 1} < c_2(q)\,,$$

a tedy i

$$|\Delta_2(x)| < c_1(\delta, q)\, c_2(q)\, |x + A|^{-\mathrm{Re} A_1 - q - 1} .$$

Podobné vzorce platí i pro ostatní y_k; místo A_1, α_1 piš A_k, α_k a místo b_{1j} se vyskytují b_{kj}, které se určí z rozvoje funkce

$$f_k(z) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} (z + \alpha_k - \alpha_m)^{A_m - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{kj} z^j ,$$

přičemž je nutno zvolit určitou hodnotu $b_{k0} = f_k(0) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} (\alpha_k - \alpha_m)^{A_m - 1}$ (37), (38) jsou hledané asymptotické rozvoje pro y_1; podobně pro $y_2, \ldots, y_n$.

Všimněme si několika okolností.

1. Odhad (39) má ve jmenovateli $|x + A|^{q+1}$, kdežto v $\sum_{j=0}^{q} \ldots$ se ve jmenovateli vyskytuje $x + A$ nejvýše s mocnitelem q; v tom je význam asymptotických rozvojů. K numerickému využití těchto rozvojů by bylo ovšem třeba skutečně nalézt přípustnou hodnotu $c(\delta, q)$ v (39). Skutečně se v jednotlivých speciálních případech (např. pro Besselovu rovnici) dají nalézt hodnoty $c(\delta, q)$ použitelné v numerických výpočtech. V obecném případě námi vyšetřovaném by asi po složitých výpočtech vyšly málo použitelné hodnoty.

2. Součet $\sum_{j=0}^{q} \ldots$ je úsekem jisté nekonečné řady, ale tato řada je v nejzajímavějších případech divergentní (to souvisí s tím, že $c(\delta, q)$ závisí na q). Přesto její úseky mohou pro velké hodnoty $|x + A|$ dávat velmi užitečné výsledky.

3. Součet $\sum_{j=0}^{q} \ldots$ nezávisí na λ; v celém vzorci (37) nebo (38) závisí na λ jen výraz $(x + A)^{A_1}$, ježto λ určuje příslušnou větev $\arg(x + A)$.

Dokážeme nyní, že $y_1, \ldots, y_n$ *jsou lineárně nezávislé.* Připomínám: je-li A_k celé kladné, užívám při y_k dráhy II. typu.

Zvolme $q = 0$. Není-li A_1 celé kladné, je $\dfrac{b_{10}}{\Gamma(1 - A_1)} \neq 0$; je-li $\mathrm{Re}\, A_1 > 0$, je $b_{10}\, \Gamma(A_1) \neq 0$. Tedy je

$$y_1(x) = \frac{e^{(x+A)\alpha_1}}{(x + A)^{A_1}} \left(m_1 + o(1)\right), \tag{40}$$

kde $m_1 \neq 0$ a $o(1)$ značí funkci, která konverguje k nule, když $(x + A) \to \infty$ v oboru (23). Podobně pro y_k $(k = 2, \ldots, n)$ s A_k, α_k, m_k $(m_k \neq 0)$ místo A_1, α_1, m_1. Z (40) je vidět, že v oboru (23) je $y_k(x) \neq 0$ pro dosti velké $|x + A|$.

Myšlenka důkazu bude tato: Zvolíme vhodně polopřímku $\arg(x + A) = \vartheta$, tj. $x + A = re^{i\vartheta}$ $(r \geqq 0)$ tak, že se funkce y_k na této polopřímce řádově tak silně navzájem liší (pro velká r), že mezi nimi nemůže platit netriviální lineární relace. ϑ ovšem volíme v intervalu $\left(\frac{\pi}{2} - \lambda + \delta, \frac{3\pi}{2} - \lambda - \delta\right)$. Na polopřímce je $|(x + A)^{A_k}|$ téhož řádu jako $r^{\operatorname{Re} A_k}$. Dále je $\operatorname{Re}((x + A)\,\alpha_k) = r \operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\alpha_k)$.

Ukážeme nyní, že ϑ lze zvolit tak, aby čísla

$$\operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\alpha_k) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

byla navzájem různá. Pro $h \neq k$ je $\alpha_h - \alpha_k = r_{hk} \exp(i\lambda_{hk})$, $r_{hk} > 0$, λ_{hk} reálné, takže

$$\operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\alpha_h) - \operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\alpha_k) = r_{hk} \cos(\vartheta + \lambda_{hk})\,. \tag{41}$$

Ale funkce $\cos(\vartheta + \lambda_{hk})$ má (jakožto funkce ϑ) nejvýše jeden nulový bod v intervalu $\left(\frac{\pi}{2} - \lambda + \delta, \frac{3\pi}{2} - \lambda - \delta\right)$. Tedy lze vskutku volit ϑ v tomto intervalu tak, aby všechny výrazy (41) s $h \neq k$ byly různé od nuly. Pro větší přehlednost přečíslujeme α_k tak, aby

$$\operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\alpha_k) - \operatorname{Re}(e^{i\vartheta}\alpha_h) = B_{hk} > 0$$

pro $h > k$. Pro $h > k$, $x + A = re^{i\lambda}$, $r \to +\infty$ je $\left|\frac{y_h(x)}{y_k(x)}\right|$ téhož řádu (viz (40)) jako $e^{-rB_{h,k}} \cdot r^{\operatorname{Re}(A_k - A_h)}$, a tedy $\frac{y_h(x)}{y_k(x)} \to 0$ pro $r \to +\infty$. Předpokládejme, že platí netriviální relace $c_1\, y_1(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) = 0$, a budiž k nejmenší index j, pro nějž $c_j \neq 0$. Potom pro $x + A = re^{i\vartheta}$ a pro dosti velká r je $y_k(x) \neq 0$, tedy

$$c_k + c_{k+1} \frac{y_{k+1}(x)}{y_k(x)} + \ldots + c_n \frac{y_n(x)}{y_k(x)} = 0\,;$$

limitní přechod $r \to +\infty$ dává $c_k = 0$, což je hledaný spor.