DODATEK I

NEKONEČNÉ ŘADY. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE A JEJÍ ZOBECNĚNÍ. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

§ 1. Integrální kriterium konvergence.[1]) **Věta 243.** *Buďiž k celé číslo. Buďiž f funkce jedné proměnné, konečná, nerostoucí a nezáporná v intervalu $\langle k, +\infty)$. Potom řada $\sum_{m=k}^{\infty} f(m)$ konverguje tehdy a jen tehdy, existuje-li vlastní limita*

$$(1)\qquad \lim_{x\to+\infty} \int_k^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Důkaz. Podle **JI**, kap. IX, § 2, příkl. 2 nebo cvič. 13 na konci kap. II má integrál (Riemannův)

$$(2)\qquad F(x) = \int_k^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

smysl pro každé $x \geqq k$. Pro $k \leqq x_1 < x_2$ je

$$F(x_2) = \int_k^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqq F(x_1)$$

(podle věty 27 v **JI**, ježto $f(t) \geqq 0$). Tedy je F neklesající v $\langle k, +\infty)$, a tedy (viz kap. V, § 5, pozn. 2 nebo **JI**, kap. I, § 4) existuje vlastní nebo nevlastní limita

$$(3)\qquad L = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_k^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\geqq k} F(x)\,.$$

Je zřejmo, že posloupnost $F(k)$, $F(k+1)$, $F(k+2)$ je neklesající a má též limitu L. Pro celé $m \geqq k$ jest (podle věty 16 v **JI**)

$$f(m+1) \leqq \int_m^{m+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqq f(m)$$

a tedy pro celé $n \geqq k$

$$(4)\qquad \sum_{m=k}^{n} f(m) \geqq \sum_{m=k}^{n} \int_m^{m+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqq \sum_{m=k+1}^{n+1} f(m)\,,$$

[1]) V tomto paragrafu jde o konečná reálná čísla a funkce.

t. j.

$$\sum_{m=k}^{n} f(m) \geqq F(n+1) \geqq \sum_{m=k}^{n+1} f(m) - f(k)\,.$$

Odtud plyne: Posloupnost částečných součtů

$$\sum_{m=k}^{n} f(m) \quad (n = k, k+1, k+2, \ldots)$$

je omezená. (t. j. $\sum_{m=k}^{\infty} f(m)$ je — jakožto řada s nezápornými členy — konvergentní) tehdy a jen tehdy, je-li posloupnost $F(k)$, $F(k+1), \ldots$ omezená, t. j. je-li [viz (3)] L konečné číslo. Tím je důkaz hotov.

Příklad 1. Budiž $\alpha > 0$; pro $\alpha \neq 1$ je $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)$, což má pro $x \to +\infty$ limitu vlastní, je-li $\alpha > 1$, ale nevlastní, je-li $\alpha < 1$. Pro $\alpha = 1$ máme $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$. Tedy: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$ (pro $\alpha \leqq 0$ je divergence zřejmá).

Příklad 2. Podobně dostanete: Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg^\alpha n}$ je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$. Vidíte, že použití věty 243 je velmi snadné v mnoha případech.

Příklad 3. Nerovnosti (4) platí pro každou nerostoucí funkci f. Odtud na př. pro $f(x) = x^{-1}$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \geqq \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m} - \lg\frac{n+1}{k} \geqq 0\,, \tag{5}$$

čímž je odhadnut součet $\sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m}$ — tím přesněji, čím větší je k.[2]) Nebo pro $f(x) = x^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$

$$k^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha} \geqq \sum_{m=k}^{n} m^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \geqq 0\,.$$

[2]) Je-li $n - k$ velmi velké, byl by přímý výpočet součtu velmi obtížný.

Ježto zde jde o konvergentní řadu, dostaneme pro $n \to +\infty$

$$0 \leqq \sum_{m=k}^{\infty} m^{-\alpha} - \frac{1}{(\alpha - 1) k^{\alpha-1}} \leqq k^{-\alpha},$$

t. j. máme odhadnut zbytek řady $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ [po $(k-1)$-vém členu] s chybou nejvýše $k^{-\alpha}$ Můžeme tedy užíti těchto nerovností též k numerickému výpočtu konečných součtů [viz (5)] nebo nekonečných řad. Vydatnější methody poznáme v II. díle Integrálního počtu.

§ 2. Eulerova methoda sčítání nekonečných řad.[3]) Budiž dána řada

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{6}$$

o níž předpokládám, že je konvergentní pro určitou hodnotu $x \neq 1$; tuto hodnotu x podržíme. Označme $\Delta a_0 = a_0 - a_1$, obecně $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$. Dále $\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$. Obecně definujme indukcí $\Delta^n a_k = \Delta^{n-1} a_k - \Delta^{n-1} a_{k+1}$. Úplnou indukcí ihned zjistíte, že

$$\Delta^n a_k = a_k - \binom{n}{1} a_{k+1} + \binom{n}{2} a_{k+2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n}. \tag{7}$$

Pro větší jednotnost označení pišme ještě $\Delta^0 a_k = a_k$, $\Delta^1 a_k = \Delta a_k$. Z (6) plyne

$$(1 - x) S = \Delta^0 a_0 - \Delta^1 a_0 x - \Delta^1 a_1 x^2 - \Delta^1 a_2 x^3 - \ldots,$$

$$S = \frac{\Delta^0 a_0}{1 - x} - S_1, \quad \text{kde } S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^1 a_k \frac{x^{k+1}}{1 - x}.$$

Obdobně

$$(1 - x) S_1 = \Delta^1 a_0 \frac{x}{1 - x} - \Delta^2 a_0 \frac{x^2}{1 - x} - \Delta^2 a_1 \frac{x^3}{1 - x} - \ldots,$$

$$S_1 = \Delta^1 a_0 \frac{x}{(1 - x)^2} - S_2, \quad \text{kde } S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k \frac{x^{k+2}}{(1 - x)^2}.$$

[3]) V tomto paragrafu jde o konečná komplexní čísla a o konečné komplexní funkce jedné komplexní proměnné.

Úplnou indukcí (proveďte ji!) obdržíte

$$
(8)\qquad \begin{aligned} S = \frac{\Delta^0 a_0}{1-x} - \frac{\Delta^1 a_0 \,.\, x}{(1-x)^2} + \dots + \\ + (-1)^{n-1} \frac{\Delta^{n-1} a_0 \,.\, x^{n-1}}{(1-x)^n} + (-1)^n S_n \,, \end{aligned}
$$

kde

$$
S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^n a_k \,.\, \frac{x^{k+n}}{(1-x)^n} \,.
$$

Podle (7) jest

$$
(9)\qquad \begin{aligned} S_n = \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg(a_k x^{k+n} - \binom{n}{1} a_{k+1} x^{k+n} + \dots \\ \dots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n} x^{k+n} \Bigg) \,. \end{aligned}
$$

Položme $\varrho_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k$, takže $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0$. Podle (9) jest

$$
(10)\quad S_n = \frac{1}{(1-x)^n} \left(\varrho_0 x^n - \binom{n}{1} \varrho_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \varrho_n x^0 \right) .
$$

Předpokládejme nyní, že $x < 0$, a položme $y = -x > 0$, takže

$$
(11)\qquad \begin{aligned} |S_n| \leqq \frac{1}{(1+y)^n} \Bigg(|\varrho_0|\, y^n + \binom{n}{1} |\varrho_1|\, y^{n-1} + \\ + \binom{n}{2} |\varrho_2|\, y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} |\varrho_n| \Bigg) . \end{aligned}
$$

Budiž $\varepsilon > 0$; zvolme q tak, že $|\varrho_p| < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $p \geqq q$. Pro $n \geqq q$ máme

$$
\begin{aligned} (1+y)^{-n} \left(\binom{n}{q} |\varrho_q|\, y^{n-q} + \dots + \binom{n}{n} |\varrho_n| \,.\, y^0 \right) \leqq \\ \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, (1+y)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} = \tfrac{1}{2}\varepsilon \,. \end{aligned}
$$

Podle (11) je tedy pro $n \geqq q$

$$
(12)\qquad \begin{aligned} |S_n| \leqq \left(\frac{y}{1+y} \right)^n \Bigg(|\varrho_0| + \binom{n}{1} |\varrho_1| \,.\, \frac{1}{y} + \dots \\ \dots + \binom{n}{q-1} |\varrho_{q-1}| \frac{1}{y^{q-1}} \Bigg) + \tfrac{1}{2}\varepsilon \,. \end{aligned}
$$

Ježto $0 < \frac{y}{1+y} < 1$, $\binom{n}{k} \leqq n^k$, je pro každé celé $k \geqq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n \cdot \binom{n}{k} = 0\,.^{4})$$

První člen v (12) vpravo má tedy pro $n \to \infty$ limitu 0 (neboť se skládá z q členů, z nichž každý má limitu 0); existuje tedy $n_0 > q$ tak, že pro $n > n_0$ je tento první člen v (12) vpravo menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$, t. j. $|S_n| < \varepsilon$ pro $n > n_0$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ a z (8) plyne, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Delta^n a_0}{(1-x)^{n+1}} x^n \tag{13}$$

je konvergentní a má součet S. Máme tedy tuto větu:

Věta 244. *Budiž $x < 0$; řada* (6) *budiž konvergentní se součtem S; potom také řada* (13) *je konvergentní a má rovněž součet S.*

Příklad 1. Dosaďte $x = -1$: Je-li $S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$,[5]) je též $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} = S$. Této věty se často užívá k zrychlování konvergence. Na př. $\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ Zde $a_k = \frac{1}{k+1}$, $\Delta a_k = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, indukcí $\Delta^n a_k = \frac{n!}{(k+1)\ldots(k+n+1)}$, takže je též $\lg 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \ldots$

Cvičení

1. Pro $a_k = 1 : (c + k)$ $(c > 0)$ plyne obdobně k příkl. 1

$$\Delta^n a_0 = \frac{n!}{c(c+1)\ldots(c+n)}$$

---

[4]) Položme $\lg \frac{y}{1+y} = -\gamma$, takže $\gamma > 0$; jde tedy o limitu výrazu $e^{-\gamma n}\binom{n}{k} \leqq$ $\leqq e^{-\gamma n} n^k$ pro $n \to \infty$.

[5]) To neznamená, že by řada musila míti střídavá znaménka: $a_0, a_1, \ldots$ jsou libovolná komplexní čísla.

a pro $0 > x \geqq -1$ obdržíme (kladouce $y = -x > 0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^k}{c+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{c(c+1)\dots(c+n)} \frac{y^n}{(1+y)^{n+1}}.$$

2. Volba $c = \frac{1}{2}$ v cvič. 1 dává toto: píši-li $z = \pm \sqrt{y}$ a násobím číslem $\frac{1}{2}z$, obdržím pro $-1 \leqq z \leqq 1$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1+z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \frac{z^{2n+1}}{(1+z^2)^{n+1}};$$

odtud pro $z = 1$ dostaneme řadu pro $\frac{1}{4}\pi$.

§ 3. Stejnoměrná konvergence a její zobecnění. V tomto paragrafu se slovem „funkce" míní stále *konečná komplexní funkce* (která ovšem speciálně může býti reálná) a slovem „limita" *konečná komplexní limita.*

V metrickém prostoru (P, ϱ) budiž dána funkce f a posloupnost funkcí $f_1, f_2, \dots$ Podle definice 35 říkáme, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ stejnoměrně v } P, \tag{14}$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje (přirozené) p tak, že

$$(x \in P,\ n \geqq p) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.\text{[6]} \tag{15}$$

Jsou-li f_n spojité v P a platí-li (14), víme podle věty 174 I, že také f je spojitá v P. Obrátit se tato věta obecně nedá (ze spojitosti funkcí f_n, $\lim f_n$ neplyne stejnoměrnost konvergence, viz kap. IV, § 3, cvič. 5). Ale dá se obrátit v tomto speciálním případě:

Věta 245. *Buďte f_n funkce spojité v kompaktním prostoru (P, ϱ) $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Nechť pro každé $x \in P$ existuje*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{16}$$

[6]) Jde tedy o zobrazení prostoru (P, ϱ) do K_1, při čemž metriku v K_1 definuji obvyklou rovnicí $\sigma(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$. Místo toho bychom mohli vzíti (jako v def. 35) zobrazení (P, ϱ) do libovolného (po příp. úplného) prostoru (Q, σ) a místo limity posloupnosti bychom mohli vyšetřovati $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\in B}} f(x, y)$ jako v def. 36. To by však byla čistě formální zobecnění, která si čtenář v případě potřeby sám provede.

Nechť dále pro každé $x \in P$ platí

(17) $$n < m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \geqq |f_m(x) - f(x)| .$$

Potom je f spojitá v P tehdy a jen tehdy, platí-li (16) *stejnoměrně v P.*

Důkaz. I. Nechť (16) platí stejnoměrně v P; potom je f spojitá v P podle věty 174 I.

II. Nechť (16) sice platí, ale ne stejnoměrně v P. To znamená: Existuje $\varepsilon > 0$ (které nyní podržíme pevné), k němuž neexistuje příslušné p z (15). T. j. ke každému přirozenému p existují $x_p \in P$, $n_p \geqq p$ tak, že není $|f(x_p) - f_{n_p}(x_p)| < \varepsilon$. Posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ obsahuje vybranou posloupnost $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots$, konvergentní v P (ježto P je kompaktní). Pišme $y_k = x_{p_k}$, $m_k = n_{p_k} \geqq p_k \geqq k$; tedy jest

(18) $$y_k \in P,\ m_k \geqq k,\ |f(y_k) - f_{m_k}(y_k)| \geqq \varepsilon ;$$

dále existuje

(19) $$\lim_{k\to\infty} y_k = \eta \in P .$$

Tvrdím, že f není spojitá v bodě η vzhledem k P — tím bude důkaz hotov. Důkaz nepřímo: Nechť f je spojitá v bodě η vzhledem k P. Potom k našemu číslu ε existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

(20) $$(y \in P,\ \varrho(y, \eta) < \delta_1) \Rightarrow |f(y) - f(\eta)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon .$$

Ježto $\lim f_n(\eta) = f(\eta)$, existuje n tak, že

(21) $$|f(\eta) - f_n(\eta)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon .$$

Zvolme takové n. Ze spojitosti funkce f_n plyne, že existuje δ ($0 < \delta < \delta_1$) tak, že

(22) $$(y \in P,\ \varrho(y, \eta) < \delta) \Rightarrow |f_n(y) - f_n(\eta)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon .$$

Z (20), (21), (22) plyne, že

(23) $$(y \in P,\ \varrho(y, \eta) < \delta) \Rightarrow |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon .$$

Ale pro dosti velká k je jistě $m_k > n$, $\varrho(y_k, \eta) < \delta$. Pro tato k je tedy podle (17), (23)

$$|f(y_k) - f_{m_k}(y_k)| \leqq |f(y_k) - f_n(y_k)| < \varepsilon ,$$

což je ve sporu s (18).

Speciální případ věty 245:

Věta 246. *Funkce f_n buďte reálné a spojité v kompaktním prostoru (P, ϱ) $(n = 1, 2, \ldots)$. Nechť pro každé $x \in P$ existuje* (16). *Nechť dále pro každé $x \in P$ je*

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \ldots \tag{24}$$

Potom je f spojitá v P tehdy a jen tehdy, platí-li (16) *stejnoměrně v P.*

Důkaz. Z (24) plyne pro $n < m$, že $f_n(x) \leqq f_m(x) \leqq f(x)$, takže podmínka (17) je splněna.

Věty 245, 246 se týkaly toliko speciálních případů [podmínka (17), po příp. (24)]. Nyní odvodíme nutnou a postačující podmínku pro to, aby limita konvergentní posloupnosti spojitých funkcí byla spojitá — a to v obecném případě.

Věta 247. *Funkce $f_1, f_2, \ldots$ buďte spojité v metrickém prostoru (P, ϱ). Pro každé $x \in P$ nechť existuje* (16). *Potom f je spojitá v P tehdy a jen tehdy, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ je splněna tato podmínka:*

$\mathbf{A}_\varepsilon$. *Ke každému bodu $a \in P$ existuje $\delta > 0$ a přirozené číslo n (tedy: n, δ závisí na ε, a) tak, že*

$$x \in \Omega_P(a, \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{25}$$

Poznámka 1. Podmínku $\mathbf{A}_\varepsilon$ lze říci též takto: každý bod $x \in P$ je vnitřním bodem některé z množin

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in P,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{26}$$

Důkaz. I. Nechť podmínka věty 247 je splněna. Budiž $a \in P$. Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ a $n \in \mathbf{N}$ tak, že platí (25).[7] Vzhledem ke spojitosti funkce f_n existuje δ_1 $(0 < \delta_1 < \delta)$ tak, že

$$x \in \Omega_P(a, \delta_1) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon\,. \tag{27}$$

Z (25), (27) (viz též[7]) plyne $x \in \Omega_P(a, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3\varepsilon$.

Tedy je f spojitá v bodě a vzhledem k P.

[7]) Tedy speciálně i $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$.

II. Nechť f je spojitá v P; budiž $a \in P$. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle (16) existuje n tak, že

$$|f_n(a) - f(a)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \,. \tag{28}$$

Zvolme takové n. Ježto f, f_n jsou spojité v bodě a vzhledem k P, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in \Omega_P(a, \delta)$ je $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$; podle (28) plyne odtud $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, t. j. podmínka $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ je splněna.

Poznámka 2. Pro kompaktní (P, ϱ) lze dáti podmínce $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ tento ekvivalentní tvar:

$\boldsymbol{B}_\varepsilon$. Existuje konečný počet bodů $a_i \in P$, kladných čísel δ_i a přirozených čísel n_i $(i = 1, \ldots, p)$ tak, že množiny $\Omega_P(a_i, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ pokrývají P a že pro $i = 1, \ldots, p$ platí

$$x \in \Omega(a_i, \delta_i) \Rightarrow |f(x) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon \,.$$

Důkaz: Je-li splněna podmínka $\boldsymbol{A}_\varepsilon$, pokrývají množiny $\Omega_P(a, \delta)$ z (25) (pro všechna $a \in P$) kompaktní prostor P. Podle Borelovy věty 158 lze z nich vybrati konečný počet, které také pokrývají P. Tedy platí $\boldsymbol{B}_\varepsilon$. Je-li splněna podmínka $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, je zřejmo, že každý bod $x \in P$ je vnitřním bodem některé z množin (26). Tedy platí $\boldsymbol{A}_\varepsilon$.

Poznámka 3. Větu 247 ve tvaru pozn. 2, a to pro případ $P = \langle a, b \rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, dokázal po prvé Arzelà. Velmi jednoduchý důkaz podal P. S. Alexandrov. Neobyčejně jednoduchý důkaz, spočívající na tom, že se napřed dokáže věta 247, pochází od D. A. Rajkova.

Prozatím jsme mluvili o spojitosti limitní funkce v množině P. Nyní promluvíme o její spojitosti v určitém bodě vzhledem k dané množině. Ježto tato otázka souvisí s otázkou,[8]) kdy platí rovnice

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x) \,, \tag{29}$$

budeme se zabývati hlavně touto otázkou. Abychom dostali „nutné a postačující“ podmínky, musíme pojem stejnoměrné konvergence nějak lokalisovat (aby se týkal pouze „bezprostředního okolí“ bodu a)

[8]) Viz na př. souvislost mezi větami 56, 59.

a potom oslabit (neboť stejnoměrná konvergence je postačující, ale ne nutnou podmínkou). Pro větší jasnost to provedeme ve třech krocích:

Budiž $A \subset (P, \varrho)$, $a \in \overline{A}^P$. Řeknu-li, že posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k funkci f v okolí bodu a stejnoměrně vzhledem k A, budu tím rozuměti, že existuje $\delta > 0$ takové, že $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k f stejnoměrně v množině $A \,.\, \Omega_P(a, \delta)$. Napišme to v logických symbolech z kap. I, § 1:

$$(30)\quad \sum_{\delta>0} \prod_{\varepsilon>0} \sum_{n_0 \in \boldsymbol{N}} \prod_{n \in \boldsymbol{N}} \prod_{x \in A} ((n \geqq n_0,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Řeknu-li, že posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k funkci f v bodě a stejnoměrně vzhledem k A (to je důležitější pojem), budu tím rozuměti, že ke každému $\varepsilon > 0$ existují $\delta > 0$ a $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že

$$(31)\qquad (n \geqq n_0,\ x \in A,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Na rozdíl od předešlého případu zde δ může záviseti na ε. V logických značcích:

$$(32)\quad \prod_{\varepsilon>0} \sum_{\delta>0} \sum_{n_0 \in \boldsymbol{N}} \prod_{n \in \boldsymbol{N}} \prod_{x \in A} ((n \geqq n_0,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

A konečně (to bude pro nás nejdůležitější): Řeknu-li, že posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k funkci f v bodě a zpola stejnoměrně vzhledem k A, bude to znamenati, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ [toto n_0 budeme stále značit $n_0(\varepsilon)$] takové, že ke každému přirozenému $n \geqq n_0$ existuje $\delta > 0$ [toto δ budeme stále značit $\delta(\varepsilon, n)$] tak, že

$$(33)\qquad (x \in A,\ \ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Rozdíl proti předešlému je ten, že δ může nyní záviseti nejenom na ε, nýbrž i na n. Napišme to v logických značcích:

$$(34)\quad \prod_{\varepsilon>0} \sum_{n_0 \in \boldsymbol{N}} \prod_{n \in \boldsymbol{N}} \sum_{\delta>0} \prod_{x \in A} ((n \geqq n_0,\ \ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

(Čtenář nechť si uvědomí toto: že jsme napsali symbol $\prod\limits_{n \in \boldsymbol{N}}$, ač se v definici mluví jen o číslech $n \geqq n_0$, nevadí; pro $n < n_0$ si můžeme voliti $\delta > 0$ jakkoliv (třeba $\delta = 1$) a poslední implikace bude správná, ježto její premisa (obsahující výrok $n \geqq n_0$) je nesprávná).

Vidíte, že postupné oslabování definice spočívá v tom, že se kvantifikátor $\sum\limits_{\delta>0}$ posunuje doprava.

Věta 248. *Budiž* $A \subset (P, \varrho)$; *budiž* $a \in A'^P$. *Nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{35}$$

pro každé $x \in A \dot{-} (a)$. *Nechť pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *existuje*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_n(x) = c_n\,. \tag{36}$$

Potom rovnice (29) *platí tehdy a jen tehdy, když posloupnost* $f_1, f_2, \ldots$ *konverguje k* f *v bodě* a *zpola stejnoměrně vzhledem k* $A \dot{-} (a)$.

Důkaz. Rovnici (29) lze vzhledem k (35), (36) přepsati do tvaru

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \lim_{n\to\infty} c_n\,. \tag{37}$$

I. Nechť konvergence je zpola stejnoměrná v a vzhledem k $A \dot{-} (a)$. Napřed dokážeme, že existuje

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c\,. \tag{38}$$

Budiž $\varepsilon > 0$; buďte $n \geqq n_0(\varepsilon)$, $m \geqq n_0(\varepsilon)$. Dokážeme, že potom je $|c_n - c_m| < 4\varepsilon$, čímž bude existence limity (38) dokázána (podle věty 26). Podle (36) existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$$(x \in A, 0 < \varrho(x, a) < \delta_1) \Rightarrow \mathrm{Max}\,(|f_n(x) - c_n|, |f_m(x) - c_m|) < \varepsilon\,. \tag{39}$$

Zvolme $\delta_2 = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta(\varepsilon, n), \delta(\varepsilon, m))$. Potom podle definice zpola stejnoměrné konvergence a podle (39) platí pro

$$x \in A\,,\quad 0 < \varrho(x, a) < \delta_2\ ^{9)} \tag{40}$$

nerovnosti

$$|f_n(x) - c_n| < \varepsilon,\ |f_m(x) - c_m| < \varepsilon,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,,\quad |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{41}$$

Zvolím-li x tak, aby platilo (40) (a taková x existují), plyne z (41) $|c_n - c_m| < 4\varepsilon$; tedy existuje (38). Mám ještě dokázati, že

[9]) Je jedno, píši-li $x \in A \dot{-} (a)$ nebo $x \in A$, $\varrho(x, a) > 0$.

$$(42) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = c\,.$$

Jest

$$(43) \qquad |f(x) - c| \leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - c_n| + |c_n - c|\,.$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme n_1 tak, že $n \geqq n_1 \Rightarrow |c_n - c| < \varepsilon$ a současně $n_1 \geqq n_0(\varepsilon)$. Zvolme nyní pevně $n \geqq n_1$. Ježto $n \geqq n_0(\varepsilon)$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(44) \qquad (x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,;$$

podle (36) existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$$(x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta_1) \Rightarrow |f_n(x) - c_n| < \varepsilon\,.$$

Pro $x \in A$, $0 < \varrho(x, a) < \text{Min}\,(\delta, \delta_1)$ je tedy podle (43) $|f(x) - c| < 3\varepsilon$. Tím je (42) dokázáno.

II. Nechť platí (37) a zaveďme označení (38). Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že

$$(45) \qquad n \geqq n_0 \Rightarrow |c_n - c| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,.$$

Budiž $n \geqq n_0$; ježto $\lim f_n(x) = c_n$, $\lim f(x) = c$, existuje $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ tak, že pro $x \in A$, $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $|f(x) - c| < \frac{1}{3}\varepsilon$, $|f_n(x) - c_n| < \frac{1}{3}\varepsilon$, načež ve spojení s (45) dostáváme: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takové, že ke každému $n \geqq n_0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ tak, že platí (44). Tedy $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k funkci f v a zpola stejnoměrně vzhledem k $A \dot{-} (a)$.

O tom, jak je tomu se spojitostí, viz cvič. 5, 6.

Cvičení

V cvičeních 1—4 jde o funkce jedné reálné proměnné.

1. Položme $f_n(x) = 0$ pro $x \leqq 0$ a pro $x \geqq \dfrac{2}{n}$, $f_n(x) = nx$ pro $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$, $f_n(x) = 2 - nx$ pro $\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{2}{n}$. Potom $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k nule v bodě a stejnoměrně vzhledem k E_1, jestliže $a \neq 0$. V bodě 0 to neplatí, ale tam nastává aspoň zpola stejnoměrná konvergence (vzhledem k E_1). (Návod pro zpola stejnoměrnou konvergenci:[10]) Pro $|x| < \varepsilon : n$ je $|f_n(x)| < \varepsilon$; stačí tedy voliti $n_0(\varepsilon) = 1$, $\delta(\varepsilon, n) = \varepsilon : n$.)

2. Položme $f_n(x) = n^{-2} + nxe^{-nx^2}$. Dokažte táž tvrzení jako v cvič. 1. (Návod pro zpola stejnoměrnou konvergenci:[10]) Je-li $\varepsilon > 0$, volte napřed $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že $n_0^{-2} < \frac{1}{2}\varepsilon$; je-li pak $n \geqq n_0$, volte $\delta = \delta(\varepsilon, n) = \dfrac{\varepsilon}{2n}$.)

3. Položme $f_n(x) = 1 + x + (-1)^n nx$ pro $x \neq 0$, $f_n(0) = (-1)^n n$. Pro žádné $x \in \mathsf{E}_1$ neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; přesto konverguje $f_1, f_2, \ldots$ k funkci 1 (a rovněž k funkci $1 + x$, a rovněž k funkci $1 + x^2$) v bodě 0 zpola stejnoměrně vzhledem k $\mathsf{E}_1 \dot{-} (0)$. (Návod pro funkci 1: Budiž $\varepsilon > 0$; položme $n_0(\varepsilon) = 1$; pro celé $n \geqq 1$ položme $\delta = \delta(\varepsilon, n) = \dfrac{\varepsilon}{2n}$.) Naše definice mají tedy poněkud zvláštní charakter. Proto, aby smysl věty 248 byl jasnější, formulovali jsme ji tak, že jsme přímo požadovali platnost rovnice (35) v $A \dot{-} (a)$.

4. Posloupnost $f_n(x) = (-1)^n x$ pro $x \neq 0$, $f_n(0) = (-1)^n n$ konverguje k funkci x^2 v bodě 0 dokonce stejnoměrně vzhledem k $\mathsf{E}_1 \dot{-} (0)$.

5. Budiž $a \in (A, \varrho)$. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in A$. Nechť funkce f_n jsou spojité v a vzhledem k A. Potom platí: f je spojitá v a vzhledem k A tehdy a jen tehdy, jestliže posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje k f v bodě a zpola stejnoměrně vzhledem k A. (Důsledek věty 248.)

6. Budiž $a \in (A, \varrho)$. Buďte $f_1, f_2, \ldots$ funkce, spojité v bodě a vzhledem k A. Budiž f další funkce, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$. Potom platí: Funkce f je spojitá v a vzhledem k A tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ a přirozené n tak, že $(x \in A,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Důkaz snadno z vyjádření $(f(x) - f_n(x)) - (f(x) - f(a)) = (f(a) - f_n(a)) + (f_n(a) - f_n(x))$.

§ 4. Funkcionální rovnice pro kosinus a hyperbolický kosinus.

V tomto paragrafu slovo „číslo" znamená konečné reálné číslo; slovo „funkce" znamená konečnou reálnou funkci jedné reálné proměnné, definovanou všude v E_1. Budeme vyšetřovati funkce f, které mají tuto vlastnost:

I. *Pro všechna x, y je*

$$2f(x)\, f(y) = f(x + y) + f(x - y)\,.$$

[10]) Máte ji dokázat bez použití věty 248; z této věty plyne ovšem ihned.

Tuto vlastnost mají zřejmě funkce

$$(46)\qquad 0,\ 1,\ \cos ax,\ \tfrac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})\ \ (0 < a < +\infty)\,.$$

Věta 249. *Nechť funkce f má vlastnost* I *a vedle toho ještě následující vlastnost:*

II. *f je spojitá aspoň v jednom bodě.*

Potom f je jedna z funkcí (46).

Ve cvičeních ukážeme, že požadavek II nelze vynechat, ale lze jej nahradit jinými podmínkami. Poslední funkce v (46) je t. zv. hyperbolický kosinus; viz **DI**, cvičení na konci kap. VI.

Poznámka 1. V celém paragrafu budeme dále mlčky vylučovati funkci $f = 0$ (t. j. $f(x) = 0$ pro všechna x). Sestavme některé důsledky vlastnosti I. Zvolíme-li c tak, že $f(c) \neq 0$ a položíme $y = 0$, obdržíme z I $2f(c)\,f(0) = 2f(c)$, t. j. $f(0) = 1$, načež pro $x = 0$ plyne z I $f(y) = f(-y)$. Dále plyne z I

$$(47)\qquad 2f^2(x) = f(2x) + 1,\quad f(2x) = 2f^2(x) - 1$$

(a tedy $f(x) = f(2\,.\,\tfrac{1}{2}x) \geqq -1$); obdobně $2f(2x)\,f(x) = f(3x) + f(x)$, načež z (47) plyne $f(3x) = 4f^3(x) - 3f(x)$ atd.; obecně plyne z I $f((n+1)\,x) = 2f(nx)\,f(x) - f((n-1)\,x)$ a odtud úplnou indukcí ihned plyne, že pro každé přirozené n platí rovnice tvaru

$$(48)\qquad f(nx) = 2^{n-1}f^n(x) + b_{1,n}f^{n-1}(x) + \ldots + b_{n-1,n}f(x) + b_{n,n}\,,$$

kde každé číslo $b_{j,n}$ závisí pouze na j, n (tedy ani na x ani na tvaru funkce f; na př. $b_{1,3} = 0$, $b_{2,3} = -3$, $b_{3,3} = 0$). Zapišme ještě vztahy

$$(49)\qquad f(0) = 1,\quad f(x) = f(-x),\quad f(x) \geqq -1\,.$$

Důkaz věty 249. Podle vlastnosti II je f spojitá v jistém bodě x_0, tedy podle (47) i v bodě $2x_0$; je-li $f(x_0) = 0$, je podle (47) $f(2x_0) = -1$. Tedy existuje x_1 tak, že f je spojitá v bodě x_1, $f(x_1) \neq 0$. Podle I je

$$f(y) - f(0) = f(y) - 1 = \frac{f(x_1 + y) + f(x_1 - y) - 2f(x_1)}{2f(x_1)}\,.$$

Ježto f je spojitá v bodě x_1, plyne odtud $\lim_{y\to 0} f(y) - f(0) = 0$, t. j. *$f$ je spojitá v bodě* 0. Tedy je f omezená v jistém intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$

($\varepsilon > 0$) a podle (48) je omezená i v intervalu $(-n\varepsilon, n\varepsilon)$ pro $n = 1, 2, \ldots$; t. j. *f je omezená v každém omezeném intervalu.*

Vezměme nyní libovolné číslo c a položme $\limsup_{y\to 0} |f(c+y) - f(c)| = \beta$; z omezenosti funkce f plyne, že $0 \leqq \beta < +\infty$. Z I plyne $f(c+2y) + f(c) = 2f(c+y)\,f(y)$, a tedy

$$f(c+2y) - f(c) = \\ = 2(f(c+y) - f(c)) + 2f(c+y)\,(f(y) - 1)\,. \tag{50}$$

Ježto f je spojitá v bodě 0 a omezená v okolí bodu c, má poslední sčítanec v (50) pro $y \to 0$ limitu 0 a tedy $\limsup_{y\to 0} |f(c+2y) - f(c)| = 2\limsup_{y\to 0} |f(c+y) - f(c)|$, t. j. $\beta = 2\beta$, $\beta = 0$, takže f je spojitá v bodě c. Tedy *f je spojitá v intervalu* $(-\infty, +\infty)$.

Jsou nyní možny tyto případy:

(α) buďto je $f(x) > 0$ pro všechna x;

(β) nebo je $f(c) \leqq 0$ pro některé c.

Případ (α). Tvrdím, že *$f(x) \geqq 1$ pro všechna x.* Kdyby tomu tak nebylo, bylo by $\inf_{-\infty<x<+\infty} f(x) = 1 - \lambda$, kde $0 \leqq 1 - \lambda < 1$, t. j. $0 < \lambda \leqq 1$. Zvolme x tak, že $f(x) < 1 - \frac{1}{2}\lambda$, načež (ježto $f(x) > 0$) $f^2(x) < 1 - \lambda + \frac{1}{4}\lambda^2$ a tedy podle (47) $f(2x) < 2 - 2\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - 1 \leqq 1 - \frac{3}{2}\lambda < 1 - \lambda$, což je spor. Položíme-li tedy $f(1) = A$, jest $A \geqq 1$. Ježto funkce (proměnné a) $\frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ zobrazuje interval $\langle 0, +\infty)$ na interval $\langle 1, +\infty)$, existuje $a \geqq 0$ tak, že $\frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = A$. Funkce (proměnné x)

$$\tfrac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) \tag{51}$$

má tedy tyto vlastnosti:

(V1). Splňuje podmínku I.

(V2). Je spojitá a kladná v $(-\infty, +\infty)$.

(V3). V bodě 1 má hodnotu A.

Tytéž vlastnosti má vyšetřovaná funkce f. Dokážeme nyní, že těmito třemi vlastnostmi je f jednoznačně určena — tím bude dokázáno, že funkce f je totožná s funkcí (51) (pro $a = 0$ je to konstanta 1).

K důkazu jednoznačnosti poznamenejme, že z vlastnosti I plyne (47), (48), (49). Z (47) plyne $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(f(2x) + 1)}$ (neboť $f(x) > 0$).

Položíme-li tedy $A_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(A + 1)}$, $A_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(A_1 + 1)}$, ..., obdržíme $f(1) = A$, $f(\frac{1}{2}) = A_1$, $f(\frac{1}{4}) = A_2$, ..., čímž jsou určeny hodnoty $f(2^{-k})$ ($k = 0, 1, \ldots$). Z (48), (49) lze potom určiti $f(x)$ pro všechna x tvaru

$$n2^{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots; n \text{ celé}) . \tag{52}$$

Konečně každé x lze vyjádřiti ve tvaru $x = \lim\limits_{p \to \infty} x_p$, kde x_p jsou čísla tvaru (52); následkem spojitosti je tím určeno také číslo $f(x) = \lim\limits_{p \to \infty} f(x_p)$.

Případ (β). Jest $f(c) \leqq 0$, $f(-c) = f(c)$, $f(0) = 1$. Tedy lze předpokládati, že $c > 0$. Ze spojitosti plyne, že existuje $d > 0$ tak, že $f(d) = 0$. Infimum hodnot $d > 0$, pro něž $f(d) = 0$, označme ω. Ze spojitosti a z $f(0) = 1$ plyne:

$$f(\omega) = 0, \ \omega > 0, \ f(x) > 0 \text{ pro } 0 \leqq x < \omega . \tag{53}$$

Funkce f má tedy tyto vlastnosti:

(W1). Splňuje podmínku I.

(W2). Je spojitá v $(-\infty, +\infty)$.

(W3). Existuje ω tak, že platí (53).

Dokážeme, že funkce f je těmito vlastnostmi (při daném ω) úplně určena. Ježto také funkce $\cos \frac{\pi x}{2\omega}$ má tyto tři vlastnosti, bude tím dokázáno, že $f(x) = \cos ax \left(a = \frac{\pi}{2\omega}\right)$.

Z I plyne (ježto $f(\omega) = 0$)

$$0 = 2f(x + \omega) f(\omega) = f(x + 2\omega) + f(x) ,$$

t. j.

$$f(x + 2\omega) = -f(x) ; \tag{54}$$

odtud pak plyne $f(x + 4\omega) = f(x)$, t. j. *f má periodu* 4ω. Z (53) a z $f(x) = f(-x)$ plyne $f(x) > 0$ pro $-\omega < x < \omega$. Podle (54) a podle I je

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x) + f(y - 2\omega) = \\ &= 2f(\tfrac{1}{2}(x + y) - \omega) \, . \, f(\tfrac{1}{2}(x - y) + \omega) . \end{aligned} \tag{55}$$

Jestliže $0 \leqq x < y \leqq 2\omega$, je $-\omega < \frac{1}{2}(x + y) - \omega < \omega$, $0 \leqq \leqq \frac{1}{2}(x - y) + \omega < \omega$, takže pravá strana v (55) je kladná, t. j. $f(x) > > f(y)$: *Funkce f je klesající v $\langle 0, 2\omega \rangle$.*

Z rovnice $f(\omega) = 0$ a z (54) plyne

$$f((2k + 1)\,\omega) = 0 \quad \text{pro} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Dosadíme-li tedy do (48) po řadě

$$x = \frac{\omega}{n}, \frac{3\omega}{n}, \frac{5\omega}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\,\omega}{n}, \tag{56}$$

je levá strana rovna nule, t. j. čísla (v počtu n)

$$f\left(\frac{\omega}{n}\right), \; f\left(\frac{3\omega}{n}\right), \; \ldots, \; f\left(\frac{(2n-1)\,\omega}{n}\right) \tag{57}$$

jsou kořeny rovnice n-tého stupně

$$2^{n-1}X^n + b_{1,n}X^{n-1} + \ldots + b_{n,n} = 0,$$

sestavené v klesajícím pořadí. Tedy hodnoty (57) jsou jednoznačně určeny. Budiž nyní dáno x, $0 \leqq x \leqq 2\omega$. Potom pro každé přirozené n lze mezi čísly (56) nalézti takové číslo x_n, že $|x - x_n| \leqq \frac{\omega}{n}$; tedy $x = \lim x_n$, $f(x) = \lim f(x_n)$ (spojitost) a tím je $f(x)$ jednoznačně určeno pro $0 \leqq x \leqq 2\omega$, a tedy i pro $2\omega \leqq x \leqq 4\omega$ (rovnicí (54)), a tedy pro všechna x vůbec (periodicita).

Cvičení

K cvič. 1, 2, 6, 7 potřebujeme některé pomůcky z obecné theorie množin. Budiž dána libovolná množina M. Mezi prvky množiny M budiž dán vztah, který čteme „a je před b"[11]) a který má tyto vlastnosti:

I. Je-li $a \in M$, $b \in M$, platí právě jeden ze vztahů: $a = b$, a je před b, b je před a. II. Je-li a před b, b před c, je a před c. Takovému vztahu říkáme *uspořádání* množiny M. Uveďme příklad. Množinu P všech racionálních čísel můžeme uspořádati na př. těmito způsoby:

(α) x je před y tehdy a jen tehdy, je-li $x < y$.

(β) x je před y tehdy a jen tehdy, je-li $x > y$.

---

[11]) Často se píše $a < b$.

(γ) Srovnejme všechna racionální čísla nějak v prostou posloupnost x_1, $x_2, x_3, \ldots$ (to lze, viz kap. I, § 5, příklad 3 a cvič. 1) a definujme: x_k je před x_n tehdy a jen tehdy, je-li $k < n$.

Uspořádání množiny M nazveme *dobrým uspořádáním*, jestliže každá neprázdná část $A \subset M$ obsahuje *první* prvek, t. j. takový prvek, před kterým neleží žádný prvek množiny A. Na př. (α) není dobré uspořádání (na př. mezi kladnými racionálními čísly neexistuje první, t. j. nejmenší), také (β) není dobré, ale (γ) je dobré uspořádání. Zermelo dokázal: V každé množině existuje dobré uspořádání (důkaz viz na př. v knize P. S. Alexandrov, Úvod do obecné theorie množin a funkcí, Praha 1954, kap. III). V následujícím budeme potřebovati pouze fakt, že lze dobře uspořádati množinu E_1. Podotýkám, že důkaz věty o existenci dobrého uspořádání podstatně spočívá na axiomu výběru (viz kap. I, § 5, pozn. 3), a proto je „nekonstruktivní": nedává v obecném případě žádný návod, jak skutečně do dané množiny dobré uspořádání zavésti. Neradím proto, aby se čtenář pokoušel o provedení dobrého uspořádání množiny E_1. U některých množin, na př. u množiny všech racionálních čísel, dovedeme ovšem dobré uspořádání provésti.

I. Existuje množina $B \subset E_1$, která má tyto vlastnosti: 1. Každé číslo $x \in E_1$ lze vyjádřiti ve tvaru (v (58), (59) připouštím ovšem též „prázdné součty")

$$(58) \qquad x = \sum_{j=1}^{n} r_j \alpha_j \quad (n \geqq 0 \text{ celé}, r_j \text{ racionální}, \alpha_j \in B, \alpha_j \neq \alpha_k \text{ pro } j \neq k).$$

2. Takové vyjádření existuje pro každé x jen jedno (přitom vyjádření, lišící se jen členy s nulovými koeficienty, považujeme za totožná, na př. $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2$, $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + 0 \,.\, \alpha_3 + 0 \,.\, \alpha_4$). Důkaz: Budiž dáno nějaké dobré uspořádání množiny E_1. Reálné číslo x budiž prvkem množiny B tehdy a jen tehdy, nelze-li x psáti ve tvaru

$$(59) \qquad x = \sum_{k=1}^{m} s_k x_k \; (s_k \text{ racionální}, x_k \text{ leží před } x).$$

Kdyby některé $x \in E_1$ nebylo možno vyjádřit ve tvaru (58), existovalo by první takové číslo x; to by se tedy[12]) dalo vyjádřit ve tvaru (59), při čemž by se všechna x_k dala vyjádřit ve tvaru (58), takže i číslo x by se podle (59) dalo vyjádřit ve tvaru (58) — spor. Snadno se pak dokáže, že takové vyjádření je jen jedno. Takové množině B se říká *base reálných čísel.*

Zaveďme tyto vlastnosti:

III. Funkce f je omezená v $(-\infty, +\infty)$.

IV. Funkce f je omezená v některém intervalu (nezvrhlém).

V. Jest $f(c) > 1$ pro jisté c.

[12]) Ježto nemůže ležeti v B.

VI. $\inf\limits_{-\infty<x<+\infty} f(x) > -1.$

VII. $\liminf\limits_{x\to 0} f(x) > -1.$

Budeme vyšetřovati, zda lze vlastnost II ve větě 249 nahraditi některými z vlastností III—VII.

2. *Existuje funkce f s vlastnostmi* I, III, *která není totožná s žádnou z funkcí* (46). **Důkaz.** Existuje base B (cvič. 1). Každému $\alpha \in B$ přiřaďme nějaké číslo $g(\alpha)$, načež definujme: Je-li x dáno vzorcem (58), budiž

$$f(x) = \cos\left(\sum_{j=1}^{n} r_j g(\alpha_j)\right).$$

Potom platí I, III. Zvolme g speciálně takto: vyberme dvě čísla β, γ množiny B a položme $g(\beta) = 0$, $g(\gamma) = \pi$ a ostatní $g(\alpha)$ jakkoliv. Potom bude $f(\beta) = 1$, $f(\gamma) = -1$; ježto poměr $\beta : \gamma$ je iracionální, nemůže f míti tvar $\cos ax$.

Další dvě cvičení mají pomocný ráz.

3. Budiž dáno γ; potom rovnice

$$2^{n-1}X^n + b_{1,n}X^{n-1} + \ldots + b_{n,n} - \cos\gamma = 0 \tag{60}$$

(n přirozené číslo) má kořeny

$$\cos\left(\frac{\gamma}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{61}$$

a žádné jiné. **Důkaz.** Ježto pro funkci $f(x) = \cos x$ platí (48), jsou čísla (61) kořeny rovnice (60). Jsou-li čísla (61) navzájem různá, jsou to **všechny** kořeny a levou stranu v (60) lze psáti

$$2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{\gamma}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right). \tag{62}$$

To platí však i pro ony (isolované) hodnoty $\gamma = \gamma_0$, pro které některá z čísel (61) se sobě rovnají, jak plyne limitním přechodem $\gamma \to \gamma_0$.

4. Platí-li I a IV, je f omezená v každém omezeném intervalu. **Důkaz.** Nechť f je omezená v $\langle\gamma, \delta\rangle$, takže podle (48) je omezená též v $\langle n\gamma, n\delta\rangle$ (n přirozené). Je-li $0 \leqq x \leqq n(\delta - \gamma)$, položme $x = n\delta - \lambda$, takže

$$2f(n\delta)f(\lambda) = f(n\delta + \lambda) + f(x). \tag{63}$$

Zde je $n\gamma \leqq \lambda \leqq n\delta$, $2n\gamma < n\delta + \lambda \leqq 2n\delta$, takže podle (63) je f omezená v $\langle 0, n(\delta - \gamma)\rangle$ a mimoto je $f(-x) = f(x)$.

5. *Nechť platí* I *a* IV. *Jestliže mimoto platí ještě buďto* V *nebo* VI *nebo* VII, *je f jedna z funkcí* (46).

Stále předpokládáme, že platí I a IV. Nechť platí V. Kdyby bylo $\inf_{-\infty<x<+\infty} f(x) = -1$ (že je $f(x) \geqq -1$, víme), existovalo by y tak, že $f(c)\,f(y) < -1$, načež by bylo $-2 \leqq f(c+y) + f(c-y) = 2f(c)\,f(y) < -2$, což je spor; tedy z V plyne VI a z VI zřejmě plyne VII. Stačí tedy dokázati toto:

Předpokládejme, že platí I, IV, VII; potom f je spojitá v bodě 0 (viz větu 249). Důkaz. Položme $\limsup_{x\to 0} f(x) = \alpha$, $\liminf_{x\to 0} f(x) = \beta$, tedy $-1 < \beta \leqq \leqq \alpha < +\infty$ (viz cvič. 4). Kdyby bylo $\alpha > 1$, plynulo by z (47) $\alpha \geqq 2\alpha^2 - 1$, což pro $\alpha > 1$ neplatí; tedy $-1 < \beta \leqq \alpha \leqq 1$ a stačí dokázat, že $\beta = 1$ (neboť $f(0) = 1$). Nechť tedy $-1 < \beta < 1$; z toho odvodíme spor. Položme $\lambda = \frac{1}{2}(1 + |\beta|)$, tedy $|\beta| < \lambda < 1$ a existují $x_1, x_2, \ldots$ tak, že $x_j \neq 0$, $\lim x_j = 0$, $|f(x_j)| < \lambda$. Zvolme přirozené w tak, že

$$w > \frac{\pi}{1-\lambda}, \quad w > \frac{4\pi}{1+\beta}. \tag{64}$$

Dokážeme nyní: Jestliže pro nějaké x je $|f(x)| < \lambda$, existuje $y \neq 0$, $|y| \leqq w|x|$ tak, že $f(y) < -\frac{1}{2}(1-\beta)$.

Tím bude důkaz hotov, neboť z hořejších čísel x_j dostaneme pak čísla $y_j \neq 0$ taková, že $\lim y_j = 0$, $f(y_j) < -\frac{1}{2}(1-\beta)$, tedy $\liminf_{x\to 0} f(x) \leqq -\frac{1}{2}(1-\beta) < \beta$ — spor.

Budiž tedy $|f(x)| < \lambda$; existuje γ tak, že $f(x) = \cos\gamma$. Podle kap. II, § 2, cvič. 3 existují celá čísla r, s tak, že

$$\left| s\frac{\gamma}{\pi} - r \right| < \frac{1}{w}, \quad \left| \gamma - \frac{\pi r}{s} \right| < \frac{\pi}{sw}, \quad 0 < s \leqq w; \tag{65}$$

můžeme předpokládati, že r, s jsou nesoudělná. Tedy $\left| \cos\gamma - \cos\frac{\pi r}{s} \right| < \frac{\pi}{sw} \leqq \frac{\pi}{w} < 1 - \lambda$; ježto $|\cos\gamma \pm 1| = |f(x) \pm 1| > 1 - \lambda$, je $s > 1$. Zvolme celé q tak, že $s^{q-1} \leqq w < s^q$, tedy $q \geqq 2$. Vyšetřujme rovnici (60) pro hodnotu $n = s^{q-1}$. Ježto $\cos\gamma = f(x)$, je podle (48) číslo $f\left(\frac{x}{n}\right)$ kořenem rovnice (60), a tedy je totožné s některým z čísel (61). T. j. existuje celé k tak, že

$$f\left(\frac{x}{s^{q-1}}\right) = \cos\frac{\gamma + 2k\pi}{s^{q-1}}, \quad 0 \leqq k < s^{q-1}. \tag{66}$$

Ježto pro každé přirozené v se $f(vy)$ vypočte z $f(y)$ podle téže rovnice (viz (48)) jako $\cos v\eta$ z $\cos\eta$, plyne z (66)

$$f\left(\frac{vx}{s^{q-1}}\right) = \cos\frac{v(\gamma + 2k\pi)}{s^{q-1}},$$

a tedy

$$(67)\qquad \left| f\left(\frac{vx}{s^{q-1}}\right) - \cos\frac{v(r+2sk)\,\pi}{s^q} \right| \leqq \frac{v}{s^{q-1}} \left| \gamma - \frac{r\pi}{s} \right| < \frac{v\pi}{ws^q}\,.$$

Zvolme nyní celé v tak, že

$$(68)\qquad 0 < v \leqq s^q\,,\ (r + 2sk)\, v \equiv s^q \quad \text{nebo} \quad \equiv s^q + 1 \pmod{2s^q}\ ^{13}).$$

To je možno: Je-li r liché, volme $v = s^q$; je-li r sudé, je s liché, a stačí řešiti kongruenci $(\frac{1}{2}r + sk)\, v \equiv \frac{1}{2}(s^q + 1) \pmod{s^q}$. (Číslo $\frac{1}{2}r + sk$ je nesoudělno s číslem s^q.)

Potom však

$$\left| \cos\frac{v(r+2sk)\,\pi}{s^q} - \cos\pi \right| \leqq \frac{\pi}{s^q} < \frac{\pi}{w}\,,$$

načež z (67), (68) plyne

$$\left| f\left(\frac{vx}{s^{q-1}}\right) + 1 \right| < \frac{v}{s^q}\frac{\pi}{w} + \frac{\pi}{w} \leqq \frac{2\pi}{w}\,.$$

Položíme-li tedy $y = \dfrac{vx}{s^{q-1}}$, je $y \neq 0$, $|y| \leqq s|x| \leqq w|x|$ a dále (viz též (64))

$$f(y) < -1 + \frac{2\pi}{w} < -1 + \tfrac{1}{2}(1 + \beta) = -\tfrac{1}{2}(1 - \beta)\,,$$

což bylo dokázati.

6. Existuje funkce f, pro kterou platí I, V a dále $f(x) \geqq 1$ pro všechna x, a která přesto není totožná se žádnou z funkcí (46). Důkaz: Jako v cvič. 2, ale místo kosinu vezměte hyperbolický kosinus a volte třeba $g(\beta) = 0$, $g(\gamma) = 1$.

Přehlédněme výsledky z věty 249 a z cvič. 2, 5, 6. Nechť f má vlastnost I. K tomu, aby f byla totožná s některou z funkcí (46), stačí, aby byla splněna podmínka II nebo podmínky IV, V, nebo IV, VI nebo IV, VII. Nestačí však IV, ba ani silnější podmínka III. Rovněž nestačí splnění podmínek V, VI, VII, ba dokonce ani splnění silnějších podmínek: $f(c) > 1$ pro některé c, $f(x) \geqq 1$ pro všechna x.

7. Jako protějšek k větě 110 dokažte: Existuje funkce f, splňující pro všechna x, y rovnici $f(x + y) = f(x) + f(y)$, která není totožná s žádnou funkcí ax ($a \in \mathbf{E}_1$). Důkaz podle vzoru cvič. 2.

---

[13]) Znak $a \equiv b \pmod{m}$ znamená, že $\dfrac{a-b}{m}$ je celé číslo. Bližší o kongruencích (s celými $m > 0$, a, b) viz V. Kořínek, Základy algebry, § 9 a 10 nebo I. M. Vinogradov, Základy theorie čísel (Praha 1953), kap. III a IV; hlavně kap. IV, § 2.

Obraťme se ještě k funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Podle **DI**, kap. VII, § 2, cvič. 8 je

$$f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) = f(x) + f(y) \text{ pro } xy < 1 . \tag{69}$$

8. Nechť funkce f splňuje podmínku (69) a je v některém (nezvrhlém) intervalu buďto shora nebo zdola omezená. Potom existuje $k \in E_1$ tak, že $f(x) = k \operatorname{arctg} x$ pro všechna x. Návod: Pro $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$ položte $F(\alpha) = f(\operatorname{tg} \alpha)$; z (69) najdete, že pro $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$, $|\beta| < \frac{1}{2}\pi$, $|\alpha + \beta| < \frac{1}{2}\pi$ je[14] $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$. Nyní rozšiřte definici funkce F na všechna $\alpha \in E_1$ takto: Je-li dáno α, zvolte přirozené n tak, že $\left|\frac{\alpha}{n}\right| < \frac{1}{2}\pi$, a položte $F(\alpha) = nF\left(\frac{\alpha}{n}\right)$. Ukažte, že definice je v pořádku (t. j. že pro všechna taková n dostanete touž hodnotu $nF\left(\frac{\alpha}{n}\right)$) a že na funkci F lze užíti věty 110. Tedy $F(\alpha) = k\alpha$ při vhodném k. Odtud snadno plyne $f(x) = k \operatorname{arctg} x$ pro všechna x.

[14]) Musíte dokázat, že $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1$.