KAPITOLA X.

LOKÁLNÍ MAXIMA A MINIMA FUNKCE NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH

Podobně jako v kap. VIII a IX jde také v této kapitole pouze o reálná konečná čísla a konečné reálné funkce reálných proměnných. Slova „limita“ a „derivace“ znamenají vždy vlastní neboli konečnou limitu a derivaci. Normu bodu $z = [z_1, \ldots, z_r]$ definujeme jako obyčejně: $\|z\| = \max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |z_i|$, takže $\|x - a\| = \max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |x_i - a_i|$.

§ 1. Definice lokálních extrémů. Definice 39. *Je-li $f(x_1, \ldots, x_r)$ definována v jistém okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_r]$ a existuje-li $\delta > 0$ tak, že*

$$(1) \qquad (0 < \|x - a\| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geqq f(a)),$$

říkáme, že funkce f má v bodě a lokální minimum. Lze-li v (1) nerovnost $f(x) \geqq f(a)$ nahraditi nerovností $f(x) > f(a)$, říkáme, že f má v bodě a ostré lokální minimum.

Definice 40. *Budiž dána funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$, množina $M \subset \mathbf{E}_r$ a bod $a = [a_1, \ldots, a_r] \in M$; funkce f budiž definována v bodě a. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro všechny body x množiny M, splňující nerovnosti $0 < \|x - a\| < \delta$, platí nerovnost $f(x) \geqq f(a)$, říkáme, že funkce f má v bodě a lokální minimum vzhledem k množině M. Lze-li nerovnost $f(x) \geqq f(a)$ nahraditi nerovností $f(x) > f(a)$, říkáme, že f má v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k M.*

Je-li a vnitřním bodem množiny M, je definice 40 totožná s definicí 39.

Obdobně se definují *lokální maxima* (místo $f(x) \geqq f(a)$, po příp. $f(x) > f(a)$ se píše $f(x) \leqq f(a)$, po příp. $f(x) < f(a)$). Společný název pro lokální minima a maxima jest „*lokální extrémy*“. Není zajisté třeba, abych tyto věci podrobně vypisoval. Příklady: funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v bodě $[0, 0]$ ostré lokální minimum; funkce $\varphi(x, y) = x^2y^2$ má v bodě $[0, 0]$ lokální minimum, ne však ostré (říkáme též „neostré“). Je-li konečně $M \subset \mathbf{E}_2$ množina všech bodů $[x, y]$, vyhovujících rovnici $x^2 + y^2 = 1$, má funkce $f(x, y) = y$ v bodě $[0, 1]$ ostré lokální maximum vzhledem k M (neboť $f(0, 1) = 1$, kdežto ve všech ostatních bodech množiny M jest $f(x, y) = y < 1$).

Poznámka 1. Nabývá-li funkce f v množině M své největší hodnoty v nějakém bodě $c \in M$ (t. j. je-li $f(c) = \sup_{x \in M} f(x)$), má funkce f v bodě c zřejmě lokální maximum vzhledem k M (jež však nemusí býti ostré). Obdobně pro $\inf f(x)$.

Poznámka 2. Je-li $a \in M \subset N$ a má-li funkce f v bodě a na př. ostré lokální minimum vzhledem k N, má f v bodě a zřejmě též ostré lokální minimum vzhledem k M.

Věta 214. *Funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ budiž definována v množině $M \subset \mathbf{E}_r$. Tvrdím: ony body množiny M, v nichž má f ostrý lokální extrém vzhledem k M, tvoří spočetnou množinu.*

Poznámka 3. Pro neostré extrémy není věta správná: funkce, jež je konstantní v nějakém otevřeném intervalu (r-rozměrném), má v každém bodě tohoto intervalu neostrý lokální extrém (současně maximum i minimum).

Důkaz. Budiž N_1 (po příp. N_2) množina oněch bodů $x \in M$, v nichž má f ostré lokální minimum (po příp. maximum) vzhledem k M. Máme dokázati, že $N_1 \cup N_2$ je spočetná množina.

Každému bodu $x \in N_1$ přiřadím přirozené číslo $n(x)$ tak, že

$$\left(y \in M,\ 0 < \|x - y\| < \frac{1}{n(x)}\right) \Rightarrow (f(y) > f(x))\,; \tag{2}$$

to je možno, ježto f má v bodě x ostré lokální minimum vzhledem k M. Budiž A_p množina oněch $x \in N_1$, pro něž $n(x) = p$, takže $N_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ Tvrdím: je-li $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in A_p$, $x_2 \in A_p$, je $\|x_1 - x_2\| \geqq \frac{1}{p}$. Kdyby tomu tak nebylo, bylo by $0 < \|x_1 - x_2\| < \frac{1}{p}$. Ježto $n(x_1) = p$, plynulo by z (2) $f(x_2) > f(x_1)$; ježto $n(x_2) = p$, plynulo by z (2) současně $f(x_1) > f(x_2)$, což je spor. Všechny body množiny A_p jsou tedy isolovanými body množiny A_p. Tedy je A_p podle kap. VI, § 15, pozn. 3 spočetná; tedy je též N_1 spočetná. Přechodem k funkci $-f$ plyne, že též N_2 je spočetná.

Cvičení

1. Definujme $f(x)$ pro $x \in E_1$ takto: $f(x) = 0$, je-li x iracionální. Je-li $x = p : q$,[1]) definujme $f(x) = (-1)^p : q$. Budiž M_1 množina všech iracionálních x, budiž M_2 množina všech racionálních čísel $p : q$[1]) se sudým p, budiž M_3 množina všech racionálních čísel $p : q$[1]) s lichým p. Funkce f má tyto lokální extrémy: ostré minimum v každém bodě $x \in M_3$, ostré maximum v každém bodě $x \in M_2$, žádný extrém v bodech $x \in M_1$. Vzhledem k množině $M_1 \cup M_2$ má f v každém bodě $x \in M_1$ neostré lok. minimum, v každém bodě $x \in M_2$ ostré lokální maximum. Vzhledem k množině $M_1 \cup M_3$ má f v každém bodě $x \in M_3$ ostré lokální minimum, v každém bodě $x \in M_1$ neostré lokální maximum. — V bodě $\sqrt{2}$ má f ostré lokální minimum vzhledem k množině $M_2 \cup (\sqrt{2})$, ostré lokální maximum vzhledem k množině $M_3 \cup (\sqrt{2})$, ale nemá v bodě $\sqrt{2}$ žádný lokální extrém vzhledem k množině $M_2 \cup M_3 \cup (\sqrt{2})$.

2. Budiž $a \in M$, $a \in N$. Funkce f má v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k $M \cup N$ tehdy a jen tehdy, má-li v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k M i vzhledem k N. Podobně pro ostatní typy lokálních extrémů.

3. Funkce $f(x, y) = (y - x^4)(y - x^2)$ má v bodě $[0, 0]$ ostrý lokální extrém (a to minimum) vzhledem ke každé přímce, procházející počátkem (neboť, je-li $y = kx$, $k \neq 0$, je $f(x, y) = x^2(k^2 - kx - kx^3 + x^4)$ a závorka je kladná pro dosti malá $|x|$; na přímce $y = 0$ je $f = x^6$, na přímce $x = 0$ je $f = y^2$). Přes to nemá f v bodě $[0, 0]$ lokální extrém (ve smyslu definice 39); neboť na př. pro $x = 0$, $y \neq 0$ je $f > 0$, pro $0 < x < 1$, $y = x^3$ je $f < 0$. Znázorněte si tyto okolnosti graficky!

§ 2. Podmínky pro lokální extrém. Věta 215. *Jestliže aspoň pro jednu hodnotu j $(1 \leqq j \leqq r)$ derivace $\dfrac{\partial f(a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_j}$ existuje a je od nuly různá, nemá funkce f v bodě $[a_1, \ldots, a_r]$ lokální extrém (ostrý ani neostrý).*

Důkaz. Z předpokladu plyne, že funkce (jedné proměnné x_j) $f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_r)$ je v bodě a_j buďto rostoucí nebo klesající (**DI**, věta 131); tedy existují čísla y, z, libovolně blízká číslu a_j tak, že jest $f(a_1, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_r) > f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots$ $\ldots, a_r) > f(a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_r)$.

Při hledání lokálních extrémů funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ nás tedy zajímají pouze ty body, v nichž je buďto

---

[1]) p, q celá, nesoudělná, $q > 0$.

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0\,,$$

nebo v nichž některá z těchto derivací neexistuje.[2]) V bodech, v nichž platí (3), lze často o existenci a druhu lokálního extrému souditi z této věty:

Věta 216. *Funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ nechť má v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r]$ totální diferenciál druhého řádu; v bodě a buďte splněny rovnice* (3). *Sestrojme kvadratickou formu*

$$(4) \qquad \Phi(h_1, \ldots, h_r) = \sum_{j,k=1}^{r} \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_j\, \partial x_k} h_j h_k\,.^{3})$$

Potom platí:

I. Je-li kvadratická forma (4) *positivně definitní, má f v bodě a ostré lokální minimum.*

II. Je-li (4) *negativně definitní, má f v bodě a ostré lokální maximum.*

III. Je-li (4) *indefinitní, nemá f v bodě a lokální extrém (ostrý ani neostrý).*

Poznámka 1. Z algebry asi znáte příslušné pojmy a věty o kvadratických formách; ale pro úplnost zde předvedu těch několik málo věcí, které potřebujeme. Kvadratická forma (píši stále $x = [x_1, \ldots, x_r]$ a pod.)

$$(5) \qquad Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{j=1}^{r} a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq r} a_{jk} x_j x_k{}^{4})$$

má v bodě $o = [0, \ldots, 0]$ hodnotu 0. Je-li $Q(x) > 0$ pro všechna $x \neq o$, nazývá se forma Q positivně definitní; je-li $Q(x) \geq 0$ pro všechna x, existuje-li však $x \neq o$ tak, že $Q(x) = 0$, nazývá se forma Q positivně semidefinitní. Obdobně se definují formy negativně definitní a semidefinitní. Existují-li konečně x, y tak, že $Q(x) > 0$, $Q(y) < 0$, nazývá se forma Q indefinitní.

[2]) Ostatně i z těchto bodů jsou větou 215 některé vyloučeny: totiž ty, v nichž aspoň jedna z uvedených derivací existuje a je různá od nuly.

[3]) Podle definice v kap. VII, § 8, pozn. 6 je forma Φ totální diferenciál 2. řádu funkce f v bodě a.

[4]) Lze psáti též $Q(x) = \sum_{j,k=1}^{r} a_{jk} x_j x_k$, klademe-li $a_{kj} = a_{jk}$ pro $1 \leq j < k \leq r$; předpokládáme stále a_{jk} reálná. V uvedeném tvaru je napsána též forma (4) (vzhledem k záměnnosti derivací).

Jak poznáme, ke kterému z těchto pěti druhů patří forma (5)? Jsou tři možnosti:

A) Jest $a_{jk} = 0$ pro všechna j, $k = 1, 2, \ldots, r$.

B) Existují j, l tak, že $a_{jj} = a_{ll} = 0$, $a_{jl} \neq 0$ $(j < l)$.

C) Nenastává případ **A)** ani **B)**, takže jistě existuje nějaké $a_{jj} \neq 0$, třeba $a_{11} \neq 0$. Potom lze zřejmě psáti

$$Q(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_r) .$$

Jestliže forma Q_1 (v proměnných $x_2, \ldots, x_r$) patří k typu **C)**, mohu pokračovati obdobně dále a dospěji tak[4a]) konečně buďto k vyjádření

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_r) &= A_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r)^2 + \\ &+ A_2(c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2r}x_r)^2 + \ldots + A_r(c_{rr}x_r)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

nebo k vyjádření

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_r) &= A_1(c_{11}x_1 + \ldots + c_{1r}x_r)^2 + \ldots + \\ &+ A_k(c_{kk}x_k + \ldots + c_{kr}x_r)^2 + Q_k(x_{k+1}, \ldots, x_r) \quad (k < r) , \end{aligned} \tag{7}$$

kde forma Q_k v (7) je typu **A)** nebo **B)**, čísla c_{jj}, A_j v (6), (7) jsou různá od nuly.

Je patrno, že forma (6) nebo (7) nabývá při vhodné volbě hodnot $x_1, \ldots, x_r$ téhož znamení jako číslo A_j; stačí totiž voliti $x_l = 0$ pro $l > j$, $x_j = 1$ a určiti (je-li $j > 1$) $x_{j-1}, x_{j-2}, \ldots, x_1$ postupně z rovnic

$$c_{j-1, j-1}x_{j-1} + c_{j-1, j}x_j = 0 , \quad c_{j-2, j-2}x_{j-2} + c_{j-2, j-1}x_{j-1} + c_{j-2, j}x_j = 0$$

atd. Mají-li tedy dvě z čísel A_j v (6) nebo v (7) opačná znamení, je Q indefinitní. Rovněž je Q indefinitní, je-li v (7) forma Q_k typu **B)**: Volím totiž $x_h = 0$ pro $h > k$, $h \neq j$, $h \neq l$ a jednou $x_j = x_l = 1$, po druhé $x_j = -x_l = 1$, takže Q_k nabývá jednou hodnoty kladné, jednou záporné; čísla $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ volím potom tak, aby součinitelé při $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1$ se rovnali nule. Mají-li všechna A_j v (7) totéž znamení a je-li Q_k typu **A)**, je Q semidefinitní (volím $x_{k+1}, \ldots, x_r$ libovolně a určím pak $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ postupně tak, aby se součinitelé při $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1$ rovnali nule). Mají-li konečně všechna A_j v (6) totéž znamení, je Q definitní: Q je totiž rovno nule jen tehdy, je-li $c_{rr}x_r = 0$,

[4a]) Po případě po vhodném přečíslování proměnných $x_1, \ldots, x_r$.

$c_{r-1,r-1}x_{r-1} + c_{r-1,r}x_r = 0, \ldots$, což dává postupně $x_r = 0, x_{r-1} = 0, \ldots, x_1 = 0$. Tyto poznámky nám stačí; z algebry toho ovšem asi o kvadratických formách víte podstatně více. Jenom pozor! Forma $x^2 + y^2$ ve dvou proměnných x, y je positivně definitní; ale forma $x^2 + y^2$ ve třech proměnných x, y, z (tedy vlastně $x^2 + 0 \,.\, xy + y^2 + 0 \,.\, xz + 0 \,.\, yz + 0 \,.\, z^2$) je positivně semidefinitní, neboť se rovná nule pro $x = y = 0$, z libovolné.

Důkaz věty 216. Zřejmě je

$$\Phi(th_1, \ldots, th_r) = t^2\Phi(h_1, \ldots, h_r) \,. \tag{8}$$

Z existence diferenciálu 2. řádu v bodě a plyne existence diferenciálu 1. řádu v jistém okolí $\Omega(a;\, \Delta)$ $(\Delta > 0)$. Podle věty 203 pro $n = 0$ (t. j. podle pozn. 1 v kap. VII, § 11) je tedy pro $0 < \|h\| < \Delta$

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} f_j(a + \Theta h)\, h_j \quad (0 < \Theta < 1) \tag{9}$$

$\left(\text{píši } f_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \text{ atd.}\right)$. Ježto funkce f_j mají v a diferenciál 1. řádu a ježto v bodě a platí (3), je podle def. 37

$$\begin{aligned} f_j(a + \Theta h) = f_j(a + \Theta h) - f_j(a) = \sum_{k=1}^{r} f_{jk}(a)\, \Theta h_k + \\ + \|\Theta h\|\, \eta_j(\Theta h) \,, \end{aligned} \tag{10}$$

kde $\lim\limits_{v \to o} \eta_j(v) = 0$. Ježto $\|\Theta h\| = \Theta \|h\|$, plyne dosazením z (10) do (9)

$$f(a + h) - f(a) = \Theta \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{r} f_{jk}(a)\, h_k + \|h\|\, \eta_j(\Theta h) \Big)\, h_j \,,$$

a tedy (ježto $|h_j| \leqq \|h\|$)

$$f(a + h) - f(a) = \Theta(\Phi(h_1, \ldots, h_r) + \|h\|^2 \eta(h)) \,, \tag{11}$$

kde $\lim\limits_{h \to o} \eta(h) = 0$. Ježto $\Theta > 0$, záleží pouze na znamení závorky v (11).

I. Budiž Φ positivně definitní. Budiž M množina oněch bodů h, pro něž $\|h\| = \operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_r|) = 1$.

Položme $A = \inf\limits_{h \in M} \Phi(h)$. Ježto M je kompaktní, existuje bod $h^{(0)} \in M$ tak, že $\Phi(h^{(0)}) = A$ (věta 170); tedy nutně $A > 0$. Tvrdím nyní, že pro každý bod h je $\Phi(h) \geqq A\|h\|^2$. To je jasné pro $h = o$; je-li $h \neq o$, položme $h' = \frac{h}{\|h\|}$, takže zřejmě $\|h'\| = 1$, t. j. $h' \in M$, tedy $\Phi(h') \geqq A$; ježto pak $h = \|h\| \,.\, h'$, je podle (8) vskutku $\Phi(h) \geqq A\|h\|^2$. Tedy z (11) plyne, že pro $0 < \|h\| < \Delta$ je

$$f(a + h) - f(a) \geqq \Theta\|h\|^2 \,(A + \eta(h))\,.$$

Ježto $\Theta > 0$, $A > 0$, $\lim\limits_{h\to o} \eta(h) = 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < \|h\| < \delta$ je $f(a + h) - f(a) > 0$; tedy má f v bodě a ostré lokální minimum.

II. Budiž Φ negativně definitní: potom užiji výsledku z I na funkci $-f$.

III. Budiž Φ indefinitní. Potom existují body $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$, $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_r]$ tak, že $\Phi(\alpha) > 0 > \Phi(\beta)$. Je-li $t > 0$, plyne z (11) podle (8) (ježto $\|t\alpha\| = t\|\alpha\|$)

$$\begin{aligned} f(a + t\alpha) - f(a) &= \Theta t^2(\Phi(\alpha) + \|\alpha\|^2\,\eta(t\alpha))\,, \\ f(a + t\beta) - f(a) &= \Theta t^2(\Phi(\beta) + \|\beta\|^2\,\eta(t\beta))\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Ježto $\lim\limits_{t\to 0+} \eta(t\alpha) = \lim\limits_{t\to 0+} \eta(t\beta) = 0$, plyne z (12): Existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $t \in (0, \delta)$ je $f(a + t\alpha) > f(a) > f(a + t\beta)$; tedy f nemá lokální extrém v bodě a.

Příklad 1. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - 1)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = z - 3x + 2$. Tyto derivace se rovnají nule tehdy a jen tehdy, je-li $y = 1$, $z = x^2$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, což dává dvě řešení: $x = y = z = 1$; $x = 2$, $y = 1$, $z = 4$. Bodu $[1, 1, 1]$ odpovídá forma $\Phi(h, k, l) = 6h^2 + 2k^2 + l^2 - 6hl = 6(h - \frac{1}{2}l)^2 - \frac{1}{2}l^2 + 2k^2$, tedy nenastává v tomto bodě lokální extrém. Bodu $[2, 1, 4]$ odpovídá forma $12h^2 + 2k^2 + l^2 - 6hl = 2k^2 + (l - 3h)^2 + 3h^2$, což je positivně definitní — tedy ostré lokální minimum.

Příklad 2. V semidefinitním případě může, ale nemusí nastati extrém. Příklady: $f_1(x, y) = x^2 + x^2y^2$, $f_2(x, y) = x^2 + y^4$, $f_3(x, y) = x^2 + y^3$. V počátku jsou derivace 1. řádu rovny nule; forma $\Phi(h, k) =$

$= 2h^2$ je ve všech třech případech positivně semidefinitní. Je patrno: v počátku má f_1 neostré lokální minimum, f_2 ostré lokální minimum, f_3 nemá žádný extrém (pro $x = 0$ má f_3 totéž znamení jako y).

Příklad 3. Pro $r = 1$ je $\Phi(h) = f''(a)\,h^2$, takže dostáváme větu, známou z **DI**: je-li $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, má $f(x)$ v bodě a ostrý lokální extrém (minimum pro $f''(a) > 0$, maximum pro $f''(a) < 0$). Semidefinitní případ $f''(a) = 0$ lze často řešiti užitím vyšších derivací (viz **DI**, věta 144).

Příklad 4. Pro $r = 2$ snadno zjistíte: forma $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ je definitní, semidefinitní, indefinitní podle toho, zda je $\alpha\gamma - \beta^2$ kladné, rovno nule nebo záporné. Tedy: Má-li $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ totální diferenciál 2. řádu a je-li v tomto bodě $f_x = f_y = 0$, platí:

I. Je-li $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$, má f v tomto bodě ostrý lokální extrém (minimum pro $f_{xx} > 0$, maximum pro $f_{xx} < 0$).

II. Je-li $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$, nemá f v tomto bodě lokální extrém. $\left(\text{Píši } f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \text{ a pod.}\right)$

Cvičení

1. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3yz - 3zx$. Vyjde jediný lokální extrém: ostré minimum pro $x = y = z = 2$.

2. $f(x, y, z, u) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3yz - 3zx$. Z cvič. 1 ihned plyne: v bodech $[2, 2, 2, u]$ (u libovolné) je neostré lokální minimum; jiných lokálních extrémů není.

§ 3. Vázané extrémy. V tomto paragrafu užiji počítání s totálními diferenciály (viz kap. VII), ježto tím nabudou početní pravidla zvláště jednoduchého tvaru. Budiž dána funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ a s funkcí $(0 < s < r)$ $g_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, g_s(x_1, \ldots, x_r)$. Znakem M označme množinu všech bodů $[x_1, \ldots, x_r]$, vyhovujících rovnicím

$$g_1(x_1, \ldots, x_r) = 0, \ldots, g_s(x_1, \ldots, x_r) = 0\,. \tag{13}$$

Budeme hledati lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M; mluvívá se také o „lokálních extrémech funkce f, vázaných podmínkami (13)“. Výsledek je dán touto větou:

Věta 217. *Funkce*

$$f(x_1, \dots, x_r),\ g_1(x_1, \dots, x_r), \dots, g_s(x_1, \dots, x_r) \quad (0 < s < r) \tag{14}$$

nechť mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině $E \subset \mathsf{E}_r$. *V každém bodě množiny* E *nechť má matice*

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial g_s}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial g_s}{\partial x_r} \end{matrix} \tag{15}$$

hodnost s. *Budiž* M *množina všech bodů* $[x_1, \dots, x_r]$, *jež vyhovují rovnicím* (13). *Potom platí:*

I. Má-li funkce f *v nějakém bodě* $a = [a_1, \dots, a_r] \in E$ *lokální extrém vzhledem k* M, *existují reálná čísla* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *tak, že jest*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, r)\,, \tag{16}$$

$$g_k(a) = 0 \quad (k = 1, \dots, s)\,. \tag{17}$$

II. Je-li $a \in E$ *bod a* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *čísla, pro které platí* (16), (17), *a mají-li funkce* (14) *v bodě* a *totální diferenciál 2. řádu, sestrojme kvadratickou formu v proměnných* $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_r$

$$\Psi(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_r) = \sum_{j,m=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j\, \partial x_m} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial^2 g_k(a)}{\partial x_j\, \partial x_m} \right) \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}x_m\,. \tag{18}$$

Ježto matice (15) *má v bodě* a *hodnost* s, *jest aspoň jeden její* s*-řadový determinant v bodě* a *různý od nuly; budiž na př.*

$$\left(\frac{D(g_1, \dots, g_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \right)_{[a_1, \dots, a_r]} \neq 0\,.\text{[5]} \tag{19}$$

Napišme s *rovnic*

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l}\, \mathrm{d}x_l = 0 \quad (k = 1, \dots, s)\,, \tag{20}$$

vypočtěme z nich $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_s$[5]) *jako lineární formy v proměnných* $\mathrm{d}x_{s+1}, \dots, \mathrm{d}x_r$ *a dosaďme tyto lineární formy do* Ψ *za* $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_s$. *Tím*

[5]) Kdyby byl determinant (19) roven nule, musil bych místo $x_1, \dots, x_s$ psáti jiné proměnné $x_{m_1}, \dots, x_{m_s}$.

přejde Ψ v kvadratickou formu $\Phi(\mathrm{d}x_{s+1}, \dots, \mathrm{d}x_r)$ proměnných $\mathrm{d}x_{s+1}, \dots$ $\dots, \mathrm{d}x_r$. Je-li tato forma Φ positivně (negativně) definitní, má f v bodě a vzhledem k M ostré lokální minimum (maximum); je-li indefinitní, nemá f v bodě a vzhledem k M lokální extrém.

Poznámka 1. Věta 217 je dlouhá, ale snadno se pamatuje: Sestrojím funkci

$$K(x_1, \dots, x_r) = f(x_1, \dots, x_r) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_r)$$

s konstantami $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ zatím neurčenými. S funkcí K zacházím pak obdobně jako v § 2 s funkcí f: napřed najdu ty body, v nichž — při vhodné volbě čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — je

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial K}{\partial x_r} = 0\,,$$

při čemž se ovšem omezuji na ty body, v nichž platí (13). Najdu-li takový bod, sestrojím formu Ψ, t. j. totální diferenciál

$$\mathrm{d}^2K = \sum_{j,h=1}^{r} \frac{\partial^2 K}{\partial x_j\, \partial x_h}\, \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}x_h\ ;$$

zde však nenechám všechny proměnné $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_r$, nýbrž použiji vztahů, plynoucích diferencováním rovnic (13)*:*

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial x_l}\, \mathrm{d}x_l = 0 \quad (k = 1, \dots, s)\,;$$

z těchto rovnic vypočtu s z hodnot $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_r$ pomocí ostatních $r - s$; dosazením do d^2K dostanu kvadratickou formu Φ v $r - s$ proměnných, a pro extrém platí nyní totéž pravidlo jako ve větě 216. Vezměme ihned příklad.

Příklad 1. Nalézti lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, vázané podmínkou $g(x, y) = 0$, kde $g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y$. Především: náš postup by selhal v bodech, v nichž $g = 0$, $g_x = 0$, $g_y = 0$, t. j. $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$, $x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, ale takové body neexistují (pro $x = 1$, $y = -1$ je $g(x, y) \neq 0$). Postupuji tedy bez obav dále: napíši rovnice

$$2x + 2\lambda(x - 1) = 0,\ 4y + 4\lambda(y + 1) = 0,\ x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0.$$

První dvě dávají $\lambda \neq -1$, $x = \lambda : (1 + \lambda)$, $y = -\lambda : (1 + \lambda)$, třetí pak dává $-3\lambda^2 - 6\lambda = 0$, tedy $\lambda = 0$ nebo $\lambda = -2$. Tedy máme dvě řešení: $\lambda = 0$, $x = y = 0$; $\lambda = -2$, $x = 2$, $y = -2$. Sestrojím totální diferenciál druhého řádu funkce $K = f + \lambda g$:

$$d^2K = 2(1 + \lambda)\, dx^2 + 4(1 + \lambda)\, dy^2 .$$

Z rovnice $dg(x, y) = 0$, t. j. $2(x - 1)\, dx + 4(y + 1)\, dy = 0$ plyne v prvním případě ($x = y = 0$) i v druhém ($x = -y = 2$) $dx = 2dy$, takže v prvním případě ($\lambda = 0$) máme $d^2K = 12dy^2$, v druhém ($\lambda = -2$) $d^2K = -12\, dy^2$, takže v bodě $[0, 0]$ máme ostré lokální minimum (což bylo i přímo patrno), v bodě $[2, -2]$ ostré lokální maximum vzhledem k množině M, dané podmínkou $g(x, y) = 0$.

Důkaz věty 217. Budiž $a = [a_1, \ldots, a_r] \in E$ nějaký bod množiny M, takže platí rovnice (17). Ježto má matice (15) v bodě a hodnost s, je aspoň jeden s-řadový determinant různý od nuly; nechť platí třeba (19). Podle věty 210 platí pak: existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ s touto vlastností: Ke každému bodu $[x_{s+1}, \ldots, x_r]$ intervalu

$$|x_m - a_m| < \delta \quad (m = s + 1, \ldots, r)$$

existuje v intervalu

$$|x_k - a_k| < \Delta \quad (k = 1, \ldots, s)$$

jeden a jen jeden bod $[x_1, \ldots, x_s]$ tak, že platí (13) (t. j. tak, že bod $[x_1, \ldots, x_r]$ leží v M). Označím-li tyto hodnoty $x_1, \ldots, x_s$ znaky

$$(21) \qquad x_k = \varphi_k(x_{s+1}, \ldots, x_r) \quad (k = 1, \ldots, s)\,,$$

jsou funkce φ_k (i jejich derivace 1. řádu) spojité v okolí bodu $[a_{s+1}, \ldots$ $\ldots, a_r]$ a jest $\varphi_k(a_{s+1}, \ldots, a_r) = a_k$ (viz pozn. 2 v kap. VIII, § 1).

Z toho je ihned patrno: místo, abychom vyšetřovali lokální extrémy funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ v bodě $[a_1, \ldots, a_r]$ vzhledem k množině M, můžeme vyšetřovati lokální extrémy funkce

$$(22) \quad F(x_{s+1}, \ldots, x_r) = f(\varphi_1(x_{s+1}, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_{s+1}, \ldots, x_r), x_{s+1}, \ldots, x_r)$$

v bodě $\alpha = [a_{s+1}, \ldots, a_r]$ [6]) (teď již bez jakéhokoliv dodatku „vzhledem

[6]) To plyne bezprostředně z této poznámky: Bod $[x_1, \ldots, x_r]$ leží v M „velmi blízko" bodu $[a_1, \ldots, a_r]$ tehdy a jen tehdy, je-li $x_k = \varphi_k(x_{s+1}, \ldots, x_r)$ pro $k = 1, \ldots, s$, a leží-li bod $[x_{s+1}, \ldots, x_r]$ „velmi blízko" bodu $[a_{s+1}, \ldots, a_r]$. Promyslete si to podrobně!

k M" nebo podobně). K řešení tohoto úkolu užijeme pak vět § 2. Jest

$$(23)\qquad \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial f(a)}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_l(\alpha)}{\partial x_m} \quad (m = s + 1, \dots, r),$$

$$(24)\qquad \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_l(\alpha)}{\partial x_m} = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, \dots, s \\ m = s + 1, \dots, r \end{pmatrix}.$$

I. Ptejme se předně, kdy jsou splněny podmínky

$$(25)\qquad \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_{s+1}} = \dots = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_r} = 0 .$$

Existuje jeden a jen jeden systém čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (reálných) tak, že jest

$$(26)\qquad \frac{\partial f(a)}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l} = 0 \quad (l = 1, \dots, s);$$

to plyne z nerovnosti (19). Volíme-li tak $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, plyne z rovnic (23), (24) (k-tou rovnici (24) násobíme λ_k a sečteme)

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \varphi_l(\alpha)}{\partial x_m} \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l} \right)$$

($m = s + 1, \dots, r$). Podle (26) plyne odtud:

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_m} \quad (m = s + 1, \dots, r).$$

Tedy: rovnice (25) platí tehdy a jen tehdy, lze-li nalézti reálná $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že rovnice (26) platí nejenom pro $l = 1, \dots, s$, nýbrž i pro $l = s + 1, \dots, r$; tím je tvrzení I dokázáno.

II. Nechť existují reálná $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že platí (16) a nechť funkce (14) mají v bodě a totální diferenciál 2. řádu, takže (podle věty 211, II) také funkce v (21) mají v bodě $\alpha = [a_{s+1}, \dots, a_r]$ totální diferenciál 2. řádu. Podle pravidla o totálních diferenciálech složených funkcí je tedy

$$(27)\qquad \mathrm{d}F = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j$$

v jistém okolí bodu α, a v bodě α samotném máme

$$(27a)\qquad \mathrm{d}^2F = \sum_{j,m=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_m} \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_m + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}^2 x_j ;$$

při tom dx_j, d^2x_j pro $j = 1, \ldots, s$ značí diferenciály funkcí (21); že je $d^2x_{s+1} = \ldots = d^2x_r = 0$, nám ovšem nevadí. V (27) ovšem do $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jest za $x_1, \ldots, x_s$ dosaditi funkce (21), obdobně v (27a); ježto $\varphi_j(\alpha) = a_j$ pro $j = 1, \ldots, s$, znamená to, že v (27a) se berou hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_m}$ v bodě a; diferenciály dx_j, d^2x_j pro $j = 1, \ldots, s$ (t. j. $d\varphi_j$, $d^2\varphi_j$) jest v (27a) bráti v bodě α. Podobně z rovnic (13) $g_k(x) = 0$ $(k = 1, \ldots, s)$, kde opět $x_1, \ldots, x_s$ značí funkce (21), plyne v jistém okolí bodu α

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} dx_j = 0 \tag{28}$$

a v bodě α samotném

$$0 = \sum_{j,m=1}^{r} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j \, \partial x_m} dx_j \, dx_m + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} d^2x_j \quad (k = 1, \ldots, s)\,. \tag{29}$$

Násobím-li k-tou rovnici (29) číslem λ_k a přičtu k (27a), obdržím podle (16)

$$d^2F(\alpha) = \sum_{j,m=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \, \partial x_m} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial^2 g_k(a)}{\partial x_j \, \partial x_m} \right) dx_j \, dx_m \,.^{7)} \tag{30}$$

Tato rovnice platí pro všechny hodnoty $dx_{s+1}, \ldots, dx_r$; při tom jsou $dx_1, \ldots, dx_s$ lineární formy v $dx_{s+1}, \ldots, dx_{s+r}$, jež lze (vzhledem k nerovnosti (19)) vypočísti z (28) (kamž je do funkcí $\frac{\partial g_k}{\partial x_j}$ dosazeno $x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r$). Tím dostaneme $d^2F(\alpha)$ vyjádřeno jako právě onu kvadratickou formu Φ, o níž se mluví v tvrzení II věty 217. Z věty 216 pak okamžitě plyne správnost tvrzení II.

Poznámka 2. Postup udaný větou 217 je zcela symetrický: kdyby se determinant (19) rovnal nule, počítal bych z (28) prostě jiné diferenciály než $dx_1, \ldots, dx_s$.

Příklad 2. Hledejme extrémy funkce $f(x_1, \ldots, x_r, y) = y$, vázané podmínkou

$$g(x_1, \ldots, x_r, y) = 0 \tag{31}$$

[7]) Vlastně jsem měl psáti $dx_j(\alpha)\, dx_m(\alpha)$.

(jde tedy v podstatě o extrémy implicitní funkce $y = \varphi(x_1, \ldots, x_r)$, definované rovnicí (31); ale náš problém je o něco obecnější, viz dále pozn.[8])). Při tom se omezíme na body jisté otevřené množiny $E \subset \mathsf{E}_{r+1}$ a předpokládáme: v každém bodě množiny E má g totální diferenciál 2. řádu a aspoň jedno z čísel $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_r}, \frac{\partial g}{\partial y}$ je různé od nuly.[8])

Rovnice (16) jsou teď $\lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = \ldots = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_r} = 1 + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, což dává $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial g}{\partial x_r} = 0$, $\lambda = -1 : \frac{\partial g}{\partial y}$. Hledají se tedy ony body, v nichž $g = \frac{\partial g}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial g}{\partial x_r} = 0$. Kvadratická forma Ψ z věty 217 je nyní

$$\lambda \left(\sum_{j,m=1}^{r} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \, \partial x_m} \, \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_m + 2 \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \, \partial y} \, \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \, \mathrm{d}y^2 \right).$$

Ve vyšetřovaném bodě je $\frac{\partial g}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial g}{\partial x_r} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, takže z rovnice $\frac{\partial g}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_r} \mathrm{d}x_r + \frac{\partial g}{\partial y} \mathrm{d}y = 0$ plyne $\mathrm{d}y = 0$. Forma, jež rozhoduje o extrému, je tedy (ježto záleží jen na znamení) tato forma v $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$:

$$\mp \sum_{j,m=1}^{r} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \, \partial x_m} \, \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_m ;$$

znamení horní platí pro $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$, dolní pro $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$.

Poznámka 3. Věty § 2, 3 nesmíme přeceňovati, ale také ne podceňovati. Množina M zde byla dána rovnicemi (13), ale často bývá množina M dána nerovnostmi (nebo rovnicemi a nerovnostmi). Budiž na př. M „půlkruh“ v E_2:

$$M = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (x^2 + y^2 \leqq 1, \quad y \geqq 0)$$

a hledejme největší hodnotu funkce $f(x, y)$ v množině M (f nechť má v jistém okolí množiny M spojité derivace 2. řádu). V bodech c,

[8]) Připouštím tedy po příp. též body, v nichž $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

v nichž f nabývá této největší hodnoty, má f lokální maximum vzhledem k M (a tedy též vzhledem ke každé množině $N \subset M$, pokud $c \in N$). M je zde ovšem dáno nerovnostmi. Ale přes to lze užíti vět § 2, 3. Abychom našli body $c \in M$, v nichž f má největší hodnotu, hledejme A) vnitřní body M, v nichž f má lokální maximum; B) body oblouku $x^2 + y^2 = 1, y > 0$, v nichž f má lok. maximum vzhledem ke kružnici $x^2 + y^2 = 1$; C) lokální maxima funkce $f(x, 0)$ $(-1 < x < 1)$; a k těmto bodům přidejme ještě D) body $[-1, 0]$, $[1, 0]$. Hledané body c jsou mezi těmito body obsaženy. Při tom často vystačíme s větou 215 a s částí I věty 217 (t. j. nemusíme vyšetřovati příslušnou kvadratickou formu).[9]) Ukážeme na příkladě, jak postupovati.

Příklad 3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

v množině M, dané podmínkami

$$0 \leqq x \leqq 3\,, \quad 0 \leqq y \leqq 2x^2\,.$$

Ježto M je kompaktní (t. j. omezená a uzavřená), existuje tato největší a nejmenší hodnota (věta 170). Načrtněte si M!

I. Jestliže f nabývá své největší nebo nejmenší hodnoty v některém vnitřním bodě množiny M, musí v tomto bodě býti $f_x = 3x^2 - 3y = 0$, $f_y = 3y^2 - 3x = 0$; odtud ihned $x^4 = x$, tedy buďto $x = 0$ (odpadá, ježto by to nebyl vnitřní bod) nebo $x = 1$, načež $y = x^2 = 1$. To je vnitřní bod M; jest $f(1, 1) = -1$.

II. Jestliže f nabývá své největší nebo nejmenší hodnoty na oblouku paraboly $y = 2x^2$, $0 < x < 3$, musí pro příslušné x míti funkce

$$f(x, 2x^2) = x^3 + (2x^2)^3 - 3x\,.\,2x^2$$

lokální extrém,[10]) tedy musí býti $48x^5 - 15x^2 = 0$. Ježto má být $0 < x < 3$, přichází v úvahu jediný bod $[x_0, 2x_0^2]$, kde $x_0^3 = \frac{5}{16}$, $f(x_0, 2x_0^2) = -\frac{25}{32}$.

[9]) T. j. zjistíme pouze body „podezřelé“ z extrémů a nemusíme zjišťovati, zda v nich lokální extrém skutečně nastane.

[10]) Ježto velmi snadno dosadíme do $f(x, y)$ hodnotu $y = 2x^2$, nepočítáme zde extrémy funkce $f(x, y)$, vázané podmínkou $y - 2x^2 = 0$, podle věty 217, nýbrž dosazujeme přímo $y = 2x^2$ do $f(x, y)$.

III. Pro $y = 0$, $0 < x < 3$ má funkce $f(x, 0) = x^3$ derivaci $3x^2 \neq 0$.

IV. Pro $x = 3$, $0 < y < 18$ dostáváme funkci $27 + y^3 - 9y$, jež může míti lokální extrém jen v bodě $y = \sqrt{3}$.

Největší a nejmenší hodnoty může tedy $f(x, y)$ v množině M nabýti jenom v některém z těchto šesti bodů: $[1, 1]$, $[x_0, 2x_0^2]$, $[3, \sqrt{3}]$, $[0, 0]$, $[3, 0]$, $[3, 18]$. Snadno zjistíte, že z šesti hodnot funkce v těchto bodech je největší $f(3, 18) = 5697$, nejmenší $f(1, 1) = -1$. Tím je úkol rozřešen. Vidíte, že jsme vůbec nemusili vyšetřovat, zda v oněch bodech existují lokální extrémy.[11])

Cvičení

1. Funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ má právě jeden lokální extrém, vázaný podmínkou

$$(32) \qquad x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - 1 = 0\,,$$

totiž ostré lok. maximum pro $x = y = z = 6^{-\frac{1}{3}}$. Ostatní „podezřelé“ body $[\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, 0]$, $[\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, 0, \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}]$, $[0, \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}]$ nedávají lokální extrémy. (Žádný bod množiny (32) není třeba vylučovat.)

2. Ve smyslu příkl. 2 najdete, že funkce $f(x, y, z) = z$ má jediný lokální extrém, vázaný podmínkou

$$(33) \qquad \tfrac{1}{2}x^2 + xy + y^2z + z^5 = 1\,,$$

a to ostré lok. maximum v bodě $x = y = 0$, $z = 1$. (Žádný bod množiny (33) není třeba vylučovat.)

3. V příkl. 1 je množina $g(x, y) = 0$ omezená (a ovšem uzavřená), ježto $g(x, y) = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 - 3$. Z toho a z výsledku příkl. 1 plyne, že na množině $g = 0$ má f největší hodnotu 12 (pouze v bodě $[2, -2]$) a nejmenší hodnotu 0 (pouze v bodě $[0, 0]$).

4. Množiny (32), (33) jsou uzavřené, ale funkce $x + y + z$ resp. z nenabývá v (32) resp. (33) nejmenší hodnoty. Tedy tyto množiny nejsou omezené. To zjistíte ostatně též velmi snadno přímo.

---

[11]) Z výsledku je ovšem patrno, že v bodě $[3, 18]$ je ostré lokální maximum vzhledem k M, v bodě $[1, 1]$ ostré lokální minimum (dokonce vzhledem k E_2).