KAPITOLA VIII.

IMPLICITNÍ FUNKCE

V této kapitole platí tytéž úmluvy jako ty, které jsme uvedli v úvodu ke kap. VII, pouze s tím závažným rozdílem, že se zde omezujeme pouze na **reálné** konečné funkce reálných proměnných.

§ 1. Základní věta o implicitních funkcích. Prohlédněte si v **DI** kapitolu XIV, v níž jsme se zabývali rovnicí $F(x, y) = 0$. Zde se budeme obecněji zabývati řešením soustavy rovnic

(1) $F_1(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0, \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0$;

jako v **DI** vyjdeme z nějakého bodu, v němž tyto rovnice jsou splněny, a budeme se snažiti vypočísti v jistém okolí tohoto bodu $y_1, \ldots, y_s$ jako funkce $x_1, \ldots, x_r$. Uveďme napřed tuto větu:

Věta 210. *Buďte r, s přirozená čísla. Budiž dán bod $\alpha = [a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s]$. Funkce $F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ $(j = 1, \ldots, s)$ nechť mají v jistém okolí bodu α spojité parciální derivace až do n-tého řádu, kde $n \geqq 1$ (po příp. spojité parciální derivace všech řádů). Budiž*

(2) $$F_j(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s)\,,$$

(3) $$\left(\frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(y_1, \ldots, y_s)}\right)_{[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s]} \neq 0\,.$$

Budiž konečně $\Delta_0 > 0$. Potom existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ $(\delta < \Delta_0, \Delta < \Delta_0)$ s těmito vlastnostmi: Ke každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_r]$ intervalu

(4) $$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \ldots \times (a_r - \delta, a_r + \delta)$$

existuje v intervalu $(b_1 - \Delta, b_1 + \Delta) \times \ldots \times (b_s - \Delta, b_s + \Delta)$ jeden a jen jeden bod $[y_1, \ldots, y_s]$ tak, že platí rovnice (1). Souřadnice $y_1, \ldots, y_s$ tohoto bodu jsou tedy funkcemi bodu x; píšeme-li $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_r)$ $(j = 1, \ldots, s)$, mají funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ v intervalu (4) spojité parciální derivace až do řádu n-tého (po příp. spojité parciální derivace všech řádů).

Poznámka 1. Věta 210 je zobecněním věty 179 z **DI**, kde jsme vyšetřovali případ $r = s = 1$. Číslo Δ_0 jsme zavedli do věty 210 jen proto, aby bylo patrno, že se můžeme předem omeziti na libovolně malé okolí bodu α. Místo věty 210 dokážeme však tuto obecnější větu:

Věta 211. *Buďte r, s přirozená čísla. Budiž dán bod $\alpha = [a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s]$. Funkce $F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ $(j = 1, \ldots, s)$ nechť jsou spojité v jistém okolí bodu α a nechť mají v tomto okolí parciální derivace prvního řádu podle proměnných $y_1, \ldots, y_s$. Funkce $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ $(j, k = 1, \ldots, s)$ buďte spojité v bodě α. Dále nechť platí* (2), (3). *Budiž konečně $\Delta_0 > 0$. Potom platí:*

I. Existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ $(\delta < \Delta_0, \Delta < \Delta_0)$ tak, že ke každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_r]$ intervalu

$$J: \qquad |x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_r - a_r| < \delta \text{ }^{1)}$$

existuje v intervalu

$$K: \qquad |y_1 - b_1| < \Delta, \ldots, |y_s - b_s| < \Delta$$

jeden a jen jeden bod $y = [y_1, \ldots, y_s]$ tak, že jsou splněny rovnice (1). *Souřadnice $y_1, \ldots, y_s$ tohoto bodu jsou tedy funkcemi bodu x; pišme*

$$y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_r) \quad (j = 1, \ldots, s)\,; \tag{5}$$

potom funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ jsou spojité v intervalu J.

II. Je-li $c = [c_1, \ldots, c_r] \in J$ a mají-li funkce $F_1, \ldots, F_s$ parciální diferenciál n-tého řádu $(n \geqq 1)$ vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_q$, $y_1, \ldots, y_s$ $(1 \leqq q \leqq r)$ v bodě $[c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_s] = g$ (kde klademe

$$d_j = \varphi_j(c_1, \ldots, c_r) \tag{6}$$

pro $j = 1, \ldots, s$), mají též funkce φ_j $(j = 1, \ldots, s)$ v bodě c parciální diferenciál n-tého řádu vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_q$. Každá parciální derivace

$$\frac{\partial^n \varphi_j(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_q^{k_q}} \tag{7}$$

(v bodě c) má tvar

$$\left(\frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(y_1, \ldots, y_s)}\right)^{-p} . \, W \quad (p > 0 \text{ celé}), \tag{8}$$

[1]) Toto označení značí ovšem: J je množina oněch bodů $[x_1, \ldots, x_r]$, pro něž platí napsané nerovnosti, t. j. $J = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \ldots \times (a_r - \delta, a_r + \delta)$. Podobného označení budeme často užívati.

kde W je mnohočlen ve výrazech

$$(9) \qquad \frac{\partial^l F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_q^{t_q} \partial y_1^{v_1} \ldots \partial y_s^{v_s}} \qquad (0 < l \leqq n)\,;$$

při tom se derivace funkcí F_j počítají ovšem v bodě g. Koeficienty polynomu W závisí jen na r, s, q, $k_1, \ldots, k_q$ (nikoli tedy na bodu c ani na tvaru funkcí F_j).

Poznámka 2. Jest ovšem $\varphi_j(a_1, \ldots, a_r) = b_j$; neboť v intervalu K existuje podle tvrzení I jeden a jen jeden bod $[y_1, \ldots, y_s]$ takový, že $F_j(a_1, \ldots, a_r, y_1, \ldots, y_s) = 0$ pro $j = 1, \ldots, s$; ale podle (2) má právě bod $[b_1, \ldots, b_s]$ tuto vlastnost.

Poznámka 3. Všimněte si, že tvrzení I (existence, jednoznačnost a spojitost funkcí φ_j) nevyžaduje žádných předpokladů o derivacích nebo diferenciálech funkcí F_j vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_r$; ty potřebujeme teprve tehdy, chceme-li zaručiti existenci parciálních derivací a diferenciálů funkcí φ_j. Pro $q = r$ běží v tvrzení II o totální diferenciály.

Poznámka 4. Z tvrzení II a ze spojitosti funkcí φ_j je patrno: jsou-li derivace (9) spojité v okolí bodu α, jsou derivace (7) též spojité v okolí bodu $[a_1, \ldots, a_r]$. Věta 210 je tedy důsledkem věty 211.

Poznámka 5. Že jsme v tvrzení II vzali prvních q proměnných $x_1, \ldots, x_q$, není (vzhledem k symetrii předpokladů) žádným omezením obecnosti: mohli bychom vzíti též kterékoliv jiné z proměnných $x_1, \ldots, x_r$.

Poznámka 6. Při provádění důkazu pamatujte, že z existence parciálních diferenciálů plyne záměnnost příslušných parciálních derivací (proto se lze na př. v tvrzení II omeziti na derivace tvaru (7), (9), v nichž již pořádek derivování je předepsán).

Důkaz věty 211. Budeme značiti body v E_r a v E_s často jedním písmenem, na př. $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $y = [y_1, \ldots, y_s]$, načež $[x, y]$ bude značit bod $[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s] \in \mathsf{E}_{r+s}$; na př. píšeme $a = [a_1, \ldots, a_r]$, $b = [b_1, \ldots, b_s]$, načež $\alpha = [a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s] = [a, b]$. Píši ovšem také $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ a pod. Znakem σ_1 budu značiti tuto metriku v E_s: $\sigma_1(y, z) = \max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |y_j - z_j|$.

Znakem c_{jk} značme hodnotu derivace

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_k} \tag{10}$$

v bodě α. Podle předpokladu (3) jest

$$C = \begin{vmatrix} c_{11}, \ldots, c_{1s} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{s1}, \ldots, c_{ss} \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{11}$$

Ježto funkce (10) jsou spojité v bodě α, existuje číslo Δ_1 $(0 < \Delta_1 < \Delta_0)$ tak, že ve všech bodech intervalu

$$|x_i - a_i| < \Delta_1 \ (i = 1, \ldots, r) , \ |y_j - b_j| < \Delta_1 \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{12}$$

jest

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(y_1, \ldots, y_s)} \neq 0 ; \tag{13}$$

zvolme takové Δ_1. Mimo to volme Δ_1 tak malé, aby všechny funkce F_j byly spojité a měly parciální derivace prvního řádu podle $y_1, \ldots, y_s$ v intervalu (12).

Důkaz tvrzení I. Položme

$$H_j(x, y) = c_{j1}y_1 + \ldots + c_{js}y_s - F_j(x, y) \quad (j = 1, \ldots, s) , \tag{14}$$

takže rovnice (1) značí totéž jako rovnice

$$c_{j1}y_1 + \ldots + c_{js}y_s = H_j(x, y) \quad (j = 1, \ldots, s) . \tag{15}$$

Jest

$$\frac{\partial H_j}{\partial y_k} = c_{jk} - \frac{\partial F_j}{\partial y_k} ,$$

takže jest

$$\frac{\partial H_j}{\partial y_k} = 0 \quad \text{v bodě } \alpha \quad (j, k = 1, \ldots, s) . \tag{16}$$

Rovnice (15) jsou splněny tehdy a jen tehdy, je-li[1])

$$y_j = \sum_{k=1}^{s} \frac{C_{kj}}{C} H_k(x, y) \quad (j = 1, \ldots, s) , \tag{17}$$

[1]) Viz Kořínkovu knihu o algebře nebo Bydžovského knihu o determinantech a maticích, uvedené v předmluvě.

kde C_{kj} je doplněk prvku c_{kj} v determinantu (11). Pravou stranu rovnice (17) označme $G_j(x, y)$, takže místo rovnic (15) stačí vyšetřovati rovnice

$$y_j = G_j(x, y) \quad (j = 1, \ldots, s)\,, \tag{18}$$

neboť (18) platí tehdy a jen tehdy, platí-li (15). Ježto rovnice $F_j(x, y) = 0$ jsou podle (2) splněny v bodě $[a, b] = \alpha$, platí totéž o rovnicích (18), t. j. platí

$$b_j = G_j(a, b)\,. \tag{19}$$

Funkce G_j splňují ovšem také ony předpoklady o spojitosti a o existenci derivací, jež jsme učinili o funkcích F_j. Mimo to je podle (16) a podle definice funkcí G_j

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_k} = 0 \quad \text{v bodě } \alpha \quad (j, k = 1, \ldots, s)\,. \tag{20}$$

Ježto $\dfrac{\partial G_j}{\partial y_k}$ jsou funkce spojité v bodě $\alpha = [a, b]$ a ježto platí (20), existuje číslo Δ $(0 < \Delta < \Delta_1)$ tak, že v intervalu

$$|x_i - a_i| < \Delta \ (i = 1, \ldots, r)\,, \ |y_j - b_j| < \Delta \quad (j = 1, \ldots, s)$$

jest

$$\left|\frac{\partial G_j(x, y)}{\partial y_k}\right| < \frac{1}{2s} \quad (j, k = 1, \ldots, s)\,. \tag{21}$$

Ježto funkce G_j jsou spojité v intervalu (12), existuje číslo δ $(0 < \delta < \Delta)$ tak, že v intervalu

$$J\colon \quad |x_i - a_i| < \delta \quad (i = 1, \ldots, r)$$

jest

$$|G_j(x, b) - G_j(a, b)| < \tfrac{1}{4}\Delta\,. \tag{22}$$

Označme ještě znakem K interval

$$K\colon \quad |y_j - b_j| < \Delta \quad (j = 1, \ldots, s)\,.$$

Důkaz tvrzení I provedu tak, že jej rozložím na důkaz několika tvrzení.

Tvrzení 𝔄. *Je-li $x \in J$, $y \in K$, $z \in K$, jest*

$$|G_j(x, y) - G_j(x, z)| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma_1(y, z) \quad (j = 1, \ldots, s)\,. \tag{23}$$

Je-li $y = z$, je (23) zřejmá (obě strany jsou rovny nule). Budiž tedy $y \neq z$. Je-li bod x pevně zvolen, jsou $G_j(x, y)$ funkce proměnných $y_1, \ldots, y_s$, mající v intervalu K parciální derivace 1. řádu. Podle věty 182 existují v K body $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(s)}$ tak, že platí

$$G_j(x, y) - G_j(x, z) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial G_j(x, \eta^{(k)})}{\partial y_k} (y_k - z_k) \quad (j = 1, \ldots, s) .$$

Podle (21) je tedy

$$|G_j(x, y) - G_j(x, z)| \leqq \frac{1}{2s} \sum_{k=1}^{s} |y_k - z_k| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma_1(y, z) .$$

Tvrzení $\mathfrak{B}$. *Ke každému $x \in J$ existuje nejvýše jeden bod $y = [y_1, \ldots, y_s] \in K$ takový, že $y_j = G_j(x, y)$ pro $j = 1, \ldots, s$.*

Důkaz. Budiž $y \in K$, $z \in K$, $x \in J$, $y_j = G_j(x, y)$, $z_j = G_j(x, z)$ pro $j = 1, \ldots, s$; máme dokázati, že $y = z$. Podle tvrzení $\mathfrak{A}$ jest pro $j = 1, \ldots, s$

$$|y_j - z_j| = |G_j(x, y) - G_j(x, z)| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma_1(y, z)$$

a tedy

$$\sigma_1(y, z) = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq s} |y_j - z_j| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma_1(y, z) ,$$

odkudž $\tfrac{1}{2}\sigma_1(y, z) \leqq 0$, tedy $\sigma_1(y, z) = 0$, $y = z$.

Tvrzení $\mathfrak{C}$. *Ke každému $x \in J$ existuje bod $Y \in K$ (podle tvrzení $\mathfrak{B}$ jediný) tak, že jest $Y_j = G_j(x, Y)$ pro $j = 1, \ldots, s$.*

Budiž tedy dán bod $x \in J$. K důkazu zavedeme posloupnost bodů $y^0, y^1, y^2, \ldots,$ [3]) při čemž bod

$$y^n = [y_1^n, \ldots, y_s^n]$$

je takto definován:

1. Položím $y^0 = b$, tedy $y_j^0 = b_j$, tedy (viz (19))

$$y_j^0 = G_j(a, y^0) . \tag{24}$$

2. Je-li bod $y^{n-1} \in K$ $(n > 0)$ již definován, definuji bod y^n rovnicemi

$$y_j^n = G_j(x, y^{n-1}) \quad (j = 1, \ldots, s) . \tag{24a}$$

---

[3]) Ve znaku y^n značí ovšem písmeno n index, nikoliv mocnitele.

Tvrdím: *Jest předně*

$$\sigma_1(y^n, y^0) \leqq \tfrac{1}{2}\Delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \textit{pro } n \geqq 0\,, \tag{25}$$

takže $y^n \in K$ (a tedy je definováno $G_j(x, y^n)$, takže rovnic (24a) s hodnotou $n + 1$ místo n lze užíti k definici bodu y^{n+1}). *Za druhé jest*

$$\sigma_1(y^n, y^{n-1}) \leqq \frac{1}{2^{n+1}}\,\Delta \quad \textit{pro } n \geqq 1\,. \tag{26}$$

Důkaz provedu indukcí. Pro $n = 0$ jest (25) správné. Pro $n = 1$ jest podle (24), (24a), (22) pro $j = 1, \ldots, s$

$$|y_j^1 - y_j^0| = |G_j(x, y^0) - G_j(a, y^0)| = |G_j(x, b) - G_j(a, b)| < \tfrac{1}{4}\Delta\,,$$

takže (25), (26) platí pro $n = 1$. Budiž nyní $n \geqq 1$ a budiž (25), (26) již dokázáno pro tuto hodnotu n. Podle (24a), (26) a podle tvrzení $\mathfrak{A}$ jest pro $j = 1, \ldots, s$

$$|y_j^{n+1} - y_j^n| = |G_j(x, y^n) - G_j(x, y^{n-1})| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma_1(y^n, y^{n-1}) \leqq \leqq \frac{1}{2^{n+2}}\,\Delta\,, \tag{27}$$

takže $\sigma_1(y^{n+1}, y^n) \leqq \frac{1}{2^{n+2}}\,\Delta$. Podle (27), (25) je pak pro $j = 1, \ldots, s$

$$|y_j^{n+1} - y_j^0| \leqq |y_j^{n+1} - y_j^n| + |y_j^n - y_j^0| \leqq \tfrac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

takže $\sigma_1(y^{n+1}, y^0) \leqq \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\Delta\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$, takže (25), (26) platí i s hodnotou $n + 1$ místo n.

Podle (26) jest pro každé j a pro $n \geqq 1$

$$|y_j^n - y_j^{n-1}| \leqq \frac{1}{2^{n+1}}\,\Delta\,. \tag{27a}$$

Řada

$$y_j^0 + (y_j^1 - y_j^0) + (y_j^2 - y_j^1) + (y_j^3 - y_j^2) + \ldots\,, \tag{28}$$

mající $(n + 1)$-vý částečný součet y_j^n, je tedy konvergentní, t. j. existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} y_j^n = Y_j \quad \text{pro } j = 1, \ldots, s\,. \tag{29}$$

Podle (25) jest $|y_j^n - y_j^0| < \frac{1}{2}\Delta$, tedy $|Y_j - b_j| \leqq \frac{1}{2}\Delta$, takže bod $Y = [Y_1, \dots, Y_s]$ leží v K a tedy funkce $G_j(x, y)$ jsou — při pevném x — funkce bodu y (t. j. proměnných $y_1, \dots, y_s$), spojité v bodě Y. Ježto platí (29), t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} y^n = Y$, je následkem spojitosti funkcí G_j

$$(30) \qquad \lim_{n\to\infty} G_j(x, y^n) = G_j(x, Y)\,,$$

takže podle (24a) jest pro $j = 1, \dots, s$

$$(31) \qquad Y_j = \lim_{n\to\infty} y_j^n = \lim_{n\to\infty} G_j(x, y^{n-1}) = G_j(x, Y)\,,$$

čímž tvrzení $\mathfrak{C}$ dokázáno.

Čísla y_j^n, Y_j závisí ovšem na bodu x, jsou to tedy funkce x (v oboru J). Při tom $y_j^0 = b_j$ jsou konstantní; jsou-li funkce $y_1^{n-1}, \dots, y_s^{n-1}$ spojité v J, jsou podle (24a) i funkce $y_1^n, \dots, y_s^n$ spojité v J. Tedy (úplná indukce) všechny funkce y_j^n ($j = 1, \dots, s$; $n = 0, 1, \dots$) jsou spojité v J. Ale podle (27a) je řada (28) stejnoměrně konvergentní v J, t. j. konvergence v (29) je stejnoměrná v J. Podle věty 174 I platí tedy

Tvrzení $\mathfrak{D}$. *Funkce $Y_1, \dots, Y_s$ jsou spojité v J.*

Píšeme-li ještě $\varphi_j(x)$ místo $Y_j(x)$, vidíme z tvrzení $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, že tvrzení I věty 211 je dokázáno. Pro $x \in J$ jest

$$(32) \qquad F_j(x_1, \dots, x_r, \varphi_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \varphi_s(x_1, \dots, x_r)) = 0 \quad (j = 1, \dots, s)\,.$$

Důkaz tvrzení II. Intervaly J, K a funkce φ_j mějte význam, jenž byl vytčen v tvrzení I. Vzpomeňme si, že jsme v důkazu tvrzení I volili $\delta < \Delta_1$, $\Delta < \Delta_1$ (viz text v okolí rovnic (12), (21)). Podle (13) platí tedy: je-li $x \in J$, $y \in K$, je

$$\frac{D(F_1, \dots, F_s)}{D(y_1, \dots, y_s)} \neq 0\,.$$

Tvrzení II dokážeme napřed pro $n = 1$. Budiž $c = [c_1, \dots, c_r]$ bod intervalu J; položme $d_j = \varphi_j(c)$ a pišme $g = [c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s]$; předpokládejme že funkce $F_1, \dots, F_s$ mají v bodě g parciální diferenciál 1. řádu vzhledem k $x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_s$. Jest tedy pro $j = 1, \dots, s$

$$
\begin{aligned}
(33)\quad & F_j(c_1 + h_1, \ldots, c_q + h_q, c_{q+1}, \ldots, c_r, d_1 + k_1, \ldots, d_s + k_s) - \\
& - F_j(c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_s) = h_1 \frac{\partial F_j(g)}{\partial x_1} + \ldots + h_q \frac{\partial F_j(g)}{\partial x_q} + k_1 \frac{\partial F_j(g)}{\partial y_1} + \\
& + \ldots + k_s \frac{\partial F_j(g)}{\partial y_s} + (|h_1| + \ldots + |h_q| + |k_1| + \ldots + |k_s|) \,. \\
& . \lambda_j(h_1, \ldots, h_q, k_1, \ldots, k_s) \,,
\end{aligned}
$$

kde λ_j je spojitá v počátku, $\lambda_j(0, \ldots, 0) = 0$.[4])

V dalším bude k_l značiti stále funkci proměnných $h_1, \ldots, h_q$ takto definovanou:

$$
\begin{aligned}
(34)\quad k_l = k_l(h_1, \ldots, h_q) = \varphi_l(c_1 + h_1, \ldots, c_q + h_q, c_{q+1}, \ldots, c_r) - \\
- \varphi_l(c_1, \ldots, c_r)
\end{aligned}
$$

pro $l = 1, \ldots, s$. Ze spojitosti funkcí φ_l plyne, že k_l je spojitá v počátku, $k_l(0, \ldots, 0) = 0$. Pro zkrácení položme

$$
(35)\quad \lambda_j(h_1, \ldots, h_q, k_1(h_1, \ldots, h_q), \ldots, k_s(h_1, \ldots, h_q)) = \mu_j(h_1, \ldots, h_q) \,,
$$

takže μ_j je spojitá v počátku, $\mu_j(0, \ldots, 0) = 0$. Podle (34) jest

$$
(36)\qquad \varphi_l(c_1 + h_1, \ldots, c_q + h_q, c_{q+1}, \ldots, c_r) = d_l + k_l \,,
$$

takže (podle rovnic (32)) je levá a tedy i pravá strana rovnic (33) rovna nule; pro $j = 1, \ldots, s$ je tedy

$$
\sum_{l=1}^{s} k_l \left(\frac{\partial F_j(g)}{\partial y_l} \pm \mu_j(h_1, \ldots, h_q) \right) = - \sum_{m=1}^{q} \left(\frac{\partial F_j(g)}{\partial x_m} \pm \mu_j(h_1, \ldots, h_q) \right) h_m \,,
$$

(37)

kde znaménka $\pm$ se řídí znamením čísel h_m, k_l. Označme pro krátkost znakem D funkční determinant (13) v bodě g a znaky D_{jl} doplňky jeho prvků. Obdobně značme znakem $D(h_1, \ldots, h_q) = D(h)$ determinant prvků

$$
\frac{\partial F_j(g)}{\partial y_l} \pm \mu_j(h_1, \ldots, h_q)
$$

a znaky $D_{jl}(h_1, \ldots, h_q) = D_{jl}(h)$ doplňky jeho prvků.

Jest (při symbolu lim vynechávám nyní znak $[h_1, \ldots, h_q] \to [0, \ldots, 0]$)

$$
(38)\qquad \lim D_{jl}(h) = D_{jl}, \ \lim D(h) = D \neq 0
$$

[4]) Užívám zde jiné normy než v def. 37; podle pozn. 1, 2 v kap. VII, § 2 to nevadí.

(neboť $\lim \mu_j(h) = 0$). Je-li tedy $\max\limits_{1 \leq m \leq q} |h_m|$ dosti malé, plyne z (37) pro $l = 1, \ldots, s$

$$k_l = -\frac{1}{D(h)} \sum_{j=1}^{s} D_{jl}(h) \left(\sum_{m=1}^{q} \left(\frac{\partial F_j(g)}{\partial x_m} \pm \mu_j(h) \right) h_m \right).$$

To však lze zřejmě psáti (za levou stranu dosadíme (34), vpravo užijeme (38) a toho, že $\lim \mu_j(h) = 0$):

$$\varphi_l(c_1 + h_1, \ldots, c_q + h_q, c_{q+1}, \ldots, c_r) - \varphi_l(c_1, \ldots, c_r) =$$
$$= -\frac{1}{D} \sum_{m=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{s} D_{jl} \frac{\partial F_j(g)}{\partial x_m} \right) h_m + o(\|h\|) .^{5})$$

Tedy má funkce φ_l vskutku v bodě c parciální diferenciál 1. řádu vzhledem k $x_1, \ldots, x_q$ a derivace $\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_m}$ mají žádaný tvar

(39) $$\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_m} = -\frac{1}{D} \sum_{j=1}^{s} D_{jl} \frac{\partial F_j(g)}{\partial x_m} .$$

Tím je dokázáno tvrzení II pro $n = 1$; dále postupujeme úplnou indukcí, což jest již snazší.

Budiž tedy tvrzení II dokázáno pro jistou hodnotu $n \geqq 1$; máme dokázati, že II platí též tehdy, píšeme-li v něm $n + 1$ místo n.

Budiž tedy $c = [c_1, \ldots, c_r]$ bod intervalu J; položme $d_j = \varphi_j(c)$, $g = [c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_s]$ a předpokládejme, že funkce

(40) $$F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) \quad (j = 1, \ldots, s)$$

mají v bodě g parciální diferenciál řádu $n + 1$ vzhledem k $x_1, \ldots, x_q$, $y_1, \ldots, y_s$. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ tak, že funkce (40) mají parciální diferenciál řádu n-tého v každém bodě $\zeta = [x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r, y_1, \ldots, y_s]$, pro nějž je[6])

$$|x_m - c_m| < \varepsilon \quad (m = 1, \ldots, q) , \quad |y_j - d_j| < \varepsilon \quad (j = 1, \ldots, s) ;$$

ε volme tak malé, aby každý takový bod ζ ležel v intervalu $J \times K$.

---

[5]) $\|h\| = \max\limits_{1 \leq m \leq q} |h_m|$.

[6]) Uvědomte si, že jde o totální diferenciály funkcí $F_j(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r, y_1, \ldots, y_s)$.

Dále existuje $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon$) s touto vlastností: je-li

$$|x_m - c_m| < \varepsilon_1 \quad (m = 1, \ldots, q)\,, \tag{41}$$

je

$$|\varphi_j(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r) - d_j| < \varepsilon\,. \tag{42}$$

Tedy: platí-li (41), mají funkce (40) parciální diferenciál **řádu n-tého** v bodě

$$[x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r, \varphi_1(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)\,, \ldots \\ \ldots, \varphi_s(x_1, \ldots, c_r)] \tag{43}$$

a podle tvrzení II (s hodnotou n) mají funkce $\varphi_j(x_1, \ldots, x_r)$ v bodě $[x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r]$ parciální diferenciál n-tého řádu (vzhledem k $x_1, \ldots, x_q$) a jejich parciální derivace (7) mají tvar (8). Jde ještě o to, že každá z těchto parciálních derivací (7) má v bodě $c = [c_1, \ldots \ldots, c_r]$ ještě parciální diferenciál 1. řádu a že její parciální derivace 1. řádu podle $x_1, \ldots, x_q$ v bodě c mají žádaný tvar. Podle vět o diferenciálech a derivacích součtu, součinu a podílu (viz kap. VII, § 5, příkl. 2) stačí dokázati totéž pro funkci (9). V této funkci kladu ovšem $x_{q+1} = c_{q+1}, \ldots, x_r = c_r$, $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$, takže jde o totální diferenciál této funkce proměnných $x_1, \ldots, x_q$ v bodě $[c_1, \ldots, c_q]$:

$$\frac{\partial^l F_j(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r, \varphi_1(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r), \ldots, \varphi_s(x_1, \ldots, c_r))}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_q^{t_q}\, \partial y_1^{v_1} \ldots \partial y_s^{v_s}} \tag{44}$$

($0 < l \leqq n$). Ježto funkce $\varphi_j(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$ mají totální diferenciál[7]) v bodě $[c_1, \ldots, c_q]$, ježto $\varphi_j(c) = d_j$ a ježto funkce[8])

$$\frac{\partial^l F_j(x_1, \ldots, x_q, c_{q+1}, \ldots, c_r, y_1, \ldots, y_s)}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_q^{t_q}\, \partial y_1^{v_1} \ldots \partial y_s^{v_s}}$$

má totální diferenciál v bodě $[c_1, \ldots, c_q, d_1, \ldots, d_s]$, má funkce (44) vskutku totální diferenciál v bodě $[c_1, \ldots, c_q]$ a její parciální derivace podle x_m ($1 \leqq m \leqq q$) v tomto bodě jest

$$\frac{\partial^{l+1} F_j(g)}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_q^{t_q}\, \partial y_1^{v_1} \ldots \partial y_s^{v_s}\, \partial x_m} + \sum_{w=1}^{s} \frac{\partial^{l+1} F_j(g)}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial y_s^{v_s}\, \partial y_w} \frac{\partial \varphi_w(c)}{\partial x_m} \tag{45}$$

---

[7]) Řádu n-tého, a tedy též řádu prvního.

[8]) Proměnných $x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_s$.

$(1 < l + 1 \leqq n + 1)$. Ježto $\dfrac{\partial \varphi_w(c)}{\partial x_m}$ se skládá předepsaným způsobem[9]) z funkcí (9) pro $l = 1$, má výraz (45) žádaný tvar. Tím je tvrzení II dokázáno též pro řád $n + 1$ a tedy platí pro každé n. Tím je věta 211 úplně dokázána.

Methoda, kterou jsme dokázali tvrzení I věty 211, se podstatně liší od methody, užité v **DI** (viz důkaz věty 179 v **DI**) pro $r = s = 1$.[10])
Naše nynější methoda spočívá v tomto postupu: Mám řešiti rovnice

$$y_j = G_j(x, y) \quad (j = 1, \ldots, s)\,. \tag{46}$$

Ježto pro $x = a$ je $y = b$ řešením těchto rovnic, bude asi pro body x blízké bodu a bod b aspoň přibližným řešením těchto rovnic. Dosadím proto do pravých stran rovnic (46) $y = y^0 = b$ a určím další přiblížení $y^1 = [y_1^1, \ldots, y_s^1]$ rovnicemi

$$y_j^1 = G_j(x, y^0)\,,$$

další přiblížení $y^2 = [y_1^2, \ldots, y_s^2]$ určím pak z rovnic

$$y_j^2 = G_j(x, y^1)$$

atd. Zjistili jsme pak vskutku, že opakováním (iterováním) tohoto postupu dostáváme vskutku postupně „přibližná" (aproximativní) řešení $y^0, y^1, y^2, \ldots$, konvergující k přesnému řešení Y rovnic (46). Proto se této methodě, jež hraje v analyse (zvláště v řešení rovnic všeho druhu) značnou úlohu, říká methoda *iterací* nebo methoda *postupných aproximací*. Tato methoda se hodí často též k numerickému výpočtu řešení Y. Výpočet aproximací $y^1, y^2, \ldots$ se redukuje na postupné dosazování do funkcí G_j, nerovnost (26) pak dává odhad pro chybu:

$$\begin{aligned}\sigma_1(Y, y^n) &\leqq \sigma_1(y^n, y^{n+1}) + \sigma_1(y^{n+1}, y^{n+2}) + \ldots \leqq \\ &\leqq \Delta(2^{-n-2} + 2^{-n-3} + \ldots) = 2^{-n-1} \,.\, \Delta\,.\end{aligned}$$

K praktickým výpočtům je ovšem třeba methodu upravit. Poznamenejme ještě, že úspěch našeho důkazu spočíval především na nerovnosti (23), kterou lze názorněji přepsati takto: označím-li znakem

[9]) Tvar těchto derivací jsme ostatně explicitně určili v (39).

[10]) K této methodě viz cvič. 6.

$G(x, y)$ bod $[G_1(x, y), \dots, G_s(x, y)]$, lze (23) psáti ve tvaru $\sigma_1(G(x, y), G(x, z)) \leqq \frac{1}{2}\sigma_1(y, z)$. Jinak řečeno: změním-li y, změní se obecně též $G(x, y)$, ale méně; zhruba řečeno: $G(x, y)$ se mění aspoň dvakráte pomaleji než y. Kdybychom byli volili číslo δ menší, byli bychom mohli v (23) nahraditi $\frac{1}{2}$ číslem menším a dosáhnouti tak rychlejší konvergence — ovšem v menším intervalu J.

Poznámka 7. V praxi se počítají parciální derivace „implicitních funkcí" $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ tak, jak to v nejjednodušším případě $r = s = 1$ bylo ukázáno v **DI**, kap. XIV, § 1, pozn. 4. Proveďme to napřed pro $s = 1$, t. j. pro případ jediné rovnice $F(x_1, \dots, x_r, y) = 0$ (pro zkrácení píši F, y, φ místo F_1, y_1, φ_1). Jest

$$F(x_1, \dots, x_r, \varphi(x_1, \dots, x_r)) = 0$$

v jistém okolí bodu $[a_1, \dots, a_r]$, tedy i všechny parciální derivace levé strany jsou v tomto okolí rovny nule. Pokud existují totální diferenciály funkce $F(x_1, \dots, x_r, y)$ příslušného řádu, mohu počítati tyto derivace podle pravidel o derivování složených funkcí.[11]) Píši-li krátce $y, \dfrac{\partial y}{\partial x_k}, \dots$ místo $\varphi(x_1, \dots, x_r), \dfrac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_k}, \dots$, dostávám postupně

$$F(x_1, \dots, x_r, y) = 0\,, \tag{47}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)\,, \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_l\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x_k}\frac{\partial y}{\partial x_l} + \tag{49}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x_k\,\partial x_l} = 0 \quad (k, l = 1, 2, \dots, r)$$

atd. Z rovnic (48) vypočtu derivace 1. řádu $\dfrac{\partial y}{\partial x_k}$, z rovnic (49) potom derivace 2. řádu $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_k\,\partial x_l}$ atd.

Podobně postupujeme v obecném případě (t. j. pro libovolné s).

[11]) Pokud existují pouze parciální diferenciály vzhledem k $x_1, \dots, x_q, y$, smím tohoto postupu užíti na ony derivace, v nichž se nederivuje podle $x_{q+1}, \dots, x_r$.

Píši-li krátce y_j, $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}, \ldots$ místo $\varphi_j(x_1, \ldots, x_r)$, $\frac{\partial \varphi_j(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_k}, \ldots$, jest

(50) $$F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0 \quad \text{pro}\ j = 1, \ldots, s\,;$$

odtud

(51) $$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial F_j}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pro}\ j = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, r\,.$$

Při pevném k dostávám pro $j = 1, \ldots, s$ celkem s lineárních rovnic pro s neznámých $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_s}{\partial x_k}$; odtud lze tyto neznámé počítati, ježto determinant soustavy je (13). Po vypočtení derivací 1. řádu $\frac{\partial y_l}{\partial x_k}$ počítám derivace 2. řádu takto: z (51) plyne

(52) $$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k\, \partial x_h} + \sum_{l=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k\, \partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_h\, \partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k}\right) + \\ &+ \sum_{l,m=1}^{s} \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_l\, \partial y_m}\frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial y_m}{\partial x_h} + \sum_{l=1}^{s}\frac{\partial F_j}{\partial y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_k\, \partial x_h} = 0 \end{aligned}$$

pro $j = 1, \ldots, s$; $k = 1, \ldots, r$; $h = 1, \ldots, r$. Při pevných k, h dostáváme pro $j = 1, \ldots, s$ celkem s lineárních rovnic s determinantem (13) pro s neznámých $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_k\, \partial x_h}, \ldots, \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_k\, \partial x_h}$. Podobně počítáme postupně derivace vyšších řádů. Záměnnost parciálních derivací nám dovoluje zkrácení některých výpočtů.

Místo parciálních derivací funkcí φ_j bychom ovšem mohli počítat také totální diferenciály těchto funkcí; propočtěte si cvičení 3, 4, 5. Vzorce s diferenciály jsou stručnější než vzorce s parciálními derivacemi, a proto se jich často užívá.

Poznámka 8. Funkcím $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ z věty 210 nebo 211 se říkává „implicitní funkce“. Název ne zcela vhodný, ježto se netýká charakteru těchto funkcí, nýbrž pouze toho, jak byly definovány. Vhodnější by tedy bylo říkati: funkce definované implicitně (rovnicemi (1)). Táž funkce může být definována „explicitně“ i „implicitně“; na př. rovnice $y = x^2$ (definující y „explicitně“) znamená totéž jako $(y^3 - x^6)^2 = 0$, t. j. $y^6 - 2y^3x^6 + x^{12} = 0$. Věty tohoto paragrafu jsou velmi důležitým základem, na kterém spočívají mnohé úvahy další (na př. zbytek této kapitoly, celá kap. IX, § 3 v kap. X).

Cvičení

1. Existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému bodu $[x, y]$ intervalu $J = (1 - \delta, 1 + \delta) \times (-1 - \delta, -1 + \delta)$ existuje jedno a jen jedno $z = \varphi(x, y)$ v intervalu $(1 - \Delta, 1 + \Delta)$, jež splňuje rovnici

$$z^2x^4 + y^3z + (x^2 + y^2)\,z^4 - 2 = 0\,;$$

při tom má φ spojité parc. derivace všech řádů v intervalu J; vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pomocí x, y, z; pro kontrolu zjistěte, že v bodě $[1, -1]$ jest $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{9}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{38}{81}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{94}{243}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{208}{729}$.

2. Existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ existuje jedna a jen jedna dvojice čísel $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ tak, že $|y - 1| < \Delta$, $|z - 1| < \Delta$ a že platí rovnice $x^3(y + z) + y^5 + z^4 - 4 = 0$, $x(y - z) + y^4 + z^5 - 2 = 0$; funkce φ, ψ mají derivace všech řádů v $(1 - \delta, 1 + \delta)$; vypočtěte φ', ψ', φ'', ψ'' (pomocí x, y, z); pro kontrolu zjistěte, že $\varphi'(1) = 24$, $\psi'(1) = -30$, $\varphi''(1) = -35916$, $\psi''(1) = 38640$.

V cvič. 3, 4 předpokládám, že jsou splněny předpoklady věty 211 pro $q = r$, takže jde o totální diferenciály; kdyby bylo $0 < q < r$, platily by následující úvahy rovněž, ale symboly dF, dy a pod. by značily příslušné parciální diferenciály.

3. V tomto cvičení jest $s = 1$, takže jde o jedinou rovnici $F(x_1, \ldots, x_r, y) = 0$. Z rovnice $F(x_1, \ldots, x_r, \varphi(x_1, \ldots, x_r)) = 0$ (nebo kratčeji $F(x_1, \ldots, x_r, y) = 0$) lze místo parciálních derivací $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ atd. počítati též totální diferenciály dy atd. takto:[12]) Z hořejší rovnice plyne, že totální diferenciály řádu 1, 2, ... levé strany jsou rovny nule; tedy především

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = 0\,; \tag{53}$$

odtud ihned vypočtete dy jakožto lineární formu v $dx_1, \ldots, dx_r$. Položím nyní druhý diferenciál roven nule:

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta + 2 \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha\, \partial y}\, dx_\alpha\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\, d^2 y = 0\,; \tag{54}$$

uvážíte-li, že dy je lineární forma v $dx_1, \ldots, dx_r$ (za kterou bychom mohli do-

[12]) Při tom ovšem dy, d^2y, ... značí $d\varphi(x_1, \ldots, x_r)$, $d^2\varphi(x_1, \ldots, x_r)$, ...

saditi řešení rovnice (53)), dostanete z (54) ihned d^2y jako kvadratickou formu v $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$.[13]) Podobně dále pro vyšší diferenciály.

4. Podobný, pouze trochu složitější je postup pro s rovnic $F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots \ldots, y_s) = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$. Zde dostávám především s rovnic

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial F_j}{\partial x_\alpha} \mathrm{d}x_\alpha + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \mathrm{d}y_k = 0 \quad (j = 1, \ldots, s)\,, \tag{55}$$

z nichž vypočtu $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_s$ jakožto lineární formy v $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$. Dále dostanu z (55) s rovnic

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} \mathrm{d}x_\alpha\, \mathrm{d}x_\beta + 2 \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_\alpha\, \partial y_k} \mathrm{d}x_\alpha\, \mathrm{d}y_k + \\ &+ \sum_{k,l=1}^{s} \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_k\, \partial y_l} \mathrm{d}y_k\, \mathrm{d}y_l + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \mathrm{d}^2 y_k = 0 \quad (j = 1, \ldots, s)\,. \end{aligned} \tag{56}$$

Uvážíte-li, že $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_s$ jsou lineární formy v $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$, obdržíte řešením s rovnic (56) diferenciály $\mathrm{d}^2y_1, \ldots, \mathrm{d}^2y_s$ jakožto kvadratické formy v $\mathrm{d}x_1, \ldots \ldots, \mathrm{d}x_r$. Podobně pro vyšší diferenciály.

5. Podle návodu cvič. 3 vypočtěte přímo $\mathrm{d}\varphi(x, y)$, $\mathrm{d}^2\varphi(x, y)$ z cvič. 1.

6. Tvrzení I věty 211 lze pro $s = 1$ dokázati za předpokladů obecnějších: Budiž $F(x_1, \ldots, x_r, y)$ funkce, jež se rovná nule v bodě $\alpha = [a_1, \ldots, a_r, b]$. V jistém okolí $\Omega(\alpha, \varrho)$ budiž F spojitou funkcí proměnných $x_1, \ldots, x_r$ při pevném y a spojitou ryze monotonní funkcí proměnné y při pevných $x_1, \ldots, x_r$. Budiž $\Delta_0 > 0$. Ukažte: potom platí tvrzení I věty 211.[14])

7. Je-li $f(a_1, \ldots, a_r) = 0$, jsou-li $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_r}$ spojité v okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_r]$ a je-li v bodě a aspoň jedna z těchto derivací různá od nuly, na př. $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_j} \neq 0$, lze v okolí bodu a vypočísti z rovnice $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ proměnnou x_j (ve smyslu věty 210):

$$x_j = \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_r)\,. \tag{57}$$

Tečná nadrovina ke grafu funkce φ (ve smyslu kap. VII, § 2, pozn. 9) v bodě a [15]) je pak dána rovnicí

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \ldots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_r}(x_r - a_r) = 0\,. \tag{58}$$

---

[13]) Uvědomte si, že (54) platí pro v š e c h n y hodnoty $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$.

[14]) Při důkazu užijte methody z důkazu věty 179 v **DI**.

[15]) Ve smyslu citované pozn. 9 v kap. VII, § 2 bych měl vlastně mluvit o bodu $[a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_r, a_j]$.

Ježto tato rovnice nezávisí na tom, jak jsem zvolil j (až na podmínku $\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} \neq 0$), můžeme nadrovinu (58) nazvati tečnou nadrovinou (v bodě a) k „nadploše" $f(x) = 0$. Tato věc ovšem patří vlastně do diferenciální geometrie a k uspokojivému výkladu by bylo třeba zaujmout více geometrické stanovisko (invariantnost vůči afinní transformaci souřadnic); viz k tomu cvič. 8.

8. Do funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ dosaďte

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{ij}\xi_j + \beta_i \quad (i = 1, \ldots, r)\,, \tag{59}$$

kde γ_{ij}, β_i jsou konstanty a determinant čísel γ_{ij} je různý od nuly; tím dostanete z f novou funkci $F(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Buďte splněny předpoklady cvič. 7; bodu $a = [a_1, \ldots, a_r]$ nechť rovnicemi (59) odpovídá bod $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ (rovnice (59), definující t. zv. afinní transformaci, lze řešit podle $\xi_1, \ldots, \xi_r$). Rovnice $f(x) = 0$ znamená totéž jako $F(\xi) = 0$ (kde stále body x, ξ si jsou navzájem přiřazeny rovnicemi (59)). Ježto $\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_j} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \gamma_{ij}$, zjistíte ihned, že aspoň jedna z derivací $\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \xi_j}$ je různá od nuly. Mohu tedy sestrojiti „tečnou nadrovinu k nadploše $F = 0$ v bodě α" ve smyslu cvič. 7:

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \xi_1}(\xi_1 - \alpha_1) + \ldots + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \xi_r}(\xi_r - \alpha_r) = 0\,. \tag{60}$$

Zjistěte, že rovnice (60) platí tehdy a jen tehdy, platí-li rovnice (58). To je ona invariantnost, o níž jsme se zmínili v cvič. 7: Jestliže transformací (59) přechází funkce $f(x)$ ve funkci $F(\xi)$ a bod a v bod α (kde $f(a) = 0$), přechází touž transformací tečná nadrovina v bodě a k nadploše $f(x) = 0$ v tečnou nadrovinu v bodě α k nadploše $F(\xi) = 0$.

§ 2. Regulární zobrazení. Budiž dáno nějaké zobrazení F z $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$; to značí, že každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_r]$ jisté množiny $A \subset \mathbf{E}_r$ je přiřazen jistý bod $y = [y_1, \ldots, y_r] = F(x)$ prostoru $\mathbf{E}_r$. Jeho souřadnice jsou tedy dány rovnicemi ($f_1, \ldots, f_r$ jsou reálné funkce)

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, y_r = f_r(x_1, \ldots, x_r)\,. \tag{61}$$

Budeme říkati, že toto zobrazení F je **regulární** v množině $M \subset \mathbf{E}_r$, jestliže platí:

1. M je otevřená.
2. Funkce $f_1, \ldots, f_r$ mají parciální derivace prvního řádu, spojité v M.

3. $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} \neq 0$ v každém bodě $x \in M$.

Poznámka 1. Je-li F regulární v M a je-li $N \subset M$, N otevřená, je F též regulární v N. To je zřejmé.

Věta 212. *Zobrazení F otevřené množiny $M \subset \mathbf{E}_r$, dané rovnicemi* (61), *budiž regulární v množině M. Potom platí:*

I. Ke každému bodu $a \in M$ existuje okolí $N \subset M$ bodu a tak, že parciální zobrazení F_N je prosté.

II. Je-li $A \subset M$, A otevřená, je též $F(A)$ otevřená.

III. Je-li F prosté, je inversní zobrazení Φ regulárním zobrazením množiny $F(M)$ na M.

Důkaz. Budiž $a \in M$; položme $b = F(a)$. Rovnice (61) jsou tedy splněny pro $x_i = a_i$, $y_j = b_j$. Píšeme-li tedy tyto rovnice ve tvaru $f_j(x_1, \ldots, x_r) - y_j = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$, můžeme vzhledem k podmínce 3 použíti věty 210, vyměníme-li roli bodů x a y (a klademe $s = r$). Existují tedy otevřené intervaly $J_1 \subset M$, J_2 $(a \in J_1, b \in J_2)$ tak, že ke každému $y \in J_2$ existuje v J_1 jeden a jen jeden bod x, pro nějž platí rovnice (61). Souřadnice tohoto bodu označme

(62) $$x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_r), \ldots, x_r = \varphi_r(y_1, \ldots, y_r)\,;$$

při tom funkce φ_j jsou spojité v J_2 a mají tam spojité parciální derivace 1. řádu.

Zobrazení $x = \Phi_1(y)$, definované v oboru J_2 rovnicemi (62), zobrazuje zřejmě interval J_2 prostě na jistou množinu P, obsaženou v J_1 (a obsahující bod a, ježto $b = F(a)$ a tedy $a = \Phi_1(b)$), a zobrazení Φ_1 je zřejmě inversní k parciálnímu zobrazení F_P. Množina P je zřejmě množina oněch bodů z J_1, jejichž obrazy padnou do J_2, neboli $P = J_1 \,.\, F_{-1}(J_2)$. Ale F je spojité v M, takže podle věty 145 je $F_{-1}(J_2)$ otevřená v M a tedy otevřená v $\mathbf{E}_r$ (ježto M je otevřená v $\mathbf{E}_r$, viz pozn. 22 v kap. VI, § 5). Tedy také P je otevřená. Je to tedy okolí bodu a, jež se zobrazuje na $F(P) = J_2$, což je okolí bodu b. A zřejmě je F prosté v P, čímž je dokázáno tvrzení I. Zároveň je vidět, že $F(P) = J_2$ je okolím bodu b, tedy b je vnitřním bodem množiny $F(M)$. A to platí pro každý bod $b \in F(M)$, neboť každý takový bod b lze psáti ve tvaru $b = F(a)$ při vhodně zvoleném $a \in M$. Tedy $F(M)$

jest otevřená. Aplikuji-li tento výsledek na parciální zobrazení F_A (A otevřená, $A \subset M$), dostávám tvrzení II.

Konečně: Je-li F prosté, existuje inversní zobrazení Φ, jehož oborem je otevřená množina $F(M)$. Zvolím-li libovolný bod $b \in F(M)$, $a = \Phi(b)$, je $b = F(a)$ a vzhledem k tomu, že zobrazení je prosté (t. j. jde o vzájemně jednoznačné přiřazení bodů množin M, $F(M)$), je zobrazení Φ nutně dáno rovnicemi (62), vyšetřovanými výše. Tedy mají funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ (definující zobrazení Φ) v jistém okolí bodu b (libovolného to bodu množiny $F(M)$) spojité parciální derivace 1. řádu. Tedy bude dokázáno i tvrzení III, jakmile dokážeme, že

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(y_1, \ldots, y_r)} \neq 0 \quad \text{v každém bodě } y \in F(M)\,. \tag{63}$$

Ale to je snadné. Budiž $y \in F(M)$ a označme $x = \Phi(y)$, takže $y = F(x)$, t. j. platí rovnice (61), (62). Podle příkl. 2 v kap. VII, § 3 je součin

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(y_1, \ldots, y_r)} \cdot \frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} \tag{64}$$

funkčním determinantem funkcí složených, jež dostaneme, když do $\varphi_j(y_1, \ldots, y_r)$ dosadíme za $y_1, \ldots, y_r$ podle rovnic (61). Ale $\Phi(F(x)) = x$, t. j. $\varphi_j(f_1(x), \ldots, f_r(x)) = x_j$ $(j = 1, \ldots, r)$, takže součin (64) se rovná funkčnímu determinantu $\dfrac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} = 1$; nutně tedy platí (63).

Poznámka 2. Zároveň máme tento výsledek: Definují-li rovnice (61) prosté regulární zobrazení množiny M a rovnice (62) zobrazení inversní, jest

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(y_1, \ldots, y_r)} = 1\,. \tag{65}$$

Při tom x je libovolný bod z M, první činitel znamená funkční determinant funkcí f_j v bodě x, a druhý činitel značí funkční determinant funkcí φ_j v příslušném bodě y (t. j. $y = F(x)$ neboli $x = \Phi(y)$).

Poznámka 3. V příštím paragrafu budeme studovati zobrazení z $\boldsymbol{E}_r$ do $\boldsymbol{E}_s$. Zde jsme se omezili na případ $r = s$, a to na regulární zobrazení. Probral jsem tento případ zvláště — jednak proto, že je jednoduchý, jednak proto, že připouští důležitou geometrickou interpretaci. Všimněme si toho krátce.

Budiž M nějaká množina v E_r a budiž F prosté zobrazení M do E_r, dané rovnicemi

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, y_r = f_r(x_1, \ldots, x_r) \,. \tag{61}$$

Tímto zobrazením je tedy každému bodu $x \in M$ přiřazen jediný bod $y \in N$ (píši $N = F(M)$) a naopak. Je snad dobře oživiti věc tím, že ji trochu přiblížíme názoru. Je-li dáno celé číslo j ($1 \leqq j \leqq r$) a číslo λ, nazveme množinu bodů $x \in M$, vyhovujících rovnici $f_j(x_1, \ldots, x_r) = \lambda$, „nadplochou j-té soustavy, příslušnou k parametru λ"[16]) a označíme ji $P_j(\lambda)$ (je to tedy množina oněch bodů $x \in M$, k nimž příslušné y_j se rovná dané konstantě λ).

To, že F je prosté zobrazení M na $F(M)$, lze popsati takto: Každým bodem $x \in M$ prochází právě jedna nadplocha každé soustavy, totiž nadplochy $P_1(y_1), \ldots, P_r(y_r)$, kde bod $y = [y_1, \ldots, y_r] \in F(M)$ je dán rovnicemi (61). Naopak, je-li dán bod $y \in F(M)$, mají nadplochy $P_1(y_1), \ldots, P_r(y_r)$ v M jediný společný bod x; je to právě onen bod x, pro nějž platí (61). Místo abychom určili bod x přímo jeho „pravoúhlými" souřadnicemi $x_1, \ldots, x_r$, můžeme jej určiti také čísly $y_1, \ldots, y_r$, jimž se také říká proto „křivočaré souřadnice bodu x", a stanoviti potom x z rovnice $x = \Phi(y)$ (kde Φ značí zobrazení inversní k F), t. j. z r rovnic tvaru $x_i = \varphi_i(y)$, $i = 1, \ldots, r$.

Ačkoliv obsah tohoto paragrafu je po theoretické stránce dosti chudý, doporučuji jej pozornosti čtenářově. Jde o věci, se kterými se neustále budeme setkávati. Doporučuji naléhavě čtenáři, aby si obsah tohoto paragrafu pečlivě procvičil na následujících cvičeních.

Cvičení

V následujících cvičeních se ovšem nedržím vždy písmen $x_1, \ldots, x_r$; $y_1, \ldots, y_r$.

1. Zobrazení F, dané rovnicemi

$$x = uv \,, \quad y = \frac{u}{v} \tag{66}$$

má pro $v \neq 0$ funkční determinant

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -\,2\,\frac{u}{v} \,.$$

[16]) Máme tedy celkem r soustav (pro $j = 1, 2, \ldots, r$).

Je to tedy zobrazení regulární v množině M, která vznikne z roviny odstraněním os souřadnicových $u = 0$, $v = 0$. Za předpokladu $u \neq 0$, $v \neq 0$ je patrno, že $xy = u^2 > 0$.

Omezme se napřed na první kvadrant ($u > 0$, $v > 0$). Potom z (66) plyne též $x > 0$, $y > 0$, a naopak plyne z (66) pro dané $x > 0$, $y > 0$ jediné kladné řešení:

$$u = \sqrt{xy}, \quad v = \sqrt{\frac{x}{y}}. \tag{67}$$

Naše zobrazení zobrazuje tedy prostě kvadrant $u > 0$, $v > 0$ na kvadrant $x > 0$, $y > 0$. Díváme-li se na u, v jako na pravoúhlé a na x, y jako na křivočaré souřadnice, jsou parametrické křivky (místo nadplochy říkám zde ovšem křivky) první soustavy větve hyperbol $uv =$ konst ($u > 0, v > 0$), a parametrické křivky druhé soustavy jsou polopřímky $v =$ konst $. u$ ($u > 0, v > 0$). Podobné poměry jsou v „rovině $[x, y]$", t. j. charakterisuji-li bod o pravoúhlých souřadnicích x, y „křivočarými souřadnicemi" u, v. Vyšetřuji-li zobrazení F v celé množině M, je toto zobrazení „jedno — dvojznačné": rovnice (66) mají pro každé x, y ($xy > 0$) dvě řešení:

$$u = \sqrt{xy}, \quad v = \sqrt{\frac{x}{y}}; \quad u = -\sqrt{xy}, \quad v = -\sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{pro } x > 0, \quad y > 0;$$

$$u = \sqrt{xy}, \quad v = -\sqrt{\frac{x}{y}}; \quad u = -\sqrt{xy}, \quad v = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{pro } x < 0, \quad y < 0.$$

Tedy: vždy právě dva body $[u, v]$ z M se zobrazují do téhož bodu $[x, y]$. Vyšetřujeme-li však body $u = 0$, $v \neq 0$,[17]) vidíme, že všechny tyto body se zobrazují do j e d i n é h o bodu $[0, 0]$.

2. Rovnice $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = uv$ jsou, jak víme, splněny tehdy a jen tehdy, jsou-li u, v kořeny rovnice $\alpha^2 - 2x\alpha + y = 0$, t. j. je-li $u = x + \sqrt{x^2 - y}$, $v = x - \sqrt{x^2 - y}$ nebo naopak (vyměním u s v). Z toho je vidět, že toto zobrazení zobrazuje rovinu na množinu oněch bodů $[x, y]$, pro něž je $y \leqq x^2$; přímka $u = v$ se zobrazuje na parabolu $y = x^2$. Množina $M = \underset{[u,v]}{\mathcal{E}} (u > v)$ se zobrazuje prostě a regulárně na množinu $N = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (y < x^2)$. Omezíme-li se na množiny M, N a díváme-li se na u, v jako na pravoúhlé a na x, y jako na křivočaré souřadnice, jsou parametrické křivky jednak polopřímky: $u + v =$ konst, $u > v$, jednak části hyperbol: $uv =$ konst, $u > v$. Díváme-li se naopak na x, y jako na pravoúhlé souřadnice a na u, v jako na křivočaré souřadnice, jsou parametrické křivky obou soustav polopřímkami. Vyšetřete jejich vztah k parabole $y = x^2$.

---

[17]) Které ovšem nepatří do M.

3. Rovnice $x = vw$, $y = wu$, $z = uv$ zobrazují prostě a regulárně první oktant ($u > 0, v > 0, w > 0$) na první oktant ($x > 0, y > 0, z > 0$). Na rovinách souřadnicových ($u = 0$ nebo $v = 0$ nebo $w = 0$) je funkční determinant roven nule. Omezíme-li se vesměs na první oktanty, je řešení hořejších rovnic

$$u = \sqrt{\frac{yz}{x}}, \quad v = \sqrt{\frac{xz}{y}}, \quad w = \sqrt{\frac{xy}{z}}.$$

Prostudujte parametrické plochy. Připouštíte-li libovolná (ne pouze kladná) u, v, w, přestane zobrazení být prosté. Prostudujte to!

4. Zobrazení regulární v otevřené množině M zobrazuje M na otevřenou množinu (podle věty 212). Naproti tomu zobrazení $x = u + w^2$, $y = (u + w^2)^2$ zobrazuje celou rovinu na parabolu $y = x^2$. Funkční determinant je v každém bodě $[u, w]$ roven nule. O takových a složitějších případech pojednáme v příštím paragrafu.

Následující cvičení obsahují zvláště důležitá zobrazení, jednoduchá i složitější. Jde vesměs o prostá zobrazení F otevřené množiny M na otevřenou množinu $F(M)$. Toto zobrazení lze popsati rovnicemi

$$v_i = f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, r), \tag{68}$$

které jsou splněny tehdy a jen tehdy, když

$$x_i = \varphi_i(v) \qquad (i = 1, \ldots, r), \tag{69}$$

při čemž rovnice (69) vyjadřují inversní zobrazení Φ ($x = \Phi(v)$). Uvažte toto: Mají-li funkce f_i spojité parciální derivace 1. řádu v M a funkce φ_i spojité parciální derivace 1. řádu v $F(M)$, je podle věty o funkčním determinantu složených funkcí (kap. VII, § 3, příkl. 2)

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(v_1, \ldots, v_r)} = \frac{D(v_1, \ldots, v_r)}{D(v_1, \ldots, v_r)} = 1,$$

takže zobrazení F (a rovněž Φ) je už eo ipso regulární.[18]

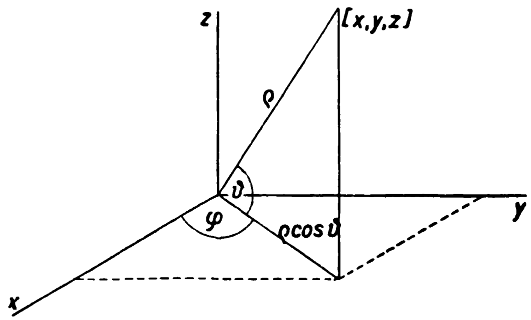
V dalším budeme v rovnicích (68) vpravo užívat vždy písmen $x_1, \ldots, x_r$ nebo x, y, z; vlevo budeme místo v_i užívat i jiných znaků. Vždy budeme míti na mysli zobrazení (68), i když je ve většině případů popíšeme z počátku ekvivalentními rovnicemi (69), t. j. pomocí inversního zobrazení Φ. Při geometrické interpretaci budeme vždy $x_1, \ldots, x_r$ resp. x, y, z považovati za pravoúhlé souřadnice, takže parametrické nadplochy j-té soustavy jsou dány rovnicí $f_j(x) =$ $=$ konst. (V cvič. 1—3 jsme naproti tomu vyšetřovali věc vždy s obou stran.)

5. (Otočení os souřadnicových.) Budiž dáno číslo α; bodu $[x, y] \in \mathbf{E}_2$ přiřadím bod $[\xi, \eta] \in \mathbf{E}_2$ rovnicemi $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$, $y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$, tím dostanu prosté zobrazení $\mathbf{E}_2$ na $\mathbf{E}_2$ (zde jsem napřed napsal rovnice (69), na což jsem již

[18]) Obšírněji se k věci vrátím v cvič. 11.

upozornil). „Nadplochy“ $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ (t. j. $\xi = \lambda$, po příp. $\eta = \lambda$) jsou zde přímky, svírající s přímkou $y = 0$ (s osou x) úhel $\frac{1}{2}\pi + \alpha$, po příp. α.

6. (Polární souřadnice v rovině.) $x = \varrho \cos \alpha$, $y = \varrho \sin \alpha$ ($\varrho \geqq 0$). Zde není přiřazení dvojic $[x, y]$, $[\varrho, \alpha]$ vzájemně jednoznačné: pro $x = y = 0$ je $\varrho = 0$, α libovolné; pro jiné body $[x, y]$ je α určeno pouze až na násobek čísla 2π. Abychom tuto závadu odstranili, veďme v rovině x, y „řez“ podél záporné osy x, t. j. odstraňme z E_2 body, pro něž $x \leqq 0$, $y = 0$;[18a] zbytek roviny je již prostě zobrazen na př. na interval $\varrho > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$. Řešení našich rovnic je pak $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \operatorname{sign} y \cdot \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($\operatorname{sign} y = +1, 0, -1$ pro $y > 0$, $= 0$, < 0). Čáry $\alpha =$ konst. jsou polopřímky, vycházející z počátku, čáry $\varrho =$ konst. jsou kružnice.[19]



Obr. 11.

7. (Polární souřadnice v prostoru.) $x = \varrho \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$ ($\varrho \geqq 0$). Odstraníme-li z E_3 třeba polorovinu $x \leqq 0$, $y = 0$ (z libovolné), máme prosté zobrazení na interval $\varrho > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$. Plochy $\varrho =$ konst., $\varphi =$ konst., $\vartheta =$ konst. jsou koule, poloroviny (procházející osou z), rotační kužele (s osou z a s vrcholem v počátku). Viz obr. 11.

8. Obecněji klaďme v E_n ($n > 2$)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \ldots \cos \varphi_{n-1} \\
x_2 &= \varrho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \ldots \cos \varphi_{n-1} \\
x_3 &= \varrho \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \ldots \cos \varphi_{n-1} \\
x_4 &= \varrho \sin \varphi_3 \ldots \cos \varphi_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= \varrho \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\
x_n &= \varrho \sin \varphi_{n-1} \,.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

[18a]) Často bývá vhodnější jiný „řez“, vycházející z počátku.

[19]) Bod $[-\varrho, 0]$ jest nutno ovšem vynechati; takové maličkosti nebudu dále uváděti.

Omezíme-li se pro jednoduchost na „první kvadrant" $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots$ $\ldots, x_n > 0$, máme prosté zobrazení na interval $\varrho > 0$, $0 < \varphi_k < \frac{1}{2}\pi$ ($k = 1, \ldots$ $\ldots, n - 1$). Píšeme-li pro zkrácení $\varrho_k = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$, je řešení rovnic (70):

$$\varrho = \varrho_n\,, \ \varphi_k = \arccos\left(\varrho_k : \varrho_{k+1}\right) \quad (k = 1, \ldots, n - 1)\,. \tag{71}$$

9. (Eliptické souřadnice v rovině.) Budiž f kladné číslo. Všechny elipsy, po příp. všechny hyperboly v rovině o ohniscích $[-f, 0]$, $[f, 0]$ mají rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1 \quad (a > f;\ \text{elipsy})\,;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1 \quad (0 < a < f;\ \text{hyperboly})\,.$$

Píšeme-li μ místo a^2, dostáváme jednotný vzorec

$$\frac{x^2}{\mu} + \frac{y^2}{\mu - f^2} = 1 \ (\text{elipsa pro } \mu > f^2,\ \text{hyperbola pro } 0 < \mu < f^2)\,. \tag{72}$$

Je patrno: každým bodem 1. kvadrantu prochází jedna a jen jedna z našich elips a jedna a jen jedna z našich hyperbol; naopak, každá z našich elips a každá z našich hyperbol se protínají v jednom a jen jednom bodě 1. kvadrantu. Jinými slovy: přiřadíme-li každému bodu $[x, y]$ ($x > 0, y > 0$) ony dvě hodnoty $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$, pro něž rovnice (72) je splněna ($\mu_1 < \mu_2$), je tím první kvadrant prostě zobrazen na interval $0 < \mu_1 < f^2$, $\mu_2 > f^2$. Pro větší symetrii položme $\mu = c_1 + \lambda$, $c_2 = c_1 - f^2$, takže (72) má tvar $\dfrac{x^2}{c_1 + \lambda} + \dfrac{y^2}{c_2 + \lambda} = 1$; volme $c_1 > f^2$, takže $0 < c_2 < c_1$. Příslušné hodnoty $\lambda_1 = \mu_1 - c_1$, $\lambda_2 = \mu_2 - c_1$ (kterým se též říká eliptické souřadnice bodu $[x, y]$) pak vyhovují nerovnostem $-c_1 < \lambda_1 < -c_2 < \lambda_2$. Aritmetické důkazy tvrzení tohoto cvičení budou obecněji (v $\mathbf{E}_r$) podány v cvič. 10.

10. Dána jsou čísla $c_1 > c_2 > \ldots > c_r > 0$. Budiž M množina všech bodů $x = [x_1, \ldots, x_r]$ takových, že $x_1 > 0, \ldots, x_r > 0$. Každému bodu $x \in M$ přiřadím funkci

$$F(\lambda) = \frac{x_1^2}{c_1 + \lambda} + \ldots + \frac{x_r^2}{c_r + \lambda} - 1\,. \tag{73}$$

Rovnice $F(\lambda) = 0$ má r kořenů (je to v podstatě rovnice r-tého stupně, odstraním-li jmenovatele). Ježto $F(\lambda)$ má v bodě $+\infty$ limitu -1 a v každém bodě $-c_i$ limitu zprava $+\infty$, zleva $-\infty$, leží kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ rovnice $F(\lambda) = 0$ v těchto intervalech:

$$-c_1 < \lambda_1 < -c_2 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{r-1} < -c_r < \lambda_r\,. \tag{74}$$

Tvrdím naopak: jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ libovolná čísla, pro něž platí (74), existuje v M jeden a jen jeden bod $[x_1, \ldots, x_r]$ tak, že příslušná rovnice $F(\lambda) = 0$ má právě kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Důkaz: hledám $x_1^2 > 0, \ldots, x_r^2 > 0$ tak, aby bylo identicky v λ[20])

$$\frac{x_1^2}{c_1 + \lambda} + \ldots + \frac{x_r^2}{c_r + \lambda} - 1 = - \frac{(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_r)}{(c_1 + \lambda) \ldots (c_r + \lambda)} . \tag{75}$$

Násobím-li $c_l + \lambda$ a přejdu k limitě $\lambda \to - c_l$, obdržím

$$x_l^2 = - \frac{f(- c_l)}{g'(- c_l)} , \tag{76}$$

kde $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_r)$, $g(\lambda) = (c_1 + \lambda) \ldots (c_r + \lambda)$. Vskutku tedy existuje nejvýše jeden takový systém $x_1, \ldots, x_r$ v M, pro nějž platí (75). Dosadíme-li pak do (75) z rovnic (76),[20a]) dostaneme po vynásobení jmenovatelem $g(\lambda)$ vpravo i vlevo mnohočlen stupně $r - 1$ (člen $- \lambda^r$ se zruší) a pravá i levá strana se sobě rovnají pro r hodnot $\lambda = - c_l$[21]) (tak byly sestrojeny rovnice (76)). Tedy platí identita (75). Vskutku tedy je množina M prostě zobrazena na množinu oněch bodů $[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$, pro něž platí (74). Výpočet čísel $x_1, \ldots, x_r$ pomocí $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ se snadno provede z (76).[22]) Čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou t. zv. eliptické souřadnice bodu $[x_1, \ldots, x_r]$.

II. Vraťme se k textu před cvič. 5; budiž (68) prosté zobrazení F otevřené množiny M na otevřenou množinu $N = F(M)$, budiž (69) inversní zobrazení Φ; předpokládejme, že funkce $a_{jk}(x_1, \ldots, x_r) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ jsou spojité v M a že funkce $b_{jk}(v_1, \ldots, v_r) = \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial v_k}$ jsou spojité v $F(M)$. Pravidlo o derivování složených funkcí dává

$$\sum_{l=1}^{r} a_{jl} b_{lk} = \delta_{jk} , \tag{77}$$

kde $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$ pro $j \neq k$. Obdobně obdržíme

$$\sum_{l=1}^{r} b_{jl} a_{lk} = \delta_{jk} , \tag{78}$$

a konečně

$$PQ = 1 , \quad \text{kde } P = \frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} , \quad Q = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(v_1, \ldots, v_r)} \tag{79}$$

(takže vskutku $P \neq 0 \neq Q$). Z rovnic (77), (78) plyne řešením

$$Q a_{jm} = \beta_{mj} , \quad P b_{jm} = \alpha_{mj} , \tag{80}$$

---

[20]) Samozřejmě nutno vyloučiti hodnoty $\lambda = - c_l$.

[20a]) Podle (74) vyjde pravá strana v (76) kladná, takže příslušné x_l existuje.

[21]) Tyto hodnoty ovšem po vynásobení jmenovatelem $g(\lambda)$ již netřeba vylučovati.

[22]) Odtud je také patrno, že x_l mají spojité parciální derivace podle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

kde α_{jk}, po příp. β_{jk} jsou doplňky prvků a_{jk}, po příp. b_{jk} v determinantu P, po příp. Q.

12. Zachovejme předpoklady a označení z cvič. 11. Jestliže pro každé $\xi \in M$ je

$$\sum_{l=1}^{r} a_{jl}(\xi)\, a_{kl}(\xi) = 0 \text{ pro } j \neq k \quad (1 \leqq j \leqq r,\ 1 \leqq k \leqq r)\,, \tag{81}$$

říkáme, že zobrazení F jest *orthogonální* (v M);[23]) mluvíme též o orthogonální substituci nebo transformaci. Podle pravidla o násobení determinantů plyne pak $P^2 = h_1^2 \dots h_r^2$, kde

$$h_j^2 = \sum_{l=1}^{r} a_{jl}^2\,; \tag{82}$$

ježto $P \neq 0$, je $h_j^2 > 0$; za h_j vezmu kladnou odmocninu. Řešením z (81), (82) dostávám $Pa_{jm} = h_j^2 \alpha_{jm}$, takže podle (80) plyne

$$a_{jm} = h_j^2 b_{mj} \tag{83}$$

a rovnice (81), (82) dávají

$$\sum_{l=1}^{r} b_{lj} b_{lk} = 0 \quad \text{pro } j \neq k\,, \tag{84}$$

$$\sum_{l=1}^{r} b_{lj}^2 = h_j^{-2}\,. \tag{85}$$

Naopak se obdobně snadno přesvědčíte, že z (84) plyne (81), (82). K charakterisování orthogonálních zobrazení můžeme užíti tedy buďto rovnic (81), (82) nebo rovnic (84).[23a])

13. Dokažte, že zobrazení z cvič. 5, 6, 7 jsou orthogonální (ježto zde jsou napsány rovnice (69), verifikujeme rovnice (84)).

14. Dokažte, že také zobrazení z cvič. 8 je orthogonální, a to dvěma způsoby: 1. užijte rovnic (70) a verifikujte rovnice (84); 2. užijte rovnic (71) a verifikujte rovnice (81), (82).

---

[23]) Aby byl jasný geometrický původ tohoto názvu, poznamenejme: Sestrojme nadplochu j-té soustavy, procházející bodem ξ; ta je dána rovnicí $f_j(x) - \lambda = 0$ (kde tedy $\lambda = f_j(\xi)$). Její tečná nadrovina v bodě ξ je pak (viz cvič. 7 k § 1 a kap. VII, § 2, pozn. 9) dána rovnicí $\sum_{l=1}^{r} a_{jl}(\xi)(x_l - \xi_l) = 0$. Podobně tečná nadrovina (v bodě ξ) k nadploše k-té soustavy (procházející bodem ξ) je dána rovnicí $\sum_{l=1}^{r} a_{kl}(\xi)(x_l - \xi_l) = 0$. Tyto dvě nadroviny jsou kolmé (ve smyslu r-rozměrné analytické geometrie) tehdy a jen tehdy, platí-li (81).

[23a]) Při rovnicích (82) jde jen o to, zjistit, že $\sum_{l=1}^{r} a_{jl}^2 \neq 0$; podobně u rovnic (85).

15. Dokažte, že též zobrazení z cvič. 10 jest orthogonální. Z rovnice (76) plyne, dosadíme-li za f, g jejich hodnoty,

$$2x_l \frac{\partial x_l}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{-c_l - \lambda_j} \cdot \frac{f(-c_l)}{g'(-c_l)}, \text{ t. j. } b_{lj} = \frac{1}{2} \frac{x_l}{c_l + \lambda_j}. \tag{86}$$

Pro $j \neq k$ je

$$\frac{1}{4} \sum_{l=1}^{r} \frac{x_l^2}{(c_l + \lambda_j)(c_l + \lambda_k)} = \frac{1}{4(\lambda_k - \lambda_j)} \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{x_l^2}{c_l + \lambda_j} - \frac{x_l^2}{c_l + \lambda_k} \right);$$

součet vpravo je podle (73) roven $F(\lambda_j) - F(\lambda_k) = 0$, takže rovnice (84) jsou splněny. Spočtěme ještě (viz (75))

$$h_j^{-2} = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{r} \frac{x_l^2}{(c_l + \lambda_j)^2} = -\frac{1}{4} F'(\lambda_j) = \frac{1}{4} \frac{f'(\lambda_j)}{g(\lambda_j)}. \tag{87}$$

§ 3. Zobrazení z $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_s$. Funkce „závislé" a „nezávislé".

Buďte

$$f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_r) \tag{88}$$

funkce, mající v otevřené množině $E \subset \mathbf{E}_r$ spojité parciální derivace

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_s}{\partial x_r}. \end{matrix} \tag{89}$$

Přiřadíme-li každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_r]$ bod $y = [y_1, \ldots, y_s]$ rovnicemi

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, y_s = f_s(x_1, \ldots, x_r), \tag{90}$$

obdržíme zobrazení množiny E do $\mathbf{E}_s$, které budeme studovati.

Věta 213. *Buďte* (88) *funkce, mající spojité derivace* (89) *v otevřené množině $E \subset \mathbf{E}_r$. Definujeme zobrazení F množiny E do $\mathbf{E}_s$ takto: je-li $x = [x_1, \ldots, x_r] \in E$, definujeme bod $y = [y_1, \ldots, y_s]$ rovnicemi* (90) *a klademe $F(x) = y$. Potom platí:*

I. Je-li hodnost matice (89) *v každém bodě otevřené množiny $M \subset E$ rovna číslu s,*[24]) *je obraz $F(M)$ otevřená množina.*

[24]) To může nastati jen tehdy, je-li $r \geqq s$.

II. Je-li hodnost matice (89) *v bodě* $a = [a_1, \ldots, a_r] \in E$ *rovna číslu* s, *obsahuje obraz každého okolí bodu* a *jisté okolí bodu* b *(při tom vždy klademe* $b = F(a)$, *t. j.*

$$(91) \qquad b_j = f_j(a_1, \ldots, a_r) \quad (j = 1, \ldots, s)) .$$

III. Je-li hodnost matice (89) *v jistém okolí bodu* $a \in E$ *rovna nule, jsou funkce* $f_1, \ldots, f_s$ *konstantní v jistém okolí bodu* a.

IV. Budiž $a \in E$, $0 < h < s$; *nechť existuje okolí bodu* a *tak, že hodnost matice* (89) *je rovna číslu* h *v každém bodě tohoto okolí. Aspoň jeden* h*-řadový determinant matice* (89) *je různý od nuly v bodě* a *a tedy též v jistém okolí bodu* a; *budiž to třeba determinant*

$$(92) \qquad \frac{D(f_1, \ldots, f_h)}{D(x_1, \ldots, x_h)} .$$

Potom existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ *a funkce*

$$(93) \qquad \Phi_{h+1}(y_1, \ldots, y_h), \ldots, \Phi_s(y_1, \ldots, y_h)$$

s těmito vlastnostmi:

α) *Je-li* $x = [x_1, \ldots, x_r]$ *libovolný bod intervalu*

$$J: \qquad |x_j - a_j| < \delta \quad (j = 1, \ldots, r) \text{ ,}$$ [25])

je

$$(94) \qquad \begin{cases} f_{h+1}(x) = \Phi_{h+1}(f_1(x), \ldots, f_h(x)) , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(x) = \Phi_s(f_1(x), \ldots, f_h(x)) . \end{cases}$$

β) *Funkce* (93) *mají v intervalu*

$$K: \qquad |y_k - b_k| < \Delta \quad (k = 1, \ldots, h)$$

spojité parciální derivace 1. řádu.

γ) *Obraz* $F(J)$ *intervalu* J *je množina řídká (v* $\mathbf{E}_s$*).*

Poznámka 1. Připomeňme větu 138: Budiž $A \subset P$; potom A je řídká v P tehdy a jen tehdy, jestliže každá množina $G \neq \emptyset$, otevřená v P, obsahuje množinu $G_1 \neq \emptyset$, otevřenou v P, pro kterou $AG_1 = \emptyset$. (Speciálně tedy množina řídká v P nemůže obsahovati žádnou v P

---

[25]) To značí ovšem: J je množina oněch bodů $[x_1, \ldots, x_r]$, pro něž

$$\max_{1 \leq j \leq r} |x_j - a_j| < \delta .$$

otevřenou množinu $G \neq \emptyset$, poněvadž potom by neexistovala příslušná množina G_1. Odtud je také vidět (viz IV γ), že v případě IV neobsahuje množina $F(J)$ — na rozdíl od případu II — žádnou neprázdnou otevřenou množinu.)

Poznámka 2. V každém bodě $x \in E$ má matice (89) jistou hodnost $h(x)$ $(0 \leqq h(x) \leqq s)$; z věty 213 je vidět význam této hodnosti. Je-li $a \in E$, mohou nastati tyto dva případy:

A) Existuje okolí U bodu a tak, že pro všechna $x \in U$ je $h(x) = h(a)$; takový bod a nazvu krátce *regulárním*.[26]) Je zřejmo, že potom všechny body z U jsou také regulární, takže množina R všech regulárních bodů je otevřená. Speciálně je regulární každý bod $a \in E$, pro který je $h(a) = s$; neboť potom existuje s-řadový determinant matice (89), který je různý od nuly v bodě a a tedy (spojitost!) i v jistém okolí U bodu a, takže $h(x) = s$ pro $x \in U$.

B) Nebo existuje v každém okolí bodu a bod x tak, že $h(x) \neq h(a)$; takový bod a nazvu *singulárním*. Budiž S množina všech singulárních bodů, tedy $S = E \dot{-} R$. Tvrzení II, III, IV se týkají regulárních bodů; v okolí singulárních bodů mohou nastati složitější případy (viz cvič. 3). Dokážeme ještě, že singulární body jsou v jistém smyslu „výjimečné“: dokážeme, že *S je řídká* (v $\mathbf{E}_r$). Budiž tedy $G \neq \emptyset$ množina otevřená. Podle pozn. 1 stačí sestrojiti otevřenou $G_1 \neq \emptyset$ tak, že $G_1 \subset G$, $SG_1 = \emptyset$. Je-li $GE = \emptyset$, stačí vzíti $G_1 = G$. Budiž tedy $G_2 = GE \neq \emptyset$; to je otevřená množina. Funkce $h(x)$ nabývá v G_2 jen konečného počtu hodnot. Mezi nimi je tedy jedna největší; nechť $a \in G_2$ je nějaký bod, ve kterém $h(x)$ nabývá této největší hodnoty. Je-li $h(a) = 0$, je $h(x) = 0$ pro $x \in G_2$, takže všechny body z G_2 jsou regulární, tedy $SG_2 = \emptyset$, a stačí položiti $G_1 = G_2$. Je-li $h(a) > 0$, je jistý $h(a)$-řadový determinant různý od nuly v bodě a a tedy i v jistém jeho okolí G_1, jež volíme tak malé, že $G_1 \subset G_2$. V každém bodě $x \in G_1$ je tedy $h(x) \geqq h(a)$ a současně ovšem $h(x) \leqq h(a)$, tedy $h(x) = h(a)$, takže všechny body z G_1 jsou regulární, t. j. $G_1S = \emptyset$. Tím je důkaz hotov.

Všimněme si ještě jednoho rozdílu mezi tvrzeními II, IV. V případě

[26]) Názvy regulární — singulární zavádím jen pro stručnost vyjadřování; nejsou nikterak obvyklé.

IV jsou hodnoty, jichž funkce $f_1, \ldots, f_s$ nabývají v intervalu J, na sobě „závislé" v tomto smyslu: hodnoty funkcí $f_{h+1}, \ldots, f_s$ jsou podle rovnic (94) jednoznačně stanoveny hodnotami funkcí $f_1, \ldots, f_h$. Naproti tomu jsou v případě II hodnoty, jichž funkce $f_1, \ldots, f_s$ nabývají v jakémkoliv (sebemenším) okolí bodu a, na sobě „nezávislé" v tomto smyslu: Je-li U okolí bodu a, obsahuje $F(U)$ jistou kouli $\Omega(b, \varrho)$. Zvolím-li tedy zcela libovolně hodnoty $y_1, \ldots, y_s$ tak, aby vzdálenost bodu y od bodu b byla menší než ϱ, existuje jistě v U bod x, v němž funkce $f_1, \ldots, f_s$ nabývají hodnot $y_1, \ldots, y_s$.[27])

Poznámka 3. Tvrzení II plyne z tvrzení I. Důkaz: je-li $h(a) = s$, je jistý s-řadový determinant v bodě a a tedy i v jistém okolí U bodu a různý od nuly. Je-li N libovolné okolí bodu a, je též $U \,.\, N$ okolí bodu a; podle tvrzení I je $F(UN)$ otevřená množina, obsahující ovšem bod $b = F(a)$. Tedy: $F(N)$ obsahuje okolí $F(UN)$ bodu b.[28])

Poznámka 4. Případ III (všechny derivace (89) jsou rovny nule v jistém intervalu $|x_j - a_j| < \delta$, $j = 1, \ldots, r$) plyne ihned z věty 184.

Poznámka 5. Ukažme, že v tvrzení IV stačí dokázati první dvě části. Předpokládejme tedy, že platí IVα, IVβ a dokažme IVγ. Zvolme δ_1 tak, že $0 < \delta_1 < \delta$ a že uzavřený interval

$$J_1: \qquad |x_j - a_j| \leqq \delta_1 \quad (j = 1, \ldots, r)$$

je částí množiny E. Ze spojitosti zobrazení plyne (věta 169 a 156), že $F(J_1)$ je uzavřená množina. Tvrdím předně, že $F(J_1)$ *neobsahuje žádnou neprázdnou otevřenou (v* $\mathbf{E}_s$*) množinu.* Předpokládejme, že $G \neq \emptyset$ je otevřená, $G \subset F(J_1)$; z toho odvodíme spor. Ježto $J_1 \subset J$, kde J je interval z tvrzení IVα, musí každý bod $y = [y_1, \ldots, y_s]$ z $F(J_1)$ (a tedy i každý bod z G) vyhovovati rovnicím

$$(95) \qquad y_{h+1} = \Phi_{h+1}(y_1, \ldots, y_h), \ldots, y_s = \Phi_s(y_1, \ldots, y_h)\,.$$

Ale to není možno z tohoto důvodu: Existuje bod $y \in G$ a existuje dále

[27]) y znamená bod $[y_1, \ldots, y_s]$. Nějaká podmínka toho druhu, říkající, že bod y musí býti blízko bodu b, je nutná, je-li U dosti malé, ježto funkce $f_1, \ldots, f_s$ jsou spojité v E.

[28]) Podobně ovšem také I plyne z II. Neboť v případě I lze použíti tvrzení II na každý bod $a \in M$, t. j. na každý bod $b = F(a)$ množiny $F(M)$ a vychází (ježto M je okolím bodu a), že $F(M)$ obsahuje jisté okolí bodu b, takže $F(M)$ je otevřená.

$\varepsilon > 0$ tak malé, že též bod $y' = [y_1, \ldots, y_h, y_{h+1} + \varepsilon, y_{h+2}, \ldots, y_s]$ leží v G. Není však možno, aby platilo (95) a současně $y_{h+1} + \varepsilon = \Phi_{h+1}(y_1, \ldots, y_h)$. Tím je důkaz proveden. Tvrdím nyní, že $F(J_1)$ je *řídká* (v $\mathbf{E}_s$). Budiž tedy $G \neq \emptyset$ otevřená. Podle toho, co jsme dokázali, existuje bod $y \in G \dot{-} F(J_1)$. Ježto $F(J_1)$ je uzavřená množina, existuje okolí G_1 bodu y (jež volíme tak malé, že $G_1 \subset G$) tak, že $G_1F(J_1) = \emptyset$. Tím je podle pozn. 1 dokázáno, že $F(J_1)$ je řídká v $\mathbf{E}_s$. Nahradím-li tedy v tvrzení IV věty 213 číslo δ (menším) číslem δ_1 (a tedy interval J vnitřkem intervalu, označeného před chvílí J_1), zůstanou tvrzení IVα, IVβ v platnosti a bude platiti též tvrzení IVγ (každá část množiny řídké v $\mathbf{E}_s$ je opět řídká v $\mathbf{E}_s$ — věta 135 — ostatně je to vidět z pozn. 1). Podle pozn. 3, 4, 5 stačí tedy, dokážeme-li z věty 213 tvrzení I, IVα, IVβ.

Důkaz tvrzení I. Budiž $b = [b_1, \ldots, b_s] \in F(M)$; to tedy značí, že existuje bod $a = [a_1, \ldots, a_r] \in M$ tak, že platí $b = F(a)$, t. j. (91). Mám dokázati, že bod b je vnitřním bodem množiny $F(M)$. Ježto je M otevřená, existuje $\Delta_0 > 0$ tak, že interval

$$J_2: \quad |x_j - a_j| < \Delta_0 \quad (1 \leqq j \leqq r)$$

je částí množiny M. V bodě a je některý s-řadový determinant matice (89) různý od nuly; budiž třeba

$$\left(\frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)}\right)_{[a_1, \ldots, a_r]} \neq 0 \tag{96}$$

(kdyby to byl jiný determinant, přečísluji proměnné $x_1, \ldots, x_r$). Na rovnice (90) mohu nyní užíti věty 210, kladu-li

$$F_j(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = f_j(x_1, \ldots, x_r) - y_j \quad (j = 1, \ldots, s);$$

věta 210 dává pak tento výsledek:[29] Existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ ($\delta < \Delta_0$, $\Delta < \Delta_0$) tak, že ke každému bodu $[y_1, \ldots, y_s, x_{s+1}, \ldots, x_r]$ intervalu

$$J_3: \quad |y_j - b_j| < \delta, \ |x_k - a_k| < \delta \quad (j = 1, \ldots, s;\ k = s+1, \ldots, r)$$

existuje v intervalu

$$J_4: \quad |x_l - a_l| < \Delta \quad (l = 1, \ldots, s)$$

jeden a jen jeden bod $[x_1, \ldots, x_s]$ tak, že platí (90).

[29]) Úlohu proměnných $y_1, \ldots, y_s$ z věty 210 přebírají zde proměnné $x_1, \ldots, x$.

Je-li nyní $y = [y_1, \ldots, y_s]$ libovolný bod intervalu

$$J_5: \qquad |y_j - b_j| < \delta \ (j = 1, \ldots, s),$$

zvolme třeba $x_{s+1} = a_{s+1}, \ldots, x_r = a_r$, načež existuje bod $[x_1, \ldots, x_s]$ intervalu J_4 tak, že platí (90); píši-li tedy $x = [x_1, \ldots, x_r] = [x_1, \ldots \ldots, x_s, a_{s+1}, \ldots, a_r]$, jest $y = F(x)$, současně však $x \in J_2$ (ježto $\Delta < \Delta_0$), tedy $x \in M$. Tedy $y \in F(M)$; ježto y byl libovolný bod intervalu J_5, jest bod b vskutku vnitřním bodem množiny $F(M)$.

D ů k a z t v r z e n í IVα, β. Podle předpokladu existuje číslo $\Delta_1 > 0$ tak, že interval

$$(97) \qquad |x_j - a_j| < \Delta_1 \quad (j = 1, \ldots, r)$$

je částí množiny E a že v každém bodě tohoto intervalu je determinant (92) různý od nuly, kdežto všechny $(h + 1)$-řadové determinanty matice (89) jsou rovny nule (pokud $r > h$). Z věty 210, aplikované na rovnice

$$(98) \qquad f_1(x_1, \ldots, x_r) - y_1 = 0, \ldots, f_h(x_1, \ldots, x_r) - y_h = 0$$

plyne:[30]) existují čísla δ_2, Δ_2 $(0 < \delta_2 < \Delta_1,\ 0 < \Delta_2 < \Delta_1)$ tak, že ke každému bodu $[y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r]$ intervalu

$$(99) \quad |y_k - b_k| < \delta_2 \ (k = 1, \ldots, h), \ |x_j - a_j| < \delta_2 \ (j = h + 1, \ldots, r)$$

existuje v intervalu

$$(100) \qquad |x_l - a_l| < \Delta_2 \quad (l = 1, \ldots, h)$$

jeden a jen jeden bod $[x_1, \ldots, x_h]$ tak, že platí rovnice (98).[31]) Souřadnice tohoto bodu označme[32])

$$(101) \qquad x_l = \varphi_l(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r) \quad (l = 1, \ldots, h);$$

---

[30]) Úlohu proměnných $y_1, \ldots, y_s$ z věty 210 přebírají zde proměnné $x_1, \ldots, x_h$.

[31]) Základní myšlenka dalšího průběhu důkazu: z (98) vypočtu $x_1, \ldots, x_h$ jako funkce proměnných $y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r$; výsledek dosadím do rovnic $y_{h+1} = f_{h+1}(x_1, \ldots, x_r), \ldots, y_s = f_s(x_1, \ldots, x_r)$; tím se pravé strany těchto rovnic stanou funkcemi proměnných $y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r$; ukážeme, že tyto funkce nezávisí na $x_{h+1}, \ldots, x_r$; tím dostaneme $y_{h+1}, \ldots, y_s$ vyjádřeny ve tvaru $y_j = \Phi_j(y_1, \ldots, y_h)$ $(j = h + 1, \ldots, s)$.

[32]) Pro $h = r$ odpadají $x_{h+1}, \ldots, x_r$ a ovšem též následující úvaha o $\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial x_k}$.

jest ovšem

$$\varphi_l(b_1, \ldots, b_h, a_{h+1}, \ldots, a_r) = a_l \quad (l = 1, \ldots, h) \tag{102}$$

a funkce φ_l mají v intervalu (99) spojité parciální derivace 1. řádu. V intervalu (99) jest tedy pro $l = 1, \ldots, h$

$$\begin{aligned} &f_l(\varphi_1(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r), \ldots \\ &\ldots, \varphi_h(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r), x_{h+1}, \ldots, x_r) - y_l = 0\,. \end{aligned} \tag{103}$$

Pro $j = h + 1, \ldots, s$ položme

$$\begin{aligned} &\Psi_j(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r) = \\ &= f_j(\varphi_1(y_1, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_h(y_1, \ldots, x_r), x_{h+1}, \ldots, x_r)\,. \end{aligned} \tag{104}$$

Také funkce Ψ_j mají v intervalu (99) spojité parciální derivace 1. řádu. Pro $j = h + 1, \ldots, s$; $k = h + 1, \ldots, r$ jest podle (104), (103)

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} &= 0\,, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} &= 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_k} + \frac{\partial f_h}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_h}{\partial x_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} &= 0\,. \end{aligned} \right. \tag{105}$$

Tedy jest

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}, & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_h} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_h}{\partial x_k}, & \dfrac{\partial f_h}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_h}{\partial x_h} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{106}$$

neboť podle (105) je první sloupec tohoto determinantu lineární kombinací ostatních. Determinant v (106) se však dá rozložiti:

$$-\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k}\frac{D(f_1, \ldots, f_h)}{D(x_1, \ldots, x_h)} + \frac{D(f_j, f_1, \ldots, f_h)}{D(x_k, x_1, \ldots, x_h)} = 0\,.$$

Zde je první funkční determinant různý od nuly, druhý $(h + 1)$-řadový roven nule; tedy jest v intervalu (99)

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pro } k = h + 1, \ldots, r;\ j = h + 1, \ldots, s\,. \tag{107}$$

Podle věty 184 platí: Vezmu-li za $y_1, \ldots, y_h$ libovolná čísla intervalu

$$|y_k - b_k| < \delta_2 \quad (k = 1, \ldots, h)\,, \tag{108}$$

jest funkce $\Psi_j(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r)$ (proměnných $x_{h+1}, \ldots, x_r$) konstantní v intervalu

$$|x_j - a_j| < \delta_2 \quad (j = h + 1, \ldots, r)\,,$$

takže v intervalu (99) jest na př.

$$\Psi_j(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r) = \Psi_j(y_1, \ldots, y_h, a_{h+1}, \ldots, a_r) \quad (j = h + 1, \ldots, s)\,; \tag{109}$$

označíme-li pravou stranu této rovnice $\Phi_j(y_1, \ldots, y_h)$, má funkce Φ_j ovšem spojité parciální derivace 1. řádu v intervalu (108).[33]) Zvolme nyní δ tak, že $0 < \delta < \text{Min}\,(\delta_2, \Delta_2)$ a že pro

$$|x_j - a_j| < \delta \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{110}$$

je

$$|f_k(x_1, \ldots, x_r) - b_k| < \delta_2 \quad (k = 1, \ldots, s)\,.$$

Je-li $x = [x_1, \ldots, x_r]$ libovolný bod intervalu (110), označme $f_l(x_1, \ldots$ $\ldots, x_r) = y_l$ $(l = 1, \ldots, h)$. Potom jsou splněny rovnice (98) a též nerovnosti (99), takže platí (101); pro $j = h + 1, \ldots, s$ jest tedy podle (104)

$$f_j(x_1, \ldots, x_r) = \Psi_j(y_1, \ldots, y_h, x_{h+1}, \ldots, x_r)\,,$$

t. j.

$$f_j(x) = \Phi_j(y_1, \ldots, y_h) = \Phi_j(f_1(x), \ldots, f_h(x))\,,$$

čímž důkaz proveden.

Poznámka 6. Methoda důkazu tvrzení IV dává zároveň návod, jak lze v jednoduchých případech funkce $\Phi_{h+1}, \ldots, \Phi_s$ skutečně stanoviti; stručně je to vyjádřeno v pozn.[31]). Tímto způsobem řešte cvič. 1, 2.

[33]) Pro $h = r$ klademe ovšem prostě $\Phi_j(y_1, \ldots, y_h) = \Psi_j(y_1, \ldots, y_h)$.

Cvičení

1. Mezi funkcemi $f(x, y, z) = x + y + z + 1$, $g(x, y, z) = x - y + z + 1$, $h(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2xz + 5x + 5y + 5z + 6$ je vztah $h = F(f, g)$, platný pro všechna x, y, z. Najděte F ($F(f, g) = 4f - g + fg + 2$).

2. Obdobná úloha pro funkce $f = x + y + z + u$, $g = x - y + z + u$,
$h = \dfrac{5x - y + 5z + 5u}{5x + y + 5z + 5u}$. (Jest $h = \dfrac{2f + 3g}{3f + 2g}$, pokud $5x + y + 5z + 5u \neq 0$.)

3. Vezměme zobrazení $y = x^2$ prostoru E_1 do E_1. Matice (89) se skládá z jediného čísla $2x$; jediný singulární bod je $x = 0$. Okolí $(-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$ se zobrazuje na množinu $\langle 0, \delta^2)$, jež ani není řídká, ani neobsahuje okolí bodu $F(0) = 0$.

§ 4. Poznámky o *s*-rozměrných plochách v *r*-rozměrném prostoru. Užili jsme již několikráte slov jako „nadplocha“ a pod., aniž jsme je precisovali. Jakékoliv obecnější pojednání o těchto věcech by přesahovalo rámec této knihy. Omezím se proto na několik poznámek, které se bezprostředně připínají k § 1 a § 3.

Budiž $r > 1$, $1 \leqq k \leqq r$ (k, r celá). Budiž $M \neq \emptyset$ množina otevřená v E_{r-1}; budiž f reálná funkce $r - 1$ proměnných, která má v M spojité parciální derivace 1. řádu. Budiž N množina oněch bodů $x = [x_1, \ldots, x_r] \in E_r$, které vyhovují podmínkám

$$\text{(111)} \qquad \begin{gathered} [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r] \in M\,, \\ x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r)\,. \end{gathered}$$

Množině N tohoto druhu budeme říkati „hladký kus $(r - 1)$-rozměrné plochy v E_r“.

Poznámka 1. N je tedy charakterisována zhruba tak, že k-tá souřadnice je funkcí ostatních; slovo „hladký“ poukazuje k existenci spojitých derivací; slovo „kus“ upozorňuje na to, že ani nejjednodušší plochy nelze vždy takto vyjádřit. Na př. kružnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$ v E_2 nelze takto vyjádřit (každému $x_1 \in (-1, 1)$ odpovídají dvě hodnoty x_2, každému $x_2 \in (-1, 1)$ odpovídají dvě hodnoty x_1); kružnici je nutno složit z několika takových „kusů“.

Obecněji: Buďiž $0 < s < r$ (r, s celá). Budiž $M \neq \emptyset$ otevřená množina v E_s. Buďte $f_1, \ldots, f_{r-s}$ reálné funkce s proměnných, jež mají v M spojité parciální derivace 1. řádu. Rozdělme čísla 1, 2, 3, ..., r do dvou skupin:

$$i_1, i_2, \ldots, i_s; \qquad k_1, k_2, \ldots, k_{r-s}.$$

Budiž N množina oněch bodů $x = [x_1, \ldots, x_r] \in \mathsf{E}_r$, které vyhovují podmínkám

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}] \in M, \tag{112a}$$

$$x_{k_1} = f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}), \ldots, x_{k_{r-s}} = f_{r-s}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}). \tag{112b}$$

Množinu N budeme nazývati „hladkým kusem s-rozměrné plochy v E_r“. Slovo plocha nahrazujeme pro $s = 1$ často slovem *křivka*, pro $s = r - 1$ slovem *nadplocha.*

V diferenciální geometrii se takové „hladké kusy ploch“ vyjadřují ještě jinak než vztahy typu (112a, b). Probereme dva nejobvyklejší způsoby.

I. Budiž dáno $r - s$ reálných funkcí

$$F_i(x) = F_i(x_1, \ldots, x_r) \quad (i = 1, \ldots, r - s), \tag{113}$$

které mají spojité parciální derivace 1. řádu v jisté otevřené množině $A \subset \mathsf{E}_r$. Budiž $a \in A$ bod, který vyhovuje rovnicím $F_i(a) = 0$ ($i = 1, \ldots, r - s$). Předpokládejme (to bude důležité!), že matice

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F_1}{\partial x_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_{r-s}}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F_{r-s}}{\partial x_r} \end{array} \tag{114}$$

má v bodě a hodnost $r - s$. Tedy některý její $(r - s)$-řadový determinant, na př.

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_{r-s})}{D(x_{s+1}, \ldots, x_r)} \tag{115}$$

je různý od nuly v bodě a a tedy i v jistém jeho okolí. Podle věty 210 existují tedy čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že platí toto: Ke každému bodu $[x_1, \ldots, x_s]$ intervalu

$$J: \qquad |x_i - a_i| < \delta \quad (i = 1, \ldots, s)$$

existuje v intervalu

$$J_1: \qquad |x_k - a_k| < \Delta \quad (k = s + 1, \ldots, r)$$

jeden a jen jeden bod $[x_{s+1}, \ldots, x_r]$ — pišme jej

$$(116) \qquad x_{s+1} = f_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, x_r = f_{r-s}(x_1, \ldots, x_s)$$

— tak, že je

$$(117) \qquad F_i(x_1, \ldots, x_r) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, r - s\,;$$

při tom funkce $f_1, \ldots, f_{r-s}$ mají v J spojité parciální derivace 1. řádu. T. j. množina N všech bodů $x = [x_1, \ldots, x_r]$, pro něž platí vztah

$$(118) \qquad [x_1, \ldots, x_r] \in J \times J_1$$

a rovnice (117), je právě množina oněch bodů x, pro něž platí $[x_1, \ldots$ $\ldots, x_s] \in J$ a rovnice (116). T. j. N je „hladký kus s-rozměrné plochy v $\mathbf{E}_r$“. T. j. rovnice (117) spolu s podmínkou (118) definují hladký kus s-rozměrné plochy.

Poznámka 2. Lze tedy říci, že (za předpokladu o hodnosti matice (114)) systém $r - s$ rovnic (117) „lokálně“ (t. j. ve spojení s podmínkou (118)) definuje hladký kus s-rozměrné plochy.[34] Ježto potom nutně každý řádek matice (114) má hodnost 1, plyne odtud, že každá jednotlivá z rovnic (117) definuje (ovšem zase jen lokálně) hladký kus nadplochy (t. j. $(r - 1)$-rozměrné plochy). Proto se o systému rovnic (117) říkává, že definuje s-rozměrnou plochu jako průnik $r - s$ nadploch — přesný smysl je patrný z předešlého textu.

II. Druhý způsob, jak se často definují s-rozměrné plochy v $\mathbf{E}_r$, je tento:

V otevřené neprázdné množině $P \subset \mathbf{E}_s$ budiž dáno r reálných funkcí s proměnných

$$(119) \qquad \varphi_1, \ldots, \varphi_r\,,$$

které mají v P spojité parciální derivace 1. řádu. Definujme zobrazení $x = \varphi(\lambda)$ množiny P do $\mathbf{E}_r$ rovnicemi

$$(120) \qquad x_1 = \varphi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_s), \ldots, x_r = \varphi_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)\,;$$

[34]) S druhé strany ovšem je patrno, že rovnice typu (112b) jsou speciálním případem rovnic (117).

budiž α nějaký bod z P takový, že matice

$$(121) \qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_1}, \dots, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_s} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial\lambda_1}, \dots, \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial\lambda_s} \end{matrix}$$

má v bodě α hodnost s, takže některý s-řadový determinant, na př. $\dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_s)}{D(\lambda_1, \dots, \lambda_s)}$, je různý od nuly v bodě α a tedy i v jistém jeho okolí. Položme $a = \varphi(\alpha)$, t. j. $a = [a_1, \dots, a_r]$, $a_j = \varphi_j(\alpha)$. Potom prvních s rovnic (120), t. j.

$$(122) \qquad x_1 = \varphi_1(\lambda_1, \dots, \lambda_s), \dots, x_s = \varphi_s(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$$

zobrazuje podle věty 212 jisté okolí Ω bodu $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ prostě na jisté okolí M (v prostoru $\mathbf{E}_s$) bodu $[a_1, \dots, a_s]$. Rovnice (122) jsou pak pro $[x_1, \dots, x_s] \in M$ splněny tehdy a jen tehdy, když platí rovnice

$$\lambda_1 = \psi_1(x_1, \dots, x_s), \dots, \lambda_s = \psi_s(x_1, \dots, x_s)\,,$$

které definují zobrazení inversní k (122). Aby bylo ještě splněno i posledních $r - s$ rovnic (120), k tomu je nutno a stačí, aby bylo

$$(123) \qquad x_{s+1} = f_1(x_1, \dots, x_s), \dots, x_r = f_{r-s}(x_1, \dots, x_s)\,,$$

kde klademe

$$(124) \qquad f_i(x_1, \dots, x_s) = \varphi_{s+i}(\psi_1(x_1, \dots, x_s), \dots, \psi_s(x_1, \dots, x_s))\,.$$

Podle věty o derivování složených funkcí je patrno, že $f_1, \dots, f_{r-s}$ mají v M spojité derivace 1. řádu.

Rovnice (120) zobrazují tedy Ω prostě na množinu N oněch bodů $[x_1, \dots, x_r]$, pro něž platí $[x_1, \dots, x_s] \in M$ a rovnice (123). Množina N takto definovaná je tedy hladkým kusem s-rozměrné plochy v $\mathbf{E}_r$, o kterém se říkává, že je parametricky definován rovnicemi (120) a podmínkou $[\lambda_1, \dots, \lambda_s] \in \Omega$. Speciálně: U hladkého kusu křivky ($s = 1$) je toto vyjádření tvaru $x_1 = \varphi_1(\lambda), \dots, x_r = \varphi_r(\lambda)$ s jediným parametrem λ.

Celý tento paragraf má čistě lokální charakter: naše úvahy mají cenu jen tehdy, omezíme-li se na dosti malé okolí jistého bodu a

(resp. α), v němž matice (114) (resp. (121)) má hodnost $r - s$ (resp. s). Ale takovéto lokální úvahy se často vyskytují v diferenciální geometrii.

Cvičení

1. Nechť funkce $F_j(x_1, \ldots, x_r)$ $(j = 1, \ldots, r - s)$ vyhovují předpokladům bodu I. Dosaďme do funkcí F_j za x_k lineární funkce

$$x_k = \sum_{l=1}^{r} \gamma_{kl} y_l + \beta_k \quad (k = 1, \ldots, r) \quad (\text{pišme } x = \gamma(y)),$$

kde determinant čísel γ_{kl} je různý od nuly, takže existuje inversní zobrazení $y = \Gamma(x)$. Tím přejdou F_j ve funkce $G_j(y_1, \ldots, y_r)$. Z cvič. 1 v kap. VII, § 3 plyne, že každý $(r - s)$-řadový determinant matice (114) v bodě a je lineární kombinací $(r - s)$-řadových determinantů matice

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial G_{r-s}}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial G_{r-s}}{\partial y_r} \end{matrix} ; \tag{125}$$

má-li tedy (114) hodnost $r - s$ v bodě a, má (125) hodnost $r - s$ v bodě $\Gamma(a)$. Tedy v tomto případě definují i rovnice $G_j(y) = 0$ v okolí bodu $\Gamma(a)$ kus hladké plochy. Tato „invariantnost vůči afinním transformacím" dodává teprve našim poznámkám geometrický charakter.