Diferenciální počet II

Kapitola III. Nekonečné řady a součiny

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984.
pp. 85--127.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402010

KAPITOLA III.

NEKONEČNÉ ŘADY A SOUČINY

§ 1. Základní pojmy a věty. Není-li čtenáři dosti běžný obsah kap. IV a § 2 z kap. XV v **DI**, radím mu, aby si tyto stati zopakoval. Budiž

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

posloupnost, při čemž je buďto $a_n \in \boldsymbol{K}$ pro všechna n nebo $a_n \in \boldsymbol{E}_1^*$ pro všechna n (v reálném případě připouštíme tedy též členy $+\infty$, $-\infty$). Symbol

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

nazýváme nekonečnou řadou; číslo a_n nazýváme n-tým členem této řady. Sestrojme posloupnost

$$(3) \qquad s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots;$$

číslo s_n nazýváme n-tým částečným součtem řady (2). Existuje-li limita

$$(4) \qquad \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

(v reálném případě připouštíme též nevlastní limity $+\infty$, $-\infty$), nazýváme číslo s součtem řady (2); symbol (2) značí potom též toto číslo s. Existuje-li limita (4) a není-li $s = +\infty$ ani $s = -\infty$,[1]) nazýváme řadu (2) konvergentní, jinak divergentní. V reálném případě (t. j. pro $a_n \in \boldsymbol{E}_1^*$) rozeznáváme ještě tři různé typy divergence: řada (2) „diverguje k $+\infty$“, je-li $\lim s_n = +\infty$; řada (2) „diverguje k $-\infty$“, je-li $\lim s_n = -\infty$; řada (2) „osciluje“, neexistuje-li vůbec $\lim s_n$ (t. j. je-li $\liminf s_n < \limsup s_n$).

Řadu (2) lze snadno vyšetřiti, obsahuje-li členy $+\infty$ nebo $-\infty$: 1. Obsahuje-li (2) člen $+\infty$ i člen $-\infty$, nemají čísla s_n od jistého n počínaje vůbec smyslu, a takové řady budeme proto vylučovati ze svých úvah. 2. Obsahuje-li řada (2) člen $+\infty$ (aspoň jeden), ale žádný člen $-\infty$, jsou všechna s_n od jistého n počínajíc rovna $+\infty$ a tedy

[1]) Jinak řečeno: je-li posloupnost (3) konvergentní.

$\lim s_n = +\infty$. 3. Obsahuje-li řada (2) člen $-\infty$, ale žádný člen $+\infty$, je obdobně $\lim s_n = -\infty$. Těmito případy se proto nebudeme většinou dále zabývati a *budeme proto v celé této kapitole s výjimkou* § 3 *předpokládati, že ve vyšetřovaných řadách* (2) *jest* $a_n \in \boldsymbol{K}$ (v tom jsou ovšem jako speciální případ zahrnuty řady s vlastními reálnými členy, t. j. $a_n \in \boldsymbol{E}_1$).[2])

Věta 31. *Řada* (2) *je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka (Bolzano-Cauchyova): Ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \boldsymbol{N}$ *tak, že jest*

$$(5) \qquad |a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_0+p}| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna } p \in \boldsymbol{N}\,.$$

Důkaz. Podle věty 26 ve tvaru pozn. 2 (kap. II, § 3) je posloupnost (3) konvergentní tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že jest

$$(6) \qquad |s_{n_0+p} - s_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } p \in \boldsymbol{N}\,.$$

Ale $s_{n_0+p} - s_{n_0} = a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+p}$, takže (6) lze psáti též ve tvaru (5).

Věta 32. *Konverguje-li řada*

$$(7) \qquad |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots\,,$$

konverguje též řada (2).

Důkaz. Z konvergence řady (7) plyne podle věty 31: Je-li $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že jest $|a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots + |a_{n_0+p}| < \varepsilon$ pro všechna $p \in \boldsymbol{N}$. Tím spíše tedy platí (5), takže (2) jest konvergentní.

Poznámka 1. Větu 32 už známe z **DI** (věta 90 a text za větou 182); ale náš nový důkaz (založený na Bolzano-Cauchyově podmínce) je podstatně jednodušší. Připomeňme: konverguje-li řada (7), říkáme, že řada (2) jest absolutně konvergentní. Konverguje-li (2) a současně řada (7) diverguje, říkáme, že řada (2) je neabsolutně konvergentní.

---

[2]) Ujasněme si názvosloví, aby nedošlo k nedorozumění. Komplexní čísla jsou čísla tvaru $\alpha = a + bi$ ($a \in \boldsymbol{E}_1$, $b \in \boldsymbol{E}_1$); pro $b = 0$ dostáváme právě všechna konečná čísla reálná. Je-li $a = 0$, nazýváme α ryze imaginárním; je-li $b \neq 0$, nazýváme α číslem imaginárním (nebo nereálným). Pozor! Při této úmluvě je $0 = 0 + 0i$ ryze imaginární, ale není imaginární. Názvů: čísla nezáporná (≥ 0), nekladná (≤ 0) užíváme jen pro čísla reálná (včetně čísel $+\infty$, $-\infty$).

Připomeňme ještě tuto rovnici (viz **DI**, věta 78 a text před větou 182): pro $k \in \boldsymbol{N}$ platí rovnice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \tag{8}$$

v tomto smyslu: I. Je-li jedna z řad v rovnici (8) konvergentní, jsou konvergentní obě a mezi jejich součty platí rovnice (8). II. Jsou-li a_n reálná, platí rovnice (8) též tehdy, má-li některá z řad v ní napsaných součet $+\infty$ nebo $-\infty$.

Rovnice (8) je velmi názorná: součet řady = začátek + zbytek. Uveďme ještě čtyři téměř samozřejmé věty, jichž se v praxi často užívá:

Věta 33. *Budiž $s = a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní řada; potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna přirozená $k \geqq n_0$ je*

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon . \tag{9}$$

Důkaz. K číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna přirozená $k \geqq n_0$ jest $|s - s_k| < \varepsilon$, t. j. $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + \ldots + a_k)\right| < \varepsilon$, což podle (8) lze psáti ve tvaru (9).

Věta 34. *Budiž řada (2) absolutně konvergentní; potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna přirozená $k \geqq n_0$ je*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon . \tag{10}$$

Důkaz. Užijme předešlé věty na konvergentní řadu $|a_1| + |a_2| + \ldots$

Věta 35. *Budiž (2) absolutně konvergentní řada. Budiž $k_1, k_2, k_3, \ldots$ konečná nebo nekonečná prostá posloupnost přirozených čísel* (t. j. čísla $k_1, k_2, \ldots$ jsou navzájem různá). *Potom jest*

$$|a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots| \leqq |a_{k_1}| + |a_{k_2}| + \ldots \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots ; \tag{11}$$

v případě nekonečné posloupnosti $k_1, k_2, \ldots$ je řada $a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots$ absolutně konvergentní.

Důkaz. Kladme $|a_1| + |a_2| + \ldots = S$; potom jest $|a_1| + |a_2| + \ldots$

$\ldots + |a_n| \leqq S$ pro každé n.[3]) Je-li tedy n největší z čísel $k_1, k_2, \ldots, k_m$, jest $|a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_m}| \leqq |a_{k_1}| + |a_{k_2}| + \ldots + |a_{k_m}| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqq S$, čímž věta pro konečné posloupnosti $k_1, k_2, \ldots, k_m$ dokázána. Limitním přechodem $m \to \infty$ dostaneme větu též pro nekonečné posloupnosti $k_1, k_2, \ldots$

Věta 36. *Je-li řada* $a_1 + a_2 + \ldots$ *absolutně konvergentní, jest*

$$|a_1 + a_2 + \ldots| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots$$

Důkaz. Ve větě 35 dosaďte $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, \ldots$

§ 2. Přerovnávání řad. V kap. II, § 2 ke konci jsme zavedli tento pojem: je-li $k_1, k_2, \ldots$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo vystupuje na jednom a jen jednom místě této posloupnosti, říkáme, že posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ vzniká z posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ přerovnáním. Budeme nyní v tomto případě též říkati, že řada

$$a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \ldots \tag{12}$$

vzniká z řady

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{13}$$

přerovnáním. To tedy znamená, populárně řečeno, že se řady (12), (13) skládají z týchž členů, ale v různém pořadí (přesnou formulaci viz v kap. II, § 2, cvič. 20). Víme, že součet konečného počtu čísel se nezmění přerovnáním sčítanců (komutativní zákon pro sčítání). Dokážeme nyní, že obdobná věta platí též pro nekonečné řady absolutně konvergentní, nikoliv však pro řady neabsolutně konvergentní.

Věta 37. *Budiž* (13) *absolutně konvergentní řada o součtu* s. *Budiž* (12) *řada, vznikající z* (13) *přerovnáním. Potom je řada* (12) *také absolutně konvergentní a má rovněž součet* s.

Důkaz. I. Ježto čísla $k_1, k_2, \ldots$ jsou navzájem různá, je řada (12)

[3]) Připomeňme z **DI**, kap. IV, § 2: Je-li $a_1 + a_2 + \ldots$ řada s nezápornými členy, je $s_1 \leqq s_2 \leqq s_3 \leqq \ldots$, takže existuje vlastní nebo nevlastní limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n=1,2,\ldots} s_n$. Tedy je $s_n \leqq s$ pro každé n. Mimo to je s vlastní číslo (t. j. řada je konvergentní) tehdy a jen tehdy, je-li $s_1, s_2, s_3, \ldots$ omezená posloupnost. Zde používáme těchto vět na řadu $|a_1| + |a_2| + \ldots$ Obdobně pro řady s nekladnými členy.

absolutně konvergentní podle věty 35. II. Položme $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\sigma_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n}$, takže $\lim s_n = s$. Máme dokázati, že je též $\lim \sigma_n = s$, t. j. že platí

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - \sigma_n) = 0 . \tag{14}$$

Budiž $\varepsilon > 0$; podle věty 34 existuje $r \in N$ tak, že $\sum_{m=r+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon$. Podle věty 35 potom platí: je-li $m_1, m_2, \ldots, m_w$ libovolná konečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel větších než r, jest $|a_{m_1}| + |a_{m_2}| + \ldots + |a_{m_w}| < \varepsilon$. Ježto posloupnost $k_1, k_2, \ldots$ obsahuje všechna přirozená čísla, existuje číslo $q \in N$ tak, že mezi čísly $k_1, k_2, \ldots, k_q$ vystupují všechna čísla $1, 2, \ldots, r$. Položme $n_0 = q = \mathrm{Max}\,(q, r)$. Je-li $n \geqq n_0$, zruší se v rozdílu $s_n - \sigma_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n})$ všechny členy $a_1, a_2, \ldots, a_r$, takže tento rozdíl — nezruší-li se vůbec všechny členy — má tvar $s_n - \sigma_n = \pm a_{m_1} \pm a_{m_2} \pm \ldots \pm a_{m_w}$, kde $m_1, \ldots, m_w$ jsou navzájem různá přirozená čísla větší než r. Tedy je $|s_n - \sigma_n| \leqq |a_{m_1}| + |a_{m_2}| + \ldots + |a_{m_w}| < \varepsilon$. Tedy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|s_n - \sigma_n| < \varepsilon$. Tím je (14) dokázáno.

Poznámka 1. Buďte (v řadě (13) s reálnými členy)

$$b_1, b_2, \ldots \tag{15}$$

nezáporné členy řady (13)[4]) a buďte

$$c_1, c_2, \ldots \tag{16}$$

záporné členy řady (13)[4]). Sestrojme řady

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = t , \tag{17}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = v . \tag{18}$$

Ježto jde o řadu s nezápornými, po příp. s vesměs zápornými členy, mají řady (17), (18) vždy jistý součet, po příp. nekonečný: $0 \leqq t \leqq + \infty$, $0 \geqq v \geqq - \infty$ (má-li některá z řad (17), (18) jen konečný počet členů, značí t, po příp. v, prostě součet těchto členů; neexistují-li na př. záporné členy, znamená v nulu). Budiž po řadě s_n, t_n, v_n součet prvních n členů řady (13), (17), (18). Každý částečný součet $s_n =$

[4]) Napsané v tom pořadí, v jakém se vyskytují v řadě (13).

$= a_1 + \dots + a_n$ obsahuje jistý počet $p(n)$ nezáporných a $q(n)$ záporných členů, takže

$$(19) \qquad s_n = t_{p(n)} + v_{q(n)}, \qquad |a_1| + \dots + |a_n| = t_{p(n)} - v_{q(n)}.\text{[5]}$$

Jest ovšem $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \lim\limits_{n\to\infty} q(n) = +\infty$, jsou-li (17), (18) vskutku nekonečné řady; jestliže na př. (17) se skládá pouze z konečného počtu p členů, je $p(n) = p$ pro všechna n od jistého počínajíc. Odtud je patrno, že $\lim\limits_{n\to\infty} t_{p(n)} = t$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_{q(n)} = v$, a tedy podle (19):

I. Jsou-li t, v konečná, je (13) absolutně konvergentní.

II. Je-li $t = +\infty$, v konečné, má (13) součet $+\infty$.

III. Je-li t konečné, $v = -\infty$, má (13) součet $-\infty$.

IV. Je-li konečně $t = +\infty$, $v = -\infty$, nedá se o součtu řady (13) říci nic, pouze tolik, že (13) není absolutně konvergentní (příklady: $2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + \dots = +\infty$; $1 - 2 + 1 - 2 + 1 - 2 + \dots = -\infty$, $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots = 0$, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ osciluje).

Ježto v řadě (17) mají všechny členy totéž znamení, a podobně v řadě (18), nemění se součty t, v přerovnáním řady (věta 37).

Věta 38. *Budiž $a_1 + a_2 + \dots$ neabsolutně konvergentní řada s reálnými členy. Budiž s libovolné konečné reálné číslo. Potom existuje konvergentní řada se součtem s, jež vzniká přerovnáním z řady $a_1 + a_2 + \dots$*

Součet neabsolutně konvergentní řady s reálnými členy lze tedy vhodným přerovnáním libovolně změniti.

Důkaz. Sestrojme posloupnosti (15), (16) a řady (17), (18) jako v pozn. 1. Podle této poznámky je nutně $t = +\infty$, $v = -\infty$ (takže (17), (18) jsou vskutku nekonečné řady). Ježto (13) konverguje, je $\lim a_n = 0$ a tedy též

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0\,.$$

Jak jsme právě řekli, je

$$(21) \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots = +\infty, \; c_1 + c_2 + c_3 + \dots = -\infty\,.$$

Přerovnáme nyní řadu $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ takto: Budiž n_1 nejmenší

[5]) Neboť $|b_j| = b_j$, $|c_j| = -c_j$.

přirozené číslo takové, že součet $b(1) + b(2) + \ldots + b(n_1)$[6]) je větší než s (takové n_1 existuje podle (21)). Potom přidávám záporné členy $c(1), c(2), \ldots$ tak dlouho, až najdu n e j m e n š í přirozené číslo m_1 tak, že součet

$$b(1) + b(2) + \ldots + b(n_1) + c(1) + c(2) + \ldots + c(m_1) \tag{22}$$

je menší než s (to je možné podle (21)); součet (22), zbavený posledního členu $c(m_1)$, je tedy $\geqq s$, takže součet (22) je $\geqq s + c(m_1)$. Nyní přidávám nezáporné členy $b(n_1 + 1), b(n_1 + 2), \ldots$ tak dlouho, až najdu n e j m e n š í přirozené číslo $n_2 > n_1$ tak, že součet

$$\begin{aligned} b(1) + \ldots + b(n_1) + c(1) + \ldots + c(m_1) + b(n_1 + 1) + \ldots \\ \ldots + b(n_2) \end{aligned} \tag{23}$$

je větší než s (to je možné podle (21)); součet (23), zbavený posledního členu $b(n_2)$, je tedy $\leqq s$, takže součet (23) je $\leqq s + b(n_2)$. Nyní přidávám záporné členy $c(m_1 + 1), c(m_1 + 2), \ldots$ tak dlouho, až najdu n e j m e n š í přirozené číslo $m_2 > m_1$ tak, že součet

$$\begin{aligned} b(1) + \ldots + b(n_1) + c(1) + \ldots + c(m_1) + \\ + b(n_1 + 1) + \ldots + b(n_2) + c(m_1 + 1) + \ldots + c(m_2) \end{aligned} \tag{24}$$

je menší než s (což je možno podle (21)). Součet (24), zbavený posledního členu $c(m_2)$, je tedy $\geqq s$, takže součet (24) je $\geqq s + c(m_2)$.

Takto střídavě pokračujíce, dostáváme dvě posloupnosti přirozených čísel $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ Sestrojme řadu

$$\begin{aligned} &\overbrace{b(1) + \ldots + b(n_1) + c(1) + \ldots + c(m_1)}^{1.\ \text{skupina}} + \ldots + c(m_k) + \\ &+ \overbrace{b(n_k + 1) + \ldots + b(n_{k+1}) + c(m_k + 1) + \ldots + c(m_{k+1})}^{(k+1)\text{-ní skupina}} + \\ &+ b(n_{k+1} + 1) + \ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

jež vzniká zřejmě přerovnáním z řady (13). Tvrdím, že součet této řady je s. Označme μ-tý částečný součet řady (25) znakem $\sigma(\mu)$. Součet $\sigma(n_k + m_k)$ (jehož poslední člen je $c(m_k)$) vyhovuje nerovnosti $\sigma(n_k + m_k) \geqq s + c(m_k)$, součet $\sigma(n_{k+1} + m_k)$ (jehož poslední člen je

[6]) Píši $b(n)$, $c(n)$ místo b_n, c_n, aby se nehromadily složené indexy n_k a pod.

$b(n_{k+1})$) vyhovuje pak nerovnosti $\sigma(n_{k+1} + m_k) \leqq s + b(n_{k+1})$. Jest ovšem

(26) $$\lim_{k\to\infty} c(m_k) = \lim_{k\to\infty} b(n_{k+1}) = 0$$

(viz (20); jde o posloupnosti vybrané z (15), (16)). Je-li μ libovolné přirozené číslo větší než $n_1 + m_1$, existuje přirozené k (závislé na μ, pišme tedy po případě $k(\mu)$ místo k) tak, že $n_k + m_k < \mu \leqq n_{k+1} + m_{k+1}$; poslední člen součtu $\sigma(\mu)$ leží tedy v $(k + 1)$-ní skupině řady (25). Jak vypadají takové součty $\sigma(\mu)$? Součet všech členů před $(k + 1)$-ní skupinou je právě číslo $\sigma(n_k + m_k) \geqq s + c(m_k)$; potom se přidávají v řadě (25) nezáporná čísla $b(\nu)$, až se dosáhne čísla $\sigma(n_{k+1} + m_k) \leqq s + b(n_{k+1})$ a potom se přidávají záporná čísla $c(\nu)$, až se dosáhne čísla $\sigma(n_{k+1} + m_{k+1}) \geqq s + c(m_{k+1})$. Tedy je zřejmě

(27) $$\begin{cases} s + \mathrm{Min}\,(c(m_k), c(m_{k+1})) \leqq \sigma(\mu) \leqq s + b(n_{k+1}) \\ \quad\text{pro}\quad n_k + m_k < \mu \leqq n_{k+1} + m_{k+1}\,. \end{cases}$$

Pro $\mu \to \infty$ je též $k \to \infty$ a podle (26), (27) je tedy $\lim_{\mu\to\infty} \sigma(\mu) = s$, což bylo dokázati.[7])

Poznámka 2. Věta 38 se týkala pouze řad s reálnými členy. Pro řady s komplexními členy plyne z ní aspoň toto: *Budiž $a_1 + a_2 + \ldots = s$ neabsolutně konvergentní řada s komplexními členy. Potom lze tuto řadu přerovnati tak, že přerovnaná řada nemá součet s.*

Důkaz: Budiž $a_n = b_n + ic_n$, $s = t + iv$ (b_n, c_n, t, v reálná), takže $b_1 + b_2 + \ldots = t$, $c_1 + c_2 + \ldots = v$. Kdyby obě poslední řady byly absolutně konvergentní, byla by i řada $a_1 + a_2 + \ldots$ absolutně konvergentní (viz **DI**, věta 182); tedy je aspoň jedna z nich neabsolutně konvergentní; budiž to na př. řada $b_1 + b_2 + \ldots$ (druhý možný případ by byl zcela obdobný). Podle věty 38 lze provésti přerovnání na př. tak, že $b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots = t + 1$; potom přerovnaná řada $a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots$

---

[7]) Kdo chce míti formálně bezvadný důkaz, nechť nahradí poslední dva řádky touto úvahou: Budiž $\varepsilon > 0$; zvolme $\varkappa \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna celá $k \geqq \varkappa$ je

(28) $$|c(m_k)| < \varepsilon\,, \quad |b(n_k)| < \varepsilon \quad \text{(viz (26))}\,.$$

Položme $n_\varkappa + m_\varkappa = \mu_0$.

Je-li μ celé, $\mu > \mu_0$, je celé číslo k, určené nerovnostmi $n_k + m_k < \mu \leqq n_{k+1} + m_{k+1}$, jistě nejméně rovno číslu $\varkappa$. Podle (27), (28) je tedy $s - \varepsilon < \sigma(\mu) < s + \varepsilon$ pro všechna celá $\mu > \mu_0$. Tedy $\lim \sigma(\mu) = s$.

jistě nemá součet s (nevíme ovšem, zda je tato řada vůbec konvergentní, neboť nevíme, jak se chová řada $c_{k_1} + c_{k_2} + \ldots$). Dá se sice i pro řady s komplexními členy odvoditi věta podobně úplná jako věta 38, ale její důkaz by byl příliš dlouhý.

Cvičení

1. Budiž (13) neabsolutně konvergetní řada s reálnými členy. Dokažte, že řadu (13) lze přerovnati předně tak, že přerovnaná řada (12) má součet $+\infty$, za druhé tak, že řada (12) má součet $-\infty$, za třetí tak, že řada (12) osciluje.

2. Předpoklady jako v cvič. 1. Buďte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ částečné součty přerovnané řady (12). Dokažte: jsou-li $a \leqq b$ dvě vlastní nebo nevlastní reálná čísla, lze přerovnání (12) provésti tak, že $\lim\inf \sigma_n = a$, $\lim\sup \sigma_n = b$. Při každém takovém přerovnání budou všechna čísla α, vyhovující nerovnostem $a \leqq \alpha \leqq b$, hromadnými hodnotami posloupnosti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ Při důkazu posledního tvrzení rovněž nutno užíti toho, že $\lim a_n = 0$. Věta 38 i výsledek cvičení 1 jsou ovšem důsledky cvič. 2.

3. Je-li $a_1 + a_2 + \ldots$ neabsolutně konvergentní řada komplexních čísel, lze ji přerovnati tak, že přerovnaná řada je divergentní.

4. Budiž (13) neabsolutně konvergentní řada (s komplexními členy). Přerovnání (12) budiž takové, že existuje číslo $L < +\infty$ tak, že pro všechna n jest $|n - k_n| < L$ (takže se každý člen a_n při přerovnání posune o méně než L míst). Potom je též (12) konvergentní a má týž součet jako (13). (Při důkazu užijte rovnice $\lim a_n = 0$.) Při takových přerovnáních, jimiž se ruší konvergence nebo mění součet, posunou se tedy některé členy nutně o „libovolně mnoho" míst.

5. Ve cvičení 2, kap. II, § 3 pište v první rovnici Nn místo n, ve třetí Mn místo n (N, M přirozená čísla) a odečtěte; dostanete $\frac{1}{2}\lg M - \frac{1}{2}\lg N + \lg 2 =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2Mn - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \ldots - \frac{1}{2Nn}\right)$. Z toho ihned zjistíte: přerovnáte-li řadu $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ tak, že vždy vezmete M členů kladných a po nich N členů záporných, t. j. sestrojíte-li řadu

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2M - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2M + 1} + \frac{1}{2M + 3} +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{4M - 1} - \frac{1}{2N + 2} - \frac{1}{2N + 4} - \ldots - \frac{1}{4N} + \frac{1}{4M + 1} + \ldots,$$

je součet této řady $\frac{1}{2}\lg\frac{4M}{N}$. Pro $M = N = 1$ dostanete známý výsledek $\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

6. Buďte a_n, b_n vlastní kladná čísla, $\lim a_n = \lim b_n = 0$, $a_1 + a_2 + \ldots =$ $= +\infty$, $b_1 + b_2 + \ldots = +\infty$. Potom lze ke každému (vlastnímu nebo nevlastnímu) reálnému číslu s nalézti posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 <$ $< k_3 < \ldots$ tak, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1} - b_{k_1+1} - b_{k_1+2} - \ldots - b_{k_2} + a_{k_2+1} + \ldots +$$
$$+ a_{k_3} - b_{k_3+1} - \ldots - b_{k_4} + \ldots = s\,.$$

Důkaz je obdobný jako u věty 38 (nejde zde ovšem o žádné přerovnání!).

§ 3. Zobecněné řady. Věta 37 nás vede k tomuto zobecnění pojmu nekonečné řady. Budiž $\mathfrak{M}$ spočetná množina (jakýchkoliv prvků). Každému prvku $m \in \mathfrak{M}$ budiž přiřazeno jisté komplexní číslo, jež označíme a_m nebo $a(m)$. Potom symbol

$$\sum_{m \in \mathfrak{M}} a(m) \tag{29}$$

budeme nazývati „zobecněnou řadou“.

Definice 5. *Prvky m množiny $\mathfrak{M}$ lze (různými způsoby) srovnati v konečnou nebo nekonečnou prostou posloupnost*

$$m_1, m_2, m_3, \ldots \tag{30}$$

Je-li řada

$$a(m_1) + a(m_2) + \ldots \tag{31}$$

absolutně konvergentní, nazýváme též řadu (29) *absolutně konvergentní a součet s řady* (31) *nazýváme součtem řady* (29); *symbol* (29) *znamená potom též číslo s.*[8])

Poznámka 1. Všechny řady (31), vznikající popsaným způsobem ze zobecněné řady (29), vznikají zřejmě jedna z druhé přerovnáním; podle věty 37 platí tedy: je-li jedna z nich absolutně konvergentní, jsou všechny absolutně konvergentní a mají týž součet; definice 5 je tedy v pořádku (absolutní konvergence a součet řady (29) nezávisí na speciálním způsobu, jímž jsme prvky $m \in \mathfrak{M}$ srovnali v posloupnost

[8]) Je-li $\mathfrak{M}$ konečná množina (vzpomeňme si, že konečné množiny patří též mezi spočetné množiny), jest ovšem řada (31) součet konečného počtu čísel; také takovýto součet nazveme „absolutně konvergentní řadou“, abychom nemusili zbytečně rozeznávati různé případy. Je-li $\mathfrak{M}$ prázdná množina (což je případ velmi málo důležitý), bude symbol (29) („součet žádných sčítanců“) znamenati nulu.

(30)). Zároveň je však podle věty 38 a podle poznámky 2 v § 2 viděti, že by nebylo účelno vyšetřovati jinou konvergenci než absolutní (viz však pozn. 3).

Poznámka 2. Řada (31) je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy (viz větu 35 a poznámku [3])), existuje-li číslo $K < +\infty$, mající tuto vlastnost: vyberu-li z řady (31) jakýkoliv konečný počet členů, je součet jejich prostých hodnot menší než K. Z toho ihned plyne: *zobecněná řada* (29) *je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo $K < +\infty$ tak, že nerovnost $|a(k_1)| + |a(k_2)| + \ldots + |a(k_n)| < K$ platí pro všechny konečné systémy $k_1, \ldots, k_n$ navzájem různých prvků množiny $\mathfrak{M}$.*

Příklad 1. Uspořádané dvojice $[j, k]$ celých nezáporných čísel j, k tvoří spočetnou množinu $\mathfrak{M}$; každé dvojici $[j, k]$ přiřaďme číslo $a_{j,k}$; zobecněná řada $\sum\limits_{[j,k]\in\mathfrak{M}} a_{j,k}$ se obyčejně nazývá „dvojnou řadou“ a psává se též $\sum\limits_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k}$; nebo se též členové této řady vypíší do čtvercového schematu

$$\begin{array}{l} a_{00} + a_{01} + a_{02} + \cdots \\ + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots \\ + a_{20} + a_{21} + a_{22} + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Podobně značíváme znakem $\sum\limits_{j,k,l=0}^{\infty} a_{j,k,l}$ „trojnou“ řadu $\sum\limits_{[j,k,l]\in\mathfrak{M}} a_{j,k,l}$, kde $\mathfrak{M}$ je množina všech uspořádaných trojic $[j, k, l]$ celých nezáporných čísel a pod. Často se vyskytuje též $\sum\limits_{m\in\mathfrak{M}} a_m$, kde $\mathfrak{M}$ je množina všech celých čísel; místo toho se psává též $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_m$ nebo $\ldots + a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

Základní větou o zobecněných řadách je tato věta:

Věta 39. *Budiž* (29) *absolutně konvergentní zobecněná řada se součtem s. Rozložme $\mathfrak{M}$ v disjunktní spočetný systém množin $\mathfrak{N}_v$ podle rovnice*

(32) $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{v\in\mathfrak{V}} \mathfrak{N}_v$, *$\mathfrak{V}$ spočetné*, $\mathfrak{N}_v\mathfrak{N}_w = \emptyset$ *pro* $v \in \mathfrak{V}$, $w \in \mathfrak{V}$, $v \neq w$.

Potom zobecněná řada

(33) $$\sum_{m\in\mathfrak{N}_v} a(m) = A(v)$$

je absolutně konvergentní pro každé $v \in \mathfrak{V}$, zobecněná řada

$$\sum_{v \in \mathfrak{V}} A(v) \tag{34}$$

je též absolutně konvergentní a má součet s.

Populárně řečeno: rozdělím-li členy absolutně konvergentní zobecněné řady do spočetně mnoha skupin, sečtu-li členy v každé skupině (čímž dostanu čísla $A(v)$) a potom sečtu ta čísla $A(v)$, dostanu právě součet té předložené řady; a všechny zobecněné řady, které přitom vystupují, jsou absolutně konvergentní.

Důkaz. Je-li $\mathfrak{M}$ konečná, je vše triviální. Budiž tedy $\mathfrak{M}$ nekonečná. Ježto každý člen řady (33) je členem řady (29), je řada (33) absolutně konvergentní (podle poznámky 2). Srovnejme prvky v množiny $\mathfrak{V}$ v prostou konečnou nebo nekonečnou posloupnost $v_1, v_2, \ldots$, takže $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{v_1} \cup \mathfrak{N}_{v_2} \cup \ldots$; místo $\mathfrak{N}_{v_k}$ pišme jednodušeji $\mathfrak{P}_k$, takže

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{P}_3 \cup \ldots, \quad \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_k = \emptyset \quad \text{pro } i \neq k, \tag{35}$$

místo $A(v_k)$ pak pišme B_k, takže $B_k = \sum_{m \in \mathfrak{P}_k} a(m)$.

Srovnejme prvky množiny $\mathfrak{M}$ v prostou nekonečnou posloupnost

$$m_1, m_2, m_3, \ldots \tag{36}$$

Podle (35) patří každý člen posloupnosti (36) k jedné a jen jedné z množin $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$; indexy n oněch prvků m_n z (36), jež patří do $\mathfrak{P}_q$, označme po řadě $n_{q,1}, n_{q,2}, \ldots$ $(n_{q,1} < n_{q,2} < \ldots)$, takže prvky množiny $\mathfrak{P}_q$ jsou $m_{n_{q,1}}, m_{n_{q,2}}, \ldots$ Pišme ještě zkráceně $b(n)$ místo $a(m_n)$, takže

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} b(n), \tag{37}$$

$$B_q = \sum_{k=1}^{\infty} b(n_{q,k}), \quad \text{po příp. } B_q = \sum_{k=1}^{C_q} b(n_{q,k}) \tag{38}$$

(poslední vzorec platí tehdy, je-li množina $\mathfrak{P}_q$ konečná, C_q je potom počet jejích prvků). Položme ještě

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} |b(n)| \quad (\text{tedy } 0 \leq S < +\infty). \tag{39}$$

Máme dokázati, že řada $\sum_{q=1}^{\infty} B_q$ je absolutně konvergentní a má součet s (je-li $\mathfrak{B}$ konečná množina, mající právě V prvků, klaďme $B_{V+1} = B_{V+2} = \ldots = 0$, abychom nemusili rozeznávati dva případy).

Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje přirozené N tak, že

$$|b(N+1)| + |b(N+2)| + \ldots < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \tag{40}$$

takže

$$|s - (b(1) + b(2) + \ldots + b(N))| = |b(N+1) + b(N+2) + \\ + \ldots| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{41}$$

Dále existují čísla $q_1, \ldots, q_N$ tak, že $b(1)$ je členem řady B_{q_1}, $b(2)$ je členem řady $B_{q_2}, \ldots, b(N)$ je členem řady B_{q_N}.[9]) Položme $n_0 = \mathrm{Max}(q_1, \ldots, q_N)$. Pro přirozené $\nu \geqq n_0$ lze $B_1 + B_2 + \ldots + B_\nu$ psáti ve tvaru nekonečné řady, jejíž členové jsou právě ona $b(n)$, jež vystupují v řadách $B_1, \ldots, B_\nu$[10]), takže se jistě mezi nimi vyskytují členové $b(1), b(2), \ldots, b(N)$. Tedy je $B_1 + \ldots + B_\nu - (b(1) + \ldots + b(N))$ součet nekonečné řady, složené z některých $b(n)$, mezi nimiž však scházejí členové $b(1), b(2), \ldots, b(N)$. Podle (40) je tedy $|B_1 + \ldots + B_\nu - (b(1) + \ldots + b(N))| < \frac{1}{2}\varepsilon$, načež z (41) plyne $|B_1 + \ldots + B_\nu - s| < \varepsilon$ (pro každé přirozené $\nu \geqq n_0$), takže je vskutku $\lim_{\nu\to\infty} (B_1 + B_2 + \ldots + B_\nu) = s$.

Důkaz absolutní konvergence řady $B_1 + B_2 + \ldots$ stačí vésti pro nekonečné $\mathfrak{B}$. Budiž $\beta_{q,r}$ součet prvních r členů řady (38) (je-li $\mathfrak{P}_q$ konečná množina a $r > C_q$, klaďme $\beta_{q,r} = B_q$). Potom je zřejmě pro libovolná přirozená Q, r

---

[9]) Přesně řečeno: ke každému j ($j = 1, 2, \ldots, N$) existuje právě jedno číslo q_j tak, že mezi čísly $n_{q_j,1}, n_{q_j,2}, \ldots$ vystupuje číslo j.

[10]) To provedeme tímto (často užívaným) způsobem: napíši každou řadu B_q tak, že v řadě $s = b(1) + b(2) + b(3) + \ldots$ napíši nuly místo oněch členů, jež se v řadě B_q nevyskytují. Je-li na př. $B_1 = b(3) + b(7) + \ldots, B_2 = b(2) + b(5) + b(6) + \ldots$, píšeme

$$B_1 = 0 + 0 \quad + b(3) + 0 + 0 \quad + 0 + b(7) + \ldots,$$
$$B_2 = 0 + b(2) + 0 \quad + 0 + b(5) + b(6) + 0 + \ldots,$$

načež podle pozn. 3 v kapitole IV, § 1 v **DI** jest

$$B_1 + B_2 = 0 + b(2) + b(3) + 0 + b(5) + b(6) + b(7) + \ldots = \\ = b(2) + b(3) + b(5) + b(6) + b(7) + \ldots$$

Podobně pro větší počet sčítanců.

$$|\beta_{1,r}| + |\beta_{2,r}| + \ldots + |\beta_{Q,r}| \leqq \sum_{q=1}^{Q} \sum_{k=1}^{r} |b(n_{q,k})| \leqq S$$

(viz (39)). Odtud limitním přechodem $r \to \infty$ při pevném Q plyne $|B_1| + |B_2| + \ldots + |B_Q| \leqq S$ pro každé přirozené číslo Q, čímž absolutní konvergence dokázána.

Příklad 2. Budiž dvojná řada (viz příklad 1) $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} = s$ absolutně konvergentní. Potom mohu číslo s dostati podle věty 39 také takto: sečtu napřed členy každého řádku v čtvercovém schematu, uvedeném v příkl. 1: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = A_j$, a potom je $\sum_{j=0}^{\infty} A_j = s$. (Podrobně: znamenají-li j, k stále celá nezáporná čísla, je v tomto případě $\mathfrak{M}$ množina všech dvojic $[j, k]$, $\mathfrak{B}$ je množina všech j a při daném j je $\mathfrak{N}_j$ množina všech dvojic $[j, k]$ s libovolným k a ovšem s tím daným j). Podobně lze ovšem sčítati napřed podle sloupců a potom podle řádků: celkem tedy dostáváme

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\right)^{11)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}\right).$$

je-li dvojná řada vlevo absolutně konvergentní. Z jiného hlediska pojednáme o „dvojných řadách“ v kap. VI, § 10, pozn. 4 a § 11, příkl. 3.

Příklad 3. Pro $|x| < 1$ definujme funkci f rovnicí

$$(42) \qquad f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^n}{1-x^n} + \ldots;$$

řada vpravo je pro $|x| < 1$ absolutně konvergentní, neboť

$$\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqq \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leqq \frac{|x|^n}{1-|x|} \quad \text{a řada (geometrická)}$$

$$\frac{|x|}{1-|x|} + \frac{|x|^2}{1-|x|} + \ldots + \frac{|x|^n}{1-|x|} + \ldots \text{ je konvergentní.}$$

[11]) Tento symbol znamená samozřejmě součet řady (od $j = 0$ do ∞), jejíž j-tý člen je číslo $a_{j,0} + a_{j,1} + a_{j,2} + \ldots$

Jest $\dfrac{x^n}{1 - x^n} = x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots$ a tím jsme vedeni k dvojné řadě $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}$[12]) tohoto tvaru

$$\begin{array}{llll} x & + x^2 & + x^3 & + \ldots \\ + x^2 & + x^{2\cdot 2} & + x^{2\cdot 3} & + \ldots \qquad (a_{j,k} = x^{jk}) \\ + x^3 & + x^{3\cdot 2} & + x^{3\cdot 3} & + \ldots \\ + & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

Tato řada je absolutně konvergentní, neboť součet prostých hodnot konečného počtu členů n-tého řádku je nejvýše roven $|x|^n : (1 - |x|^n)$, takže součet prostých hodnot jakéhokoliv konečného počtu členů $a_{j,k}$ je nejvýše roven součtu konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{1 - |x|^n}$.

Sčítání podle řádků a potom podle sloupců dá právě řadu (42); totéž dostaneme, sčítáme-li napřed podle sloupců a potom podle řádků. Rozdělme tedy členy $a_{j,k}$ ve skupiny jiným způsobem: do n-té skupiny ($n = 1, 2, 3, \ldots$) dám všechny členy $a_{j,k}$, pro něž je Min $(j, k) = n$. Součet členů v n-té skupině jest

$$A_n = a_{n,n} + a_{n,n+1} + a_{n+1,n} + a_{n,n+2} + a_{n+2,n} + \ldots =$$
$$= x^{n^2} + 2\sum_{l=1}^{\infty} x^{n^2+nl} = x^{n^2} + 2\,\frac{x^{n^2+n}}{1 - x^n} = x^{n^2}\,\frac{1 + x^n}{1 - x^n},$$

takže

$$f(x) = A_1 + A_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}\,\frac{1 + x^n}{1 - x^n}. \tag{42a}$$

Tím jsme získali pro $f(x)$ ($|x| < 1$) nový rozvoj v řadu, podstatně rychleji konvergentní než byl rozvoj v (42) (neboť v (42) máme členy asi téže velikosti jako $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$, kdežto v (42a) jsou členové řady asi téže velikosti jako $x, x^4, x^9, x^{16}, \ldots$).

Poznámka 3. Pro zobecněné řady s reálnými členy lze výsledek věty 39 ještě poněkud zobecniti; to nyní provedeme — výsledek nám bude užitečný až později, v integrálním počtu.

[12]) Čtenáře jistě neruší, že zde — na rozdíl od příkl. 1, 2 — začínají j, k hodnotou 1. Ostatně věta 39 zahrnuje ovšem i tento případ.

Budiž opět dána zobecněná řada (29) s reálnými členy, tentokráte však připusťme i členy $+\infty$, $-\infty$. Srovnáme-li indexy členů řady nějak v prostou posloupnost (30), jsou pro řadu (31) možny tyto čtyři případy (viz pozn. 1 v § 2):

I. Řada nezáporných členů i řada záporných členů v (31) je konvergentní, t. j. (31) je absolutně konvergentní. Tedy platí věta 39.

II. Řada záporných členů je konvergentní, řada nezáporných členů je divergentní, takže (31) má součet $+\infty$ (a to i po libovolném přerovnání). V tomto případě definujme součet zobecněné řady (29) jako $+\infty$.

III. Řada záporných členů divergentní, řada nezáporných konvergentní — součet zobecněné řady (29) klademe roven $-\infty$.

IV. Řada nezáporných i řada záporných členů divergentní — v tomto případě nedefinujeme součet zobecněné řady (29).

Věta 39a. *Budiž* (29) *zobecněná řada s reálnými* (třeba i nekonečnými) *členy, která nechť má součet s* (t. j. nenastává případ IV). *Rozložme $\mathfrak{M}$ opět podle vzorce* (32). *Potom zobecněná řada* (33) *má součet pro každé $v \in \mathfrak{V}$ a rovněž zobecněná řada* (34) *má součet, a to součet s.*

Důkaz. Stačí dokázati větu v případě II. (Případ III se dostane změnou znamení, případ I byl rozřešen větou 39.) Zaveďme totéž označení jako v důkazu věty 39, t. j. (31), (32), (35)—(38).

Máme tedy

(37a) $$\sum_{n=1}^{\infty} b(n) = +\infty\,,$$

při čemž součet nezáporných členů je $+\infty$, součet záporných je konečné číslo ζ ($0 \geqq \zeta > -\infty$). Stačí dokázati toto:

$\mathfrak{A}$. V každé zobecněné řadě (33), t. j. v každé řadě (38), je součet všech záporných členů konečné číslo $\zeta(q)$ (takže v (33) má $A(v)$ smysl).

$\mathfrak{B}$. V řadě

(43) $$\sum_{q=1}^{\infty} B_q$$

je součet všech záporných členů konečné číslo.

$\mathfrak{C}$. V řadě (43) je součet všech nezáporných členů roven $+\infty$. Tím bude věta dokázána.

Každé přirozené n je rovno právě jednomu z čísel $n_{q,k}$. Je-li tedy $\mathfrak{Z}_q$ (při daném q) množina všech indexů $n_{q,k}$, pro něž $b(n_{q,k}) < 0$, je $\mathfrak{Z} = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{Z}_q$ (disjunktní sjednocení) množina těch n, pro něž $b(n) < 0$. Ježto podle předpokladu $\sum_{n \in \mathfrak{Z}} b(n) = \zeta$ je konečné číslo (tedy řada je absolutně konvergentní), je podle věty 39

$$\zeta = \sum_{q=1}^{\infty} \zeta(q)\,,$$

kde $\zeta(q) = \sum_{n \in \mathfrak{Z}_q} b(n)$. Tím je dokázáno $\mathfrak{A}$. Mimo to řada (38) obsahuje vedle záporných členů (dávajících součet $\zeta(q)$) už jenom nezáporné členy, takže je $B_q \geqq \zeta(q)$, a tedy součet kteréhokoliv konečného počtu záporných členů posloupnosti $B_1, B_2, \ldots$ je $\geqq \sum_{q=1}^{\infty} \zeta(q) = \zeta$. Tedy (limitní přechod) i součet všech záporných členů této posloupnosti je $\geqq \zeta$, čímž je dokázáno $\mathfrak{B}$.

Ale nerovnost $B_q \geqq \zeta(q)$ lze zostřit: obsahuje-li B_q na př. kladné členy $b(\lambda)$, $b(\mu)$, $b(\nu)$, je zřejmě

$$B_q \geqq b(\lambda) + b(\mu) + b(\nu) + \zeta(q)\,.$$

Budiž $0 < K < +\infty$. Ježto součet nezáporných členů v (37a) je $+\infty$, existují nezáporné členy

$$b(\mu_1), b(\mu_2), \ldots, b(\mu_t) \quad (\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_t) \tag{43a}$$

tak, že

$$b(\mu_1) + \ldots + b(\mu_t) > K - \zeta\,.$$

Zvolme z_0 tak velké, že všechny členy (43a) vystupují v řadách $B_1, \ldots, B_{z_0}$ (t. j. každé μ_j je rovno některému $n_{q,k}$, kde $q \leqq z_0$). Z toho ihned plyne: je-li $z \geqq z_0$, je jistě

$$B_1 + \ldots + B_z \geqq b(\mu_1) + \ldots + b(\mu_t) + \zeta(1) + \ldots + \zeta(z) > K - \zeta + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} \zeta(q) = K\,.$$

Řada (43) má tedy součet $+\infty$ a tím je zřejmě dokázáno též $\mathfrak{C}$.

1. Budiž $\mathfrak{M}$ množina všech uspořádaných dvojic $[j, k]$ celých čísel j, k, s vyloučením dvojice $[0, 0]$. Potom je

$$\sum_{[j,k]\in\mathfrak{M}} \frac{1}{(|j| + |k|)^2(|j| + |k| + 1)} = 4$$

(místo $\sum\limits_{[j,k]\in\mathfrak{M}}$ se psává též $\sum\limits_{\substack{j,k=-\infty \\ [j,k]\neq[0,0]}}^{\infty}$). Návod: do n-té skupiny ($n = 1, 2, \ldots$) dejme všechny členy, pro něž $|j| + |k| = n$.

2. Pro $|x| < 1$ je řada $f(x) = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} nx^{nm}$ absolutně konvergentní, jak dokážete, píšete-li $|x|$ místo x a sčítáte napřed podle m, potom podle n; viz bod A.

A. Sčítáte-li napřed podle m, potom podle n, obdržíte

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1 - x^n}.$$

B. Sčítáte-li napřed podle n, potom podle m a užijete-li toho, že $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$, obdržíte

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1 - x^m)^2}.$$

C. Dáte-li do k-té skupiny všechny členy, pro něž Min $(n, m) = k$ (jako v příkl. 3), dostanete

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} \frac{k(1 - x^{2k}) + x^k}{(1 - x^k)^2} \quad \text{(rychlá konvergence).}$$

D. Dáte-li do k-té skupiny všechny členy, pro něž je $nm = k$, dostanete $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d(k)\, x^k$, kde $d(k)$ značí součet všech kladných dělitelů čísla k (na př. $d(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$).

3. Budiž dána tato dvojná řada:

$$\begin{array}{l} 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \cdots \\ + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \cdots \\ + \cdots \end{array}$$

(všechny řádky stejné). Sčítáme-li napřed podle řádek, potom podle sloupců, vidíme: řada v každé řádce je absolutně konvergentní a má součet 0; řada těchto součtů je $0 + 0 + \ldots$, tedy absolutně konvergentní a má součet 0. Rozdělme za druhé řadu v tyto skupiny: do první skupiny dám pouze první člen prvního řádku, tedy 1; do $(n + 1)$-ní skupiny $(n = 1, 2, \dots)$ dám první člen $(n + 1)$-ního řádku a všechny členy — až na první — z n-tého řádku; členy této skupiny tvoří absolutně konvergentní řadu se součtem 0. Řada $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ je absolutně konvergentní a má součet 1. Nemůže tedy (podle věty 39) býti daná dvojná řada absolutně konvergentní, což je ostatně přímo patrno.

§ 4. Násobení řad. Součin čísel $s = \sum_{j=0}^{n} a_j$, $t = \sum_{k=0}^{m} b_k$ se dostane podle distributivního zákona tak, že se sečtou všechna čísla $a_j b_k$, v nichž je $0 \leqq j \leqq n$, $0 \leqq k \leqq m$. Podobné pravidlo platí pro násobení absolutně konvergentních nekonečných řad:

Věta 40. *Buďte* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = s$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$[13]) *dvě absolutně konvergentní řady. Potom je dvojná řada* $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k$ *absolutně konvergentní a má součet st.*

Důkaz. I. Položme $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| = S$, $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = T$. Buďte $[j_1, k_1]$, $[j_2, k_2], \dots$ $\dots, [j_m, k_m]$ navzájem různé uspořádané dvojice celých nezáporných čísel j_l, k_l. Položíme-li

$$u = \mathrm{Max}\,(j_1, j_2, \dots, j_m)\,, \quad v = \mathrm{Max}\,(k_1, k_2, \dots, k_m)\,,$$

je zřejmě

$$\sum_{l=1}^{m} a_{j_l} b_{k_l} \leqq \sum_{j=0}^{u} |a_j| \,.\, \sum_{k=0}^{v} |b_k| \leqq ST\,,$$

takže dvojná řada

$$\begin{array}{llll} & a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + \dots \\ (44) & + a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + \dots \\ & + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

je vskutku absolutně konvergentní (podle pozn. 2 v § 3).

II. Součet členů $(n + 1)$-ního řádku v dvojné řadě (44) je $a_n b_0 + a_n b_1 + a_n b_2 + \dots = a_n t$, takže součet řady (44) je podle věty 39 roven $a_0 t + a_1 t + a_2 t + \dots = t(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) = ts$.

[13]) Úmyslně začínám s indexem 0 místo 1, což jest ovšem lhostejné. Čtenáři jen prospěje, zvykne-li si na malé odchylky v označení.

Poznámka 1. Shrnu-li v řadě (44) do „m-té skupiny“ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) ony členy $a_j b_k$, pro něž jest $j + k = m$, dostanu podle věty 39

$$st = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots . \tag{45}$$

Této řady, vyskytující se v (45), lze však užíti i v obecnějších případech, než je případ vyšetřený ve větě 40 (absolutní konvergence). Než se k této otázce obrátíme, vyslovíme tuto definici:

Definice 6. *Budiž dána řada*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{46}$$

a položme $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, \ldots, s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots$ *Existuje-li limita*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n + 1} = s\,,\text{[14]} \tag{47}$$

říkáme, že řadu (46) *lze sčítati k součtu* s *podle methody aritmetických průměrů prvního řádu.*

Poznámka 2. Z věty 29 plyne: je-li (46) konvergentní a má součet s, lze řadu (46) sčítati podle aritmet. průměrů 1. řádu k součtu s. Ale také některé řady divergentní lze sčítati ke konečnému součtu podle methody aritmet. průměrů 1. řádu. Příklad: u řady $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ jsou částečné součty $1, 0, 1, 0, \ldots$, takže tato řada je divergentní (a to osciluje); lze ji však sčítati podle methody aritmetických průměrů 1. řádu k součtu $\frac{1}{2}$ (viz kap. II, § 4, příkl. 1).

Poznámka 3. Podstata definice 6 byla v tom, že se místo limity posloupnosti $s_0, s_1, s_2, \ldots$ vyšetřuje limita jiné posloupnosti, vytvořené podle jistého zákona z posloupnosti $s_0, s_1, s_2, \ldots$ Obecně se methodami tohoto rázu zabývá důležitá nauka o sumabilitě nekonečných řad; viz na př. G. H. Hardy, Divergent series (1949); vyšlo též rusky.

Věta 41. *Buďte*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = s\,, \tag{48}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots = t \tag{49}$$

dvě konvergentní řady. Potom lze řadu

[14]) Jsou-li $a_0, a_1, \ldots$ reálná, připouštím též nevlastní limity $+\infty$, $-\infty$.

(50) $$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots$$
sčítati podle methody aritmet. průměrů 1. řádu k součtu st.

Poznámka 4. Řadu (50) lze psáti ve tvaru

(51) $$c_0 + c_1 + c_2 + \dots, \quad \text{kde } c_m = \sum_{j+k=m} a_j b_k\,.$$

(Písmena j, k znamenají až do konce této kapitoly, pokud není jinak řečeno, celá nezáporná čísla; poslední napsaný součet znamená tedy: sčítá se přes všechna celá nezáporná j, k, splňující rovnici $j + k = m$.)

Důkaz. Buďte s_m, t_m, σ_m částečné součty řad (48), (49), (50), t. j. $s_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m$, $t_m = b_0 + b_1 + \dots + b_m$, $\sigma_m = \sum_{j+k\leqq m} a_j b_k$. Potom jest

(52) $$\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n = s_0t_n + s_1t_{n-1} + \dots + s_{n-1}t_1 + s_nt_0\,,$$

což dokážeme takto: obě strany se skládají z členů tvaru a_jb_k ($j + k \leqq n$); takový člen se vlevo vyskytuje ve sčítancích σ_{j+k}, σ_{j+k+1}, ..., σ_n, tedy celkem $(n - (j + k) + 1)$-kráte. Vpravo se vyskytuje tento člen ve sčítancích s_jt_{n-j}, $s_{j+1}t_{n-j-1}$, ..., $s_{n-k}t_k$, tedy opět $(n - k - j + 1)$-kráte, čímž (52) dokázáno. Ježto $\lim s_n = s$, $\lim t_n = t$, plyne z (52) a z věty 30 vskutku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n}{n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0t_n + s_1t_{n-1} + \dots + s_nt_0}{n + 1} = st\,.$$

Z věty 41 a z poznámky 2 plyne: jsou-li (48), (49) konvergentní řady se součty s, t, je součet řady (50) jistě roven číslu st, jestliže řada (50) je konvergentní. Ukážeme nyní:

Věta 42. *Jsou-li řady* (48), (49) *konvergentní a je-li alespoň jedna z nich absolutně konvergentní, je řada* (50) *konvergentní* (a má tedy nutně součet st).

Důkaz. Nechť mají s_m, t_m, σ_m týž význam jako v důkazu věty 41. Budiž třeba řada (48) absolutně konvergentní. Zřejmě jest $\sigma_n = a_0t_n + a_1t_{n-1} + \dots + a_nt_0$, tedy

(53) $$\sigma_n - s_nt = a_0(t_n - t) + a_1(t_{n-1} - t) + \dots + a_n(t_0 - t)\,.$$

Z předpokladů plyne: Předně existuje K ($0 < K < +\infty$) tak, že pro všechna j jest

(54) $$|t_j - t| < K\,, \quad |a_0| + |a_1| + \dots + |a_j| < K\,.$$

Za druhé: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $q \in \boldsymbol{N}$ a číslo $Q \in \boldsymbol{N}$ tak, že jest

$$(55) \qquad |t_j - t| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{pro každé } j \geqq q\,,$$

$$(56) \qquad |a_{Q+1}| + |a_{Q+2}| + \ldots + |a_{Q+p}| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{pro každé } p \in \boldsymbol{N}\,.$$

Je-li $n > q + Q$, jest podle (53)

$$(57) \qquad |\sigma_n - s_n t| \leqq |a_0|\,|t_n - t| + |a_1|\,|t_{n-1} - t| + \ldots$$
$$\ldots + |a_Q|\,.\,|t_{n-Q} - t| + |a_{Q+1}|\,|t_{n-Q-1} - t| + \ldots + |a_n|\,|t_0 - t|\,.$$

Ježto $n - Q > q$, jsou v (57) součinitelé při $|a_0|, \ldots, |a_Q|$ podle (55) menší než $\varepsilon : (2K)$, načež z (57), (56), (54) plyne

$$|\sigma_n - s_n t| \leqq (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_Q|)\,.\,\frac{\varepsilon}{2K} +$$

$$+ (|a_{Q+1}| + |a_{Q+2}| + \ldots + |a_n|)\,.\,K < K\,.\,\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}\,.\,K = \varepsilon\,.$$

Tedy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ jest $|\sigma_n - s_n t| < \varepsilon$; tedy $\lim(\sigma_n - s_n t) = 0$, načež $\lim \sigma_n = \lim (s_n t + (\sigma_n - s_n t)) = s\,.\,t + 0 = st$.

Příklad 1. Jsou-li obě řady (48), (49) pouze neabsolutně konvergentní, nemusí býti řada (50) neboli (51) konvergentní. Zvolme za řadu (48) a též za řadu (49) řadu $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$, jež je konvergentní podle **DI**, věta 89. V řadě (51) je potom obecný člen roven

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}\,.\,\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{n-2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{1}}\right);$$

v závorce je n členů, nejméně rovných n^{-1}; tedy je závorka $\geqq 1$, takže v řadě (51) není $\lim c_n = 0$, řada (51) není tedy konvergentní.

Cvičení

1. Větu 40 lze vysloviti v tomto, formálně poněkud obecnějším tvaru: Zobecněné řady $\sum\limits_{l \in \mathfrak{L}} a(l) = s$, $\sum\limits_{m \in \mathfrak{M}} b(m) = t$ buďte absolutně konvergentní. Budiž

$\mathfrak{N}$ množina všech uspořádaných dvojic $[l, m]$ takových, že $l \in \mathfrak{L}$, $m \in \mathfrak{M}$. Potom je zobecněná řada $\sum_{[l,m]\in\mathfrak{N}} a(l)\, b(m)$ absolutně konvergentní a má součet st.

Následující čtyři cvičení jsou věnována řadám tvaru $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$, kde a_j, x_0, x jsou komplexní čísla. Řadám tohoto typu se říká **mocninné řady o středu** x_0; vyšetřují se obyčejně s toho stanoviska, že „součinitelé" a_j a „střed" x_0 jsou daná čísla, my pak vyšetřujeme tuto řadu pro různé hodnoty x, díváme se tedy na x jako na „proměnnou". Každé hodnotě x, pro kterou řada konverguje, přiřazujeme číslo $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$, čímž je definována funkce f v jisté množině $M \subset K$. Označíme-li $x - x_0 = y$, můžeme psáti řadu ve tvaru $\sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j$; proto se zde omezíme na řady tohoto tvaru, t. j. na mocninné řady o středu 0.

2. Jsou-li řady $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ pro nějakou hodnotu x absolutně konvergentní,[15] platí pro tuto hodnotu x rovnice

$$f(x)\, g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \text{ kde } c_m = \sum_{j+k=m} a_j b_k\,;$$

součin má tedy opět tvar mocninné řady.

3. Řady $\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$ (viz **DI**, kap. XV, § 3, cvič. 8) jsou absolutně konvergentní pro každé x. Podle vzoru cvič. 2 obdržíme $2 \sin x \cos x = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu x^\mu$, kde $c_\mu = 2 \sum_{2j+1+2k=\mu} \frac{(-1)^{j+k}}{(2k+1)!\,(2j)!}$. Odtud $c_{2m} = 0$, $c_{2m+1} = \frac{2\,.\,(-1)^m}{(2m+1)!} \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j}$. Z rovnic $\sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j} \pm \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} = (1 \pm 1)^{2m+1}$ obdržíte $c_{2m+1} = (-1)^m 2^{2m+1} : (2m+1)!$, čímž dostanete důkaz rovnice $2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

4. Úplnou indukcí dokažte: Jsou-li řady $f_l(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{l,m} x^m$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ pro jistou hodnotu x absolutně konvergentní,[15] platí pro toto x rovnice

$$f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad \text{kde } c_m = \sum_{j_1 + \ldots + j_r = m} a_{1,j_1} \,.\, a_{2,j_2} \ldots a_{r,j_r}\,.$$

5. Buďte k, r přirozená čísla. Pro $|x| < 1$ je řada $f(x) = 1 + x^{1^k} + x^{2^k} +$

[15]) Jedna z nich by mohla dokonce býti neabsolutně konvergentní.

$+ x^{3^k} + \dots$ absolutně konvergentní. Jest pak $f^r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, kde c_m je počet vyjádření čísla m ve tvaru $m = y_1^k + y_2^k + \dots + y_r^k$, kde y_l jsou celá nezáporná čísla (dvě řešení této rovnice, jež se od sebe liší pouze pořadím čísel y_l, považujeme při tom za různá). Hilbert dokázal tuto důležitou větu z theorie čísel: ke každému k existuje r tak, že každé přirozené m se dá psáti ve tvaru $m = y_1^k + \dots + y_r^k$ s celými nezápornými y_l. To tedy znamená, že pro všechna $m \in \mathbf{N}$ jest $c_m > 0$. V tomto důležitém problému (t. zv. Waringův problém) dosáhl skvělých úspěchů I. M. Vinogradov, který daleko překonal výsledky Hardyho a Littlewooda; viz И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел (1947). Zcela elementární methodou řeší tento problém Ju. V. Linnik (viz А. Я. Хинчин, Три жемчужины теории чисел (1948)).

6. Budiž dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ komplexních čísel; řadu

$$\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \dots + \frac{a_n}{n^s} + \dots \tag{58}$$

(při čemž se na komplexní číslo s díváme jako na proměnnou, podobně jako u mocninných řad) nazýváme Dirichletovou řadou. Musíme však ještě definovati a^s pro kladné a a pro komplexní s; to učiníme rovnicí $a^s = e^{s \lg a}$, jež pro reálná s je správná, jak víme z **DI**. Komplexní číslo s v Dirichletových řadách budeme vždy psáti $s = \sigma + it$ ($\sigma \in \mathbf{E}_1$, $t \in \mathbf{E}_1$), takže $a^s = a^\sigma (\cos (t \lg a) + i \sin (t \lg a))$, takže $|a^s| = a^\sigma$; amplituda čísla a^s jest $t \lg a$. Zjistěte, že pro $a > 0$, $b > 0$, pro komplexní r, s a pro celé k jest $1^s = 1$, $(ab)^s = a^s b^s$, $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$, $a^r a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\left(\text{speciálně } \frac{1}{a^s} = a^{-s}\right)$, $(a^k)^s = (a^s)^k = a^{ks}$.

7. Jsou-li Dirichletovy řady $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ pro jistou hodnotu s absolutně konvergentní, je (pro tuto hodnotu s) $f(s)\, g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$, kde $c_n = \sum_{jk=n} a_j b_k$.

8. Položme $\mu(1) = 1$; pro $n > 1$ kladme $\mu(n) = 0$, je-li n dělitelno druhou mocninou nějakého prvočísla; $\mu(n) = (-1)^l$, je-li $n = p_1 p_2 \dots p_l$ součin l různých prvočísel (na př. $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = \mu(3) = \mu(5) = \mu(7) = -1$, $\mu(4) = \mu(12) = \mu(24) = 0$, $\mu(30) = -1$, $\mu(6) = \mu(10) = \mu(210) = 1$). Dokažte: je-li $n > 1$, je $\sum_{d/n} \mu(d) = 0$; při tom znak d/n zde znamená, že d je dělitelem čísla n, takže se sčítá přes všechny kladné dělitele čísla n; na př. $\sum_{d/20} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) + \mu(5) + \mu(10) + \mu(20)$. Důkaz proveďte kombinatoricky (kolik je dělitelů čísla n, jež jsou součinem právě l různých prvočísel?).

9. Řada $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ je absolutně konvergentní, je-li $\sigma > 1$. Ukažte, že pro $\sigma > 1$ jest $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ (vynásobte obě řady). Funkce $\zeta(s)$ je velmi důležitá v analytické theorii prvočísel. Viz na př. A. E. Ингам, Распределение простых чисел (1936); Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле (1947).

10. Věta 40 dává ihned pro libovolná komplexní x, y

$$e^x e^y = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{m-j}}{(m-j)!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+y)^m}{m!} = e^{x+y}.$$

Kdybychom byli znali tehdy větu 40, byli bychom si mohli uspořiti dosti obtížný důkaz této rovnice v **DI**, kap. XV, § 3 (věta 183).

11. Řady $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$; $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - - 1 + \ldots$; $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \ldots$ mají částečné součty po řadě $1, 0, 1, 0, \ldots$; $1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$; $1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ a lze je tedy sčítati podle methody aritmet. průměrů 1. řádu k těmto součtům: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$. Na rozdíl od vyšetřování konvergence záleží zde na nulových členech. To je pochopitelné: přidám-li nulový člen, opakuje se jeden částečný součet a jeho vliv v aritmetickém průměru se zvětší.

§ 5. Abelova parciální sumace a její použití. Budiž dáno $2n$ komplexních čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $(n > 1)$; položme $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Parciální sumace spočívá v tom, že součet $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n$ vyjádřím součty čísel a_j a rozdíly čísel ε_j. Dostáváme totiž

$$\begin{aligned}(59)\quad \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n &= \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \varepsilon_3 (s_3 - s_2) + \\ &+ \ldots + \varepsilon_n (s_n - s_{n-1}) = s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + \\ &+ s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Tato rovnice vede k důležitým nerovnostem:

Věta 43 (Abelovo lemma). *Buďte $a_1, \ldots, a_n$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, A, B vlastní reálná čísla; budiž $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n \geqq 0$. Potom platí:*

I. Je-li $a_1 + a_2 + \ldots + a_j \leqq A$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, jest $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n \leqq A\varepsilon_1$.

II. Je-li $a_1 + a_2 + \ldots + a_j \geqq B$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, jest $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n \geqq B\varepsilon_1$.

Důkaz. Budiž $n > 1$ (případ $n = 1$ je samozřejmý) a položme $s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j$. Jest $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq 0$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \geqq 0, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \geqq 0$, $\varepsilon_n \geqq 0$. V případě I je tedy $s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n\varepsilon_n \leqq A(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + A(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + A(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + A\varepsilon_n = A\varepsilon_1$ a rovnice (59) dává hledaný vztah. Podobně v případě II.

Věta 44. *Budiž $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nerostoucí posloupnost vlastních nezáporných čísel. Budiž $a_1 + a_2 + \ldots$ libovolná řada s komplexními členy. Položme $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Potom platí:*

I. Budiž posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ omezená; budiž $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Potom je řada

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots \tag{60}$$

konvergentní.

II. Budiž řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní; potom je řada (60) *konvergentní.*

Poznámka 1. Všimněte si, že se v případě II požadovalo od řady $a_1 + a_2 + \ldots$ více, zato však od posloupnosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ méně než v případě I.

Důkaz stačí provésti pro případ, že $a_1, a_2, \ldots$ jsou reálná (v komplexním případě vyšetříme reálnou a imaginární část zvlášť). V případě I existuje vlastní $K > 0$ tak, že $|s_n| < K$ pro všechna n. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje $q \in \mathbf{N}$ tak, že $\varepsilon_q < \dfrac{\varepsilon}{2K}$. Pro libovolné $j \in \mathbf{N}$ je potom $|a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_{q+j}| = |s_{q+j} - s_q| < 2K$, t. j. $-2K < a_{q+1} + \ldots + a_{q+j} < 2K$. Je-li tedy p libovolné přirozené číslo, dostáváme z věty 43 (v níž klademe ε_{q+j}, a_{q+j}, p místo ε_j, a_j, n)

$$-2K\varepsilon_{q+1} \leqq \varepsilon_{q+1}a_{q+1} + \ldots + \varepsilon_{q+p}a_{q+p} \leqq 2K\varepsilon_{q+1},$$

a tedy

$$|\varepsilon_{q+1}a_{q+1} + \ldots + \varepsilon_{q+p}a_{q+p}| \leqq 2K\varepsilon_{q+1} \leqq 2K\varepsilon_q < \varepsilon .$$

Tím je však konvergence řady (60) podle věty 31 dokázána.

V případě II budiž dáno kladné číslo ε; zvolme $\eta > 0$ tak malé, že $\varepsilon_1\eta < \varepsilon$. Podle předpokladu a podle věty 31 existuje přirozené q tak, že pro každé $j \in \mathbf{N}$ jest $|a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_{q+j}| < \eta$, t. j. $-\eta <$

$< a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_{q+j} < \eta$. Podle věty **43** je tedy pro každé $p \in \mathbf{N}$:

$$- \eta\varepsilon_{q+1} \leqq \varepsilon_{q+1}a_{q+1} + \ldots + \varepsilon_{q+p}a_{q+p} \leqq \eta\varepsilon_{q+1}\,,$$

t. j.

$$|\varepsilon_{q+1}a_{q+1} + \varepsilon_{q+2}a_{q+2} + \ldots + \varepsilon_{q+p}a_{q+p}| \leqq \eta\varepsilon_{q+1} \leqq \eta\varepsilon_1 < \varepsilon\,.$$

Tím je však konvergence řady (60) podle věty 31 dokázána.

Příklad 1. Budiž $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $(a_1 < +\infty)$. Řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ má částečné součty $1, 0, 1, 0, \ldots$, tedy omezené. Podle věty 44, případ I je tedy řada $a_1 - a_2 + a_3 - - a_4 + \ldots$ konvergentní, čímž znovu dokázána věta 89 z **DI**.

Příklad 2. Je-li řada $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergentní, je též řada $\frac{2a_1}{1} + \frac{3a_2}{2} + \frac{4a_3}{3} + \ldots + \frac{(n+1)\,a_n}{n} + \ldots$ konvergentní podle věty 44, případ II.

Cvičení

1. Odvoďte případ II věty 44 z případu I. Návod: existuje $\lim \varepsilon_n = \alpha$; rozložte $\varepsilon_n a_n = (\varepsilon_n - \alpha)\,a_n + \alpha a_n$ a užijte případu I.

2. Dokažte: věta 44 platí i tehdy, nahradíme-li v ní větu „Budiž $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nerostoucí posloupnost nezáporných čísel" větou „Budiž $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ omezená monotonní posloupnost čísel".

3. Pro $\Theta \in \mathbf{E}_1$ vyšetřujme řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin m\pi\Theta\,, \tag{61}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \cos m\pi\Theta\,. \tag{62}$$

Tvrdím: (62) je divergentní pro každé $\Theta \in \mathbf{E}_1$; (61) je divergentní pro každé necelé $\Theta \in \mathbf{E}_1$. Návod: viz kap. II, § 2, cvič. 7.

4. Částečné součty řady (61) tvoří posloupnost omezenou; totéž platí pro (62), není-li Θ sudé. Návod: případ celého Θ je jasný. Pro necelé Θ je $2 \sin k\pi\Theta\,.$ $.\sin \frac{1}{2}\pi\Theta = -\cos (k + \frac{1}{2})\,\pi\Theta + \cos (k - \frac{1}{2})\,\pi\Theta$ a odtud $\sin \pi\Theta + \ldots + + \sin n\pi\Theta = \dfrac{\cos \frac{1}{2}\pi\Theta - \cos (n + \frac{1}{2})\,\pi\Theta}{2 \sin \frac{1}{2}\pi\Theta}$. Obdobně pro řadu (62). Ještě jednodušší jest užíti Eulerových vzorců (**DI**, kap. XV, § 3, vzorec (25)) a sčítati potom geometrické řady typu $e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \ldots + e^{ni\alpha}$.

5. Z cvič. 4 a z věty 44 plyne: je-li $\Theta \in E_1$, $+\infty > a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots$, $\lim a_n = 0$, jsou řady $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\pi\Theta$, $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\pi\Theta$ konvergentní; výjimku tvoří druhá řada pro sudé Θ, jestliže řada $\sum a_m$ je divergentní.

6. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (nebo obecněji: je-li posloupnost částečných součtů této řady omezená), je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergentní pro každé $s > 0$.

7. Methoda parciální sumace je důležitá i v takových případech, kdy nelze bezprostředně užíti věty 43 ani 44. Dokažte:[16] má-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezené částečné součty $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ $(s = \sigma + it)$ konvergentní pro $\sigma > 0$ (pro reálné s jsme tuto větu dokázali v cvič. 6). Návod: Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x^s} =$ $= \frac{\cos(t \log x) - i \sin(t \log x)}{x^\sigma}$ pro $x > 0$, obdržíme

$$(63) \quad \frac{a_1}{1^s} + \ldots + \frac{a_n}{n^s} = s_1(f(1) - f(2)) + \ldots + s_{n-1}(f(n-1) - f(n)) + s_n f(n) .$$

Užijete-li věty o přírůstku funkce na reálnou i imaginární část funkce $f(x)$, obdržíte $|f(m-1) - f(m)| < A(m-1)^{-1-\sigma}$ pro velká m, při čemž A nezávisí na m. Užijete-li konvergence řady $\sum n^{-1-\sigma}$ (**DI**, kap. IV, § 3, příkl. 1), obdržíte z (63) hledaný výsledek.

§ 6. Podílová kriteria pro konvergenci a divergenci řad s kladnými členy. Zopakujeme napřed některé známé věci (viz **DI**, kap. IV, § 2). Je-li

$$(64) \qquad a_1 + a_2 + \ldots$$

řada s nezápornými členy $(a_n \geqq 0)$, je posloupnost částečných součtů

$$(65) \qquad s_1 = a_1, \; s_2 = a_1 + a_2, \; \ldots, \; s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

neklesající. Tedy je řada (64) konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li posloupnost (65) shora omezená. Odtud plyne: budiž dána další řada

$$(66) \qquad b_1 + b_2 + \ldots$$

[16]) Definici a^s $(a > 0$, s komplexní) viz v § 4, cvič. 6.

Je-li $0 \leqq a_n \leqq b_n$ pro všechna n a je-li (66) konvergentní, je též (64) konvergentní. Odtud plyne dále:

Věta 45 (totožná s větou 85 z **DI**). *Nechť existuje $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Potom platí: je-li* (66) *konvergentní, je též* (64) *konvergentní (a tedy: je-li* (64) *divergentní, je též* (66) *divergentní).*

Důkaz (nám již známý). Pro $n > m$ jest

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{m+1}}{a_m} \leqq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{b_n}{b_m},$$

tedy $0 < a_n \leqq \frac{a_m}{b_m} b_n$. Z konvergence řady (66) plyne tedy po řadě konvergence těchto řad:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_m}{b_m} b_n, \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Příklad 1. **A**. Vezměme za řadu (66) konvergentní geometrickou řadu $q + q^2 + q^3 + \ldots$ $(0 < q < 1)$. Tak dostáváme t. zv. d'Alembertovo kriterium pro konvergenci: Existují-li čísla $m \in \boldsymbol{N}$ a q $(0 < q < 1)$ tak, že pro $n \geqq m$ jest $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q$, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní. **B**. Vezmeme-li za řadu (64) divergentní řadu $1 + 1 + \ldots$, dostáváme d'Alembertovo kriterium pro divergenci: existuje-li $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq m$ jest $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní. **C**. Kriterium z bodu **A** lze vysloviti zřejmě též takto:[16a]) existuje-li $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq m$ jest $a_n > 0$, a je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní. **D**. Z bodu **B** plyne: existuje-li $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq m$ jest $a_n > 0$, a je-li $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní. Ale toto kriterium je trochu slabší než kriterium z bodu **B**; neboť podmínka „existuje

[16a]) Neboť nerovnost $\limsup \alpha_n < 1$ platí tehdy a jen tehdy, existuje-li $m \in \boldsymbol{N}$ a číslo q $(0 < q < 1)$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $\alpha_n < q$ (viz větu 21).

$m \in \boldsymbol{N}$ takové, že pro všechna $n \geqq m$ jest $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$" požaduje o něco méně než podmínka $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (ale ovšem o něco více než podmínka $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$). **E.** Užiji-li kriteria z bodu **A** na řadu $|a_1| + |a_2| + \ldots$, dostávám tuto větu, platnou pro řady s libovolnými komplexními členy (nejenom pro řady s kladnými členy): existuje-li $m \in \boldsymbol{N}$ a číslo q $(0 < q < 1)$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $a_n \neq 0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq q$, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ absolutně konvergentní. **F.** Rovněž pro divergenci řady s libovolnými členy dostáváme výsledek analogický s bodem **B**: existuje-li $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $a_n \neq 0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1$, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní. Důkaz: z předpokladů plyne $0 < |a_m| \leqq |a_{m+1}| \leqq |a_{m+2}| \leqq \ldots$, tedy $|a_n| \geqq |a_m| > 0$ pro všechna $n \geqq m$, takže není $\lim a_n = 0$. **G.** Z bodů **C**, **D** plyne: nechť existuje $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $a_n > 0$; nechť existuje $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ (vlastní nebo nevlastní). Potom je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní, je-li $\alpha < 1$, ale divergentní, je-li $\alpha > 1$. Podobná „limitní kriteria" lze ovšem připojiti též k bodům **E**, **F**.

Téměř vše, co jsme dosud v tomto paragrafu řekli (až na zavedení lim sup, lim inf v bodech **C**, **D**), bylo jen opakováním věcí známých z **DI**.

Výsledky z příkl. 1. jsme obdrželi srovnáním řady $a_1 + a_2 + \ldots$ s řadou geometrickou. Srovnáním s jinými řadami dostáváme nová kriteria. Na př. srovnáním s řadou

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{67}$$

(jež je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$, viz **DI**, kap. IV, § 3, příkl. 1) dostáváme tuto větu:

Věta 46. (Kriterium Raabeovo.) *Budiž $a_1 + a_2 + \ldots$ řada s kladnými členy* $(a_n > 0)$.

I. Existuje-li číslo $r > 1$ a číslo $m \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqq r, \tag{68}$$

je řada $a_1 + a_2 + \dots$ konvergentní.

II. Existuje-li $m \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqq 1, \tag{69}$$

je řada $a_1 + a_2 + \dots$ divergentní.

Důkaz. I. Nechť jsou splněny podmínky, uvedené v I. Pro $n \geqq m$ je potom $a_n : a_{n+1} \geqq 1 + r : n$. Zvolme α tak, že $1 < \alpha < r$, a položme $b_n = n^{-\alpha}$, takže řada $b_1 + b_2 + \dots$ je konvergentní. Podle věty o přírůstku funkce jest $(0 < \Theta < 1)$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n}\left(1 + \frac{\Theta}{n}\right)^{\alpha-1} < 1 + \\ + \frac{\alpha}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}. \tag{70}$$

Ježto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1} = \alpha < r$, existuje $q \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq q$ jest $\alpha\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1} < r$; pro všechna $n \geqq \mathrm{Max}\,(m, q)$ je tedy podle (70) $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \dfrac{r}{n} \leqq \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, tedy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, z čehož podle věty 45 plyne konvergence řady $a_1 + a_2 + \dots$

II. Nechť existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ platí (69). Položme $b_n = n^{-1}$, takže řada $b_1 + b_2 + \dots$ diverguje. Z (69) plyne pro $n \geqq m$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad \text{tedy} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

takže řada $a_1 + a_2 + \dots$ podle věty 45 diverguje.

Poznámka 1. Ke kriteriu Raabeovu bychom mohli připojiti poznámky, úplně analogické k bodům **C**, **D**, **E**, **G** v příkl. 1.[17]) Pouze k bodu **F** analogické tvrzení není v případě Raabeova kriteria správné (všimněte si, že jsme v příkl. 1 musili podati samostatný, byť triviální důkaz tvrzení **F**; nemohli jsme se odvolati na bod **B**). Budiž na př. předložena řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ($a_n = (-1)^{n+1}n^{-1}$). Zde je

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n}, \quad \text{tedy} \quad n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) \leqq 1$$

(dokonce $= 1$); přesto je předložená řada konvergentní. (Raabeovo kriterium (věta 46) ukazuje pouze, že tato řada není absolutně konvergentní.)

Poznámka 2. Raabeovo kriterium pro konvergenci jest účinnější než kriterium d'Alembertovo. Tím rozumím toto: I. Existuje řada, jejíž konvergenci lze zjistiti Raabeovým kriteriem, nikoliv však d'Alembertovým kriteriem. II. Lze-li u některé řady zjistiti konvergenci d'Alembertovým kriteriem, lze ji též zjistiti Raabeovým kriteriem. Důkaz k bodu I: Budiž $a_1 = 1$ a definujme $a_2, a_3, \ldots$ postupně rovnicí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$. Tedy $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 2$ a Raabeovo kriterium dává kovergenci. Ježto je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nemohou existovati čísla $m \in \boldsymbol{N}$, q $(0 < q < 1)$ tak, aby pro všechna $n \geqq m$ bylo $a_{n+1} : a_n \leqq q$, takže d'Alembertovo kriterium selhává. Důkaz k bodu II: Budiž $a_1 + a_2 + \ldots$ řada s kladnými členy, o níž d'Alembertovo kriterium (t. j. bod **A** z příkl. 1) dovoluje zjistiti, že je konvergentní. Existuje tedy $m \in \boldsymbol{N}$ a číslo q $(0 < q < 1)$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $a_{n+1} : a_n \leqq q$ a tedy $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqq n\frac{1-q}{q}$; pravá a tedy i levá strana poslední nerovnosti mají limitu $+\infty$ (pro $n \to \infty$), takže na př. existuje $p \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq p$ jest $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqq 2$, takže Raabeovo kriterium dovoluje rovněž zjistiti konvergenci řady.

Tato větší účinnost Raabeova kriteria má svůj důvod v tom, že jsme při odvozování d'Alembertova kriteria srovnávali danou řadu

[17]) Snad je zbytečno podotýkati, že věta 46 platí i tehdy, obsahuje-li řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konečný počet členů, jež nejsou kladné.

s geometrickou řadou $q + q^2 + q^3 + \ldots$ $(0 < q < 1)$, kdežto při Raabeově kriteriu jsme srovnávali s řadou (67) $(\alpha > 1)$, jež konverguje mnohem „pomaleji" než řada $q + q^2 + q^3 + \ldots$ Podobné poznámky bychom mohli připojiti ke kriteriím pro divergenci.

Srovnáváním s řadami ještě pomaleji konvergujícími nebo divergujícími bychom mohli dospěti ke kriteriím ještě účinnějším; vezmeme jeden příklad.

Příklad 2. Řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg^{\alpha} n} \quad (\alpha \in \mathbf{E}_1) \tag{71}$$

je divergentní pro $\alpha \leqq 0$, jak ukazuje srovnání s řadou $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{-1}$. Budiž tedy $\alpha > 0$ a pišme $b_n = n^{-1} \lg^{-\alpha} n$. Ježto je to řada s klesajícími kladnými členy, je řada (71) podle věty 88 z **DI** konvergentní nebo divergentní současně s řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n b_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \,.\, 2^{-n} (\lg 2^n)^{-\alpha} = (\lg 2)^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\,;$$

tedy je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$. Srovnáním s řadou (71) dostáváme toto kriterium:

Budiž $a_1 + a_2 + \ldots$ řada s kladnými členy.

I. Nechť existují čísla $m \in \mathbf{N}$ a $r > 1$ tak, že je

$$n \lg n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \geqq r \quad \textit{pro všechna } n \geqq m\,; \tag{72}$$

potom je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní.

II. Nechť existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že je

$$n \lg n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leqq 1 \quad \textit{pro všechna } n \geqq m\,; \tag{73}$$

potom je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní.

Důkaz. I. Ze (72) plyne pro $n \geqq m$ $(n > 1)$ $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqq 1 + \frac{1}{n} + \frac{r}{n \lg n}$. Zvolme α tak, že $1 < \alpha < r$ a kladme $b_n = n^{-1} \lg^{-\alpha} n$; potom jest

$$(74)\quad \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)\lg^\alpha(n+1)}{n\lg^\alpha n} = 1 + \frac{(n+1)\lg^\alpha(n+1) - n\lg^\alpha n}{n\lg^\alpha n}.$$

Taylorova formule dává

$$(n+1)\lg^\alpha(n+1) - n\lg^\alpha n = \lg^\alpha n + \alpha\lg^{\alpha-1} n + \\ + \frac{\alpha\lg^{\alpha-1}(n+\Theta) + \alpha(\alpha-1)\lg^{\alpha-2}(n+\Theta)}{2(n+\Theta)}$$

$(0 < \Theta < 1)$; poslední člen je pro dosti velká n na př. menší než $(r - \alpha)\lg^{\alpha-1} n$, takže pro dostatečně velká n jest $(n+1)\lg^\alpha(n+1) - n\lg^\alpha n < \lg^\alpha n + r\lg^{\alpha-1} n$, t. j. (podle (74))

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{r}{n\lg n} \leqq \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \text{tedy} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

a z konvergence řady $b_1 + b_2 + \ldots$ plyne konvergence řady $a_1 + a_2 + \ldots$

II. Ze (73) plyne pro $n \geqq m\ (n > 1)$ $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqq 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\lg n}$. Klaďme nyní $b_n = n^{-1}\lg^{-1} n$. Předešlé výpočty dávají pro $\alpha = 1$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\lg n} + \frac{1}{2(n+\Theta)\,n\lg n} > \frac{a_n}{a_{n+1}}, \text{ tedy } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

a z divergence řady $b_1 + b_2 + \ldots$ plyne divergence řady $a_1 + a_2 + \ldots$

Poznámka 3. Ke kriteriu právě odvozenému by bylo možno ovšem připojiti touž poznámku jako ke kriteriu Raabeovu (viz poznámku 1).

Poznámka 4. Další věty o nekonečných řadách viz v Dodatku, § 1 a § 2. Hlavně § 1 obsahuje další důležité kriterium.

Cvičení

1. Větu 88 z **DI** zobecněte takto: budiž $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $1 < \liminf\limits_{q\to\infty} \dfrac{n_{q+1}}{n_q} \leqq \limsup\limits_{q\to\infty} \dfrac{n_{q+1}}{n_q} < +\infty$. Budiž $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq 0$. Potom řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konverguje tehdy a jen tehdy, jestliže konverguje řada $\sum\limits_{q=1}^{\infty} (n_{q+1} - n_q)\, a_{n_q}$. Důkaz jako u věty 88 v **DI**.

2. Budiž $a_1 + a_2 + \ldots$ řada s kladnými členy; budiž $A \in \mathbf{E}_1$ libovolné číslo, $\alpha \in \mathbf{E}_1$ libovolné číslo kladné. Definujte B_n rovnicí $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{A}{n} + \dfrac{B_n}{n^{1+\alpha}}$.

Dokažte: Je-li posloupnost $B_1, B_2, \ldots$ omezená, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní pro $A > 1$, divergentní pro $A \leqq 1$. (Pro $A \neq 1$ užijte kriteria Raabeova, pro $A = 1$ užijte kriteria z příkladu 2; uvažte přitom, že n^α roste pro $n \to \infty$ rychleji než $\lg n$.)

3. Buďte α, β, γ, x vlastní reálná čísla. Vyšetřujme řadu (t. zv. hypergeometrickou řadu)

$$1 + \frac{\alpha \, . \, \beta}{1 \, . \, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\,\beta(\beta + 1)}{1 \, . \, 2 \, . \, \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \tag{75}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\,\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \ldots;$$

nechť žádné z čísel α, β, γ není celé nekladné (co nastane, není-li tato podmínka splněna?). Řada je absolutně konvergentní pro $|x| < 1$, divergentní pro $|x| > 1$ (d'Alembertovo kriterium). Pro $x = 1$ mají všichni členové až na konečný počet totéž znamení; kriterium z cvič. 2 dává konvergenci pro $\gamma > \alpha + \beta$, jinak divergenci. Případ $x = -1$ vyšetříme později (§ 7, cvič. 4).

4. Položme $\lg_1 x = \lg x$, $\lg_2 x = \lg(\lg x)$, obecně $\lg_k x = \lg(\lg_{k-1} x)$ pro celé $k > 1$; tyto funkce jsou definovány pro všechna dostatečně velká x (pro která?). Buďte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ vlastní reálná čísla a vyšetřujme řadu

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_0}(\lg_1 n)^{\alpha_1}(\lg_2 n)^{\alpha_2}\ldots(\lg_k n)^{\alpha_k}} \tag{76}$$

($q \in \mathbf{N}$ je voleno již tak veliké, aby všechny členy měly smysl). Užívajíce věty 88 z **DI**, ukažte úplnou indukcí podle k: Je-li $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$, je (76) divergentní; nejsou-li všechna čísla $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rovna 1, vezměme první z těchto čísel, jež je různé od 1; je-li toto číslo > 1, je řada (76) konvergentní, je-li toto číslo < 1, je řada (76) divergentní.

5. Vyšetříte-li podíl dvou po sobě následujících členů řady (76) pro $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 1$, $\alpha_k \geqq 1$, dostanete toto kriterium: Budiž $a_1 + a_2 + \ldots$ řada s kladnými členy. Existují-li čísla k, r, m ($k \geqq 0$ celé, $1 < r < +\infty$, $m \in \mathbf{N}$) tak, že pro všechna $n \geqq m$ je výraz

$$n \lg_1 n \lg_2 n \ldots \lg_k n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \lg_1 n} - \ldots - \frac{1}{n \lg_1 n \ldots \lg_{k-1} n}\right) \tag{77}$$

nejméně roven číslu r, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní; existují-li však k, m ($k \geqq 0$ celé, $m \in \mathbf{N}$) tak, že pro všechna $n \geqq m$ je výraz (77) nejvýše roven 1, je řada $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní. (Případy $k = 0, 1$ dávají kriterium Raabeovo a kriterium z příkl. 2.)

§ 7. Nekonečné součiny. Budiž dána posloupnost komplexních čísel $p_1, p_2, \ldots$ ($p_n \in \mathbf{K}$); položme $P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$. Symbol

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{nebo} \quad p_1 p_2 p_3 \ldots \tag{78}$$

nazýváme nekonečným součinem. Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} P_n$, budeme znakem (78) označovati též tuto limitu; tuto limitu budeme nazývati též hodnotou součinu (78). Jsou-li $p_1, p_2, \ldots$ reálná čísla (konečná), připouštíme též nevlastní limity $+\infty$, $-\infty$.

Věta 47. *Existuje-li vlastní, od nuly různá limita* $\lim_{n\to\infty} P_n$, *je* $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Důkaz. Budiž $\lim P_n = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $\alpha \neq 0$. Potom je $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ pro $n > 1$, tedy $\lim p_n = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

Nejdůležitější případ je ten, kdy existuje vlastní, od nuly různá limita $\lim P_n$; abychom tento případ odlišili od ostatních, mohli bychom součin (78) v tomto případě nazývati konvergentním. Potom by se však konvergence součinu porušila přidáním třeba jediného nulového „činitele" (neboť jakmile je jeden „činitel" p_n roven nule, je zřejmě $\lim P_n = 0$). Abychom se této nepříjemnosti vyhnuli, definujeme pojem „konvergence nekonečného součinu" trochu složitěji takto:

Definice 7. *Součin* (78) *nazýváme konvergentním, nastává-li jeden z těchto dvou případů:*

A. *Existuje vlastní, od nuly různá limita* $\lim_{n\to\infty} p_1 p_2 \ldots p_n$.

B. *Posloupnost* $p_1, p_2, \ldots$ *obsahuje jen konečný počet členů rovných nule; vynecháme-li je, vznikne nekonečný součin, mající vlastnost* **A**.

Je-li k přirozené číslo a položíme-li $Q_n = p_{k+1} p_{k+2} \ldots p_{k+n}$, je $P_n = p_1 p_2 \ldots p_k Q_{n-k}$ pro $n > k$. Z toho je viděti: je-li některé z čísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ rovno nule, je $\lim P_n = 0$; není-li žádné z těchto čísel rovno nule, existuje $\lim P_n$ tehdy a jen tehdy, existuje-li $\lim Q_n$ a je potom $\lim P_n = p_1 p_2 \ldots p_k \lim Q_n$. Rovněž zřejmě platí: součin $p_1 p_2 p_3 \ldots$ je konvergentní (viz definici 7) tehdy a jen tehdy, je-li konvergentní součin $p_{k+1} p_{k+2} p_{k+3} \ldots$ Nedopustím se tedy (podobně jako při nekonečných řadách) při vyšetřování součinu (78) žádného podstatného omezení, vynechám-li konečný počet činitelů. Vzhledem k větě 47 budeme se hlavně zajímati o součiny, v nichž je $\lim p_n = 1$; píšeme-li v takovém součinu $p_n = 1 + u_n$, bude $\lim u_n = 0$ a tedy pro všechna n od jistého počínajíc bude $|u_n| < 1$, pro reálné u_n pak $1 + u_n > 0$. Klaďme nyní stále $p_n = 1 + u_n$. Je-li $1 + u_n > 0$ pro všechna n, jest

$$\lg P_n = \sum_{j=1}^{n} \lg (1 + u_j) . \tag{79}$$

Užitečný bude pro nás tento odhad: Jest

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x \leqq \lg (1 + x) \leqq x & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} , \\ 2x \leqq \lg (1 + x) \leqq x & \text{pro} \ -\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0 . \end{cases} \tag{80}$$

Podle věty o přírůstku funkce je totiž $\lg (1 + x) = \lg (1 + x) - \lg 1 = = \dfrac{x}{1 + \Theta x}$ $(0 < \Theta < 1)$, odkudž (80) ihned plyne (nezapomeňte na obrácení smyslu nerovností při násobení záporným číslem). Vyšetření součinu $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ dá se snadno převésti na vyšetření řady $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, jsou-li všechna u_n nezáporná nebo všechna u_n nekladná:

Věta 48. *Budiž $1 + u_n > 0$ pro všechna n, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; nechť buďto všechna u_n jsou nezáporná nebo všechna u_n nekladná. Potom platí:*

1. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergentní, je $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ konvergentní.*

2. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = + \infty$, je $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = + \infty$.*

3. *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = - \infty$, je $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = 0$.*

Důkaz. Vynechám-li konečný počet činitelů $1 + u_j$, mohu předpokládati $|u_n| \leqq \frac{1}{2}$ pro všechna n.

Podle (79), (80) potom platí

$$\frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n} u_j \leqq \lg P_n \leqq \sum_{j=1}^{n} u_j \quad \text{pro } u_j \geqq 0 , \tag{81}$$

$$2 \sum_{j=1}^{n} u_j \leqq \lg P_n \leqq \sum_{j=1}^{n} u_j \quad \text{pro } u_j \leqq 0 . \tag{82}$$

Odtud plyne: Je-li $\sum u_j = +\infty$, je $u_j \geqq 0$ a podle (81) je $\lim \lg P_n = +\infty$, tedy $\lim P_n = \lim e^{\lg P_n} = +\infty$ (neboť $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$). Je-li $\sum u_j = -\infty$, je $u_j \leqq 0$ a podle (82) je $\lim \lg P_n = -\infty$, tedy $\lim P_n = \lim e^{\lg P_n} = 0$ (neboť $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$). Je-li konečně $\sum u_j$ konvergentní, tvoří čísla $\lg P_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) podle (81) nebo (82) posloupnost omezenou, t. j. částečné součty řady

$$\lg(1 + u_1) + \lg(1 + u_2) + \ldots \tag{83}$$

tvoří posloupnost omezenou; ježto je to řada s členy vesměs nezápornými (pro $u_j \geqq 0$) nebo vesměs nekladnými (pro $u_j \leqq 0$), je konvergentní. Označíme-li písmenem b součet řady (83) (tedy $b \in \mathbf{E}_1$), je $\lim \lg P_n = b$, tedy $\lim P_n = \lim e^{\lg P_n} = e^b > 0$, takže součin $\prod(1 + u_n)$ je konvergentní.

Obraťme se nyní k součinům s libovolnými komplexními činiteli. K tomu cíli budeme především potřebovati tento odhad: *Je-li* $|x| < \frac{1}{8}$, *existují reálná čísla* z, φ *tak, že je*

$$1 + x = e^z e^{i\varphi} = e^z(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,\quad |z| \leqq 3|x|\,,\quad |\varphi| \leqq 2|x|. \tag{84}$$ [18])

D ů k a z. Budiž $x = a + bi$, $a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$, tedy $|a| < \frac{1}{8}$, $|b| < \frac{1}{8}$. Potom jest

$$1 + x = \sqrt{(1+a)^2 + b^2}\left(\frac{1+a}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}}\right). \tag{85}$$

Položme $z = \lg\sqrt{(1+a)^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{1+a}$.

Jest $|2a + a^2 + b^2| \leqq 2|x| + |x|^2 \leqq 3|x| < \frac{1}{2}$ a tedy podle (80)

$$\begin{aligned} -3|x| \leqq \tfrac{1}{2}\lg(1 - 3|x|) \leqq z = \tfrac{1}{2}\lg(1 + 2a + a^2 + b^2) \leqq \\ \leqq \tfrac{1}{2}\lg(1 + 3|x|) \leqq \tfrac{3}{2}|x|\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Dále jest $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, tedy $\cos\varphi > 0$;

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{1+a}\,,\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1+a}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}}\,,\\ &\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}}\,. \end{aligned}\right. \tag{87}$$

[18]) (84) je náhradou za (80) pro komplexní x. Číslo $z + i\varphi$ se nazývá často logaritmem komplexního čísla $1 + x$, o tom však pojednáme soustavneji až později. Výpočty provedu od začátku, ač jsme leccos probrali již v **DI**, kap. XV.

Podle (85), (87) a podle definice čísla z je vskutku $1 + x = e^z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; podle (86) je $|z| \leqq 3|x|$ a konečně je

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{1+a} = \operatorname{arctg} \frac{b}{1+a} - \operatorname{arctg} 0 =$$

$$= \frac{b}{1+a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\Theta b}{1+a}\right)^2} \quad (0 < \Theta < 1),$$

takže $|\varphi| \leqq \left|\frac{b}{1+a}\right| \leqq \frac{8}{7}|b| \leqq 2|x|$, čímž je (84) dokázáno.

Věta 49. *Budiž součin*

(88) $$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |u_j|)$$

konvergentní. Potom je též součin

(89) $$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_j)$$

konvergentní. Konvergence a hodnota součinů (88), (89) *zůstává zachována po libovolném přerovnání posloupnosti* $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Důkaz. Ježto součin (88) má všechny činitele $\geqq 1$, není jeho hodnota 0 a podle věty 47 je tedy $\lim |u_n| = 0$; vynecháním konečného počtu členů mohu tedy dosáhnouti toho, že $|u_j| < \frac{1}{8}$ pro všechna $j \in \boldsymbol{N}$. Ke každému $j \in \boldsymbol{N}$ existují tedy podle (84) reálná čísla z_j, φ_j tak, že jest

(90) $$1 + u_j = e^{z_j} e^{i\varphi_j}, \quad |z_j| \leqq 3|u_j|, \quad |\varphi_j| \leqq 2|u_j|$$

a tedy

(91) $$P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 + u_j) = e^{\sum_{j=1}^{n} z_j} e^{i\sum_{j=1}^{n} \varphi_j} = e^{\sum_{j=1}^{n} z_j} (\cos \sum_{j=1}^{n} \varphi_j + i \sin \sum_{j=1}^{n} \varphi_j).$$

Podle věty 48 plyne z konvergence součinu (88) konvergence řady $|u_1| + |u_2| + \ldots$ a podle (90) tedy též absolutní konvergence řad

(92) $$Z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j, \quad \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j.$$

Tedy jest $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{j=1}^{n} z_j} = e^Z$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j = \cos \Phi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j = \sin \Phi$, a tedy podle (91)

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1 + u_j) = \lim_{n\to\infty} P_n = e^Z (\cos \Phi + i \sin \Phi) . \tag{93}$$

To je vlastní číslo různé od nuly, takže součin (89) konverguje. Přerovnáním se nezmění součty Z, Φ absolutně konvergentních řad (92) (viz větu 37), tedy ani konvergence a hodnota součinu (89) (viz vzorec (93)). Užijeme-li tohoto výsledku s hodnotami $|u_j|$ místo u_j,[19]) vidíme, že také konvergence a hodnota součinu (88) se nezmění přerovnáním.

Jiný důkaz podáváme v cvič. 7—10 (pomocí „Bolzano-Cauchyovy podmínky").

Zavedeme nyní obdobné pojmenování jako u nekonečných řad:

Definice 8. *Součin* (89) *nazýváme absolutně konvergentním, je-li součin* (88) *konvergentní. Je-li* (89) *konvergentní, ale* (88) *není konvergentní, říkáme, že* (89) *je neabsolutně konvergentní.*

Větu 49 lze tedy vysloviti též takto: každý součin „absolutně konvergentní" je konvergentní. Přerovnáním činitelů absolutně konvergentního součinu dostáváme opět absolutně konvergentní součin a jeho hodnota se nezmění. Z věty 48 plyne konečně bezprostředně

Věta 50. *Součin* $\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1 + u_j)$ *jest absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li řada* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j$ *absolutně konvergentní* (t. j. je-li řada $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |u_j|$ konvergentní).

Cvičení

1. Budiž $1 + u_n > 0$ pro všechna n. Nechť existuje číslo A a kladné číslo δ ($A \in \mathbf{E}_1$, $\delta \in \mathbf{E}_1$) tak, že čísla $v_1, v_2, \ldots$, definovaná rovnicí

$$u_n = \frac{A}{n} + \frac{v_n}{n^{1+\delta}} ,$$

[19]) T. j. vyšetřujeme-li součin $\Pi(1 + v_j)$, kde $v_j = |u_j|$ — a tedy ovšem $|v_j| = v_j$.

tvoří posloupnost omezenou. Potom platí:

1. Je-li $A > 0$, je $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = + \infty$.

2. Je-li $A < 0$, je $\prod (1 + u_n) = 0$.

3. Je-li $A = 0$, je $0 < \prod (1 + u_n) < + \infty$ a součin je absolutně konvergentní (užijte vět 48, 49).

2. Budiž $a_1, a_2, \dots$ posloupnost kladných čísel. Nechť existují čísla $\delta > 0$, A ($\delta \in \mathbf{E}_1$, $A \in \mathbf{E}_1$) tak, že čísla $v_1, v_2, \dots$, definovaná rovnicí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{A}{n} + \frac{v_n}{n^{1+\delta}},$$

tvoří posloupnost omezenou. Potom platí:

1. Je-li $A > 0$, je posloupnost $a_1, a_2, \dots$ od jistého indexu počínajíc rostoucí, $\lim a_n = + \infty$.

2. Je-li $A < 0$, je posloupnost $a_1, a_2, \dots$ od jistého indexu počínajíc klesající, $\lim a_n = 0$.

3. Je-li $A = 0$, je $0 < \lim a_n < + \infty$.

Návod: $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}$ a cvič. 1.

3. Výsledek cvič. 2 je jakési „podílové kriterium" pro posloupnost $a_1, a_2, \dots$ (ne pro řadu $a_1 + a_2 + \dots$). Dokažte ještě: buďte $a_1, a_2, \dots$; $b_1, b_2, \dots$ dvě posloupnosti kladných (vlastních) čísel. Nechť existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ jest $a_{n+1} : a_n \leqq b_{n+1} : b_n$. Potom je $0 \leqq \limsup a_n \leqq \frac{a_m}{b_m} \limsup b_n$; $0 \leqq \liminf a_n \leqq \frac{a_m}{b_m} \liminf b_n$. Tedy na př., je-li $\lim a_n = + \infty$, je $\lim b_n = + \infty$; je-li $\lim b_n = 0$, je $\lim a_n = 0$. Je-li ovšem na př. $\lim b_n = 1$, lze tvrditi pouze, že $0 \leqq \liminf a_n \leqq \limsup a_n \leqq \frac{a_m}{b_m} < + \infty$.

4. V řadě z cvič. 3, § 6 dosaďte $x = -1$; potom se znamení členů řady od jistého indexu střídají. Užitím cvič. 2 a věty 89 z **DI** dokažte konvergenci řady pro $\alpha + \beta < \gamma + 1$, divergenci pro $\alpha + \beta \geqq \gamma + 1$; absolutní konvergence nastane podle cvič. 3, § 6 tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha + \beta < \gamma$.

5. Součin (89) byl ve větě 48 úplně probrán, jsou-li všechna $u_j \geqq 0$ nebo všechna $u_j \leqq 0$. Ostatní případy[20]) probereme v tomto a v následujícím cvičení, *předpokládajíce v cvič. 5, 6 stále, že* $u_j \in \mathbf{E}_1$, $1 + u_j > 0$ *pro všechna* $j \in \mathbf{N}$. Dokažte:

---

[20]) T. j. pro libovolná znamení čísel u_j.

1. Jsou-li řady $\sum u_j$, $\sum u_j^2$ konvergentní, je (89) konvergentní.

2. Je-li $\sum u_j$ konvergentní, $\sum u_j^2$ divergentní (na př. $u_j = (-1)^j j^{-\frac{1}{2}}$), není (89) konvergentní a má hodnotu 0.

3. Je-li $\sum u_j$ divergentní, $\sum u_j^2$ konvergentní, není (89) konvergentní.

Návod: Jde o řadu $\sum \lg (1 + u_j)$; Taylorova věta dává $\lg (1 + u_j) = u_j - \frac{u_j^2}{2(1 + \Theta_j u_j)^2}$ $(0 < \Theta_j < 1)$, z čehož tvrzení snadno plyne.

6. Zbývá poslední možnost: $\sum u_j$ divergentní, $\sum u_j^2$ divergentní. V tomto případě součin může, ale nemusí býti konvergentní. Pro $u_n = n^{-\frac{1}{2}}$ máme podle věty 48 součin s hodnotou $+\infty$. Příklad na konvergentní součin je těžší. Jest $\lg (1 + u_j) = u_j - \frac{1}{2}u_j^2 + \frac{u_j^3}{3(1 + \Theta_j u_j)^3}$ $(0 < \Theta_j < 1)$. Volme $u_1 = 1$, $u_n = \pm n^{-\frac{1}{2}}$ pro $n = 2, 3, \ldots$; znamení teprve zvolíme. Řada $\sum u_n^3$ je absolutně konvergentní, $\sum u_n^2 = \sum n^{-1} = +\infty$. Volíte-li v cvič. 6, § 2

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}, \quad \text{je } \sum a_n = \sum b_n = +\infty$$

a odtud vidíte, že znamení $\pm$ lze voliti tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \right) = 0$. Ze vzorce pro $\lg (1 + u_j)$ potom plyne konvergence řady $\sum \lg (1 + u_j)$, tedy konvergence součinu $\prod (1 + u_j)$; zároveň je vidět, že $\sum \pm n^{-\frac{1}{2}}$ je divergentní, ježto $\sum (2n)^{-1}$ je divergentní.

7. Součin (89) je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka (typu příbuzného Bolzano-Cauchyově podmínce z věty 26 (viz pozn. 2 v kap. II, § 3) nebo 31): Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že jest

(94) $|(1 + u_{n_0+1})(1 + u_{n_0+2}) \ldots (1 + u_{n_0+p}) - 1| < \varepsilon$ pro všechna $p \in \boldsymbol{N}$.

Návod: Pišme $P_n = (1 + u_1) \ldots (1 + u_n)$; je-li (89) konvergentní, označme jeho hodnotu písmenem P.

I. Nechť (89) je konvergentní; vynecháním eventuálních nulových činitelů dosáhneme toho, že $P \neq 0$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje předně $r \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq r$ je $|P_n| > \frac{1}{2}|P|$; podle věty 26 (vlastně podle pozn. 2 v kap. II, § 3) existuje $n_0 \geqq r$ $(n_0 \in \boldsymbol{N})$ tak, že pro $p \in \boldsymbol{N}$ je $|P_{n_0+p} - P_{n_0}| < \frac{1}{2}\varepsilon|P|$. Ježto $|P_{n_0}| > \frac{1}{2}|P|$, vyjde $\left| \frac{P_{n_0+p}}{P_{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon$, což je (94).

II. Nechť je splněna uvedená podmínka. Z ní pro $\varepsilon = 1$ plyne, že od jistého indexu počínajíc jest $1 + u_n \neq 0$. Vynechme nulové činitele. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ plyne z (94): existuje $n_1 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq n_1$ jest $0 < \frac{1}{2}|P_{n_1}| < |P_n| < \frac{3}{2}|P_{n_1}|$, takže jistě není $\lim P_n = 0$. Budiž $\eta > 0$; položme $\varepsilon = \eta : (\frac{3}{2}|P_{n_1}|)$. Existuje $n_0 \geqq n_1$ ($n_0 \in \boldsymbol{N}$) tak, že pro $p \in \boldsymbol{N}$ platí (94) a tedy

$$|P_{n_0+p} - P_{n_0}| < \varepsilon |P_{n_0}| < \eta ;$$

z toho podle pozn. 2 v kap. II, § 3 plyne existence vlastní $\lim P_n$.

8. Z cvič. 7 dokažte znovu: je-li (88) konvergentní, je též (89) konvergentní. Návod: uvažte, že

$$(95) \quad |(1 + u_{n_0+1}) \dots (1 + u_{n_0+p}) - 1| \leqq (1 + |u_{n_0+1}|) \dots (1 + |u_{n_0+p}|) - 1 ;$$

to plyne z toho, že se vlevo i vpravo po vynásobení jednička zruší, takže pravá strana je součet prostých hodnot sčítanců vlevo (po vynásobení a zrušení jedničky).

9. Je-li součin (89) absolutně konvergentní, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $n_0 \in \boldsymbol{N}$ s touto vlastností: jsou-li $m_1, m_2, \dots, m_p$ navzájem různá přirozená čísla větší než n_0, je $|(1 + u_{m_1})(1 + u_{m_2}) \dots (1 + u_{m_p}) - 1| < \varepsilon$ (postupujte podle vzoru nerovnosti (95)).

10. Dokažte znovu: konverguje-li (89) absolutně, nezmění se jeho hodnota přerovnáním.

Návod: budiž $P_n = (1 + u_1) \dots (1 + u_n)$ (po vynechání nulových činitelů); budiž Q_n obdobný výraz pro přerovnaný součin. Podíl $P_n : Q_n$ lze psáti ve tvaru $\dfrac{(1 + u_{m_1}) \dots (1 + u_{m_p})}{(1 + u_{r_1}) \dots (1 + u_{r_p})}$, kde pro velká n je čitatel i jmenovatel blízký jedničce (viz cvič. 9).

11. Budiž (89) absolutně konvergentní; budiž $j_1 < j_2 < \dots$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom je též „vybraný" součin $(1 + u_{j_1})(1 + u_{j_2}) \,.\, (1 + u_{j_3}) \dots$ absolutně konvergentní.