KAPITOLA II.

POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH A KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

V této kapitole odvodíme, vycházejíce z **DI**, kap. II (přečtěte si tuto kapitolu, nemáte-li její obsah dokonale v paměti), další věty o posloupnostech reálných čísel; v § 3, 4 odvodíme též některé věty, platné i pro posloupnosti čísel komplexních. O t. zv. dvojných, trojných, ... posloupnostech viz několik slov v kap. VI, § 10, pozn. 3 a § 11, příkl. 2 (nejsou to vlastně posloupnosti ve smyslu této kap. II).

§ 1. Rozšíření oboru reálných čísel o prvky $+\infty$, $-\infty$. V **DI**, kap. I jsme vyšli z množiny všech racionálních čísel, kterou budeme stále značit $\mathbf{P}$. Tuto množinu jsme zavedením řezů rozšířili na množinu všech reálných čísel, kterou budeme stále značit $\mathbf{E}_1$. Jeví se účelným, rozšířiti množinu $\mathbf{E}_1$ ještě o dva další prvky, které nazveme $+\infty$, $-\infty$ (čteme ovšem: plus a minus nekonečno). Nejpřirozeněji k nim dospějeme takto: Uspořádanou dvojici $\alpha = (A/B)$ množin $A \subset \mathbf{P}$, $B \subset \mathbf{P}$ jsme v **DI**, kap. I, § 4 nazvali *řezem*, jsou-li splněny tyto tři podmínky (píši je v symbolice theorie množin):

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. 2. $A \cup B = \mathbf{P}$. 3. $(a \in A, b \in B) \Rightarrow a < b$.[1])

Vynechám-li první podmínku, dostanu vedle řezů, vyšetřovaných v **DI**, ještě dva další řezy, totiž ty, kde je buďto $B = \emptyset$ a tedy $A = \mathbf{P}$, nebo $A = \emptyset$ a tedy $B = \mathbf{P}$. Řez $(\mathbf{P}/\emptyset)$ nazveme $+\infty$, řez $(\emptyset/\mathbf{P})$ nazveme $-\infty$. Těmto prvkům říkáme **nekonečná** nebo **nevlastní** reálná čísla, ostatním reálným číslům, známým z **DI**, říkáme **konečná** nebo **vlastní** reálná čísla. Slova „reálné číslo" znamenají v dalším konečné nebo nekonečné reálné číslo (naproti tomu slovo „racionální" nebo „celé" číslo značí vždy konečné číslo). Znakem $\mathbf{E}_1^*$ budeme stále značit množinu všech (konečných i nekonečných) reálných čísel, t. j. klademe

$$\mathbf{E}_1^* = \mathbf{E}_1 \cup (+\infty) \cup (-\infty).$$

Poznámka 1. Již v **DI** jsme užívali symbolů $+\infty$, $-\infty$, ale pouze jako součástí vzorců (na př. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - x^3) = -\infty$), nedávajíce

1) Odtud už plyne, že $AB = \emptyset$.

jim samostatného významu. Teď je čtenář snad již dostatečně vyspělý, aby se nedal svésti slovem „nekonečno" k nějakým metafysickým spekulacím.

Poznámka 2. Aby zavedení prvků $+\infty$, $-\infty$ bylo účelné, je nutno vhodným způsobem na ně rozšířiti vztahy a početní výkony, definované pro konečná reálná čísla. Definujeme tedy:

A. Absolutní hodnota. Definujeme $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

B. Uspořádání. Je-li a konečné, definujeme uspořádání takto: $-\infty < a$, $a < +\infty$, $-\infty < +\infty$. Číslo $+\infty$ počítáme ovšem mezi kladná (a též mezi nezáporná) čísla, číslo $-\infty$ mezi záporná (a též mezi nekladná); je totiž $-\infty < 0 < +\infty$.

C. Sčítání. Nedefinujeme součet

$$a + b + \ldots + m\,, \tag{1}$$

jestliže mezi sčítanci je aspoň jeden $+\infty$ a současně aspoň jeden $-\infty$. V ostatních případech definujeme: Je-li aspoň jeden sčítanec v (1) $+\infty$ (po příp. $-\infty$), nechť součet (1) značí $+\infty$ (po příp. $-\infty$). Na př.

$$(-3) + (+\infty) + 2 + (+\infty) = +\infty\,, \quad 7 + (-\infty) + 8 = -\infty\,,$$

kdežto $(+\infty) + 5 + (-\infty)$ nemá smyslu.

D. Násobení. Nedefinujeme součin

$$ab \ldots m \tag{2}$$

v tom případě, že aspoň jeden činitel je nekonečný a současně aspoň jeden činitel je nula. V ostatních případech definujeme: Je-li aspoň jeden činitel v (2) nekonečný, definujeme součin (2) jako $+\infty$ (po příp. $-\infty$), je-li počet záporných činitelů (včetně $-\infty$) sudý (po příp. lichý). Na př. $7 \,.\, (+\infty) \,.\, (-10) \,.\, (-5) \,.\, (-\infty) = -\infty$, $3 \,.\, 6 \,.\, (-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty$, kdežto $3 \,.\, (+\infty) \,.\, 0$ nemá smyslu. Místo $(-1) \,.\, a$ píšeme $-a$; tedy $-(+\infty) = (-1) \,.\, (+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = (-1) \,.\, (-\infty) = +\infty$. Místo $a + (-b)$ píšeme $a - b$ a pod., jak jsme zvyklí u konečných čísel.[2])

[2]) To ovšem neznamená ještě, že by číslo $x = a - b$ musilo vždy vyhovovati rovnici $b + x = a$; viz cvič. 3.

E. Dělení. Pro konečné a definujeme $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$. Dále: zlomek s nekonečným čitatelem a s konečným jmenovatelem různým od nuly definujeme jako $+\infty$, má-li čitatel totéž znamení jako jmenovatel, a jako $-\infty$, má-li čitatel opačné znamení než jmenovatel. Na př. $\frac{+\infty}{3} = \frac{-\infty}{-5} = +\infty$, $\frac{+\infty}{-1} = \frac{-\infty}{6} = -\infty$. Naproti tomu zlomek, kde buďto jmenovatel je nula nebo čitatel i jmenovatel jsou nekonečná čísla, zůstává nedefinován.

K početním pravidlům právě zavedeným viz cvič. 1, 2.

Máme-li posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ čísel z $\boldsymbol{E}_1^*$ (takže mezi jejími členy se může vyskytovati také $+\infty$ a $-\infty$), definujeme její limitu stejně jako v **DI**. **Konečná** neboli **vlastní** limita ovšem nemůže existovati, jestliže posloupnost obsahuje nekonečně mnoho nekonečných členů; naproti tomu může v tomto případě existovati **nekonečná** neboli **nevlastní** limita, kterou definujeme ovšem stejně jako v **DI**, def. 7, 8: Posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots$ má limitu $+\infty$, jestliže ke každému konečnému[3]) K existuje přirozené n_0 tak, že

$$(n \in \boldsymbol{N}, n > n_0) \Rightarrow a_n > K\ ; \tag{3}$$

podobně pro limitu $-\infty$ (pište $a_n < K$ místo $a_n > K$).

Účelnost zavedených definicí pro početní výkony s čísly $+\infty$, $-\infty$ se nám projeví v následujících dvou větách — a ovšem také později na různých místech.

Věta 13. *Buďte $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ dvě posloupnosti reálných čísel. Potom platí tyto rovnice, pokud jejich pravá strana má význam:*

$$\lim|a_n| = |\lim a_n|\ ;$$
$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n\ ;$$
$$\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n\ ;$$
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}\ ;$$

$$\lim \mathrm{Max}\,(a_n, b_n) = \mathrm{Max}\,(\lim a_n, \lim b_n) \quad \textit{a podobně pro}\ \mathrm{Min}\,. \tag{4}$$

[3]) Toto slovo musíme nyní přidat, abychom vyloučili případ $K = +\infty$.

Poznámka 3. Zachováváme ovšem úmluvu z **DI**, kap. II, § 1, pozn. 1: mluvíme o posloupnosti a o její limitě i tehdy, když konečný počet členů není definován.

Důkaz. A. Dokažme napřed rovnici (4), která se v **DI** nevyskytla. Nechť pravá strana má smysl, takže existuje $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Vzhledem k symetrii stačí vyšetřiti případ $a \geqq b$, takže pravá strana v (4) je rovna a. Položme $c_n = \operatorname{Max}(a_n, b_n)$. Budiž předně $a > b$, takže pro všechna $n > n_0$ je $a_n > b_n$ podle věty 59 v **DI**.[4]) Pro $n > n_0$ je tedy $c_n = a_n$, tedy vskutku $\lim c_n = \lim a_n = a$. Budiž za druhé $a = b$. Je zřejmo, že posloupnost

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots \tag{5}$$

má v tomto případě limitu a. Ale pro každé n je buďto $c_n = a_n$ nebo $c_n = b_n$, takže posloupnost $c_1, c_2, \ldots$ je vybrána z (5) a má tedy podle věty 62 v **DI**[4]) vskutku limitu a.

B. Ostatní rovnice jsme dokázali v **DI**, kap. II, § 2 pro vlastní limity a v **DI**, kap. II, § 3, cvič. 4, 6, 8, 9, 12 pro nevlastní limity. Tam jsme ovšem předpokládali, že členy posloupností byly konečné; ale čtenář ihned pozná, že tentýž postup lze aplikovati, jsou-li některá a_n, b_n nekonečná.

Poznámka 4. Definici vlastní i nevlastní limity lze shrnouti takto: Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ má limitu a (vlastní nebo nevlastní) tehdy a jen tehdy, jestliže platí toto:

1. Ke každému $t' > a$ existuje n_0 tak, že $n \geqq n_0 \Rightarrow a_n < t'$.
2. Ke každému $t'' < a$ existuje n_1 tak, že $n \geqq n_1 \Rightarrow a_n > t''$.

Důkaz. I. Je-li a konečné číslo, je ekvivalence našich podmínek s definicí limity zřejmá. II. Je-li $a = +\infty$, nepožaduje první podmínka vůbec nic (neboť neexistuje $t' > a$), druhá pak je totožná s definicí limity $+\infty$. III. Podobně pro $a = -\infty$. Tato poznámka nám někdy ušetří rozlišování vlastních a nevlastních limit.

Druhá věta, kterou zobecníme, je věta o supremu a infimu (viz **DI**, věty 39, 40). Při formulování věty o supremu jsme v **DI** musili předpokládati, že množina M byla neprázdná a shora omezená. Zavedení čísel $+\infty$, $-\infty$ nám dovoluje zbaviti se tohoto omezení.

---

[4]) Tato věta platí zřejmě i v našem poněkud zobecněném případě.

Budiž $M \subset \mathbf{E}_1^*$. Číslo $k \in \mathbf{E}_1^*$ nazvu horní závorou (nebo horním odhadem) množiny M, jestliže platí

$$x \in M \Rightarrow x \leqq k ,$$

t. j. jestliže žádné číslo z M není větší než k. Číslo $+\infty$ je ovšem horní závorou každé množiny $M \subset \mathbf{E}_1^*$. Jestliže existuje konečná horní závora množiny M, říkáme, že M je shora omezená. To je ve shodě s definicí v **DI**, kap. I, § 8; nyní ovšem může M obsahovati také prvek $-\infty$. Větu o supremu můžeme nyní obecněji formulovati takto:

Věta 14. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_1^*$. Potom mezi všemi horními závorami množiny M je jedna, která je ze všech nejmenší, označme ji G.*[5] *Znak:* $G = \sup M$; *název: supremum množiny M.*

Ekvivalentní je tato formulace:

Věta 14a. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_1^*$. Potom existuje v $\mathbf{E}_1^*$ jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. *$x \in M \Rightarrow x \leqq G$, t. j. žádné číslo z M není větší než G.*
2. *Ke každému číslu $G' < G$ existuje $x_0 \in M$ tak, že $x_0 > G'$.*

Obě formulace jsou zřejmě ekvivalentní. Neboť vlastnost 1 z věty 14a říká právě toto: G je horní závorou a vlastnost 2 říká právě toto: žádné číslo $G' < G$ není horní závorou množiny M. A že nejmenší horní závora je jen jedna, je jasné.[6]

Důkaz věty 14. I. Nechť předně M není shora omezená; potom zřejmě jedinou (a tedy nejmenší) horní závorou je číslo $+\infty$. II. Nechť za druhé M je shora omezená a obsahuje aspoň jedno konečné číslo. Potom množina $M_1 = M \dot{-} (-\infty)$ má zřejmě tytéž horní závory jako M; ale M_1 je shora omezená a neprázdná množina konečných čísel a věta 39 z **DI** dává ihned žádaný výsledek. III. Zbývá případ, že M je buďto prázdná nebo obsahuje jediný prvek, a to $-\infty$. Potom číslo $-\infty$ je horní závorou (a tedy nejmenší horní závorou) množiny M.

---

[5]) T. j. neexistuje žádná horní závora množiny M, která by byla menší než G.

[6]) V **DI**, 1. vydání je vyslovena jen formulace druhá, v 2. vydání jsou vysloveny obě; ovšem jen pro neprázdné shora omezené množiny konečných čísel.

Pamatujme, že $\sup \emptyset = -\infty$.

Budiž opět $M \subset \mathsf{E}_1^*$. Číslo $k \in \mathsf{E}_1^*$ nazvu dolní závorou množiny M, jestliže $x \in M \Rightarrow x \geqq k$. Platí zase, že existuje největší ze všech dolních závor; znak $\inf M$, název infimum množiny M. Zřejmě $\inf \emptyset = +\infty$. Sestavme několik triviálních důsledků:

$$(\sup M = +\infty) \Leftrightarrow (M \text{ není shora omezená}) .$$
$$(\inf M = -\infty) \Leftrightarrow (M \text{ není zdola omezená}) .$$

Obsahuje-li M aspoň dvě různá čísla $x < y$, je $\inf M < \sup M$ (neboť $\inf M \leqq x < y \leqq \sup M$). Skládá-li se M z jediného čísla x, je $\sup M = \inf M = x$. Ale pozor: Je-li $M = \emptyset$, je $\sup M = -\infty$, $\inf M = +\infty$.

Celý obsah tohoto paragrafu je téměř triviální. Jeho smysl spočívá v tom, že rozšíření množiny E_1 o čísla $+\infty$, $-\infty$ nám dovoluje často shrnouti několik případů (na př. vlastní a nevlastní limity — věta 13, nebo omezené a neomezené množiny — věta 14). Většina cvičení k tomuto paragrafu je skoro triviální; jde mně jen o to, aby se čtenář přesvědčil, že mně porozuměl.

Poznámka 5. Je-li f reálná funkce, definovaná v množině M, budeme supremum všech hodnot $f(x)$ pro všechna $x \in M$, t. j. supremum množiny $f(M)$, značit $\sup\limits_{x \in M} f(x)$ („supremum funkce f v množině M“). Podobně infimum.

Poznámka 6. Je dobře, naučit se s infimem a supremem trochu počítat. V této poznámce značí M, N, P, Q, A, B množiny reálných čísel.

I. Jestliže $x \in M \Rightarrow x \leqq \sup N$, je $\sup M \leqq \sup N$, neboť $\sup N$ je horní závorou množiny M, a $\sup M$ je nejmenší horní závorou. Podobně: Jestliže $x \in M \Rightarrow x \geqq \inf N$, je $\inf M \geqq \inf N$. Speciálně: Je-li $M \subset N$, je $\sup M \leqq \sup N$ (neboť $x \in M \Rightarrow x \leqq \sup N$) a podobně $\inf M \geqq \inf N$.

II. Nechť $(x \in P, y \in Q) \Rightarrow x \leqq y$. Tvrdím, že $\sup P \leqq \inf Q$. Důkaz: Budiž $x \in P$. Potom pro každé $y \in Q$ je $x \leqq y$, t. j. x je dolní závorou množiny Q. Tedy $x \leqq \inf Q$. To platí pro každé $x \in P$. Tedy číslo $\inf Q$ je horní závorou množiny P. Tedy $\sup P \leqq \inf Q$.

III. Nechť ke každému $x \in A$ existuje $y \in B$ tak, že $x \leqq y$. Potom $\sup A \leqq \sup B$. Důkaz: Budiž $x \in A$. Existuje $y \in B$ tak, že $x \leqq y$. Ale $y \leqq \sup B$. Tedy $x \leqq \sup B$. To platí pro každé $x \in A$. Tedy podle I $\sup A \leqq \sup B$.

IV. Podobně lze odhadovati maximum a minimum konečného počtu čísel. Jsou-li na př. x_i, y_i, z_i $(i = 1, \ldots, r)$ konečná reálná (nebo i komplexní) čísla, je

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} |x_i - z_i| \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} |x_i - y_i| + \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} |y_i - z_i| .$$

Důkaz: Pro každé i je

$$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leqq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| ,$$

tedy tím spíše

$$|x_i - z_i| \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} |x_i - y_i| + \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} |y_i - z_i| .$$

Této nerovnosti vyhovuje tedy i největší z čísel $|x_i - z_i|$.

Příklad 1. Pro každé $z \in Z$ budiž M_z nějaká množina reálných čísel; $\sup M_z = S(z)$ závisí na z. Všechna čísla $S(z)$ pro všechna $z \in Z$ tvoří jistou množinu T a tvrdím, že $\sup T = \sup \bigcup_{z \in Z} M_z$. T. j. tvrdím, že

$$\sup \bigcup_{z \in Z} M_z = \sup_{z \in Z} (\sup M_z) . \tag{6}$$

Důkaz: Pravá strana je číslo $\sup_{z \in Z} S(z) = G$. I. Je-li $x \in \bigcup_{z \in Z} M_z$, je $x \in M_{z_0}$ pro jisté z_0, tedy $x \leqq S(z_0) \leqq G$. Tedy: G je horní závora množiny $\bigcup_{z \in Z} M_z$. II. Budiž $G' < G$. Tedy existuje z_0 tak, že $S(z_0) = \sup M_{z_0} > G'$. Tedy existuje $x \in M_{z_0}$ tak že $x > G'$. Tedy G' není horní závorou množiny $\bigcup_{z \in Z} M_z$. Tedy G je vskutku nejmenší horní závora. Podobně $\inf \bigcup_{z \in Z} M_z = \inf_{z \in Z} (\inf M_z)$.

Jako cvičení ukažte, že

$$\sup \bigcap_{z \in Z} M_z \leqq \inf_{z \in Z} (\sup M_z) ,$$

$$\inf \bigcap_{z \in Z} M_z \geqq \sup_{z \in Z} (\inf M_z)$$

(to je ještě lehčí). Příklad dvou množin $M_1 = (1, 3, 4)$, $M_2 = (2, 3, 5)$ ukazuje, že zde nemusí platit znamení rovnosti.

Příklad 2. Budiž f reálná funkce, definovaná v nějaké množině $M \subset A \times B$. (Hodnotu funkce v bodě $[x, y]$ ($x \in A$, $y \in B$) značme $f(x, y)$.) Potom je

$$\sup_{[x,y]\in M} f(x, y) = \sup_{x\in A} (\sup_{y\in M^{x,*}} f(x, y)) . \tag{7}$$

(Užívám označení z kap. I, § 8, pozn. 3.)

Důkaz. Levá strana je $\sup f(M)$. Množinu $f(M)$ pak dostaneme takto: při pevném $x \in A$ vezmu množinu P_x všech hodnot $f(x, y)$ s tímto x a se všemi hodnotami $y \in M^{x,*}$ (t. j. se všemi hodnotami y, pro něž $[x, y] \in M$), načež $f(M)$ je sjednocení všech P_x, takže rovnici (7) lze psáti

$$\sup \bigcup_{x\in A} P_x = \sup_{x\in A} (\sup P_x) ,$$

což je rovnice (6), jen s jinými písmeny. Speciálně pro $M = A \times B$ je $M^{x,*} = B$ pro každé $x \in A$, tedy

$$\sup_{[x,y]\in A\times B} f(x, y) = \sup_{x\in A} (\sup_{y\in B} f(x, y)) .$$

Podobně pro infimum.

Poznámka 7. Číslo $\sup M$ patří do množiny M zřejmě tehdy a jen tehdy, je-li jedno z čísel množiny M **největší** ze všech čísel množiny M. Toto největší číslo množiny M je pak právě číslo $\sup M$. V tomto (ale **jenom** v tomto) případě budeme místo $\sup M$ někdy psáti $\operatorname{Max} M$. Podobně píšeme někdy $\operatorname{Max}_{x\in M} f(x)$ (označujíce tím největší číslo množiny $f(M)$, existuje-li ovšem). Podobně pro inf, Min. Smíme tedy psáti $\sup \langle 0, 1\rangle = 1$ nebo $\operatorname{Max} \langle 0, 1\rangle = 1$, ale **nesmíme** psáti $\operatorname{Max} (0, 1) = 1$.

Cvičení

Ve všech těchto cvičeních jde o čísla a množiny z E_1^*, pokud není řečeno něco jiného.

1. Dokažte, že vždy platí jeden a jen jeden z těchto tří případů: $a = b$, $a < b$, $b < a$. Dokažte, že ($a < b$, $b < c$) $\Rightarrow a < c$.[7]) (Stačí si rozvážit ty případy, kdy některé z čísel je nekonečné; podobně v cvič. 2, 3.)

[7]) Naproti tomu věta „ke každému a existuje přirozené $n > a$“ neplatí pro $a = +\infty$.

2. Dokažte, že $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, $ab = ba$, $(ab)\,c = a(bc)$, $|ab| = |a|\,.\,|b|$, $|a : b| = |a| : |b|$, má-li aspoň jedna strana rovnice smysl. Dokažte, že $ab + ac = a(b + c)$, $|a + b| \leqq |a| + |b|$, má-li levá strana smysl.

3. Pro která a, b má rovnice $a + x = b$ řešení? Kdy je toto řešení jediné, kdy je dáno výrazem $b - a$ (t. j. $b + (-1)\,.\,a$)? Kdy má výraz $b - a$ smysl, ač rovnice $a + x = b$ nemá řešení? Kdy má naopak tato rovnice řešení, ač výraz $b - a$ nemá smyslu? Podobně vyšetřete rovnici $ax = b$.

4. V tomto a v násl. cvičení 5 mluvím o řezech (jako v **DI**, kap. I, § 4), ale připouštím též oba řezy $+\infty = (\mathbf{P}, \emptyset)$, $-\infty = (\emptyset, \mathbf{P})$. Definujete-li nerovnost a sčítání řezů přesně podle definicí 2, 3 v **DI** (připouštějíce ovšem též řezy $+\infty$, $-\infty$), dospějete právě ke vztahům zavedeným před chvílí definitoricky:

$$\alpha < +\infty\,,\ -\infty < \alpha\,,\ -\infty < +\infty\,,$$

$$(+\infty) + \alpha = (+\infty) + (+\infty) = +\infty\,, \tag{8}$$

$$(-\infty) + \alpha = (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,, \tag{9}$$

kde α značí libovolné konečné číslo. (Podle definice 3. v **DI** je totiž součet řezů 1. nebo 3. druhu

$$\alpha' = (A'/B')\,,\ \alpha = (A/B) \tag{10}$$

řez (C/D), kde D je množina všech čísel tvaru $b' + b$, kde $b' \in B'$, $b \in B$; v (8) vyjde $D = \emptyset$, v (9) vyjde $D = \mathbf{P}$.)

5. Kdybyste však týmž způsobem jako v cvič. 4 definovali $(+\infty) + (-\infty)$, vyšlo by vám $+\infty$; my jsme se však z dobrých důvodů rozhodli, že tento součet vůbec definovati nebudeme.[8]) V čem to vězí? Bylo by přirozeno, definovati součet řezů (10) jako řez (C/D), kde D je množina všech čísel $b' + b$ ($b' \in B'$, $b \in B$), a kde C je množina všech čísel $a' + a$ ($a' \in A'$, $a \in A$).[9]) V **DI**, def. 3, jsme si 50% práce ušetřili tím, že jsme vyšetřovali pouze D a položili $C = \mathbf{P} \dot{-} D$. Ale tím jsme porušili poněkud souvislost s původním podnětem, který nás vedl k zobecnění (k přechodu od racionálních čísel k reálným), a zde se to ukazuje. Jestliže však definujeme C a D tak, jak to bylo řečeno na počátku tohoto cvičení:

$$C = \mathop{\mathcal{E}}_{c}(c = a' + a, a' \in A', a \in A)\,,$$

$$D = \mathop{\mathcal{E}}_{d}(d = b' + b, b' \in B', b \in B)\,,$$

[8]) Je-li na př. $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$, nemůžeme nic říci o $\lim(a_n + b_n)$; viz **DI**, kap. II, § 3, cvič. 7.

[9]) Tato definice by vyžadovala nepatrné korektury; kdybychom sčítali dvě iracionální čísla, mající racionální součet a (na př. $\sqrt{2} + (3 - \sqrt{2})$), nedostali bychom číslo a ani do C ani do D a musili bychom je přidat do C, aby vyšel řez 1. druhu.

dostaneme v případě $\alpha' = +\infty$, $\alpha = -\infty$

$$C = \emptyset,\ D = \emptyset\,,$$

tedy něco, co se ani zdaleka nepodobá řezu, takže jsme zcela přirozeně vedeni k tomu, nezaváděti vůbec součet $(+\infty) + (-\infty)$. Zdržel jsem se tak dlouho u této drobnosti jenom proto, abych zdůraznil, jak je důležito, uvědomovati si při matematických abstrakcích, při zobecňování pojmů a při budování obecných theorií podněty, z nichž naše zobecnění vyšlo.

6. Budiž $M_1 = (+\infty)$, $M_2 = (+\infty) \cup (-\infty)$, $M_3 = (0, 1) \cup (+\infty)$,[10]) $M_4 = (+\infty) \cup (-\infty) \cup (5)$. Jest $\sup M_1 = \sup M_2 = \sup M_3 = \sup M_4 = +\infty$; $\inf M_1 = +\infty$, $\inf M_3 = 0$, $\inf M_2 = \inf M_4 = -\infty$.

7. Budiž $b_1, b_2, \ldots$ monotonní posloupnost čísel $b_n \in \mathbf{E}_1^*$ (t. j. buďto $b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq \ldots$ nebo $b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \ldots$). Potom existuje číslo $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že platí toto: buďto je $b_n \in \mathbf{E}_1$ pro všechna $n \geqq n_0$, nebo je $b_n = +\infty$ pro všechna $n \geqq n_0$, nebo je $b_n = -\infty$ pro všechna $n \geqq n_0$.

§ 2. Hromadné hodnoty posloupností. Limes superior a inferior.

Slovo posloupnost znamená v tomto paragrafu — pokud není jinak poznamenáno — nekonečnou posloupnost reálných čísel

$$(11) \qquad a_1, a_2, \ldots \quad (a_n \in \mathbf{E}_1^* \text{ pro } n \in \boldsymbol{N})\,;$$

pro čísla $a_1, a_2, \ldots$ připouštíme tedy též hodnoty $+\infty$, $-\infty$. Číslo $a \in \mathbf{E}_1$ nazýváme, jak víme, limitou (vlastní neboli konečnou) posloupnosti (11), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslo $+\infty$ (po příp. $-\infty$) nazýváme limitou (nevlastní neboli nekonečnou) posloupnosti (11), jestliže (viz § 1) ke každému konečnému číslu A existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je $a_n > A$ (po příp. $a_n < A$). Tyto definice lze vysloviti ještě poněkud jinak. Na př. pro vlastní limitu: Číslo $a \in \mathbf{E}_1$ nazýváme limitou posloupnosti (11), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí, že pro všechna přirozená n až na konečný počet jest $|a_n - a| < \varepsilon$ neboli $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Podobně pro limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.[11])

---

[10]) Čtěte správně! M_3 je sjednocení množiny $(+\infty)$ (složené z jediného čísla $+\infty$) a intervalu $(0, 1)$ (složeného ze všech čísel x takových, že $0 < x < 1$); tedy na př. $0 \operatorname{non} \in M_3$, $\frac{1}{2} \in M_3$, $5 \operatorname{non} \in M_3$, $+\infty \in M_3$.

[11]) Zcela obecně: Budiž $V(n)$ nějaká výroková funkce, v níž proměnná n probíhá přirozená čísla. Potom výrok „existuje přirozené n_0 tak, že výrok $V(n)$ platí pro každé přirozené $n \geqq n_0$“ znamená zřejmě totéž jako výrok „$V(n)$ platí pro všechna přirozená n až na konečný počet“ (t. j. množina těch přirozených čísel n, pro něž $V(n)$ neplatí, je konečná — po příp. ovšem i prázdná).

Zavedeme nyní pojem příbuzný limitě, ale obecnější:

Definice 4. *Konečné číslo $a \in \mathbf{E}_1$ nazýváme hromadnou hodnotou*[12]) *(vlastní neboli konečnou) posloupnosti* (11), *jestliže platí toto: Je-li $\varepsilon > 0$ jakékoliv číslo kladné, potom nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ platí pro nekonečně mnoho přirozených čísel n. Číslo $+\infty$ (po příp. $-\infty$) nazýváme hromadnou hodnotou posloupnosti* (11) *(nevlastní neboli nekonečnou), jestliže platí toto: Je-li A jakékoliv konečné číslo, platí nerovnost $a_n > A$ (po příp. $a_n < A$) pro nekonečně mnoho přirozených čísel n.*[13])

Poznámka 1. Zřejmé je toto: 1. Existuje-li $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $a_n \leqq A$, není žádná hromadná hodnota posloupnosti (11) větší než A. 2. Hromadné hodnoty posloupnosti se nezmění vynecháním, přidáním nebo změněním konečného počtu členů posloupnosti. Proto mluvíme o hromadných hodnotách i tehdy, jestliže konečný počet členů posloupnosti není definován (viz podobnou úmluvu v **DI**, kap. II, § 1, pozn. 1). 3. Je-li číslo a hromadnou hodnotou posloupnosti (11), je číslo $-a$ hromadnou hodnotou posloupnosti $-a_1, -a_2, \ldots$

Příklad 1. Posloupnost $\frac{2}{1}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{4}{3}, 3, \frac{5}{4}, 4, \ldots \left(\text{obecně } a_{2n-1} = \frac{n+1}{n}, a_{2n} = n\right)$ má zřejmě hromadné hodnoty $1, +\infty$. Za chvíli ukážeme, že jiných hromadných hodnot nemá.

Věta 15. *Má-li posloupnost* (11) *limitu $a \in \mathbf{E}_1^*$* (vlastní nebo nevlastní), *je číslo a hromadnou hodnotou posloupnosti* (11).

Důkaz. Stačí srovnati definici limity, podanou na počátku tohoto paragrafu, s definicí 4; je-li totiž některá z nerovností $|a_n - a| < \varepsilon$, $a_n > A$, $a_n < A$ splněna pro všechna $n \geqq n_0$, je jistě splněna pro nekonečně mnoho hodnot n.

Limita posloupnosti je tedy vždy její hromadnou hodnotou; ale hromadná hodnota posloupnosti nemusí být její limitou, jak ukazuje

---

[12]) Říkává se také hromadný bod; ale ponechávám si tento termín pro jinou příležitost (viz kap. V, § 1 a kap. VI, def. 21).

[13]) Znak n bude v této i v následující kapitole značit vždy přirozené číslo, i když to výslovně neřeknu.

příklad 1. Víte, že limita posloupnosti (11) (existuje-li) je také limitou každé vybrané posloupnosti (**DI**, věta 62)

$$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots \tag{12}$$

Pro hromadné hodnoty platí právě naopak tato věta:

Věta 16. *Je-li číslo $a \in \mathbf{E}_1^*$ hromadnou hodnotou* (vlastní nebo nevlastní) *vybrané posloupnosti* (12), *je číslo a též hromadnou hodnotou posloupnosti* (11).

Důkaz. Budiž předně a vlastní hromadná hodnota posloupnosti (12). Je-li $\varepsilon > 0$, obsahuje tedy interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti (12), tedy též nekonečně mnoho členů posloupnosti (11). Pro $a = \pm \infty$ je důkaz obdobný.

Věta 17. *Číslo $a \in \mathbf{E}_1^*$ je hromadnou hodnotou* (vlastní nebo nevlastní) *posloupnosti* (11) *tehdy a jen tehdy, existuje-li vybraná posloupnost* (12), *jež má limitu a.*

Důkaz. I. Nechť nějaká vybraná posloupnost má limitu a, tedy (věta 15) hromadnou hodnotu a; potom má i posloupnost (11) hromadnou hodnotu a (věta 16). II. Nechť má (11) hromadnou hodnotu a. Budiž předně $a \in \mathbf{E}_1$ (t. j. vlastní), takže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho n takových, že je $|a_n - a| < \varepsilon$. Definujme vybranou posloupnost (12) takto: budiž k_1 nejmenší index, pro nějž je $|a_{k_1} - a| < 1$. Jsou-li $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ již definována, existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbf{N}$ tak, že $|a_k - a| < \frac{1}{n}$; nejmenší z těchto čísel k, jež je větší než k_{n-1}, označme k_n; tedy je $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$, $|a_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$, tedy vskutku $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Pro $a = \pm \infty$ je důkaz obdobný; pouze místo nerovnosti $|a_k - a| < \frac{1}{n}$ pište $a_k > n$, po příp. $a_k < -n$.

Příklad 2. Budiž $a_1, a_2, \dots$ posloupnost z příkl. 1. Jestliže nějaká vybraná posloupnost obsahuje jen konečný počet členů a_{2n}, má limitu 1; obsahuje-li jen konečný počet členů a_{2n-1}, má limitu $+\infty$. Obsahuje-li však nekonečně mnoho členů a_{2n-1} i nekonečně mnoho členů a_{2n}, nemá vůbec limitu. Tedy má posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pouze dvě hromadné hodnoty: 1, $+\infty$.

Poznámka 2. Jakožto členy posloupnosti připouštíme také čísla $+\infty, -\infty$. Ale vliv těchto členů na hromadné hodnoty posloupnosti

$$(11) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots \quad (a_n \in \mathsf{E}_1^*)$$

se dá snadno zjistit. Je totiž téměř ihned patrno toto: Sestrojme vybranou posloupnost

$$(13) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots$$

všech konečných členů (t. j. všech $a_n \in \mathsf{E}_1$) posloupnosti (11).[14] Potom dostaneme všechny hromadné hodnoty posloupnosti (11) takto:

A. Vezmu všechny hromadné hodnoty posloupnosti (13) (pokud je to nekonečná posloupnost).

B. Je-li nekonečně mnoho členů v (11) rovno $+\infty$ (po příp. $-\infty$), přidám k nim ještě hromadnou hodnotu $+\infty$ (po příp. $-\infty$). Na př. vezměme posloupnost $\frac{2}{1}, 1, +\infty, -\infty, \frac{3}{2}, 2, +\infty, -\infty, \frac{4}{3}, 3, +\infty, -\infty, \frac{5}{4}, 4, +\infty, -\infty, \ldots$ Po vynechání nekonečných členů dostáváme posloupnost z příkl. 1, která podle příkl. 2 má právě dvě hromadné hodnoty 1, $+\infty$. Naše posloupnost má tedy právě tři hromadné hodnoty 1, $+\infty$, $-\infty$.

Věta 18. *Nechť posloupnost*

$$(14) \qquad a_1, a_2, \ldots$$

neobsahuje žádný člen $+\infty$ (t. j. $a_n < +\infty$ pro všechna n). Potom (14) *má hromadnou hodnotu $+\infty$ tehdy a jen tehdy, není-li shora omezená.*

Podobná věta platí ovšem pro $-\infty$.

Důkaz. I. Má-li (14) hromadnou hodnotu $+\infty$, existuje ke každému konečnému A index n (dokonce nekonečně mnoho takových n) tak, že $a_n > A$; t. j. (14) není shora omezená. II. Nechť (14) nemá hromadnou hodnotu $+\infty$, takže není pravda, že by pro každé konečné A bylo $a_n > A$ pro nekonečně mnoho n. Existuje tedy konečné

[14]) Může se ovšem stát, že tato posloupnost má jen konečný počet členů nebo že vůbec odpadne.

A tak, že nerovnost $a_n > A$ buďto není splněna pro žádné n (načež (14) je zřejmě shora omezená) nebo je splněna jen pro konečný od nuly různý počet indexů n. Potom však mezi členy a_n, které jsou $> A$, je jeden ze všech největší, řekněme a_p. Zřejmě je a_p největší člen celé posloupnosti a ježto $a_p < +\infty$, je (14) shora omezená.[15])

Víme, že každá posloupnost (11) má nejvýše jednu limitu (viz **DI**, věta 51; věta platí zřejmě i pro posloupnosti s nekonečnými členy, neboť limity $+\infty$, $-\infty$ a konečná limita se navzájem vylučují). Naopak platí

Věta 19. *Každá posloupnost* (11) *má aspoň jednu hromadnou hodnotu.*

Ještě podrobněji dokážeme tuto větu:

Věta 20. *Každá posloupnost* (11) *má aspoň jednu hromadnou hodnotu; dokonce existuje mezi všemi jejími hromadnými hodnotami jedna, která je ze všech největší; tu označujeme* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *nebo* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ *a nazýváme limes superior posloupnosti* (11).

Poznámka 3. Přechodem k posloupnosti $-a_1, -a_2, \ldots$ dostáváme existenci nejmenší ze všech hromadných hodnot, znak lim inf nebo $\underline{\lim}$, název limes inferior. Někteří autoři píší $n = \infty$ místo $n \to \infty$. Jest ovšem vždy $\liminf a_n \leqq \limsup a_n$; rovnost platí tehdy a jen tehdy, má-li (11) jedinou hromadnou hodnotu.

Důkaz. Obsahuje-li (11) nekonečně mnoho členů $a_n = +\infty$, je $+\infty$ hromadnou hodnotou, ovšem největší. Obsahuje-li (11) jen konečný počet členů $+\infty$, můžeme je vynechati (pozn. 1), načež věta 18 řeší ten případ, že (11) není shora omezená: potom je $+\infty$ opět hromadnou hodnotou. Zbývá tedy případ, že (11) je shora omezená; t. j. existuje konečné B tak, že

$$a_n \leqq B \quad \text{pro všechna } n\,. \tag{15}$$

Rozeznávejme dva případy:

I. Ať je A jakékoliv konečné číslo, existuje jen konečný počet indexů n tak, že $a_n \geqq A$.[16]) Potom *předně* žádná hromadná hodnota

[15]) Pro posloupnost s členy $+\infty$ věta neplatí; příklad: $+\infty, 0, 0, 0, 0, \ldots$ není shora omezená a nemá hromadnou hodnotu $+\infty$. Důkaz jsem provedl až příliš obšírně; v dalším budu stručnější.

[16]) T. j. pro všechna n až na konečný počet je $a_n < A$; tedy $\lim a_n = -\infty$.

nemůže být větší než A, a protože A je jakékoliv konečné číslo, nemůže žádná hromadná hodnota býti větší než $-\infty$ (neboť potom by byla větší než jisté konečné číslo). *Za druhé* však podle pozn.[16]) je číslo $-\infty$ limitou, tedy (věta 15) hromadnou hodnotou, a to jedinou — tedy největší.

II. Zbývá tento případ: Existuje konečné A tak, že

(16) $$a_n \geqq A \quad \text{pro nekonečně mnoho hodnot } n\,.$$

Současně platí (15). Ježto A můžeme zmenšit (a (16) se tím neporuší), smíme předpokládati $-\infty < A < B < +\infty$. Interval $\langle A, B\rangle$ obsahuje nekonečně mnoho členů z (11),[17]) ale neexistuje žádné $a_n > B$. Nyní postupujeme methodou postupného půlení intervalu (je to důležitá methoda). Položíme $C = \frac{1}{2}(A + B)$ (kreslete). Alespoň jeden z obou intervalů $\langle A, C\rangle$, $\langle C, B\rangle$ obsahuje nekonečně mnoho členů z (11). Definuji nyní $\langle A_1, B_1\rangle$ takto: obsahuje-li $\langle C, B\rangle$ nekonečně mnoho členů z (11), položím $\langle A_1, B_1\rangle = \langle C, B\rangle$; obsahuje-li $\langle C, B\rangle$ jen konečný počet členů z (11), položím $\langle A_1, B_1\rangle = \langle A, C\rangle$. Zřejmě platí

α_1) $A \leqq A_1 < B_1 \leqq B$, $B_1 - A_1 = \frac{1}{2}(B - A)$.

β_1) V int. $\langle A_1, B_1\rangle$ leží nekonečně mnoho členů z (11).

γ_1) V int. $(B_1, +\infty)$ leží jen konečný počet členů z (11).

Zvolím nyní $C_1 = \frac{1}{2}(A_1 + B_1)$. Obsahuje-li $\langle C_1, B_1\rangle$ nekonečně mnoho členů z (11), položím $\langle A_2, B_2\rangle = \langle C_1, B_1\rangle$; obsahuje-li $\langle C_1, B_1\rangle$ jen konečný počet členů posloupnosti (11), položím $\langle A_2, B_2\rangle = \langle A_1, C_1\rangle$; vzhledem k β_1 platí, že

β_2) v $\langle A_2, B_2\rangle$ leží nekonečně mnoho členů z (11).

Vzhledem ke γ_1 a k naší volbě platí, že

γ_2) v $(B_2, +\infty)$ leží pouze konečný počet členů z (11).

A konečně zřejmě

α_2) $A_1 \leqq A_2 < B_2 \leqq B_1$, $B_2 - A_2 = \frac{1}{2}(B_1 - A_1)$.

Tak pokračuji a dostávám zřejmě posloupnost intervalů $\langle A_1, B_1\rangle$, $\langle A_2, B_2\rangle, \ldots$ s těmito vlastnostmi:

---

[17]) T. j. existuje nekonečně mnoho hodnot n, pro něž $A \leqq a_n \leqq B$.

α) $A \leqq A_1 \leqq A_2 \leqq \ldots; B \geqq B_1 \geqq B_2 \geqq \ldots; B_n - A_n = \frac{1}{2}(B_{n-1} - A_{n-1}) = \frac{1}{2^n}(B - A)$.

β) Pro každé n obsahuje $\langle A_n, B_n \rangle$ nekonečně mnoho členů z (11).

γ) Pro každé n obsahuje $(B_n, +\infty)$ pouze konečný počet členů z (11).

Z α) plyne: pro všechna n je $A_n < B_n \leqq B$, tedy podle věty 63 z **DI** o monotonních posloupnostech existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} A_n = \sigma$. Dále je podle α): $B_n = A_n + \frac{1}{2^n}(B - A)$, tedy též $\lim_{n\to\infty} B_n = \sigma$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$, existuje n tak, že $\sigma - \varepsilon < A_n < B_n < \sigma + \varepsilon$; podle β) obsahuje tedy $(\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon)$ nekonečně mnoho členů z (11). Tedy je σ *hromadnou hodnotou* posloupnosti (11). Je-li $\sigma' > \sigma$, existuje n tak, že $B_n < \sigma'$; ale podle γ) a podle pozn. 1 nemůže žádné číslo větší než B_n — a tedy ani číslo σ' — býti hromadnou hodnotou posloupnosti (11). Tedy žádné číslo větší než σ není hromadnou hodnotou posloupnosti (11). Tím je věta 20 dokázána.

Poznámka 4. Speciálně: každá omezená posloupnost má aspoň jednu vlastní hromadnou hodnotu (nevlastní nemůže mít). To je t. zv. věta Bolzano-Weierstrassova.

Věta 21. *Ke každé posloupnosti* $a_1, a_2, \ldots$ $(a_n \in \mathsf{E}_1^*)$ *existuje jedno a jen jedno číslo* $\alpha \in \mathsf{E}_1^*$, *mající tyto vlastnosti:*

1. *Je-li* $\alpha' > \alpha$, *existuje jen konečný počet (po příp. rovný nule) indexů* n, *pro něž* $a_n > \alpha'$.[18]

2. *Je-li* $\alpha'' < \alpha$, *existuje nekonečně mnoho indexů* n, *pro něž* $a_n > \alpha''$.

Toto číslo α *je právě* $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Důkaz. I. Nechť existují dvě taková čísla α_1, α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$. Tedy existuje β tak, že $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$. Podle vlastnosti 1 čísla α_1 existuje jen konečný počet členů $a_n > \beta$; podle vlastnosti 2 čísla α_2 existuje však takových členů nekonečně mnoho — spor. Tedy existuje nejvýše jedno takové číslo α.

[18]) To lze říci též takto: existuje n_0 tak, že $n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \leqq \alpha'$.

II. Položme $\alpha = \limsup a_n$. Zbývá dokázati, že α má vlastnosti 1, 2. Budiž tedy $\alpha' > \alpha$. Kdyby existovalo nekonečně mnoho $a_n > \alpha'$, tvořily by tyto členy vybranou posloupnost z (11), která by měla aspoň jednu hromadnou hodnotu β (věta 19) a — ježto všechny členy jsou $> \alpha'$ — bylo by $\beta \geqq \alpha' > \alpha$. Ale β by bylo též hromadnou hodnotou celé posloupnosti (11) (věta 16) a to není možno, ježto α je největší hromadná hodnota. Budiž dále $\alpha'' < \alpha$. Ježto α je hromadnou hodnotou, existuje zřejmě nekonečně mnoho $a_n > \alpha''$.

Příklad 3. Pro posloupnost z příkl. 1 je $\liminf a_n = 1$, $\limsup a_n = = +\infty$.

Zřejmě je $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$, $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$.

Přechodem k posloupnosti $-a_1, -a_2, \ldots$ dostáváme z věty 21 ihned:

Věta 22. *Ke každé posloupnosti* $a_1, a_2, \ldots$ $(a_n \in \mathbf{E}_1^*)$ *existuje jedno a jen jedno číslo* $\beta \in \mathbf{E}_1^*$, *mající tyto vlastnosti:*

1. *Je-li* $\beta' < \beta$, *existuje jen konečný počet indexů* n, *pro něž* $a_n < \beta'$.
2. *Je-li* $\beta'' > \beta$, *existuje nekonečně mnoho indexů* n, *pro něž* $a_n < \beta''$.

Toto číslo β *je právě* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Věta 23. *Posloupnost* (11) *má limitu (vlastní nebo nevlastní) tehdy a jen tehdy, má-li jedinou hromadnou hodnotu, t. j. je-li* $\liminf a_n = = \limsup a_n$.

Důkaz. I. Nechť existuje $\lim a_n = a$. Budiž b hromadná hodnota posloupnosti (11), takže (věta 17) je b limitou jisté vybrané posloupnosti; tedy je nutně (věta 62 z **DI**) $b = a$. Tedy a je jediná hromadná hodnota.

II. Nechť $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$. Podle vět 21, 22 tedy platí:

1. Ke každému $t' > \alpha = \limsup a_n$ existuje n_0 tak, že $n > n_0 \Rightarrow \Rightarrow a_n \leqq t'$.

2. Ke každému $t'' < \alpha = \liminf a_n$ existuje n_1 tak, že $n > n_1 \Rightarrow \Rightarrow a_n \geqq t''$. Podle pozn. 4 v § 1 je tedy vskutku $\lim a_n = \alpha$.

Početní pravidla pro limitu jsou dána větou 13; početní pravidla pro lim sup, lim inf jsou složitější. Dokažme — jako ukázku — větu pro „součet“.

Věta 24. *Předpokládejme, že součet* $a_n + b_n$ *má smysl pro každé* $n \in \boldsymbol{N}$ *(až na konečný počet hodnot* n*). Potom jest (vynechávám znak* $n \to \infty$*)*

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leqq \liminf (a_n + b_n) \leqq \liminf a_n + \limsup b_n \leqq$$
$$\leqq \limsup (a_n + b_n) \leqq \limsup a_n + \limsup b_n\,;$$

to jsou celkem čtyři nerovnosti. Jest ovšem nutno vynechati ony nerovnosti, v nichž se vyskytuje výraz nemající smyslu, totiž $(+\infty) + (-\infty)$ *nebo* $(-\infty) + (+\infty)$.

Důkaz. Stačí dokázati poslední dvě nerovnosti; první dvě se potom odvodí přechodem k posloupnostem $-a_1, -a_2, -a_3, \ldots; -b_1, -b_2, -b_3, \ldots$ Položme $\limsup a_n = \alpha_1$, $\liminf a_n = \alpha_2$, $\limsup b_n = \beta_1$, $\limsup (a_n + b_n) = \alpha$. Předpokládejme napřed, že $\alpha_1 + \beta_1$ má smysl a že $\alpha > \alpha_1 + \beta_1$. Potom existují zřejmě konečná čísla α'', β'' tak, že $\alpha'' > \alpha_1$, $\beta'' > \beta_1$, $\alpha'' + \beta'' < \alpha$. Podle věty 21 (viz [18])) existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $a_n \leqq \alpha''$, $b_n \leqq \beta''$ a tedy $a_n + b_n \leqq \leqq \alpha'' + \beta''$, takže nerovnost $a_n + b_n > \alpha'' + \beta''$ platí pouze pro konečný počet hodnot n. Ježto však $\alpha'' + \beta'' < \alpha$, je podle věty 21 nerovnost $a_n + b_n > \alpha'' + \beta''$ splněna pro nekonečně mnoho hodnot n. To je spor; tedy je $\alpha \leqq \alpha_1 + \beta_1$, má-li $\alpha_1 + \beta_1$ smysl. Předpokládejme za druhé, že $\alpha_2 + \beta_1$ má smysl a že je $\alpha < \alpha_2 + \beta_1$. Potom existují zřejmě konečná čísla α', β' tak, že $\alpha' < \alpha_2$, $\beta' < \beta_1$, $\alpha' + \beta' > \alpha$. Podle věty 22 existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $a_n \geqq \alpha'$; podle věty 21 je $b_n > \beta'$ pro nekonečně mnoho hodnot n (tedy i pro nekonečně mnoho hodnot $n \geqq n_0$). Pro nekonečně mnoho hodnot n je tedy současně $a_n \geqq \alpha'$, $b_n > \beta'$ a tedy $a_n + b_n > \alpha' + \beta'$. Ježto však $\alpha' + \beta' > \alpha$, je podle věty 21 nerovnost $a_n + b_n > \alpha' + \beta'$ splněna pouze pro konečný počet hodnot n, což je spor. Tedy je $\alpha \geqq \geqq \alpha_2 + \beta_1$, má-li $\alpha_2 + \beta_1$ smysl.

Příklad 4. Že nemusí ve větě 24 platiti vždy znamení rovnosti, ukazuje tento příklad: Budiž $a_{3k+1} = 1$, $a_{3k+2} = \frac{3}{4}$, $a_{3k+3} = 0$; $b_{3k+1} = 0$, $b_{3k+2} = \frac{3}{4}$, $b_{3k+3} = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, takže jde o posloupnosti

$$1, \tfrac{3}{4}, 0, 1, \tfrac{3}{4}, 0, 1, \tfrac{3}{4}, 0, \ldots$$
$$0, \tfrac{3}{4}, 1, 0, \tfrac{3}{4}, 1, 0, \tfrac{3}{4}, 1, \ldots$$

Zde je $\limsup a_n + \limsup b_n = 1 + 1 = 2$, $\liminf a_n + \limsup b_n = 0 + 1 = 1$, $\limsup(a_n + b_n) = \frac{3}{2}$.

Zaveďme ještě tento pojem: Budiž

$$(17) \qquad k_1, k_2, k_3, \dots$$

posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo vystupuje na jednom a jen jednom místě posloupnosti (17).[19]) Potom říkáme, že posloupnost

$$(18) \qquad a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots$$

vzniká z posloupnosti (11) přerovnáním.[20]) Je jasno: leží-li v některém intervalu nekonečně mnoho členů jedné z posloupností (11), (18), leží v něm též nekonečně mnoho členů druhé posloupnosti. Definice 4 pak okamžitě ukazuje, že platí tato věta:

Věta 25. *Vzniká-li posloupnost* (18) *z posloupnosti* (11) *přerovnáním, mají obě tyto posloupnosti tytéž hromadné hodnoty. Speciálně: má-li jedna z těchto posloupností limitu (t. j. jedinou hromadnou hodnotu), má i druhá limitu, a to touž limitu.*

Poznámka 5. Uvedeného pojmu přerovnání užíváme nejenom pro posloupnosti reálných čísel, nýbrž i pro posloupnosti zcela obecné, jejichž prvky jsou jakékoliv věci.

Cvičení

1. Sestrojme posloupnost

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{0}{2^m}, \frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \dots, \frac{2^m}{2^m}, \dots$$

Tato posloupnost obsahuje tedy právě všechna čísla tvaru $k : 2^m$ (k, m celá, $m \geqq 0$, $0 \leqq k \leqq 2^m$), a to každé na nekonečně mnoha místech. Dokažte, že hromadné body této posloupnosti vyplňují právě interval $\langle 0, 1 \rangle$.

2. Srovnáte-li jakýmkoliv způsobem všechna racionální čísla v posloupnost[21])

[19]) V názvosloví kapitoly I: množina dvojic $[n, k_n]$ je prosté zobrazení množiny $\boldsymbol{N}$ na $\boldsymbol{N}$.

[20]) Populárně, ale ne zcela přesně: (18) vzniká z (11) přerovnáním, obsahuje-li (18) tytéž členy jako (11), ale po případě v jiném pořadí. Přesnou formulaci viz v cvič. 20.

[21]) Jednu takovou posloupnost viz v kap. I, § 5, cvič. 1.

(prostou nebo nikoliv), jsou všechna čísla z E_1^* hromadnými hodnotami této posloupnosti.

3. Budiž $\Theta \in E_1$, $t \in N$. Potom existují celá čísla p, q tak, že $|q\Theta - p| < \frac{1}{t}$, $0 < q \leqq t$.[22]) Návod k důkazu: ke každému číslu k ($k = 0, 1, \ldots, t$) najděme celé číslo r_k tak, že $0 \leqq k\Theta - r_k < 1$ a položme $x_k = k\Theta - r_k$. Interval $\langle 0, 1)$ rozdělme na t intervalů $I_1 = \left\langle 0, \frac{1}{t} \right)$, $I_2 = \left\langle \frac{1}{t}, \frac{2}{t} \right)$, ..., $I_t = \left\langle \frac{t-1}{t}, \frac{t}{t} \right)$. Každé z $t + 1$ čísel x_k leží v některém z těchto t intervalů $I_1, \ldots, I_t$; aspoň v jednom z těchto intervalů leží tedy aspoň dvě z těchto čísel, třeba x_{k_1}, x_{k_2} ($k_1 < k_2$).[23]) Odečtením těchto dvou čísel obdržíme hledaná čísla p, q ($q = k_2 - k_1$).

4. Ve cvič. 3 pišme určitěji p_t, q_t místo p, q (kdyby k nějakému t příslušelo několik takových dvojic, vyberu jednu z nich). Tvrdím: je-li Θ iracionální, je $\lim_{t \to \infty} q_t = +\infty$. Návod: kdyby tomu tak nebylo, existovalo by nekonečně mnoho přirozených čísel $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$, k nimž by příslušel týž pár p, q, takže by bylo $|q\Theta - p| < t_n^{-1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $q\Theta - p = 0$ — spor.

5. Je-li $x \in E_1$, značíme, jak víte, znakem $[x]$ ono celé číslo, jež vyhovuje nerovnostem $[x] \leqq x < [x] + 1$ (na př. v cvičení 3 bylo $r_k = [k\Theta]$). Označme ještě $x - [x] = \{x\}$ (na př. $\{\frac{7}{3}\} = \frac{1}{3}$, $\{\pi\} = 0{,}1415926\ldots$, $\{-\frac{7}{3}\} = -\frac{7}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$); vždy je $0 \leqq \{x\} < 1$. Budiž dáno číslo $\Theta \in E_1$ a sestrojme posloupnost

$$\{\Theta\}, \{2\Theta\}, \{3\Theta\}, \ldots, \{n\Theta\}, \ldots \tag{19}$$

Tvrdím: 1. Je-li Θ celé, má posloupnost (19) limitu 0.

2. Je-li Θ racionální necelé, $\Theta = r : s$ (r, s celá, nesoudělná, $s > 1$), má (19) hromadné hodnoty $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}$.

3. Je-li Θ iracionální, vyplňují hromadné hodnoty posloupnosti (19) právě celý interval $\langle 0, 1\rangle$.

Návod: Bod 1 je jasný. K bodu 2: Snadno zjistíte, že rozdíl žádných dvou z čísel $r, 2r, 3r, \ldots, (s-1)\,r, sr$ není dělitelný číslem s. Dělíte-li tedy tato čísla číslem s, dostanete navzájem různé zbytky; tyto zbytky jsou tedy až na pořadí právě čísla $0, 1, 2, \ldots, s - 1$. Uvážíte-li, že pro celé k je $\left\{n\frac{r}{s}\right\} = \left\{(n + ks)\frac{r}{s}\right\}$, je bod 2 dokázán.

---

[22]) Je tedy $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qt} \leqq \frac{1}{q^2}$, takže zlomek $p : q$ velmi dobře aproximuje číslo Θ.

[23]) Tento princip: „je-li více než t předmětů rozděleno do t tříd, náleží aspoň k některé z těchto tříd nejméně dva předměty“ je důležitý v mnohých matematických úvahách; jeho důležitost si první plně uvědomil Dirichlet.

K bodu 3. Budiž $0 \leqq a \leqq 1$, $0 < \varepsilon < 1$. Podle cvič. 3, 4 lze nalézti libovolně velké celé q a celé p tak, že $|q\Theta - p| = \varepsilon_1 < \varepsilon$. Zde je $\varepsilon_1 > 0$, ježto Θ není racionální. Je buďto $q\Theta - p = \varepsilon_1$ a potom $\{q\Theta\} = \varepsilon_1$ nebo $q\Theta - p = -\varepsilon_1$ a potom $\{q\Theta\} = 1 - \varepsilon_1$. V prvním případě bude $\{q\Theta\} = \varepsilon_1$, $\{2q\Theta\} = 2\varepsilon_1$, obecně $\{nq\Theta\} = n\varepsilon_1$, pokud $n\varepsilon_1 < 1$; lze tedy nalézti n tak, že $|\{nq\Theta\} - a| \leqq \varepsilon_1 < \varepsilon$. V druhém případě bude obdobně $\{2q\Theta\} = 1 - 2\varepsilon_1$ atd., obecně $\{nq\Theta\} = 1 - n\varepsilon_1$, pokud $n\varepsilon_1 < 1$, a tedy bude opět $|\{nq\Theta\} - a| \leqq \varepsilon_1 < \varepsilon$ při vhodném n. Odtud snadno plyne, že a je hromadnou hodnotou posloupnosti (19).

Poznámka. Obsah cvičení 3—5 patří k základním úlohám t. zv. theorie diofantických aproximací, jejímž obsahem je — zhruba řečeno — přibližné řešení rovnic celými čísly; na př. jsme v cvič. 3 řešili přibližně (s chybou menší než t^{-1}) rovnici $q\Theta - p = 0$ celými čísly p, q. Stav této theorie k r. 1935 ukazuje monografie J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Berlín 1936). Ovšem scházejí v této knize fundamentální novější výsledky, především Vinogradovovy (nelineární aproximace) a Chinčinovy (lineární aproximace).

6. Budiž $\Theta \in E_1$. Posloupnosti

$$\sin \pi\Theta, \sin 2\pi\Theta, \ldots, \sin n\pi\Theta, \ldots \tag{20}$$

$$\cos \pi\Theta, \cos 2\pi\Theta, \ldots, \cos n\pi\Theta, \ldots \tag{21}$$

mají tyto vlastnosti: A. Je-li $\Theta = p : q$ (p, q celá nesoudělná, $q > 0$), má (20) hromadné hodnoty $\sin \pi \dfrac{r}{q}$ (r celé, $-\frac{1}{2}q \leqq r \leqq \frac{1}{2}q$; to je $q + 1$ hodnot pro sudé q, ale jen q hodnot pro liché q); (21) má hromadné hodnoty $\cos \dfrac{\pi r}{q}$ ($r = 0, 1, \ldots, q$) pro liché p, $\cos 2\pi \dfrac{r}{q}$ ($r = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(q - 1)$) pro sudé p. B. Je-li Θ iracionální, vyplňují hromadné hodnoty posloupnosti (20) právě celý interval $\langle -1, +1 \rangle$; totéž platí pro (21). Důkaz plyne snadno z cvič. 5.

7. Z cvič. 6 plyne ihned, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi\Theta$ (po příp. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\pi\Theta$) existuje tehdy a jen tehdy, je-li Θ celé (po příp. je-li sudé).[24] Chceme-li dokázati pouze tento výsledek, můžeme postupovati také takto (neužívajíce cvič. 3—6). Nechť Θ není celé, takže $\sin \frac{1}{2}\pi\Theta \neq 0$, $\cos \frac{1}{2}\pi\Theta \neq 0$, a nechť existuje $\lim \sin n\pi\Theta = l$. Odtud postupně: $\lim (\sin (n + 1)\pi\Theta - \sin n\pi\Theta) = l - l = 0$, $\lim 2 \sin \frac{1}{2}\pi\Theta \,.\, \cos (n + \frac{1}{2})\pi\Theta = 0$, $\lim \cos (n + \frac{1}{2})\pi\Theta = 0$, $\lim \cos (n - \frac{1}{2})\pi\Theta = 0$. Ježto $\cos (n \pm \frac{1}{2})\pi\Theta = \cos n\pi\Theta \cos \frac{1}{2}\pi\Theta \mp \sin n\pi\Theta \sin \frac{1}{2}\pi\Theta$, dostanu sečtením a odečtením $\lim \cos n\pi\Theta = \lim \sin n\pi\Theta = 0$, tedy $\lim 1 = \lim (\cos^2 n\pi\Theta + \sin^2 n\pi\Theta) = 0$ — spor. Obdobně pro $\cos n\pi\Theta$, pouze pro liché Θ je nutno podati důkaz (velmi jednoduchý) zvlášť.

8. Je-li (12) vybrána z (11), je $\liminf a_n \leqq \liminf a_{k_n} \leqq \limsup a_{k_n} \leqq \limsup a_n$.

[24]) Sudými nazýváme čísla $0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots$; lichými čísla $1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots$

V cvič. 9 — 13 kladme $\alpha_1 = \limsup a_n$, $\alpha_2 = \liminf a_n$, $\beta_1 = \limsup b_n$, $\beta_2 = \liminf b_n$.

9. Je-li $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$, jest

$\alpha_2\beta_2 \leqq \liminf a_nb_n \leqq \mathrm{Min}\,(\alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1) \leqq \mathrm{Max}\,(\alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1) \leqq \limsup a_nb_n \leqq \alpha_1\beta_1$.

10. Předpoklad $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$ v cvič. 9 je podstatný. Je-li na př. $a_1, a_2, \ldots$ posloupnost $1, -2, 1, -2, 1, -2, \ldots$, $b_n = a_n$, je $\alpha_2 = \beta_2 = -2$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\limsup a_nb_n = 4 > \alpha_1\beta_1$.

11. Jak se změní nerovnosti cvič. 9, předpokládáme-li $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 < 0$? (Zaveďte $-b_n$ místo b_n.)

12. Je-li $\beta_2 > 0$, je $\liminf 1:b_n = 1:\beta_1$, $\limsup 1:b_n = 1:\beta_2$.

13. Je-li $\beta_2 < 0 < \beta_1$, mohou nastati velmi rozmanité případy. Je-li $b_1, b_2, \ldots$ posloupnost $1, -1, 1, -1, \ldots$, je $\liminf 1:b_n = 1:\beta_2$, $\limsup 1:b_n = 1:\beta_1$; je-li $b_1, b_2, \ldots$ posloupnost $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$, je $\liminf 1:b_n = -2$, $\limsup 1:b_n = 2$, $1:\beta_1 = 1$, $1:\beta_2 = -1$.

14. Existuje-li $n_0 \in N$ tak, že pro $n \geqq n_0$ je $a_n \leqq b_n$, je $\liminf a_n \leqq \liminf b_n$, $\limsup a_n \leqq \limsup b_n$.

15. Je-li $\limsup a_n < \limsup b_n$, existuje nekonečně mnoho n tak, že $a_n < b_n$; může však také současně existovati nekonečně mnoho n tak, že $a_n > b_n$. Návod k 1. části: existuje α' tak, že $\limsup a_n < \alpha' < \limsup b_n$; pro nekonečně mnoho n je $b_n > \alpha'$, ale jen pro konečný počet n je $a_n > \alpha'$. Příklad k 2. části: vyšetřete posloupnosti $0, 3, 4, 0, 3, 4, 0, 3, 4, \ldots$; $1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, \ldots$ (zde je dokonce též $\liminf a_n < \liminf b_n$).

16. Obdobné cvičení pro lim inf.

17. Je-li však $\liminf a_n > \limsup b_n$, existuje $n_0 \in N$ tak, že pro $n \geqq n_0$ je $a_n > b_n$.

18. $\limsup |a_n| = \mathrm{Max}\,(|\liminf a_n|, |\limsup a_n|)$. Pro lim inf podobná rovnice neplatí; příklad: posloupnost $1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots$

19. Budiž a_n $(n = 2, 3, \ldots)$ nejmenší prvočinitel čísla n; budiž b_n $(n = 2, 3, \ldots)$ největší prvočinitel čísla n, takže jde o posloupnosti $2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, 3, 2, 11, \ldots$; $2, 3, 2, 5, 3, 7, 2, 3, 5, 11, \ldots$ Hromadné hodnoty první i druhé posloupnosti jsou tyto: všechna prvočísla a $+\infty$.

20. Buďte P_1, P_2, P_3 tři posloupnosti. Ukažte: P_2 vzniká z P_1 přerovnáním tehdy a jen tehdy, platí-li pro každé $x \in E_1^*$ toto: A. Je-li nekonečně mnoho členů posloupnosti P_1 rovno číslu x, je též nekonečně mnoho členů posloupnosti P_2 rovno číslu x. B. Je-li právě k členů posloupnosti P_1 rovno číslu x $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, je též právě k členů posloupnosti P_2 rovno číslu x. Z toho plyne: vzniká-li P_2 z P_1 přerovnáním, vzniká též P_1 z P_2 přerovnáním; vzniká-li P_2 z P_1 a rovněž P_3 z P_2 přerovnáním, vzniká též P_3 z P_1 přerovnáním.

Z toho je dále patrno toto: Je-li dána nějaká množina posloupností (na př. množina všech posloupností reálných čísel) a nazvu-li dvě posloupnosti ekvivalentními, když jedna vzniká z druhé přerovnáním, je tím dána ekvivalence ve smyslu kap. I, § 7.

21. Budiž dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ($a_n \in E_1^*$). Budiž G_n supremum, g_n infimum posloupnosti $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$; tedy $G_1 \geqq G_2 \geqq G_3 \geqq \ldots, g_1 \leqq \leqq g_2 \leqq g_3 \leqq \ldots$ Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. (Tím podáte zároveň nový důkaz věty 20. Poznamenejme: i když je $a_n \in E_1$, může $G_1, G_2, G_3, \ldots$ býti posloupnost $+\infty, +\infty, +\infty, \ldots$ — to nastane právě tehdy, je-li $\limsup a_n = +\infty$.)

22. Je-li $a_n \in E_1^*$, $b_n \in E_1^*$ a klademe-li $c_n = \mathrm{Max}\,(a_n, b_n)$, $d_n = \mathrm{Min}\,(a_n, b_n)$, jest

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \mathrm{Max}\,(\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} b_n)\,,$$
$$\liminf_{n\to\infty} c_n \geqq \mathrm{Max}\,(\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n)\,.$$

V poslední nerovnosti nemusí platiti znamení rovnosti. Příklad: $a_{2n} = 1$, $a_{2n-1} = 0$; $b_{2n} = 0$, $b_{2n-1} = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$; zde je levá strana 1, pravá 0. Speciální případ (který už známe z věty 13): existují-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \mathrm{Max}\,(\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n)$. Odvoďte obdobně věty pro $\limsup d_n$, $\liminf d_n$, $\lim d_n$.

§ 3. Bolzano-Cauchyova podmínka.

V § 1—2 jsme mluvili pouze o posloupnostech reálných čísel; to mělo svůj dobrý důvod: účelnost zavedení nevlastních čísel $+\infty$, $-\infty$ spočívala na uspořádání reálných čísel podle velikosti a víme, že v oboru všech komplexních čísel nelze účelně definovat pořadí podle velikosti (viz **DI**, kap. XV, § 1, cvič. 6). Věty, kterými se budeme zabývati v § 3, 4, platí většinou i v oboru komplexních čísel; abychom si uspořili opakování, budeme je ihned vyslovovati pro komplexní čísla, i když se někdy v důkazech budeme musit uchýlit k číslům reálným. Komu není dosti běžný obsah § 1—2 z **DI**, kap. XV, učiní dobře, když si tyto paragrafy zopakuje. Znakem K značíme množinu všech komplexních čísel $a + bi$ ($a \in E_1$, $b \in E_1$); pro $b = 0$ je $a + 0 \,.\, i$ prostě reálné číslo a, takže $E_1 \subset K$.[25] Je-li

$$(22)\qquad a_1, a_2, a_3, \ldots \ (a_n \in K \text{ pro } n \in N)$$

posloupnost komplexních čísel ($a_n = b_n + ic_n$, $b_n \in E_1$, $c_n \in E_1$), říkáme, že je konvergentní, existují-li čísla $b \in E_1$, $c \in E_1$ tak, že $\lim b_n = b$,

[25]) Není ovšem $E_1^* \subset K$, ježto množina K neobsahuje prvky $+\infty$, $-\infty$.

$\lim c_n = c$; číslo $a = b + ci$ nazýváme potom limitou posloupnosti (22). Podle **DI**, věta 181, lze tuto definici vysloviti též takto: posloupnost (22) je konvergentní a má limitu $a \in \mathbf{K}$ tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.[26]) Chceme-li této definice užíti k určení, zda (22) je konvergentní, musíme obyčejně napřed uhodnouti, které číslo a by asi mohlo býti limitou posloupnosti (22), abychom mohli vyšetřovati výraz $|a_n - a|$. Odvodíme nyní větu o konvergenci posloupnosti (22), v níž vystupují pouze členy této posloupnosti a nikoliv hodnota její limity, takže této věty budeme moci použíti k vyšetřování konvergence posloupnosti (22), i když nemáme tušení, jaká by mohla býti hodnota limity.[27]) Uveďme a dokažme nyní tuto důležitou větu:

Věta 26. *Posloupnost (22) je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka (t. zv. podmínka Bolzano-Cauchyova): Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že nerovnost $|a_n - a_m| < \varepsilon$ platí pro všechny dvojice přirozených čísel n, m, jež splňují nerovnosti $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$.*

Důkaz. I. Nechť je (22) konvergentní; označme $\lim a_n = a$. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li m rovněž přirozené číslo takové, že $m \geqq n_0$, je také $|a_m - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ a tedy je $|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leqq |a_n - a| + |a_m - a| < < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, takže Bolzano-Cauchyova podmínka[28]) je splněna. II. Budiž za druhé podmínka B. C. splněna. IIa. Předpokládejme napřed, že a_n jsou reálná. K číslu $\varepsilon = 1$ existuje podle podmínky

[26]) Zopakujme názvosloví, aby bylo jasno: je-li $a_1, a_2, \ldots$ posloupnost čísel z $\mathbf{E}_1^*$ nebo z $\mathbf{K}$ (v tom je jako speciální případ obsažena posloupnost čísel z $\mathbf{E}_1$), nazýváme ji konvergentní tehdy a jen tehdy, má-li limitu $a \in \mathbf{K}$ (v případě reálných a_n je potom ovšem $a \in \mathbf{E}_1$). Má-li však posloupnost limitu nevlastní $+\infty$ nebo $-\infty$, nenazýváme ji konvergentní, nýbrž počítáme ji mezi posloupnosti divergentní.

[27]) Pro speciální třídu posloupností monotonních jsme takovou větu odvodili v **DI**, věta 65: monotonní posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo $K \in \mathbf{E}_1$ tak, že pro všechna n je $|a_n| < K$. Na př. jsme pomocí této věty dokázali konvergenci posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ pro $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, nemajíce z počátku ponětí o hodnotě limity této posloupnosti (kterou jsme označili e). Teprve potom jsme odvodili jednoduchý postup pro výpočet čísla e.

[28]) Krátce: Podmínka B. C.

B. C. číslo $n_1 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq n_1$, $m \geqq n_1$ je $|a_n - a_m| < 1$, tedy speciálně (položme $m = n_1$) $|a_n - a_{n_1}| < 1$ pro $n \geqq n_1$, t. j. $a_{n_1} - 1 < a_n < a_{n_1} + 1$ pro $n \geqq n_1$, takže (22) je omezená posloupnost. Předpokládejme, že není konvergentní (t. j. že nemá vlastní limitu); potom nemá ani nevlastní limitu (ježto je omezená) a tedy je $\liminf a_n < \limsup a_n$. Tedy existují čísla $\alpha' \in \boldsymbol{E}_1$, $\alpha'' \in \boldsymbol{E}_1$ tak, že $\liminf a_n < \alpha' < \alpha'' < \limsup a_n$. Existuje tedy předně nekonečně mnoho čísel $n \in \boldsymbol{N}$ a nekonečně mnoho čísel $m \in \boldsymbol{N}$ tak, že

$$a_n > \alpha'' , \quad a_m < \alpha' . \tag{23}$$

Za druhé: položme $\varepsilon = \alpha'' - \alpha'$, tedy $\varepsilon > 0$. Podle podmínky B. C. existuje tedy $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ je

$$|a_n - a_m| < \varepsilon . \tag{24}$$

Ježto každá z nerovností (23) je splněna pro nekonečně mnoho hodnot n, po příp. m, existuje $n \geqq n_0$ a $m \geqq n_0$ tak, že platí (23); potom je však $|a_n - a_m| > \alpha'' - \alpha' = \varepsilon$, což je ve sporu s (24). Tedy je (22) jistě konvergentní. IIb. Buďte konečně $a_n = b_n + ic_n$ ($b_n \in \boldsymbol{E}_1$, $c_n \in \boldsymbol{E}_1$) komplexní. Ježto předpokládám, že (22) splňuje podmínku B. C., splňují i posloupnosti

$$b_1, b_2, b_3, \ldots ; \quad c_1, c_2, c_3, \ldots \tag{25}$$

podmínku B. C., neboť

$$|b_n - b_m| \leqq \sqrt{(b_n - b_m)^2 + (c_n - c_m)^2} = |a_n - a_m|$$

a podobně $|c_n - c_m| \leqq |a_n - a_m|$. Tedy jsou reálné posloupnosti (25) podle bodu IIa konvergentní a tedy jest i (22) konvergentní.

Poznámka 1. Část I důkazu je bezprostředním důsledkem definice limity; těžiště důkazu spočívalo v části II, kde jsme užívali vět z § 2.

Poznámka 2. Větě 26 lze dáti též tento tvar: *Posloupnost* (22) *je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka: ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \boldsymbol{N}$ *tak, že je*

$$|a_{n_0+p} - a_{n_0}| < \varepsilon \text{ pro všechna } p \in \boldsymbol{N} . \tag{26}$$

Důkaz. I. Z podmínky B. C. plyne ihned naše nová podmínka, klademe-li $m = n_0$, $n = n_0 + p$. II. Budiž splněna naše nová podmínka; budiž $\varepsilon > 0$. Tedy existuje $n_1 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n > n_1$ je $|a_n - a_{n_1}| < \frac{1}{2}\varepsilon$; položíme-li tedy $n_0 = n_1 + 1$, platí pro $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ nerovnosti $|a_n - a_m| \leqq |a_n - a_{n_1}| + |a_m - - a_{n_1}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, takže podmínka B. C. je splněna.

Poznámka 3. U posloupností komplexních čísel jsme dosud nezavedli žádnou „nevlastní limitu". Někdy se však jeví účelným zavésti pro posloupnosti komplexních čísel symbol

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \tag{27}$$

(tedy ne $+\infty$ nebo $-\infty$), který nechť značí, že

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = +\infty\,; \tag{28}$$

t. j.: ke každému $K \in \boldsymbol{E}_1$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$, $n \in \boldsymbol{N}$ je $|a_n| > K$. Odtud plynou tato pravidla:

I. Je-li $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = b$ (vlastní limita), je $\lim (a_n + b_n) = = \infty$. Důkaz: $|a_n + b_n| \geqq |a_n| - |b_n|$; podle věty 13[29]) má pravá a tedy i levá strana limitu $+\infty$.

II. Je-li $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = b$ (buďto b vlastní $\neq 0$ nebo $b = \infty$), je $\lim a_n b_n = \infty$. Důkaz: $|a_n b_n| = |a_n| \,.\, |b_n|$ má limitu $+\infty$ podle věty 13.

III. Je-li $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = b \neq 0$ (vlastní limita), je $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = = \infty$. Je-li $\lim a_n = a$ (vlastní limita), $\lim b_n = \infty$, je $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Důkaz: $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = \dfrac{|a_n|}{|b_n|}$ má podle věty 13 limitu $+\infty$ resp. 0.

Příklady: $\lim (1 + in) = \infty$; $\lim((-1)^n \,.\, n + in^2 \cos \frac{1}{2}n\pi) = \infty$; $\lim((-1)^n n + i) = \infty$. Ježto reálná čísla jsou speciálním případem komplexních, můžeme psáti též $\lim(-1)^n n = \infty$ (ač reálná posloupnost $-1, 2, -3, 4, \ldots$ nemá ani limitu $+\infty$ ani $-\infty$). Pojímejte (27) prozatím jako nedílný znak, který neznamená nic více a nic méně než (28). Teprve později (v kap. VI, § 4, příkl. 2) zavedeme ∞ jako samostatný prvek jisté množiny.

[29]) Jest $\lim |a_n| = +\infty$, $\lim |b_n| = |b|$.

Poznámka 4. Věta 26 je velmi obecná, dávajíc nutnou a postačující podmínku pro konvergenci libovolné posloupnosti. Má proto velký význam při obecných úvahách; její důležitost při vyšetřování speciálních příkladů bývá menší.

Cvičení

1. Podle věty o přírůstku funkce (**DI**, věta 133) je $\frac{1}{n+1} < \lg(n+1) - \lg n < \frac{1}{n}$; odtud pro přirozená p, q plyne

$$(29)\qquad \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \ldots + \frac{1}{q+p} < \lg(q+p) - \lg q < \frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \ldots + \frac{1}{q+p-1}\,.$$

Položíme-li $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n$, je tedy $-\frac{1}{q} < a_{q+p} - a_q < 0$, z čehož podle věty 26 plyne existence vlastní limity $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\right)$. Číslo C se nazývá Eulerova konstanta. Dosadíme-li do (29) $q = 1$, $n = p + 1$, dostaneme $0 < a_n < 1$, tedy $0 \leqq C \leqq 1$. Přesnější hodnotu pro C odvodíme později, až v integrálním počtu.

2. Jest ovšem $\frac{1}{2}C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\lg n\right)$, $C = \lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \lg 2n\right)$. Odečtením těchto rovnic plyne

$$\tfrac{1}{2}C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\lg n\right) - \lg 2\,.$$

§ 4. Aritmetické průměry. Věta 27. *Budiž $a_1, a_2, \ldots$ posloupnost vlastních reálných čísel; položme*

$$(30)\qquad b_1 = \frac{a_1}{1}, b_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \ldots$$

Potom jest

$$(31)\qquad \liminf a_n \leqq \liminf b_n \leqq \limsup b_n \leqq \limsup a_n\,.$$

Důkaz provedeme pro lim sup; přechodem k posloupnosti $-a_1$, $-a_2, \ldots$ bychom dostali nerovnosti pro lim inf. Položme $\limsup a_n = A$, $\limsup b_n = B$ a předpokládejme, že $A < B$; z toho máme odvoditi spor. Existují čísla $\alpha' \in \mathbf{E}_1$, $\alpha'' \in \mathbf{E}_1$ tak, že $A < \alpha' < \alpha'' < B$. Podle věty 21 existuje tedy $q \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geqq q$ je $a_n \leqq \alpha'$. Čísla α', α'', q jsou nyní pevně zvolena. Pro každé $n > q$ jest

$$b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_q}{n} + \frac{a_{q+1} + \ldots + a_n}{n} \leqq \frac{a_1 + \ldots + a_q}{n} + \alpha' \frac{n-q}{n}. \tag{32}$$

Limita pravé strany pro $n \to \infty$ je α'; ale $\alpha' < \alpha''$ a tedy existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je pravá strana v (32) menší než α'' a tedy též $b_n < \alpha''$. To je však ve sporu s větou 21, podle které je $b_n > \alpha''$ pro nekonečně mnoho hodnot n.

Existuje-li $\lim a_n$, je $\liminf a_n = \limsup a_n$ a všechna čtyři čísla v (31) jsou stejná. Tedy platí

Věta 28. *Budiž $a_n \in \mathbf{E}_1$ pro $n \in \mathbf{N}$. Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita* $\lim a_n \in \mathbf{E}_1^*$, *je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{33}$$

Příklad 1. Obrátit se věta 28 nedá: limita v (33) vlevo může existovati, i když limita vpravo neexistuje; je-li na př. $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = 1$, jest $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ rovno $\frac{1}{2}n$ nebo $\frac{1}{2}(n+1)$, podle toho zda n je sudé či liché, takže $\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{2}$, kdežto $\lim a_n$ neexistuje, neboť posloupnost 1, 0, 1, 0, ... nemá limitu.

Podobná věta platí i pro komplexní čísla:

Věta 29. *Budiž $a_n \in \mathbf{K}$ pro $n \in \mathbf{N}$. Je-li posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ konvergentní, platí rovnice* (33).

Důkaz: užijte věty 28 na reálnou a imaginární část výrazu $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : n$.

Věta 30. *Buďte $s_1, s_2, \ldots$ ($s_n \in \mathbf{K}$), $t_1, t_2, \ldots$ ($t_n \in \mathbf{K}$) dvě konvergentní posloupnosti:* $\lim s_n = s$, $\lim t_n = t$. *Potom je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 t_n + s_2 t_{n-1} + \ldots + s_{n-1} t_2 + s_n t_1}{n} = st. \tag{34}$$

Důkaz. I. Budiž předně $t = 0$. Existuje číslo $K > 0$ ($K < +\infty$) tak, že je $|s_n| < K$, $|t_n| < K$ pro všechna $n \in \boldsymbol{N}$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < +\infty$); existuje pak $q \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq q$ je $|t_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Je-li tedy $n > q$, je

$$\left|\frac{s_1t_n + s_2t_{n-1} + \ldots + s_nt_1}{n}\right| \leqq \left|\frac{s_1t_n + \ldots + s_{n-q}t_{q+1}}{n}\right| + \\ + \left|\frac{s_{n-q+1}t_q + \ldots + s_nt_1}{n}\right| \leqq K\,\frac{\varepsilon}{2K}\cdot\frac{n-q}{n} + q\,\frac{K^2}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{qK^2}{n}.$$

Zvolme $n_0 > q$ tak, že $qK^2 : n_0 < \frac{1}{2}\varepsilon$; potom pro $n \geqq n_0$ bude

$$\left|\frac{s_1t_n + s_2t_{n-1} + \ldots + s_nt_1}{n}\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1t_n + s_2t_{n-1} + \ldots + s_nt_1}{n} = 0 = s\,.\,t\,.$$

II. Budiž t libovolné; položme $t_k - t = \tau_k$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$. Potom je

$$\frac{s_1t_n + s_2t_{n-1} + \ldots + s_nt_1}{n} = t\,\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} + \\ + \frac{s_1\tau_n + s_2\tau_{n-1} + \ldots + s_n\tau_1}{n}. \tag{35}$$

Druhý člen v (35) vpravo má podle případu I limitu 0, první má podle věty 29 limitu st. Tím je věta 30 dokázána.

Cvičení

1. Budiž $a_1, a_2, a_3, \ldots$ posloupnost vlastních kladných čísel. Potom je

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leqq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leqq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Návod: užijte věty 27 na výraz

$$\frac{1}{n}\left(\lg a_1 + \lg\frac{a_2}{a_1} + \lg\frac{a_3}{a_2} + \ldots + \lg\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

2. Dokažte přímo větu 29, bez užití věty 27, 28. Návod provedu obšírně, ježto jde o důležitý typ důkazu. Položte $\lim a_n = a$, $\alpha_n = a_n - a$, tedy

$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$. Jest $\lim \alpha_n = 0$ a máme dokázati, že limita výrazu $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$ je nula. V čitateli je právě n sčítanců, kteří jsou vesměs „velmi malí", vyjma několik prvních členů. Abychom se těchto prvních členů zbavili, zvolíme nějak přirozené číslo q a pro $n > q$ rozdělíme zlomek na dva: $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q}{n} + \frac{\alpha_{q+1} + \alpha_{q+2} + \ldots + \alpha_n}{n}$. Zvolíme-li nyní q velké, bude druhý zlomek blízko nuly (ježto všichni sčítanci v čitateli jsou blízko nuly a počet těchto sčítanců není větší (ba dokonce je menší) než n). Zvolíme-li pak n ještě mnohokráte větší než q, bude i první zlomek blízko nuly (jeho sčítanci v čitateli sice nemusí býti blízko nuly, ale zato jejich počet q je mnohem menší než n). Proveďme to teď přesně: budiž $\varepsilon > 0$; zvolme $q \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $m \geqq q$ je $|\alpha_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$, takže jest

$$(36) \qquad \left| \frac{\alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_n}{n} \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ pro } n > q\,.$$

Existuje vlastní číslo $K > 0$ tak, že jest $|\alpha_m| < K$ pro všechna $m \in \boldsymbol{N}$, takže

$$(37) \qquad \left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q}{n} \right| < K \frac{q}{n} \text{ pro } n \in \boldsymbol{N},\ q \in \boldsymbol{N}\,.$$

Číslo q bylo již zvoleno; zvolme nyní přirozené číslo $n_0 > q$ tak, že $K \frac{q}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$; pro $n \geqq n_0$ bude potom podle (36), (37)

$$\left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,,$$

čímž důkaz proveden. Všimněte si, že táž myšlenka vystupuje v důkazu věty 30, část I. V důkazu věty 27 byla poněkud zastřena užitím pojmu lim sup.

3. Budiž $a_1, a_2, \ldots$ posloupnost komplexních čísel; budiž $b_1, b_2, \ldots$ posloupnost vlastních kladných čísel. Budiž $\lim\limits_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ ($\alpha \in \boldsymbol{K}$). Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \alpha$. Návod: píšete-li $z_n = \frac{a_n}{b_n} - \alpha$, jde o limitu výrazu $\alpha + \frac{z_1 b_1 + \ldots + z_n b_n}{b_1 + \ldots + b_n}$, při čemž $\lim z_n = 0$. Užitím myšlenky z cvič. 2 zjistíte, že poslední zlomek má limitu 0.

4. Věta 29 plyne z cvič. 3 pro $b_n = 1$.

5. Věta z cvič. 3 bývá užitečná na př. tehdy, je-li $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_n$ nějaký jednoduchý výraz $\left(\text{potom je ovšem } \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_n}{c_n - c_{n-1}}\right)$. Dokažte na př.: pro $p > -1$ je

$$\lim_{n\to\infty} (1^p + 2^p + \ldots + n^p) : n^{p+1} = \frac{1}{p+1} \tag{38}$$

(návod: věta o přírůstku funkce dává $\lim\limits_{n\to\infty} (n^{p+1} - (n-1)^{p+1}) : n^p = p + 1$). Tím máte zjištěno, s jakou asi rychlostí roste výraz $1^p + 2^p + \ldots + n^p$ „nade všechny meze", když $n \to \infty$.

6. Obdobně ukažte $\lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) : \lg n = 1$.

7. Pro $p < -1$ není rovnice (38) správná, neboť $-p - 1 > 0$, takže $(1^p + 2^p + \ldots + n^p) : n^{p+1} > n^{-p-1}$ má limitu $+\infty$. Proč nesmíme v tomto případě užíti věty z cvič. 3?

8. Důležitost předpokladu $\lim (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$ v cvič. 3 je viděti též z tohoto příkladu: víte z **DI**, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right) = 1$ (součet geometrické řady). Volme $b_n = 2^{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $a_1 = c - \frac{1}{2}$, $a_n = 2^{-n}$ pro $n = 2, 3, \ldots$ Potom je $\lim a_n : b_n = 1$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = c$, tedy zcela libovolná, podle toho, jak volíme c. Proberte důkaz cvič. 3 a zjistěte, na kterém místě tento důkaz selže, není-li splněna podmínka $\lim (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$.