Diferenciální počet II

Kapitola I. Obecná teorie množin

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 15--53.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402008

KAPITOLA I.

OBECNÁ THEORIE MNOŽIN

§ 1. Úvod. Přečtěte si napřed předmluvu! V **DI**, kap. I, § 1 jsme se smluvili na významu některých rčení. Zopakujme to stručně a připojme několik poznámek. *Výrokem* jsme nazvali jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé (správné, platí) nebo nepravdivé (nesprávné, neplatí). Na př.: číslo 2 je sudé (správný výrok); číslo 2 je liché (nesprávný výrok); $3 < 4$ (to lze čísti jako větu: tři je menší než čtyři — správný výrok). Naproti tomu nepovažujeme za výrok větu „číslo Plzeň je zelené", která vůbec nedává smyslu. Z výroku A můžeme vytvořit jeho negaci (zápor), která se značívá někdy non$A$ nebo A' a pod.; negace nesprávného výroku je správná, negace správného je nesprávná. Jsou-li předloženy dva výroky A, B, jsou možny čtyři případy: I. A platí, B platí. II. A platí, B neplatí. III. A neplatí, B platí. IV. A neplatí, B neplatí. Z výroků A, B můžeme tvořiti nové výroky. Výrok „A a B" tvrdí, že oba výroky A, B jsou správné.[1]) Výrok „A a B" (psává se obyčejně A et B nebo A & B nebo $A \,.\, B$) je tedy správný, nastává-li případ I, v ostatních případech je nesprávný. Výrok „buďto A nebo B" — psává se obyčejně A vel B, $A \vee B$, $A + B$ — tvrdí, že aspoň jeden z výroků A, B je správný.[2]) Tedy výrok A vel B je správný, nastává-li některý z případů I, II, III, a je nesprávný v případě IV. Další důležitý výrok je „jestliže A, potom B" nebo „z A plyne B"; říká se také „A implikuje B" a píše se $A \Rightarrow B$. Tento výrok tvrdí toto: nenastává případ II, t. j. ten případ, že by A platilo a B neplatilo. „Implikace" $A \Rightarrow B$ je tedy správná v případech I, III, IV, nesprávná v případě II.

Výroku A se říká *premisa*, výroku B *závěr* implikace $A \Rightarrow B$. Prohlédnete-li si příp. I—IV, vidíte, že místo $A \Rightarrow B$ můžete též říci „(non$A$) vel B" (t. j. buďto neplatí A nebo platí B).[3]) Tak na př. $(2 + 3 = 5) \Rightarrow$ $\Rightarrow (4 < 2)$ je nesprávná implikace, kdežto $3 < 5 \Rightarrow 2 < 7$, $3 > 5 \Rightarrow$

[1]) Říká se mu konjunkce výroků A, B.
[2]) Říká se mu disjunkce výroků A, B.
[3]) Tedy by vlastně nebylo nutno implikaci zavádět; ale vyskytuje se tak často, že její zavedení je svrchovaně užitečné.

$\Rightarrow 2 < 7$, $3 > 5 \Rightarrow 2 > 7$ jsou správné implikace. Čtenář se možná na první pohled podivil tomu, proč jsme smysl implikace definovali tak, že poslední dvě implikace jsou správné; uvidí to za okamžik. Poslední výrok, složený z výroků A, B, který uvádím, je: „A tehdy a jen tehdy, když B“, nebo „A je ekvivalentní s B“, znak $A \Leftrightarrow B$. Tento výrok tvrdí, že výroky A, B jsou buďto oba pravdivé nebo oba nepravdivé. Tento výrok je tedy správný v případech I, IV, nesprávný v případech II, III. Jeho správnost tedy znamená předně, že nenastává případ II (t. j. případ „A platí, B neplatí“), t. j. že platí $A \Rightarrow B$ a za druhé, že nenastává případ III (t. j. případ „B platí, A neplatí“), t. j. že platí $B \Rightarrow A$. Jinými slovy: ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je správná tehdy a jen tehdy, platí-li

$$(A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A)\,.$$

Tak se často ekvivalence dokazuje: dokáže se implikace $A \Rightarrow B$ a implikace $B \Rightarrow A$.

Poznamenejme ještě, že implikace $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s (non B) $\Rightarrow$ (non A). Neboť druhá implikace je nesprávná tehdy a jen tehdy, když non$B$ platí a současně non$A$ neplatí, t. j. když A platí a B neplatí, t. j. když nastává případ II. Blíže o tom viz **DI**, kap. I, § 1.

V matematice se často vyskytují útvary, které vypadají jako výroky, ale nejsou výroky v našem smyslu; na př.

1. $x < 2$ (slovy: x je menší než 2), 2. $x < y$, 3. $x^2 > x^2 + 1$, 4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, 5. trojúhelník Δ je rovnostranný.

To nejsou výroky v našem smyslu: dokud nevím, co značí x, y, a, b, Δ, nemohu mluviti o správnosti nebo nesprávnosti. Takovým výrazům říkáme *výrokové funkce* nebo *výrokové vzorce*. Vyznačují se tím, že se v nich vyskytují jisté znaky, t. zv. proměnné nebo neurčité (zde x, y, a, b, Δ), za něž můžeme dosazovati věci jistého „oboru“ (zde na př. se můžeme domluvit, že za x, y budeme dosazovat libovolná reálná čísla, za a, b libovolná komplexní čísla, za Δ jakýkoliv trojúhelník). Výroková funkce musí pak vypadat tak, že po dosazení libovolných prvků oboru za proměnné musím dostat vskutku výrok — buďto správný nebo nesprávný. Tak mně z 2. vyjde výrok někdy pravdivý (na př. pro $x = 1$, $y = 3$), někdy nepravdivý (na př. pro $x = 2$, $y = 1$); podobně u 1., 5. Ale z 3. dostanu po jakémkoliv dosazení za x výrok nepravdivý, z 4. naproti tomu dostanu po jakémkoliv dosazení za a, b výrok pravdivý.[4])

Poznatek, že po libovolném dosazení do 4. dostávám správný výrok, vyslovujeme slovy: „pro všechna (komplexní čísla) a, b je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$". Toto už je výrok, a to správný výrok. Naproti tomu výrok „pro všechna (reálná čísla) x, y je $x < y$" je nesprávný, neboť existují čísla x, y (na př. $x = y = 3$), pro něž není $x < y$.

Je-li na př. $A(x, y, z)$ výroková funkce, značí se často symbolem

$$\prod_{x,y,z} A(x, y, z)$$

výrok: „Pro všechna x, y, z (ze smluveného oboru) je $A(x, y, z)$". Takovémuto výroku říkáme **obecný výrok,** a znaku $\prod_{x,y,z}$ říkáme zde **velký kvantifikátor.** Na př.

$$\prod_{x}(x < 2)$$

je nesprávný výrok,

$$\prod_{a,b}((a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

je správný výrok.

Další důležitý výrok je tak zvaný **„existenční výrok":** „Existují x, y, z (ve smluveném oboru) tak, že je $A(x, y, z)$". Tento výrok se značí často symbolem

$$\sum_{x,y,z} A(x, y, z)\,;$$

znaku $\sum$ se říká **malý kvantifikátor.**

Na př. $\sum_{x,y} (x < y)$ (t. j. „existují (reálná čísla) x, y tak, že je $x < y$") je správný výrok; kdežto $\sum_{x}(x^2 > x^2 + 1)$ (t. j. „existuje (reálné číslo) x tak, že je $x^2 > x^2 + 1$") je nesprávný výrok.

V uvedených případech jsme užili kvantifikátoru najednou na všechny proměnné, vystupující ve výrokové funkci. Můžeme však

[4]) Je zřejmé, že je důležito, smluvit se o oboru proměnných: kdybychom do 1. dosadili za x trojúhelník nebo do 5. za Δ číslo, dostali bychom nesmyslný souhrn znaků.

také užíti kvantifikátoru jen na **některé** proměnné. Na př. z výrokového vzorce $x^2 > y$ (obor: reálná čísla) mohu vytvořiti vzorec $\prod\limits_x (x^2 > y)$, slovy „pro všechna (reálná čísla) x je $x^2 > y$". To ještě není výrok, nýbrž výroková funkce, v níž se vyskytuje proměnná y a na kterou mohu aplikovati opět kvantifikátor $\prod\limits_y$ nebo $\sum\limits_y$.[5]) Dostali bychom

$$\prod_y (\prod_x (x^2 > y)) \, , \quad \sum_y (\prod_x (x^2 > y)) \, ,$$

což už jsou dva výroky: První je nesprávný (tvrdí, že pro každé y a každé x je $x^2 > y$), druhý je správný (tvrdí: Existuje y takové, že pro každé x je $x^2 > y$ — to je vskutku pravda na př. pro $y = -1$). Zároveň je vidět, že místo $\prod\limits_y \prod\limits_x$ jsme mohli psáti jednodušeji $\prod\limits_{x,y}$ nebo $\prod\limits_{y,x}$. Význam, a to velký význam, mají v matematice jen takové výroky, kde se malý kvantifikátor **střídá** s velkým.

Uveďme nyní příklad na užití kvantifikátoru. Na vzorec $((x < y) \,\&\, (y < z)) \Rightarrow (x < z)$ (obor x, y, z: reálná čísla) užijeme velkého kvantifikátoru; dostaneme výrok

$$\prod_{x,y,z} (((x < y) \,\&\, (y < z)) \Rightarrow (x < z)) \, ,$$

slovy: Pro všechna (reálná čísla) x, y, z platí tato implikace: je-li $x < y$ a $y < z$, je $x < z$. Tento výrok, jak víme z aritmetiky, je správný. A abychom tento výrok mohli v této jednoduché formě vysloviti, musíme zavésti pojem implikace tak, jak jsme to učinili. Neboť mezi trojicemi x, y, z existují také takové, pro něž „premisa" $(x < y) \,\&\, (y < z)$ je nesprávná — ale ovšem pro tyto trojice je naše implikace správná sama sebou — právě podle našeho pojmu implikace.

Uvědomme si ještě některé drobnosti: Výrok $\prod\limits_x A(x)$ (pro všechna x je $A(x)$) lze psáti také „neexistuje x tak, že platí non$A(x)$", t. j. non$(\sum\limits_x(\text{non}A(x)))$. Logický zápor k výroku $\prod\limits_x A(x)$ je $\sum\limits_x(\text{non}A(x))$ („existuje x, pro něž neplatí $A(x)$"). Logický zápor k výroku $\sum\limits_x A(x)$

---

[5]) Ovšem ne už $\prod\limits_x$, $\sum\limits_x$. Neboť proměnná x ve vzorci $\prod\limits_x(x^2 > y)$ byla již jednou „pohlcena" kvantifikátorem.

(„existuje x tak, že $A(x)$") je „pro žádné x neplatí $A(x)$", t. j. pro všechna x je non$A(x)$, t. j. $\prod_x(\mathrm{non}A(x))$. Tímto způsobem můžete k výrazům, složeným z kvantifikátorů, snadno tvořit negaci. Na př. je-li C výrok

$$\prod_x(\sum_y A(x, y))\,, \tag{1}$$

je non$C$ výrok $\sum_x(\mathrm{non}\sum_y A(x, y))$, t. j.

$$\sum_x(\prod_y(\mathrm{non}A(x, y))\,. \tag{2}$$

Přečtěme výraz (1): Pro každé x[6]) (je pravda, že) existuje y tak, že $A(x, y)$. Jeho logický zápor tedy bude: Není pravda, že ke každému x takové y existuje, t. j. je pravda, že existuje x, pro něž neexistuje žádné y tak, aby bylo $A(x, y)$, t. j. existuje x tak, že pro všechna y je non$A(x, y)$ — to je právě vzorec (2).

Příklad 1. Vyjádřeme pomocí kvantifikátorů výrok $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, t. j.: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x, splňující nerovnosti $0 < |x| < \delta$, platí $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$:[7])[8])

$$\prod_{\varepsilon>0}\left\{\sum_{\delta>0}\left[\prod_x\left(0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon\right)\right]\right\}.$$

Upozorňuji, že na pořadí kvantifikátorů velmi záleží (a ovšem také na tom, na které proměnné se vztahují). Příklad (obor pro x, y: reálná čísla): $\prod_y\sum_x(x^2 > y)$ značí: ke každému y existuje x tak, že je $x^2 > y$ — správný výrok.

$\sum_x\prod_y(x^2 > y)$ značí: existuje x tak, že pro každé y je $x^2 > y$ — nesprávný výrok.

---

[6]) Říkává se také: Ke každému x existuje y ...

[7]) T. j. pro všechna x z nerovnosti $0 < |x| < \delta$ plyne $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

[8]) Pro větší přehlednost píši obor pro ε a δ (t. j. $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$) pod znakem Π, Σ; obor pro x: všechna reálná čísla. Závorky se často vynechávají, je-li jasno, kam patří.

$\prod\limits_x \sum\limits_y (x^2 > y)$: ke každému x existuje y tak, že $x^2 > y$ — správný výrok.

$\sum\limits_y \prod\limits_x (x^2 > y)$: existuje y tak, že pro všechna x je $x^2 > y$ — správný výrok (na př. číslo $y = -1$ má tuto vlastnost).

Podotkněme ještě, že platí

$$(\sum_x \prod_y A(x, y)) \Rightarrow (\prod_y \sum_x A(x, y))$$

pro jakoukoliv výrokovou funkci $A(x, y)$. Neboť je-li správný výrok vlevo, značí to, že existuje jisté x_0 tak, že $A(x_0, y)$ platí pro každé y (všechno ovšem ve smluveném oboru pro x a pro y). Potom vskutku ke každému y existuje x (totiž právě x_0), pro které platí $A(x, y)$. Obrátit se zde znak implikace nedá: srovnejte výrok „Všichni přítomní mají společného přítele“ (t. j. existuje člověk, jenž je přítelem všech přítomných) s výrokem „Každý z přítomných má nějakého přítele“ (t. j. ke každému z přítomných existuje člověk, který je jeho přítelem).

Místo znaků $\prod$, $\sum$ se někdy užívá znaků (x), $(\exists x)$:

$(x)\, A(x)$: pro všechna x platí $A(x)$; $(\exists y)\, B(y)$: existuje y tak, že platí $B(y)$.

V dalším nebudeme (až na případy, které zvláště zdůrazním) symbolů $\prod$, $\sum$, (x), $(\exists x)$ pro kvantifikátory užívati. Častěji budeme užívati symbolů $\Rightarrow$ (implikace) a $\Leftrightarrow$ (ekvivalence).

Mimo to budu ještě užívati těchto zkratek a úprav, obvyklých v matematických (nikoliv v logických!) textech. Místo znaku & budu užívati většinou čárky (pokud nevypisuji vzorec slovy s použitím spojky „a“). Dále vynechávám obyčejně slova „pro všechna $x, y, \ldots$ smluveného oboru“, takže píši na př.:

„Je-li $x < y$ a $y < z$, je $x < z$“ nebo $(x < y, y < z) \Rightarrow x < z$ místo $\prod\limits_{x,y,z} ((x < y \;\&\; y < z) \Rightarrow x < z)$.

Smysl je tedy: Pro všechna x, y, z (smluveného oboru: zde tedy pro všechna reálná x, y, z) je uvedená implikace správná. Podobně: řeknu-li, že neplatí implikace $A(x, y) \Rightarrow B(x, y)$ (kde x, y jsou „proměnné“), rozumím tím: není pravda, že tato implikace platí pro všechna

x, y; t. j. existují x, y, pro něž tato implikace je nesprávná, t. j. pro něž platí $A(x, y)$ a neplatí $B(x, y)$. Na př. budiž dána funkce f, čísla a, b $(a < b)$ a číslo M. Potom slovy „Implikace $(a \leqq x \leqq b) \Rightarrow f(x) < M$ neplatí" budu rozuměti: není pravda, že platí pro všechna x,[9]) neboli: existuje aspoň jedno x, pro něž je implikace nesprávná, t. j. je sice $a \leqq x \leqq b$, ale současně není $f(x) < M$.

Podobně u symbolu ekvivalence $\Leftrightarrow$.

Tedy ještě jednou: v dalším nebudu užívati (kromě výjimečných případů, na které zvláště upozorním) žádného ze symbolů zde uvedených, kromě — občas — symbolů $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ a to v úpravě právě uvedené. Prosím také, aby čtenář nepovažoval tyto vědomě neúplné poznámky za nějaký (sebe elementárnější) úvod do matematické logiky. Šlo mně jenom o to, abychom si ujasnili způsob vyjadřování, kterého ostatně nadaný matematik užívá intuitivně s neomylnou správností. Ale na př. při složitých výrazech s mnoha kvantifikátory („ke každému x existuje y tak, že ke každému $\xi > 0$ existuje $\eta > 0$ tak, že pro všechna z platí implikace $A(x, y, z, \xi, \eta) \Rightarrow B(x, y, z, \xi, \eta)$") se s nimi snad snáze zachází, uvědomí-li si čtenář mechanismus operací s nimi.

§ 2. Množiny a množinové operace. Pojem množiny byl v **DI** osvětlen (nikoliv definován!) slovy, že množina je souhrn nějakých věcí, jež nazýváme prvky (elementy) množiny; tamtéž bylo pro objasnění podáno několik příkladů množin. Množina je určena svými prvky; skládají-li se dvě množiny A, B z týchž prvků, píšeme $A = B$ (říkáme, že B je táž množina jako A). Není-li tomu tak, píšeme $A \neq B$. Účelné je toto označení: Množinu všech x, která mají jistou vlastnost $V(x)$, označujeme symbolem $\underset{x}{\mathcal{E}}(V(x))$. Na př. buďte a, b reálná čísla. Množinu oněch x, pro než je $a \leqq x \leqq b$,[10]) značíme $\underset{x}{\mathcal{E}}(a \leqq x \leqq b)$. Je-li $a < b$, je tato množina interval $\langle a, b\rangle$; je-li $a = b$, skládá se tato množina z jediného čísla a; je-li konečně $a > b$, neexistuje vůbec žádné x, pro něž by bylo $a \leqq x \leqq b$. Je vidět, že je účelno, zavésti též pojem

[9]) Pozor! jediná proměnná je zde x, kdežto f, a, b, M jsou dány.

[10]) Ježto jsme nerovnost definovali dosud jen pro reálná čísla, plyne z nerovnosti $a \leqq x \leqq b$ samo sebou, že x je reálné číslo.

„prázdné množiny“, t. j. množiny, jež neobsahuje žádný prvek. Ježto je množina určena svými prvky, existuje jen jedna prázdná množina; označme ji $\emptyset$ (jiné dosti obvyklé označení je Λ). Tedy na př. $\underset{x}{\mathcal{E}}(a \leqq x \leqq b) = \emptyset$ pro $a > b$. Množinu, jejíž prvky jsou na př. a, b, ε, x, značíme též (a, b, ε, x)[11]) a pod. (prostě vypíšeme její prvky a dáme do tučné závorky); množinu složenou z jediného prvku a značíme tedy (a). Na př. množina všech prvočísel větších než 7 a menších než 13 je (11).

Okolnost, že x je prvkem množiny[12]) A, vyjadřujeme znakem $x \in A$; není-li $x \in A$, píšeme x non $\in A$. Znak $A \subset B$ nebo $B \supset A$ značí, že každý prvek množiny A patří do B, t. j. že platí implikace $x \in A \Rightarrow x \in B$; říkáme pak, že A je **částí** B. Jest ovšem vždy $\emptyset \subset A$, $A \subset A$. Je-li $A \subset B$ a současně $A \neq B$, říkáme, že A je **pravou** částí B. Někteří autoři užívají znaku $\subseteqq$ místo $\subset$; znaku $\subset$ užívají pak pro pravou část. Rovnost $A = B$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $A \subset B$ a současně $B \subset A$. Často se právě takto dokazuje rovnost množin.

Množinu, která se skládá z konečného počtu prvků, nazýváme *konečnou*; ostatní množiny se nazývají *nekonečné*. Také prázdnou množinu počítáme mezi konečné množiny (počet jejích prvků je roven nule).

Poznámka 1. Často se setkáváme s množinami množin, t. j. s množinami, jejichž prvky jsou opět nějaké množiny. Na př. množina všech částí množiny $(1, 2, 3)$, jež obsahují právě dva prvky, je množina, jejímiž prvky jsou tyto tři množiny: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$. Množina všech částí množiny $(1, 2)$ má tyto čtyři prvky: $\emptyset$, (1), (2), $(1, 2)$. Obecně: Budiž M množina (konečná) o n prvcích; budiž $0 \leqq k \leqq n$ (k celé). Potom množina všech částí množiny M má 2^n prvků a množina všech částí množiny M, majících právě k prvků, má $\binom{n}{k}$ prvků. (Dokažte!)

Zaveďme nyní některé operace s množinami. Buďte A, B množiny (smí být po případě $B = A$). **Sjednocením** (nebo součtem) množin A, B (znak $A \cup B$ nebo $A + B$) rozumíme množinu oněch prvků,

[11]) Ježto množina je určena svými prvky, nevadí, jestliže „z neobratnosti“ napíšeme některý prvek vícekráte; na př. $(2, 3, 2) = (2, 3) = (3, 2)$.
[12]) Místo „je prvkem A“ říkáme též „patří do A“, „leží v A“ a pod.

které patří *aspoň* k jedné z množin A, B. **Průnik** množin A, B (znak $A \cap B$ nebo $A \,.\, B$ nebo AB, nikdy však $A \times B$) je množina oněch prvků, které patří současně k A i k B. **Rozdíl** množin A, B (znak $A \dot{-} B$ nebo $A - B$ nebo $A \setminus B$) je množina oněch prvků, jež patří k A, ale nepatří k B. Budeme užívati znaků $A \cup B$, AB nebo $A \,.\, B$, $A \dot{-} B$.

Poznámka 2. Je-li $AB = \emptyset$, říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní.** Je-li $A \supset B$, nazývá se rozdíl $A \dot{-} B$ často **doplňkem** množiny B (v množině A nebo do množiny A). Někteří autoři užívají znaku $A \dot{-} B$ vůbec jen v případě $B \subset A$.

Příklad 1. Budiž $A = \langle 0, 2 \rangle$, $B = \langle 1, 3 \rangle$, $C = \langle 2, 3 \rangle$. Potom je $A \cup B = \langle 0, 3 \rangle$, $A \cup C = \langle 0, 3 \rangle$, $B \cup C = \langle 1, 3 \rangle$, $AB = \langle 1, 2 \rangle$, $AC = (2)$, $BC = \langle 2, 3 \rangle$, $A \dot{-} B = \langle 0, 1)$, $B \dot{-} A = (2, 3\rangle$, $C \dot{-} B = \emptyset$ atd.

Příklad 2. Jest $A \cup A = AA = A$, $A \dot{-} A = \emptyset$. Obecně jest $(A \cup B = A) \Leftrightarrow (B \subset A)$[13]; $(AB = A) \Leftrightarrow (A \subset B)$; $(A \dot{-} B) = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset B)$; $(A \dot{-} B = A) \Leftrightarrow (AB = \emptyset)$; je-li $A_1 \subset A_2$, je $A_1 \cup B \subset A_2 \cup B$, $A_1 B \subset A_2 B$, $A_1 \dot{-} B \subset A_2 \dot{-} B$, $B \dot{-} A_1 \supset B \dot{-} A_2$.

Sjednocení a průnik lze definovati i pro více množin: Sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nebo $\bigcup\limits_{n=1}^{3} A_n$ (nebo $A_1 + A_2 + A_3$ nebo $\sum\limits_{n=1}^{3} A_n$) značí množinu prvků, jež patří alespoň k jedné z množin A_1, A_2, A_3. Podobně, je-li dána posloupnost množin A_5, A_6, A_7, ..., značí $A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \ldots$ nebo $\bigcup\limits_{n=5}^{\infty} A_n$ množinu oněch prvků x, pro něž existuje aspoň jedno přirozené číslo $n \geqq 5$ tak, že je $x \in A_n$ (t. j. množinu oněch x, jež leží aspoň v jedné z množin A_5, A_6, ...). Obecně lze definovati sjednocení takto: Budiž Z nějaká neprázdná množina; nechť každému $z \in Z$ je přiřazena určitá množina A_z. Potom sjednocením

$$\bigcup_{z \in Z} A_z \tag{3}$$

(„index" z umisťujeme někdy také jinak, na př. $A^{(z)}$, $A(z)$ a pod.) rozumíme množinu všech prvků, které leží *aspoň* v jedné z množin A_z.

---

[13]) Čti ovšem: Jest $A \cup B = A$ tehdy a jen tehdy, je-li $B \subset A$.

Je-li na př. Z množina všech přirozených čísel, značí (3) totéž jako $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (podle úmluvy před chvílí učiněné). Podobně se definuje průnik $A_1A_2A_3 = \bigcap_{z=1}^{3} A_z$, $\bigcap_{z\epsilon Z} A_z$ atd.[14]) jako množina oněch prvků, které leží ve *všech* uvedených množinách. Při tom pro průnik všech množin A_z, kde z probíhá všechna přirozená čísla $z \geqq k$ (k přirozené číslo), užíváme opět znaku $\bigcap_{z=k}^{\infty} A_z$. Příklady:

$\langle 0, 3\rangle . \langle 1, 5\rangle . \langle 2, 4\rangle = \langle 2, 3\rangle$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle 0, \frac{1}{n}\rangle = (0)$ (množina o jediném prvku); $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ (prázdná množina);

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 0, 1 - \frac{1}{n}\rangle = \langle 0, 1); \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) = (0, 1) .$$

Podobný pojmu (3) je tento pojem: Budiž $\mathfrak{A}$ nějaká neprázdná množina množin. Množinu všech x, která jsou prvkem aspoň jedné množiny $A \epsilon \mathfrak{A}$, nazveme sjednocením množin $A \epsilon \mathfrak{A}$, znak

$$\bigcup_{A\epsilon\mathfrak{A}} A . \tag{4}$$

Příklad: Je-li $\mathfrak{A}$ množina všech intervalů[15]) $\langle a, b\rangle$, vyhovujících podmínce $0 < a < b < 1$, je (4) zřejmě interval $(0, 1)$.

Symbol (4) lze převésti na symbol tvaru (3) takto: Každému $A \epsilon \mathfrak{A}$ přiřaďme množinu M_A rovnicí $M_A = A$. Potom zřejmě

$$\bigcup_{A\epsilon\mathfrak{A}} A = \bigcup_{A\epsilon\mathfrak{A}} M_A ,$$

což je symbol tvaru (3).[16]) Podobně se definuje $\bigcap_{A\epsilon\mathfrak{A}} A$.

Poznámka 3. Sjednocení (3) budeme nazývati *disjunktním*, jestliže průnik kterýchkoliv dvou A_z (s různými „indexy“ z) je prázdný; t. j. jestliže

$$(z_1 \epsilon Z,\ z_2 \epsilon Z,\ z_1 \neq z_2) \Rightarrow A_{z_1}A_{z_2} = \emptyset . \tag{5}$$

[14]) Psává se též Π místo $\bigcap$.

[15]) Prvky množiny $\mathfrak{A}$ jsou tedy jisté intervaly, t. j. jisté množiny reálných čísel.

[16]) Množina Z z (3) se zde nazývá $\mathfrak{A}$.

To se ovšem netýká rázu množiny (3) samotné, nýbrž pouze jejího způsobu vyjádření. Je-li na př. $AB = \emptyset$, $B = C \neq \emptyset$, je $A \cup B = A \cup B \cup C$, při čemž sjednocení vlevo je a sjednocení vpravo není disjunktní.

Platí-li (5), říkáme také, že systém množin A_z $(z \in Z)$ je disjunktní.

Poznámka 4. Jsou-li A, B, C množiny, značí ovšem $(A \cup B)\, C$ průnik množiny $A \cup B$ s množinou C. Podobně $A \cup (BC)$ značí sjednocení množiny A s průnikem BC; je však zvykem závorku zde vynechávati a psáti $A \cup BC$. Podobně píšeme $AB \dot{-} CD$ a míníme tím $(AB) \dot{-} (CD)$. Prostě: znak . neboli $\cap$ váže „silněji" než znak $\cup$ nebo $\dot{-}$. Máme-li tedy před průnikem $AB \dots F$ nebo za ním znak $\cup$ nebo $\dot{-}$, smíme psáti průnik bez závorek. Podobně v aritmetice vypisujete závorky ve výrazech $(a + b)\, c$, $(a - b)\, c$, ale místo $(ab) + c$, $(ab) - (cd)$ píšete obyčejně $ab + c$, $ab - cd$.

Důležitá je tato věta (které se velmi často užívá):

Věta 1 (t. zv. vzorce de Morganovy).

$$A \dot{-} \bigcup_{z \in Z} B_z = \bigcap_{z \in Z} (A \dot{-} B_z)\,; \quad A \dot{-} \bigcap_{z \in Z} B_z = \bigcup_{z \in Z} (A \dot{-} B_z)\,.$$

Důkaz první rovnice. Označme levou stranu M, pravou N. Dokážeme předně, že $x \in M \Rightarrow x \in N$ a za druhé, že $x \in N \Rightarrow x \in M$.

Budiž tedy předně $x \in M$. T. j. x leží v A, ale neleží v B_z pro žádné z. Tedy x leží v $A \dot{-} B_z$ pro každé z. Tedy $x \in N$. Budiž za druhé $x \in N$. T. j.: pro každé z leží x v $A \dot{-} B_z$, t. j. x leží v A, ale neleží v žádném B_z, tedy $x \in M$. Důkaz druhé rovnice si čtenář provede sám.

Poznámka 5. Pro operace $\cup$, $\cap$, $\dot{-}$ platí mnoho pravidel podobných pravidlům pro součet, součin a rozdíl čísel. Na př. $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (a podobně pro průnik), $(A \cup B)\, C = AC \cup BC$, $(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \cup C)$. Ale na př. nemusí býti $(A \dot{-} B) \cup C = (A \cup C) \dot{-} B$ (na př. pro $A = B = C \neq \emptyset$ je levá strana A, pravá $\emptyset$). Tedy opatrně!

Příklad 3. $\bigcap_{z \in Z} (A \cup B_z) = A \cup (\bigcap_{z \in Z} B_z)$ (čtenáři by asi byla názornější symbolika $\prod (A + B_z) = A + \prod B_z$).

Důkaz. Označme levou stranu M, pravou stranu N. Budiž předně $x \in M$, t. j. $x \in A \cup B_z$ pro každé z. Je-li $x \in A$, je $x \in N$. Není-li však $x \in A$, je nutně $x \in B_z$ pro každé z, tedy opět $x \in N$. Budiž za druhé $x \in N$, tedy buďto $x \in A$ nebo $x \in \bigcap B_z$. Ale v obou případech je zřejmě $x \in M$.

Se sjednocením, průnikem, rozdílem množin musíte umět hbitě zacházet. Viz cvičení.

Cvičení

1. $A = (A \dot{-} B) \cup AB$; $A \cup B = A \cup (B \dot{-} A)$; $A \cup B = (A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} A) \cup AB$. Sjednocení vpravo jsou disjunktní.

2. $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \cup AC$.

3. $[A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \cup C] \Leftrightarrow C \subset A$.

4. $[(A \cup C) \dot{-} B = (A \dot{-} B) \cup C] \Leftrightarrow BC = \emptyset$.

5. Budiž dána posloupnost množin $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Položme $B_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $C_n = A_1 A_2 \ldots A_n$. Potom je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \quad B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots\,,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\,, \quad C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$$

Položme konečně $D_1 = A_1$, $D_{n+1} = A_{n+1} \dot{-} (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\,,$$

kde sjednocení vpravo je disjunktní. Podobně pro konečnou posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

§ 3. Zobrazení. Pro úsporu ve vyjadřování zavedeme tyto čtyři znaky, které podržíme v celé této knize: $\mathbf{N}$ bude vždy znamenati množinu všech přirozených čísel. Podobně budou znaky $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{K}$ znamenati po řadě množinu všech racionálních čísel, všech reálných čísel, všech komplexních čísel.

Buďte dány množiny A, B a nechť každému prvku x množiny A je přiřazen určitý prvek y množiny B; potom říkáme, že je dáno zobrazení množiny A do množiny B a prvek y nazýváme obrazem prvku x. Vyslovme to však raději trochu jinak:

Definice 1. *Zobrazením množiny A do množiny B nazýváme každou množinu f uspořádaných dvojic $[x, y]$,*[17]*) jež má tyto vlastnosti:*

1. *Pro každou dvojici $[x, y] \in f$ je $x \in A$, $y \in B$.*

2. *Ke každému prvku x množiny A existuje jeden a jen jeden prvek y tak, že $[x, y] \in f$.*

Každému $x \in A$ je tedy zobrazením f vskutku přiřazen jeden a jen jeden prvek $y \in B$, totiž onen prvek y, pro nějž je $[x, y] \in f$. Tento prvek y označujeme znakem $f(x)$ a nazýváme jej *obrazem* prvku x. Množinu A nazýváme *oborem* zobrazení f.

Poznámka 1. Místo „zobrazení množiny A do množiny B" říkáme též „funkce", a to „funkce v oboru A". Prvek $f(x)$ nazýváme pak „hodnotou funkce v prvku x", množinu A nazýváme „oborem funkce". Název „funkce" nebo „funkce v oboru A" má tu nevýhodu, že v něm není vyznačena množina B; proto ho budeme užívati hlavně ve speciálních případech, v nichž množina B je předem dána. Prvky množiny A bývají často „body" nějakého „prostoru"; potom ovšem mluvíme o obrazu bodu x (místo „prvku x"), o hodnotě funkce v bodě x a pod.

Různá zobrazení značíme ovšem různými písmeny: f, g, F, φ, f_1, f_2 a pod. Ježto zobrazení je množina,[18]) znamená rovnice $f = g$ („zobrazení f je stejné jako g"), že se množiny f, g skládají z týchž prvků, t. j. že zobrazení f, g mají týž obor a že pro každý prvek x tohoto oboru je $f(x) = g(x)$.

Poznámka 2. Speciálním případem zobrazení jsme se zabývali již v **DI**, kap. V. Tam šlo (viz def. 14, 14a v **DI**) o zobrazení množiny $M \subset \mathbf{E}_1$ do $\mathbf{E}_1$. Takovým zobrazením jsme tehdy prostě říkali „funkce"; nyní pro rozlišení jim budeme říkati „konečné reálné funkce jedné reálné proměnné".

Poznámka 3. Budiž f zobrazení A do B. Je-li $M \subset A$, označme znakem $f(M)$ množinu všech prvků $f(x)$, kde $x \in M$ (t. j. $y \in f(M)$

---

[17]) Dvě takové uspořádané dvojice $[x, y]$, $[\xi, \eta]$ považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, je-li $x = \xi$, $y = \eta$; píšeme potom $[x, y] = [\xi, \eta]$. Není-li tomu tak, píšeme $[x, y] \neq [\xi, \eta]$. Na př. je $[y, x] \neq [x, y]$, je-li $x \neq y$.

[18]) Zobrazení f je podle definice 1 množina všech dvojic $[x, f(x)]$, kde x probíhá všechny prvky množiny A.

tehdy a jen tehdy, existuje-li aspoň jedno $x \in M$ tak, že $y = f(x)$). Říkáme také, že f zobrazuje množinu M na množinu $f(M)$, že $f(M)$ je obrazem množiny M. Jistě se není třeba obávati záměny mezi $f(x)$, kde x je prvek množiny A a mezi $f(M)$, kde M je částí množiny A.

Příklad 1. Definujme zobrazení f množiny E_1 do E_1 rovnicí $f(x) = x^2$; potom je $f(\mathsf{E}_1) = f((-1, +\infty)) = f(\langle 0, +\infty)) = \langle 0, +\infty)$; $f(\langle 0, 2\rangle) = f((-1, 2\rangle) = f(\langle -2, 2\rangle) = \langle 0, 4\rangle$; $f((3)) = (9)$.

Budiž opět f zobrazení A do B. Jestliže $A_1 \supset A$ (t. j. jestliže A_1 obsahuje obor zobrazení), budeme říkati, že f je zobrazení z množiny A_1 do B. Dále: jest $f(A) \subset B$. Jestliže $f(A) = B$, t. j. jestliže každý prvek z B je obrazem některého prvku množiny A, říkáme, že f je zobrazení A *na* B. Konečně: Říkáme, že f je definováno v bodě x (po příp. v množině M), má-li symbol $f(x)$ smysl, t. j. je-li $x \in A$ (po příp. má-li $f(x)$ smysl pro každé $x \in M$, t. j. je-li $M \subset A$). Příklad: Funkce „arkussinus" je zobrazení intervalu $I_1 = \langle -1, 1\rangle$ na interval $I_2 = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$; je to tedy zobrazení z E_1 do E_1; je to zobrazení I_1 do E_1; je to zobrazení z E_1 na I_2. Je definováno v bodě $\frac{1}{2}$, v množině $(0, \frac{1}{2})$. Není definováno v bodě 2, v intervalu $(0, 3)$.

V mnohých úvahách se lze omeziti na zobrazení „na B". Neboť je-li f zobrazení A do B, je f též zobrazení A na $f(A)$.

Budiž opět f zobrazení A do B; budiž $M \subset A$. **Parciálním zobrazením** f_M nazýváme zobrazení takto definované: Jeho oborem je množina M a pro každé $x \in M$ je $f_M(x) = f(x)$. Je-li na př. $f(x) = x^2$ (obor E_1), je $f_{\langle 0, +\infty)}$ funkce, jejímž grafem je pravá půlka paraboly $y = x^2$. Jestliže pro každé $x \in M$ je $f(x) = g(x)$, t. j. jestliže $f_M = g_M$, budeme též psáti $f = g$ v M neboli $f(x) = g(x)$ pro $x \in M$. Na př. je-li $f(x) = x$, $g(x) = |x|$ (obor E_1), je $f = g$ v $\langle 0, +\infty)$.

Ježto u znaku f potřebujeme místo pro indexy, nebudeme znaku f_M téměř užívati; kde ho užijeme, podotknu to zvláště.

Budiž opět f zobrazení A do B. Budiž $N \subset B$. Množinu všech $x \in A$, pro něž je $f(x) \in N$, nazveme **vzorem** množiny N a označíme ji $f_{-1}(N)$. Příklad: budiž $f(x) = x^2$ (obor E_1). Potom $f_{-1}((-1, 3)) = f_{-1}((-3, 3)) = f_{-1}(\langle 0, 3)) = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $f_{-1}(\langle 1, 4\rangle) = \langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$; $f_{-1}((4)) = (-2) \cup (2)$; $f_{-1}((-2, -1)) = \emptyset$.

Cvičení

V cvičeních 1 — 11 je dáno zobrazení f množiny A do B.

1. $M_1 \subset M_2 \subset A \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2)$; $N_1 \subset N_2 \subset B \Rightarrow f_{-1}(N_1) \subset f_{-1}(N_2)$.

2. Je-li $M_z \subset A$ pro $z \in Z$, je $f(\bigcup_{z\in Z} M_z) = \bigcup_{z\in Z} f(M_z)$, $f(\bigcap_{z\in Z} M_z) \subset \bigcap_{z\in Z} f(M_z)$. V druhém vztahu nemusí platiti znamení rovnosti; na př. budiž $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbf{E}_1$, $M_1 = (2)$, $M_2 = (-2)$; potom $f(M_1M_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, $f(M_1) \,.\, f(M_2) = (4)$.

3. Je-li $M_1 \subset A$, $M_2 \subset A$, je $f(M_1) \dot{-} f(M_2) \subset f(M_1 \dot{-} M_2)$. Nemusí platiti znamení rovnosti; na př. budiž $f(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbf{E}_1$, $M_1 = \langle 0, 2\rangle$, $M_2 = \langle 0, 1\rangle$.

4. Je-li $N_z \subset B$ pro $z \in Z$, je $f_{-1}(\bigcup_{z\in Z} N_z) = \bigcup_{z\in Z} f_{-1}(N_z)$, $f_{-1}(\bigcap_{z\in Z} N_z) = \bigcap_{z\in Z} f_{-1}(N_z)$. Srovnejte s cvič. 2!

5. Je-li $N_1 \subset B$, $N_2 \subset B$, je $f_{-1}(N_1) \dot{-} f_{-1}(N_2) = f_{-1}(N_1 \dot{-} N_2)$. Srovnejte s cvič. 3!

6. Implikace $[N \subset B,\ N \neq \emptyset] \Rightarrow [f_{-1}(N) \neq \emptyset]$ platí tehdy a jen tehdy, je-li f zobrazení množiny A *na* B.

7. Rovnost $f(A) = B$ platí tehdy a jen tehdy, je-li f zobrazení množiny A *na* B.

8. Pro $N \subset B$ je $f(f_{-1}(N)) \subset N$; znamení $=$ místo $\subset$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $N \subset f(A)$. Pro $M \subset A$ je $f_{-1}(f(M)) \supset M$, nemusí však platiti znamení rovnosti. Příklad: $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbf{E}_1$, $M = \langle 0, 1\rangle$, $f_{-1}(f(M)) = \langle -1, +1\rangle$.

9. $f((a)) = (f(a))$ pro $a \in A$.

10. Budiž $M \subset A$. Potom platí: pro $M_1 \subset M$ je $f_M(M_1) = f(M_1)$; pro $N \subset B$ je $(f_M)_{-1}(N) = M \,.\, f_{-1}(N)$.

11. Symboly $f(M)$, $f_{-1}(N)$ pro $M \subset A$, $N \subset B$ lze interpretovati též takto: Budiž $\mathfrak{A}$ systém všech částí množiny A, budiž $\mathfrak{B}$ systém všech částí množiny B. Tím, že každé množině $M \subset A$ (t. j. každému $M \in \mathfrak{A}$) přiřadíme množinu $f(M)$, definujeme zobrazení množiny $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. Toto zobrazení je zobrazením množiny $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$ tehdy a jen tehdy, je-li f zobrazením množiny A na B. Podobně, přiřadíme-li každému $N \in \mathfrak{B}$ množinu $f_{-1}(N)$, definujeme tím jisté zobrazení množiny $\mathfrak{B}$ do $\mathfrak{A}$.

Následující dvě cvičení podávají příklady zobrazení rázu poněkud jiného, než jste zvyklí.

12. Budiž $\mathfrak{A}$ množina všech omezených neprázdných množin reálných čísel. Každé takové množině $M \in \mathfrak{A}$ přiřaďme interval $\langle \inf M, \sup M\rangle$ (při čemž užíváme symbolu $\langle a, b\rangle$ nejenom pro $a < b$, nýbrž i pro $a = b$, kladouce $\langle a, a\rangle = (a)$). Tím je definováno zobrazení f množiny $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{A}$ (nikoliv na $\mathfrak{A}$), jež přiřazuje každé množině $M \in \mathfrak{A}$ „nejmenší" uzavřený interval, obsahující množinu M.

13. Budiž A množina všech konvergentních posloupností reálných čísel. Definujme zobrazení f množiny A do E_1 takto: je-li $x \in A$, takže x je nějaká konvergentní posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$, klademe $f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n$. Potom je f zobrazení množiny A na E_1.

§ 4. Prostá zobrazení. Mohutnost množiny. Je-li f zobrazení množiny A do B, může se státi, že dva různé prvky množiny A mají týž obraz (na př. je-li $f(x) = \sin x$ pro $x \in E_1$, je $f(\alpha) = f(\alpha + 2\pi)$, $f(0) = f(\pi)$ a pod.). Nenastane-li tento případ, nazýváme zobrazení prostým; ježto jde o důležitý pojem, vyslovme tuto definici obšírně:

Definice 2. *Zobrazení f množiny A do množiny B nazýváme prostým, jestliže*

$$[x_1 \in A, x_2 \in A, x_1 \neq x_2] \Rightarrow [f(x_1) \neq f(x_2)] .$$

Budiž nyní f prosté zobrazení množiny A *na* množinu B. Potom ke každému $y \in B$ existuje jedno a jen jedno $x \in A$ tak, že $f(x) = y$; toto x označme $\varphi(y)$.[19]) Tím je definováno zobrazení φ množiny B na množinu A, jež je zřejmě prosté; toto zobrazení φ se nazývá zobrazením *inversním* k f a značí se obyčejně znakem f_{-1}. Je definováno zřejmě takto: rovnice $x = f_{-1}(y)$ znamená totéž jako $y = f(x)$. Z toho je patrno, že zobrazení inversní k f_{-1} je původní zobrazení f.[20])

Poznámka 1. Užívám-li slova „funkce" místo „zobrazení", říkám ovšem též parciální funkce, prostá funkce, inversní funkce. Speciálními případy inversních funkcí jsme se zabývali v **DI**, kap. VII. Tam byla f funkce spojitá a ryze monotonní v oboru J, kdež J byl nějaký interval; obecnější případ byl vyšetřován v **DI**, kap. VII, § 1, cvič. 1.

Buďte A, B dvě množiny; existuje-li prosté zobrazení množiny A na B (t. j. lze-li prvky množiny B vzájemně jednoznačně přiřaditi prvkům množiny A), pišme $A \sim B$. Tento vztah má tyto tři vlastnosti:

[19]) Z toho je patrno: dáti prosté zobrazení množiny A na B znamená totéž jako „přiřaditi prvky množiny B vzájemně jednoznačně prvkům množiny A" tak, jak to bylo vylíčeno v **DI**, kap. I, § 4, pozn. [24]) pod čarou.

[20]) Pozor! Budiž $N \subset B$; potom má znak $f_{-1}(N)$ zdánlivě dvojí smysl: vyjdu-li od zobrazení $\varphi = f_{-1}$, je $f_{-1}(N)$ množina C všech prvků $\varphi(y)$, pro něž je $y \in N$; vyjdu-li od zobrazení f, je $f_{-1}(N)$ (podle označení z § 3) množina D všech prvků x, pro něž $f(x) \in N$. Ale každý prvek $x \in A$ lze psáti ve tvaru $x = \varphi(y)$, načež je $y = f(x)$. Množina D je tedy množina všech prvků $\varphi(y)$, pro něž je $y \in N$, takže $C = D$; oba zdánlivě různé významy symbolu $f_{-1}(N)$ splývají a nemůže tedy nastati nedorozumění.

I. *Vždy jest $A \sim A$.* Důkaz. Definujeme-li „identické" zobrazení f množiny A rovnicí $f(x) = x$ (t. j. každý prvek je přiřazen sám sobě), je f prosté zobrazení A na A.

II. *Je-li $A \sim B$, je $B \sim A$.* Důkaz. Je-li f prosté zobrazení A na B, je f_{-1} prosté zobrazení B na A.

III. *Je-li $A \sim B$, $B \sim C$, je $A \sim C$.* Důkaz. Je-li f prosté zobrazení A na B a je-li g prosté zobrazení B na C, definujme zobrazení h množiny A takto: pro $x \in A$ budiž $h(x) = g(f(x))$; tento symbol má vskutku význam: neboť je-li $x \in A$, je $y = f(x) \in B$, takže $g(f(x)) = g(y) \in C$ má smysl. h je zobrazení A *na* C; neboť je-li $z \in C$, existuje $y \in B$ tak, že $g(y) = z$, a potom existuje $x \in A$ tak, že $f(x) = y$; tedy vskutku $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Zobrazení h je dále prosté: neboť pro $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (ježto f je prosté), tedy $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (ježto g je prosté), t. j. $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Říkejme prozatím, že množiny A, B jsou ekvivalentní, jestliže je $A \sim B$ (a tedy též $B \sim A$). Je zřejmo, že dvě konečné množiny jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, mají-li stejný počet prvků, a že nekonečná množina není ekvivalentní s žádnou konečnou množinou. Zbývá otázka — která je jedním z hlavních úkolů obecné theorie množin — jak je to s ekvivalencí dvou nekonečných množin. O této otázce, jejíž podrobná diskuse přesahuje rámec této knihy, si povíme něco v §§ 5, 6.

Místo výroku, že množiny A, B jsou ekvivalentní, se častěji užívá výroku, že *množiny A, B mají stejnou mohutnost.*

Cvičení

1. Je-li f prosté zobrazení A na B, platí: Je-li $M_z \subset A$ pro $z \in Z$, je $f(\bigcap_{z \in Z} M_z) = \bigcap_{z \in Z} f(M_z)$; je-li $M_1 \subset A$, $M_2 \subset A$, je $f(M_1) \dot{-} f(M_2) = f(M_1 \dot{-} M_2)$; je-li $M \subset A$, je $f_{-1}(f(M)) = M$; je-li $b \in B$, je $f_{-1}((b)) = (f_{-1}(b))$ (viz cvič. 2, 3, 8, 9 v § 3).

2. Budiž f zobrazení A do B. Vyšetřujme zobrazení množiny $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$ a zobrazení množiny $\mathfrak{B}$ do $\mathfrak{A}$, zavedená v cvič. 11, § 3. První z těchto zobrazení je prosté tehdy a jen tehdy, je-li f prosté. Druhé z těchto zobrazení je 1. prosté tehdy a jen tehdy, je-li f zobrazení A na B; 2. je to zobrazení $\mathfrak{B}$ na $\mathfrak{A}$ tehdy a jen tehdy, je-li f prosté.

3. Implikaci v def. 2 lze nahraditi implikací $[x_1 \in A, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow \Rightarrow x_1 = x_2$.

§ 5. Posloupnosti. Spočetné množiny. $\boldsymbol{N}$ značí množinu všech přirozených čísel (viz počátek § 3). Libovolné zobrazení množiny $\boldsymbol{N}$ do libovolné množiny (čili: libovolnou funkci v oboru $\boldsymbol{N}$) nazýváme *nekonečnou posloupností*. Dáti nekonečnou posloupnost znamená tedy, přiřaditi každému přirozenému číslu n jistou věc $f(n)$ (častěji se psává a_n, α_n, b_n, A_n, x_n a pod.), kterou nazýváme n-tým členem posloupnosti. Je-li

$$a_1, a_2, a_3, \dots \tag{6}$$

libovolná nekonečná posloupnost a je-li $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ libovolná rostoucí nekonečná posloupnost přirozených čísel, nazýváme nekonečnou posloupnost

$$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots \quad (n\text{-tý člen } a_{k_n}) \tag{7}$$

posloupností vybranou z posloupnosti (6). Každá posloupnost vybraná z posloupnosti (7) je zřejmě též posloupností vybranou z posloupnosti (6).

Je-li m přirozené číslo, nazýváme každé zobrazení množiny čísel $1, 2, \dots, m$ (do libovolné množiny) *konečnou posloupností* o m členech; taková posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_m$ je tedy dána, je-li každému přirozenému číslu $n \leqq m$ přiřazena jistá věc a_n (n-tý člen). Pokud nebude výslovně řečeno, že připouštím také konečné posloupnosti, bude slovo posloupnost znamenati vždy nekonečnou posloupnost. „Množinou všech členů posloupnosti (6)" rozumím ovšem množinu všech věcí, jež jsou členy této posloupnosti; t. j. věc a je prvkem této množiny tehdy a jen tehdy, existuje-li aspoň jedno $n \in \boldsymbol{N}$ tak, že $a_n = a$. Podobně u konečných posloupností.

Příklad 1. Množina všech členů nekonečné posloupnosti $1, \pi, 1, \pi, 1, \pi, \dots$ je konečná, skládá se ze dvou prvků: $1, \pi$.

Posloupnost (6) se nazývá (v souhlase s definicí 2) prostou, jestliže pro $n \neq k$ je vždy $a_n \neq a_k$ (podobně u konečných posloupností).

Množinám, jež mají stejnou mohutnost jako množina $\boldsymbol{N}$, říkáme *nekonečné spočetné množiny*. Množina M je tedy nekonečná spočetná tehdy a jen tehdy, existuje-li prosté zobrazení množiny $\boldsymbol{N}$ na M, t. j. existuje-li prostá posloupnost (6) tak, že množina všech členů této posloupnosti je právě množina M. Krátce: M je nekonečná spočetná množina tehdy a jen tehdy, lze-li její prvky srovnati v prostou (nekonečnou) posloupnost.

P o z n á m k a 1. Prvky konečné neprázdné množiny o m prvcích lze srovnati v prostou konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_m$ o m členech, nebo též v nekonečnou — ovšem nikoliv prostou — posloupnost, třeba $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, \ldots$

Nekonečným spočetným množinám a konečným množinám (včetně prázdné množiny) říkáme **spočetné množiny**; ostatním množinám říkáme **nespočetné množiny** (existenci nespočetných množin dokážeme v § 6). Spočetné množiny mají mnoho společných vlastností, kterými se odlišují od nespočetných množin.

Mnozí autoři říkají spočetným množinám „nejvýše spočetné“. Názvu „spočetný“ užívají potom jen pro nekonečné spočetné množiny.

Věta 2. *Každá část B spočetné množiny A je spočetná.*

D ů k a z. Věc je zřejmá, když B je konečná. Budiž tedy B a tedy též A nekonečná množina. Existuje tedy prostá posloupnost $a_1, a_2, \ldots$, jejíž členy jsou právě všechny prvky množiny A. Pro některé indexy n bude a_n patřiti do B; nechť to nastává pro indexy $k_1 < k_2 < \ldots$, takže prostá posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ obsahuje právě všechny prvky množiny B. Tedy je B nekonečná spočetná množina.

P ř í k l a d 2. Budiž M množina všech sudých kladných čísel; M je nekonečná a spočetná, neboť $M \subset \mathbf{N}$. Vskutku existuje prosté zobrazení f množiny $\mathbf{N}$ na M: stačí položiti $f(x) = 2x$ pro $x \in \mathbf{N}$ (existují ovšem i jiná taková zobrazení).

Věta 3. *Množina M všech členů libovolné posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ je spočetná.*

P o z n á m k a 2. Kdyby byla tato posloupnost prostá, byla by ovšem M spočetná (nekonečná) podle definice; ale $a_1, a_2, \ldots$ nemusí býti prostá posloupnost.

D ů k a z. Je-li M konečná množina, je tvrzení zřejmé. Budiž tedy M nekonečná. Definujme posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ takto: $k_1 = 1$; k_2 budiž nejmenší přirozené číslo n, pro něž jest $a_n \neq a_{k_1}$; k_3 budiž nejmenší přirozené číslo n, pro něž je současně $a_n \neq a_{k_1}$, $a_n \neq a_{k_2}$ atd. Posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$ je zřejmě p r o s t á posloupnost, skládající se právě ze všech prvků množiny M. Tedy je M nekonečná spočetná množina.

Věta 4. *Budiž f libovolné zobrazení spočetné množiny A na množinu B* (nemusí býti prosté). *Potom je B spočetná.*

Důkaz. I. Je-li A konečná, je též B konečná. II. Je-li A spočetná nekonečná, lze prvky množiny A srovnati v prostou posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ Množina B je pak zřejmě množina všech členů posloupnosti $f(a_1), f(a_2), \ldots$; tedy je B spočetná podle věty 3.

Věta 5. *Budiž $Z \neq \emptyset$ spočetná množina; každému prvku $z \in Z$ budiž přiřazena spočetná množina $A(z)$. Potom je $V = \bigcup_{z \in Z} A(z)$ spočetná množina.*

Pamatujme si tuto důležitou větu pod heslem: sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina.

Důkaz. I. Je-li $A(z) = \emptyset$ pro všechna $z \in Z$, je $V = \emptyset$ a tvrzení platí. II. Budiž tedy $A(z) \neq \emptyset$ aspoň pro jeden prvek $z \in Z$. Budiž Y množina oněch $z \in Z$, pro něž je $A(z) \neq \emptyset$; tedy je $Y \neq \emptyset$, $Y \subset Z$, takže Y je spočetná podle věty 2; zřejmě je $V = \bigcup_{z \in Y} A(z)$ (vynechali jsme jenom „prázdné sčítance"). Prvky množiny Y lze srovnati v konečnou nebo nekonečnou prostou posloupnost $z_1, z_2, \ldots$; klademe-li tedy pro zkrácení $A(z_n) = B_n$, je $V = \bigcup_{n=1}^{m} B_n$ nebo $V = \bigcup_{n=1}^{m} B_n$; v posledním případě definujme $B_n = B_m$ pro všechna $n > m$. Potom je v každém případě $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; při tom je B_n (pro každé $n \in \mathbf{N}$) neprázdná spočetná množina (po případě konečná); prvky množiny B_n lze tedy srovnati (viz poznámku 1) v posloupnost (obecně ne prostou) $c_{n1}, c_{n2}, c_{n3}, \ldots$ Množina V je právě množina všech prvků, vystupujících ve schematu

$$\begin{array}{l} c_{11}, c_{12}, c_{13}, \ldots \\ c_{21}, c_{22}, c_{23}, \ldots \\ c_{31}, c_{32}, c_{33}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

ale všechny tyto prvky lze srovnati „podle úhlopříčky" v posloupnost (obecně ne prostou)

$$c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{31}, c_{22}, c_{13}, c_{41}, c_{32}, c_{23}, c_{14}, c_{51}, \ldots$$

Zřejmě je V množina všech členů této posloupnosti; tedy je spočetná podle věty 3.

Příklad 3. *Množina $\mathbf{P}$ všech racionálních čísel je spočetná* (výsledek pro názor překvapující). Důkaz. Každé racionální číslo lze jedním a jen jedním způsobem psáti ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá, nesoudělná, $q > 0$. Číslo Max $(|p|, q)$ nazveme „výškou" čísla $\frac{p}{q}$. Budiž A_n množina všech racionálních čísel, jež mají výšku nejvýše rovnou číslu n ($n > 0$); zřejmě je A_n konečná (má nejvýše $n(2n + 1)$ prvků) a $\mathbf{P} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; podle věty 5 je tedy $\mathbf{P}$ spočetná.

Příklad 4. Budiž A spočetná množina, n přirozené číslo. Budiž A_n množina všech konečných posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (o n členech), pro něž je $x_1 \in A$, $x_2 \in A, \ldots, x_n \in A$. Potom je A_n spočetná. Důkaz. Zřejmě je A_1 spočetná. Budiž již dokázáno, že A_{n-1} je spočetná; pro každé $x \in A$ budiž $M(x)$ množina všech konečných posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x]$, kde $x_j \in A$ pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Množina $M(x)$ je zřejmě spočetná, ježto $M(x) \sim A_{n-1}$; podle věty 5 je tedy spočetná i množina $A_n = \bigcup\limits_{x \in A} M(x)$.

Příklad 5. Budiž n přirozené číslo; potom je množina všech konečných n-členných posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ s racionálními x_j spočetná. Důkaz: plyne z příkl. 3, 4 pro $A = \mathbf{P}$.

Věta 6. *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou část.*

Důkaz. Budiž A nekonečná množina; zvolme prvek $a_1 \in A$; množina $A \dot{-} (a_1)$ je opět nekonečná (kdyby byla $A \dot{-} (a_1)$ konečná, byla by zřejmě i A konečná). Zvolme prvek $a_2 \in A \dot{-} (a_1)$; množina $A \dot{-} ((a_1) \cup (a_2))$ je opět nekonečná; zvolme $a_3 \in A \dot{-} ((a_1) \cup (a_2))$ atd.; obecně zvolíme prvek a_n v množině

$$A \dot{-} ((a_1) \cup (a_2) \cup \ldots \cup (a_{n-1})) \tag{8}$$

(která je zřejmě nekonečná). Tím dostáváme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prvků množiny A, jež je zřejmě prostá (pro každé přirozené n je totiž

a_n různé ode všech předcházejících členů $a_1, \ldots, a_{n-1}$, neboť a_n je prvkem množiny (8)). Množina všech členů posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ je tedy vskutku nekonečná spočetná část množiny A.

Poznámka 3. Důkaz věty 6, ač velmi jednoduchý, liší se přece zásadně od důkazů, jež jsme dosud prováděli: z množiny A jsme napřed vybrali prvek a_1[21]) potom jsme vybrali další prvek a_2[21]) různý od a_1 (t. j. ležící v množině $A \dot{-} (a_1)$), potom další prvek a_3[21]) různý od a_1, a_2 atd., takže jsme provedli vlastně celou posloupnost takových výběrů.

Úvah tohoto druhu se užívalo nevědomky již dávno, ale teprve poměrně pozdě se vyjasnilo, že přípustnost těchto úvah spočívá na tom, zda připustíme tento t. zv. **axiom výběru**: Je-li $\mathfrak{A}$ nějaká množina neprázdných množin, potom existuje zobrazení f (s oborem $\mathfrak{A}$), které každému prvku z $\mathfrak{A}$, t. j. každé množině $A \in \mathfrak{A}$, přiřazuje jistý prvek množiny A. Jinak řečeno: $f(A) \in A$ pro každé $A \in \mathfrak{A}$.[22]) Připustíme-li existenci takového zobrazení, nabude již náš důkaz věty 6 obvyklého charakteru: Budiž A nekonečná množina, budiž $\mathfrak{A}$ množina všech neprázdných částí množiny A. Podle axiomu výběru existuje zobrazení f, které každé neprázdné množině $M \subset A$ přiřazuje prvek $f(M) \in \in M$. Položme nyní $a_1 = f(A)$, $A_1 = A \dot{-} (a_1)$, dále $a_2 = f(A_1)$, $A_2 = = A_1 \dot{-} (a_2)$, dále $a_3 = f(A_2)$, $A_3 = A_2 \dot{-} (a_3)$; obecně, když prvky $a_1, \ldots, a_n$ a nekonečné množiny $A_1, \ldots, A_n$ (obsažené v A) byly již definovány, položme $a_{n+1} = f(A_n)$, $A_{n+1} = A_n \dot{-} (a_{n+1})$. Tím je definována jednoznačně (úplnou indukcí) prostá posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ prvků z A a důkaz je hotov. Postup se liší od dřívějšího důkazu jen tím, že nyní je jednoznačně stanoven postup, jak určiti $a_1, a_2, a_3, \ldots$, což je právě podstatný rozdíl.

Axiom výběru je ovšem zbytečný v těch případech, kdy příslušné zobrazení f dovedeme definovati nebo aspoň jeho existenci dokázati: potom není nutno jeho existenci předpokládati. Pro tento „nekon-

[21]) Při tom (a to je podstatné pro zvláštní charakter tohoto důkazu) nebyl dán žádný předpis, který by jednoznačně určoval, jak tento výběr máme provésti, t. j. který prvek máme zvoliti.

[22]) Hilbert ve svých populárních přednáškách to říkal takto: Představte si ty množiny A jako spolky, A nyní každý z těchto spolků zvolí (vybere) ze svého středu předsedu (spolek A volí předsedu, kterého ovšem označíme $f(A)$). Vidíte, že tento axiom vypadá velmi přijatelně.

struktivní“ charakter někteří matematikové odmítali používati axiomu výběru — ale je vidět již z věty 6, že by prostým zákazem tohoto axiomu byla matematika ochuzena o mnoho důležitých partií. Není proto divu, že se okolo axiomu výběru rozvinuly živé diskuse, které byly jedním z podnětů ke vzniku moderních zkoumání základů matematiky.

Dokážeme ještě jednu větu a probereme jeden příklad, jejichž obsah lze vysloviti takto: mohutnost nekonečné množiny se nezmění přidáním spočetné množiny; mohutnost nespočetné množiny se nezmění ubráním spočetné množiny (že druhá z těchto vět není bezobsažná, zjistíme v § 6, v němž dokážeme existenci nespočetných množin).

Věta 7. *Je-li A nekonečná, B spočetná množina, je $A \cup B \sim A$.*

Důkaz. Jest $A \cup B = A \cup (B \dot{-} A)$, kde sjednocení vpravo je disjunktní; podle věty 2 je $B \dot{-} A$ spočetná. Podle věty 6 existuje nekonečná spočetná množina $C \subset A$, takže $A = (A \dot{-} C) \cup C$, $A \cup B = (A \dot{-} C) \cup C \cup (B \dot{-} A)$, kde sjednocení v obou rovnicích vpravo jsou disjunktní. Množina $C \cup (B \dot{-} A)$ je nekonečná a podle věty 5 spočetná; existuje tedy prosté zobrazení množiny C na $C \cup \cup (B \dot{-} A)$. Přiřadím-li ještě každý prvek množiny $A \dot{-} C$ sám sobě, dostanu prosté zobrazení množiny $(A \dot{-} C) \cup C$ na $(A \dot{-} C) \cup C \cup \cup (B \dot{-} A)$, čímž důkaz proveden.

Příklad 6. *Je-li A nespočetná, C spočetná, jest $A \dot{-} C \sim A$.* Důkaz. $A = (A \dot{-} C) \cup AC$; množina AC jest spočetná, tedy je $A \dot{-} C$ nekonečná, ba dokonce nespočetná (jinak by byla množina $A = = (A \dot{-} C) \cup AC$ spočetná podle věty 5). Z věty 7 plyne pak hledaný výsledek.

Cvičení

1. Podle příkl. 3 lze všechna racionální čísla srovnati v prostou posloupnost. Proveďte to třeba tak, že srovnáte racionální čísla podle „výšky“ a čísla téže výšky podle velikosti, čímž dostanete posloupnost $-1, 0, 1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ Na kolikátém místě této posloupnosti stojí číslo $-\frac{5}{6}$? Který je třicátý člen této posloupnosti?

2. Buďte $A_1, A_2, \ldots$ spočetné množiny. Budiž B_n množina všech posloupností $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o n členech, kde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Dokažte, že množina $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ je spočetná.

3. V předešlém příkladě klaďte $A_1 = A_2 = \ldots = \mathbf{P}$ a proveďte skutečně nějaké uspořádání prvků množiny M v prostou posloupnost (podobně jako jste to v cvič. 1 provedli pro množinu $\mathbf{P}$).

4. Je-li n přirozené číslo a jsou-li $a_0, a_1, \ldots, a_n$ komplexní čísla ($a_0 \neq 0$), má rovnice $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ nejvýše n různých komplexních kořenů, t. j. existuje nejvýše n různých komplexních čísel x, pro něž tato rovnice platí. Návod: ověřte si, že důkaz podaný v **DI**, kap. V, § 2 platí i v oboru komplexních čísel.

5. Komplexní číslo x se nazývá *algebraickým*, existuje-li přirozené číslo n a celá čísla $a_0, a_1 \ldots, a_n (a_0 \neq 0)$ tak, že platí rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0\,;$$

číslo $\operatorname{Max}(n, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$ nazveme třeba výškou této rovnice. Počet algebraických čísel, jež vyhovují nějaké (aspoň jedné) rovnici výšky k, je nejvýše roven $k \,.\, k \,.\, (2k + 1)^{k+1}$ (viz cvič. 4); z toho ihned obdržíte, že množina všech algebraických čísel je spočetná.

6. Všechny (jednorozměrné) intervaly mají stejnou mohutnost. Návod: jest $(0, 1) \sim (0, 1\rangle \sim \langle 0, 1) \sim \langle 0, 1\rangle$ podle věty 7. Funkce $(d - c)\,x + c$ ($c < d$) zobrazuje tyto čtyři intervaly prostě na intervaly o krajních bodech c, d, čímž omezené intervaly jsou odbyty. Funkce $\operatorname{arctg} x$ dává pak prosté zobrazení každého (i neomezeného) intervalu na omezený interval.

§ 6. Nespočetné množiny. V celém tomto paragrafu budiž $\mathfrak{M}$ množina všech nekonečných posloupností přirozených čísel, t. j. množina všech posloupností tvaru

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad (a_n \in \mathbf{N} \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N})\,. \tag{9}$$

Věta 8. *Množina $\mathfrak{M}$ je nespočetná* (tím bude dokázána existence nespočetné množiny).

Důkaz. Kdyby $\mathfrak{M}$ byla spočetná, daly by se prvky množiny $\mathfrak{M}$ srovnati v posloupnost[23])

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \quad (A_n \in \mathfrak{M} \text{ pro každé } n \in \mathbf{N})\,, \tag{10}$$

[23]) To by bylo možné, i kdyby $\mathfrak{M}$ byla konečná (viz § 5, poznámka 1) — ovšem by potom posloupnost (10) nemohla býti prostá, na čemž však nezáleží; ostatně je zřejmé, že $\mathfrak{M}$ je nekonečná.

kde pro každé $n \in \mathbf{N}$ je A_n nějaká posloupnost přirozených čísel:

$$\begin{array}{llr} A_1\colon & a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots & \\ A_2\colon & a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots & (a_{kl} \in \mathbf{N}) \\ A_3\colon & a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots & \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \tag{11}$$

Dokážeme nyní, že to není možno, t. j. dokážeme, že posloupnost tvaru (10) nemůže obsahovati všechny prvky množiny $\mathfrak{M}$. To dokážeme tím, že sestrojíme tuto posloupnost přirozených čísel

$$A\colon\quad a_{11} + 1,\ a_{22} + 1,\ a_{33} + 1, \ldots, a_{nn} + 1, \ldots \tag{12}$$

Jest $A \in \mathfrak{M}$, není však $A = A_1$, ježto $a_{11} + 1 \neq a_{11}$; není $A = A_2$, ježto $a_{22} + 1 \neq a_{22}$; obecně: není $A = A_n$ pro žádné přirozené n, ježto $a_{nn} + 1 \neq a_{nn}$. Tedy posloupnost (10) neobsahuje všechny prvky množiny $\mathfrak{M}$, ježto se v ní nevyskytuje prvek A.

Poznámka 1. Základní myšlenka tohoto důkazu (t. zv. diagonální princip) je velmi důležitá a často se vyskytuje v theorii množin: ve schematu (11) jsme vzali členy v „úhlopříčně" $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$, ty jsme jistým způsobem pozměnili; z těchto pozměněných členů jsme pak sestrojili posloupnost, různou ode *všech* posloupností $A_1, A_2, A_3, \ldots$

V **DI**, kap. IV, § 5 jsme mluvili o nekonečných desetinných zlomcích. Zde si tyto úvahy poněkud zobecníme. Budiž dáno libovolné celé číslo $g > 1$. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots$, celá čísla, $0 \leqq a_n \leqq g - 1$, je nekonečná řada

$$\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \ldots + \frac{a_n}{g^n} + \ldots \tag{13}$$

konvergentní a má součet nezáporný, nejvýše rovný 1. To plyne ihned srovnáním s geometrickou řadou

$$\frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \frac{g-1}{g^3} + \ldots = 1\,.$$

Řadu (13) (t. zv. *nekonečný g-adický zlomek*) označíme symbolem

$$0{,}a_1a_2a_3 \ldots \tag{14}$$

Běžný je vám případ $g = 10$; v symbolu (14) musíme ovšem vědět, o které číslo g jde. Položme ještě pro stručnost $g - 1 = h$ (toto číslo hraje touž roli jako devítka u desetinných zlomků). Součet řady (13) se nazývá též hodnotou nekonečného zlomku (14). Platí pak tato

Věta 9. *I. Každý nekonečný g-adický zlomek* (13) *neboli* (14) *je konvergentní řada; její součet je* 0 *pro* $a_1 = a_2 = \ldots = 0$; *její součet je* 1 *pro* $a_1 = a_2 = \ldots = h$ $(h = g - 1)$; *ve všech ostatních případech je součet kladný a menší než* 1.

II. Dva různé nekonečné zlomky mají stejnou hodnotu tehdy a jen tehdy, má-li jeden z nich tvar $0{,}a_1 \ldots a_{k-1}a_k000 \ldots$ *a druhý* $0{,}a_1 \ldots a_{k-1}(a_k - 1)\, hhh \ldots$, *kde* $k > 0$, $a_k > 0$.

IIIa. Každé číslo s, kde $0 \leqq s < 1$, *lze vyjádřiti jedním (a podle II jen jedním) zlomkem* (14) *takovým, že pro nekonečně mnoho hodnot n je* $a_n \neq h$.

IIIb. Každé číslo s, kde $0 < s \leqq 1$, *lze vyjádřiti jedním (a podle II jen jedním) zlomkem* (14) *takovým, že pro nekonečně mnoho hodnot n je* $a_n \neq 0$.

Důkaz tvrzení I, II, IIIa byl proveden v **DI** u věty 94 pro $g = 10$ (a tedy $h = 9$). Čtenář snadno zjistí, že methoda důkazu je použitelná i pro obecné g. Tvrzení IIIb je jasné pro $s = 1$ (viz tvrzení I) a pro $0 < s < 1$ plyne takto: podle IIIa lze s vyjádřiti zlomkem (14). Kdyby vyšel nežádoucí tvar $0{,}a_1 \ldots a_k000 \ldots$, mohli bychom jej podle II nahraditi zlomkem $0{,}a_1 \ldots a_{k-1}(a_k - 1)\, hhh \ldots$

Poznámka 2. Pro nás budou nejdůležitější zlomky dyadické ($g = 2$) a triadické ($g = 3$). Tedy speciálně (pro $g = 2$) lze každé číslo s $(0 < s \leqq 1)$ vyjádřiti právě jedním způsobem ve tvaru

$$s = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots, \tag{15}$$

kde $a_1, a_2, \ldots$ jsou nuly nebo jedničky, při čemž pro nekonečně mnoho hodnot n je $a_n = 1$; naopak, každé číslo s, definované takovou řadou, leží v intervalu $(0, 1\rangle$. Vynecháme-li v řadě (15) nulové členy, můžeme též psáti $s = 2^{-n_1} + 2^{-n_2} + 2^{-n_3} + \ldots$, kde $n_1 < n_2 < \ldots$ je nekonečná posloupnost přirozených čísel. Píšeme-li zde konečně $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2 - n_1$, $m_3 = n_3 - n_2, \ldots$ (takže $n_1 = m_1$, $n_2 = m_1 + m_2$, $n_3 = m_1 + m_2 + m_3, \ldots$), můžeme (15) psáti ve tvaru

$$s = 2^{-m_1} + 2^{-m_1-m_2} + 2^{-m_1-m_2-m_3} + \ldots, \tag{16}$$

kde $m_1, m_2, \ldots$ je libovolná nekonečná posloupnost přirozených čísel, při čemž různým posloupnostem odpovídají různá čísla s. Tedy máme tento výsledek:

Věta 10 (pomocná). *Přiřadíme-li každé posloupnosti přirozených čísel*

$$m_1, m_2, m_3, \ldots \tag{17}$$

číslo s rovnicí (16), *obdržíme prosté zobrazení množiny $\mathfrak{M}$ na interval* $(0, 1\rangle$.

Z toho plyne ihned (viz větu 8)

Věta 11. *Jest $\mathfrak{M} \sim (0, 1\rangle$, takže interval $(0, 1\rangle$ je nespočetná množina.*

Poznámka 3. Podle cvičení 6 v § 5 mají tedy všechny intervaly (jednorozměrné) touž mohutnost jako množina $\mathfrak{M}$. Mezi těmito intervaly je též množina $E_1 = (-\infty, +\infty)$, které se někdy říká číselné kontinuum (názvu kontinuum se užívá také v jiném smyslu, viz kap. VI, § 18, pozn. [106a]). Proto se o každé množině, jež má stejnou mohutnost jako $\mathfrak{M}$ (t. j. jako E_1), říká, že má *mohutnost kontinua.*

Věta 12. *Množina A všech uspořádaných dvojic $[y, z]$, pro něž je $0 < y \leqq 1$, $0 < z \leqq 1$, má stejnou mohutnost jako množina B všech čísel x, pro něž je $0 < x \leqq 1$.* Názorněji: body jednotkového čtverce A lze vzájemně jednoznačně přiřaditi bodům jednotkové úsečky B — výsledek na první pohled dosti překvapující.

Důkaz. Podle věty 10 je každému číslu $x \in B$ vzájemně jednoznačně přiřazena posloupnost přirozených čísel $m_1, m_2, m_3, \ldots$ rovnicí $x = 2^{-m_1} + 2^{-m_1-m_2} + 2^{-m_1-m_2-m_3} + \ldots$ Číslu x přiřaďme dvojici $[y, z]$ takto: $y = 2^{-m_1} + 2^{-m_1-m_3} + 2^{-m_1-m_3-m_5} + \ldots$; $z = 2^{-m_2} + 2^{-m_2-m_4} + 2^{-m_2-m_4-m_6} + \ldots$; t. j. za y vezmeme číslo, přiřazené posloupnosti $m_1, m_3, m_5, \ldots$, za z číslo, přiřazené posloupnosti $m_2, m_4, m_6, \ldots$ Tím dostáváme zřejmě prosté zobrazení B na A; neboť jsou-li číslům y, z přiřazeny posloupnosti $p_1, p_2, p_3, \ldots$; $q_1, q_2, q_3, \ldots$, je bod $[y, z]$ obrazem jednoho a jen jednoho čísla $x \in B$, totiž onoho čísla, jemuž je přiřazena posloupnost $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, \ldots$

Poznámka 4. Konečné množiny mají nekonečně mnoho různých mohutností, podle toho, z kolika prvků se skládají.[24]) U nekonečných

[24]) Vědecky založené odvození základních vlastností konečných množin najde čtenář v knížce B. Pospíšila, Nekonečno v matematice, Praha 1949.

množin jsme dosud poznali dvě různé mohutnosti: existují nekonečné množiny spočetné (na př. **N** nebo **P**) a existují množiny mohutnosti kontinua, na př. množina $\mathbf{E}_1$. Není dosud známo, existuje-li nějaká množina reálných čísel (t. j. nějaká část množiny $\mathbf{E}_1$), jež není ani spočetná ani nemá mohutnost kontinua (to je t. zv. *problém kontinua*). Snadno však sestrojíme množinu F, jejíž prvky nejsou reálná čísla (takže není $F \subset \mathbf{E}_1$) a která není ani spočetná ani nemá mohutnost kontinua; viz následující příklad.

Příklad 1. Budiž F množina všech konečných reálných funkcí v oboru $\mathbf{E}_1$.[25] Tvrdím, že F není ani spočetná ani nemá mohutnost kontinua. Důkaz. I. Označme — pro libovolné $a \in \mathbf{E}_1$ — znakem φ_a „konstantní" funkci, která má pro všechna $x \in \mathbf{E}_1$ hodnotu a, t. j. $\varphi_a(x) = a$ pro všechna $x \in \mathbf{E}_1$. Přiřadíme-li každému $a \in \mathbf{E}_1$ funkci φ_a, vidíme, že množina Φ všech těchto funkcí φ_a má mohutnost kontinua. Ježto F obsahuje nespočetnou část Φ, není F spočetná (věta 2). II. Kdyby měla F mohutnost kontinua, existovalo by zobrazení χ množiny $\mathbf{E}_1$ na množinu F (dokonce prosté). Obraz čísla a označme f_a.[26] Odtud odvodíme „diagonálním postupem" spor. Definujme funkci f takto: pro každé $x \in \mathbf{E}_1$ položme $f(x) = f_x(x) + 1$. Zřejmě je $f \in F$, funkce f není však totožná s žádnou funkcí f_a, neboť pro $x = a$ dostáváme $f(a) = f_a(a) + 1 \neq f_a(a)$. Zobrazení χ nezobrazuje tedy žádné číslo $a \in \mathbf{E}_1$ na funkci $f \in F$, takže χ není zobrazením množiny $\mathbf{E}_1$ na množinu F. To je hledaný spor.

Cvičení

1. Budiž n přirozené číslo. Množina A všech konečných posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou libovolná čísla intervalu $(0, 1\rangle$, má mohutnost kontinua (případ $n = 2$ byl vyřešen ve větě 12).

2. Budiž n přirozené číslo; buďte dány intervaly $J_1, J_2, \ldots, J_n$ (jakéhokoliv druhu, třeba i neomezené). Budiž B množina všech konečných posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde $x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n$. Potom má B mohutnost kontinua. Návod: každý interval J_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) lze prostě zobraziti na $(0, 1\rangle$ (§ 5, cvič. 6). Tím se B zobrazí prostě na množinu A z cvič. 1.

[25]) T. j. množina všech zobrazení množiny $\mathbf{E}_1$ do $\mathbf{E}_1$.

[26]) f_a je tedy konečná reálná funkce v oboru $\mathbf{E}_1$; její hodnota v bodě $x \in \mathbf{E}_1$ je $f_a(x)$.

3. Komplexní číslo, které není algebraické (viz cvič. 5 z § 5), se nazývá *transcendentní*. Dokažte: množina všech komplexních čísel, množina všech komplexních čísel iracionálních,[27]) množina všech komplexních čísel transcendentních, množina všech reálných čísel iracionálních, množina všech reálných čísel transcendentních mají vesměs mohutnost kontinua. Tedy existují transcendentní čísla, dokonce reálná transcendentní čísla. Dá se dokázati, že čísla e, π jsou transcendentní; důkazy však nepodávám.

4. Množina všech posloupností $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kde $x_1, x_2, \ldots$ jsou libovolná čísla intervalu $(0, 1\rangle$, má mohutnost kontinua. Návod: dáti takové číslo x_k znamená, dáti posloupnost $m_{k1}, m_{k2}, \ldots$ přirozených čísel (viz větu 10); dáti posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ znamená tedy dáti schema

$$\begin{array}{c} m_{11}, m_{12}, \ldots \\ m_{21}, m_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

toto schema lze však převésti jako v důkazu věty 5 na posloupnost, čímž dostaneme ekvivalenci s množinou $\mathfrak{M}$.

5. Množina všech konečných reálných funkcí v oboru **P** má mohutnost kontinua (srovnejte s příkl. 1). Návod: ježto lze interval $(-\infty, +\infty)$ prostě zobrazit na $(0, 1\rangle$, stačí se omezit na funkce, jejichž hodnoty leží v intervalu $(0, 1\rangle$. Ježto **P** je nekonečná spočetná, znamená dáti takovou funkci totéž jako dáti posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ z cvič. 4.

6. Budiž A libovolná množina; budiž $\mathfrak{A}$ systém všech částí množiny A. $\mathfrak{A}$ obsahuje část ekvivalentní s A (stačí vzíti systém všech množin (a) o jediném prvku $a \in A$). Ale není $\mathfrak{A} \sim A$. Návod: Případ $A = \emptyset$ je zřejmý. Pro $A \neq \emptyset$ užijeme diagonálního principu. Je-li každému $a \in A$ přiřazena množina $M_a \subset A$, definujme množinu $M \subset A$ takto: je-li $a \in A$, budiž $a \in M$ tehdy a jen tehdy, je-li a non $\in M_a$. Množina M je tedy různá ode všech množin M_a.

§ 7. Rozklad množiny na třídy. Budiž dána množina $M \neq \emptyset$. Množina M budiž vyjádřena jako sjednocení nějakých svých neprázdných podmnožin, z nichž žádné dvě (pokud jsou různé) nemají společných prvků. Jinak řečeno, budiž $M = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$, kde kterékoliv dvě různé množiny z $\mathfrak{A}$ jsou disjunktní. Ještě jinak: každý prvek z M leží v jedné a jen jedné z těch množin A (při tom $A \subset M$). Říkáme pak, že je dán *rozklad množiny M na* **třídy** (těmi třídami rozumím právě jednotlivé

[27]) Iracionálním nazýváme každé číslo komplexní, jež není racionální, t. j. nepatří do množiny **P**. Speciálně je tedy iracionální každé komplexní číslo, jež není reálné.

množiny A). Příklad: M budiž množina všech obyvatel jistého města. Jeden rozklad na (nejvýše dvě) třídy dostanu tak, že muže počítám do jedné třídy, ženy do druhé. Jiný rozklad podle roku narození: do téže třídy dám vždy všechny osoby, narozené v témže roce. Nebo rozdělím na třídy podle povolání (to ovšem jde jen tehdy, má-li každá osoba nějaké povolání, a to jen jedno — v praxi by tedy toto rozdělení vyžadovalo korektury).

Je-li množina M rozložena na třídy, můžeme mezi jejími prvky definovati jistý vztah, který nazveme **ekvivalencí** (vytvořenou tím rozkladem): Budeme říkat, že prvek $a \in M$ je ekvivalentní[28]) prvku $b \in M$ (znak $a \sim b$), jestliže b patří do téže třídy jako a. Je zřejmé, že tato ekvivalence má tyto vlastnosti:

1. Pro každé $a \in M$ je $a \sim a$.
2. Je-li $a \sim b$, je $b \sim a$ a je $a \in M$, $b \in M$.[29])
3. Je-li $a \sim b$, $b \sim c$, je $a \sim c$.

Vyjděme nyní naopak od libovolného vztahu $\sim$, který má vlastnosti 1, 2, 3; takovému vztahu budeme říkati ekvivalence (v množině M).[30]) Tvrdím, že existuje rozklad množiny M, kterým tato ekvivalence je vytvořena (ve smyslu dříve popsaném). Důkaz: Pro libovolný prvek $a \in M$ budiž M_a množina všech $x \in M$, pro něž $a \sim x$. Tvrdím: Je-li $M_aM_b \neq \emptyset$, je $M_a = M_b$. Neboť existuje-li $c \in M_aM_b$, potom pro každé $x \in M_b$ je $b \sim x$, $b \sim c$, $a \sim c$ a tedy podle 2, 3 je $a \sim x$, t. j. $x \in M_a$. Podobně z $x \in M_a$ plyne $x \in M_b$. Tedy: dvě množiny M_a, M_b, které *nejsou* stejné, jsou disjunktní. Budiž $\mathfrak{A}$ množina všech částí množiny M, které jsou rovny některému M_a.[31]) Ježto podle vlastnosti 1 je $a \in M_a$, leží každý bod $a \in M$ v některé množině $A \in \mathfrak{A}$, a to jen v jedné (ježto $M_x \neq M_y \Rightarrow M_xM_y = \emptyset$). Tedy množiny $A \in \mathfrak{A}$ tvoří rozklad množiny M na třídy a zřejmě leží a, b v téže třídě tehdy a jen tehdy, je-li $a \sim b$ (neboť z $a \in M_x$, $b \in M_x$ plyne $x \sim a$, $x \sim b$, $a \sim b$; naopak z $a \sim b$ plyne $b \in M_a$ a podle 1 je též $a \in M_a$).

[28]) Prozatím nemyslete při tom na pojem z § 4; viz však dále cvič. 4.
[29]) T. j. ekvivalence se netýká vůbec prvků, neležících v M.
[30]) Komu je zde něco nejasné, nechť si prohlédne ihned cvič. 1.
[31]) Podrobně: $A \in \mathfrak{A}$ znamená, že existuje $a \in M$ tak, že je $A = M_a$.

Cvičení

1. Ekvivalenci v množině M lze definovati také takto: Budiž N nějaká množina dvojic $[a, b]$ ($a \in M$, $b \in M$), která má tyto tři vlastnosti: I. $a \in M \Rightarrow [a, a] \in N$; II. $[a, b] \in N \Rightarrow [b, a] \in N$; III. je-li $[a, b] \in N$, $[b, c] \in N$, je $[a, c] \in N$. Položíme-li $a \sim b$ tehdy a jen tehdy, je-li $[a, b] \in N$, je tato definice rovnocenná s definicí pomocí vlastností 1, 2, 3 v textu.

2. Budiž m přirozené číslo. Budiž M množina všech celých čísel. Pišme $a \sim b$ tehdy a jen tehdy, je-li $a - b$ dělitelno číslem m. Dokažte, že tento vztah je vskutku ekvivalencí v M, při které se M rozpadá na m tříd. Místo $a \sim b$ je zvykem psáti $a \equiv b \pmod{m}$.

3. Budiž $\mathfrak{M}$ množina všech množin reálných čísel. Je-li $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ (t. j. $A \subset \mathbf{E}_1$, $B \subset \mathbf{E}_1$), položme $A \sim B$, je-li množina $(B \dot{-} A) \cup (A \dot{-} B)$ (t. j. $(A \cup B) \dot{-} AB$) konečná. Dokažte, že je to ekvivalence v $\mathfrak{M}$, při které všechny konečné množiny reálných čísel tvoří právě jednu třídu.

4. Pojem ekvivalence z § 4 (mohutnost množiny) spadá pod náš pojem z § 7 takto: Budiž M množina, budiž $\mathfrak{M}$ množina všech jejích částí. Pro $A \subset M$, $B \subset M$ pišme $A \sim B$, existuje-li prosté zobrazení A na B. To je ekvivalence v $\mathfrak{M}$.

5. Racionální čísla lze zavésti pomocí celých čísel takto: Sestrojme množinu M všech symbolů $\dfrac{a}{b}$ (a, b celá, $b \neq 0$), kterým budeme říkati „zlomky“. Zavedeme ekvivalenci takto: budeme psáti $\dfrac{a}{b} \sim \dfrac{c}{d}$, je-li $ad = bc$. Přesvědčte se, že to je vskutku ekvivalence. Tím je M rozloženo na třídy; těmto třídám můžeme říkat „racionální čísla“. Na př. třída zlomků $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots, \dfrac{-1}{-2}, \dfrac{-2}{-4}, \ldots$ je racionální číslo. Ježto nás pak již jednotlivé zlomky příliš nezajímají, pojímáme potom různé zlomky téže třídy prostě jako různá označení pro totéž racionální číslo, takže na př. mluvíme o čísle $\frac{3}{6}$ místo o třídě (t. j. o čísle), do níž patří zlomek $\frac{3}{6}$.

§ 8. Kartézské součiny. Již v **DI** jsme zavedli rovinu (a trojrozměrný prostor) jakožto množinu všech uspořádaných dvojic (po příp. trojic) reálných čísel. Je užitečno zobecniti tento postup. Budiž dána konečná posloupnost množin $P_1, \ldots, P_k$ (nemusí být navzájem různé); jejich kartézským součinem

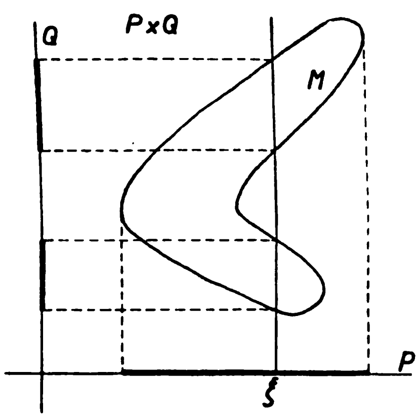
$$P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$$

budeme nazývati množinu všech posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, kde $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$, …, $x_k \in P_k$. Speciálně kartézský součin $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times \ldots$

... $\times$ $\mathbf{E}_1$ (r činitelů) budeme nazývat r-rozměrným (kartézským) prostorem, znak $\mathbf{E}_r$. Podobně budeme značiti $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \ldots \times \mathbf{K} = \mathbf{K}_r$; pro jednotnost označení budeme též psáti $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$. Jednotlivé „body“ z $\mathbf{E}_r$ (po příp. z $\mathbf{K}_r$) jsou tedy posloupnosti $[x_1, \ldots, x_r]$, kde x_i jsou reálná (po příp. komplexní) čísla, t. zv. souřadnice bodu.

Poznámka 1. Zobrazení z A do B lze podle def. 1 interpretovati jako jistou část množiny $A \times B$.[32])

Poznámka 2. Množiny (načrtněte!) $\langle 0, 1\rangle \times \langle 2, 4\rangle$, $\langle 2, 4\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ jsou dva intervaly v $\mathbf{E}_2$, které jsou zřejmě různé (dokonce disjunktní). Kartézský součin není tedy komutativní: nemusí býti $A \times B = B \times A$.



Obr. 1.

Poznámka 3. Budiž $M \subset P \times Q$. Zvolme nějak $\xi \in P$. Množinu všech bodů $y \in Q$, pro něž $[\xi, y] \in M$, označme $M^{\xi,*}$ (na obr. 1 je tato množina silně vytažena na svislé ose). Podobně, zvolíme-li nějak $\eta \in Q$, označme $M^{*,\eta}$ množinu oněch $x \in P$, pro něž $[x, \eta] \in M$. Tedy v symbolech:

$$M^{\xi,*} = \underset{y}{\mathcal{E}}([\xi, y] \in M)\,,$$

$$M^{*,\eta} = \underset{x}{\mathcal{E}}([x, \eta] \in M)\,.$$

Konečně nazveme **projekcí** množiny M do množiny P množinu všech $x \in P$, k nimž existuje

[32]) Pojem uspořádané dvojice $[x_1, x_2]$ je intuitivně každému jasný. Pojímáme-li však tuto dvojici jako dvoučlennou posloupnost, je tato dvojice zobrazením množiny $(1, 2)$ (číslu 1 je přiřazen prvek x_1, číslu 2 prvek x_2). Lze tedy právem namítnouti, že jsme v definici 1 zavedli pojem zobrazení, považujíce již pojem některých zobrazení (t. j. zobrazení s oborem $(1, 2)$) za známý. Tomu je možno se vyhnouti tím, že zavedeme pojem uspořádané dvojice $[a, b]$ ne jako zobrazení, nýbrž jako množinu $((a, b), (a))$. Pro $a \neq b$ se tato množina skládá ze dvou prvků (a), (a, b), pro $a = b$ je ovšem $(a, b) = (a)$, naše dvojice je pak množina o jediném prvku (a), t. j. množina $((a))$. Koho snad tato poznámka mate, nemusí si jí všímat. V dalším budeme pod uspořádanou dvojicí, trojicí, ... rozuměti posloupnost o dvou, třech, ... členech.

aspoň jedno $y \in Q$ tak, že $[x, y] \in M$ (na obr. 1 je tato množina silně vytažena na vodorovné ose).

Budiž nyní f zobrazení množiny M do nějaké množiny. Obraz bodu $[x, y]$ značme $f(x, y)$ (místo složitějšího $f([x, y])$. „Dosadím-li" sem za x určitý bod $\xi \in P$, dostanu „funkci proměnné y", definovanou v $M^{\xi,*}$.[33]) Přesně řečeno: je-li $\xi \in P$, označíme znakem $f^{\xi,*}$ zobrazení s oborem $M^{\xi,*}$, definované rovnicí $f^{\xi,*}(y) = f(\xi, y)$ (pro $y \in M^{\xi,*}$). Podobně definujeme $f^{*,\eta}$ (pro $\eta \in Q$) jakožto zobrazení s oborem $M^{*,\eta}$, definované rovnicí $f^{*,\eta}(x) = f(x, \eta)$.

Poznámka 4. Mějme množinu

(18) $$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r$$

a její část, mající speciální tvar[34])

(19) $$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r \quad (A_j \subset P_j \quad \text{pro} \quad 1 \leqq j \leqq r)\,.$$

Jest $A = \emptyset$ tehdy a jen tehdy, je-li některé $A_j = \emptyset$ (načež na ostatních A_k nezáleží). Avšak platí

Tvrzení 1. Je-li $A \neq \emptyset$ a platí-li vedle (19) také

(20) $$A = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_r \quad (B_j \subset P_j \text{ pro } 1 \leqq j \leqq r)\,,$$

je $A_j = B_j$ pro $j = 1, \ldots, r$ (t. j. existuje jediné vyjádření tvaru (19)).

Trochu obecněji: Tvrzení 2. Je-li $\emptyset \neq A \subset B$ a platí-li (19) a

(21) $$B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_r \quad (B_j \subset P_j \text{ pro } 1 \leqq j \leqq r)\,,$$

je $A_j \subset B_j$ pro $j = 1, \ldots, r$.

Důkaz tvrzení 2. Zvolme j a libovolný prvek $a_j \in A_j$. Ježto $A_k \neq \emptyset$, lze pro každé $k \neq j$ zvoliti prvek $x_k \in A_k$. Potom je

$$[x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_r] \in A_1 \times \ldots \times A_r \subset$$
$$\subset B_1 \times \ldots \times B_r\,.$$

Tedy $a_j \in B_j$. Tedy celkem $a_j \in A_j \Rightarrow a_j \in B_j$, t. j. $A_j \subset B_j$.

[33]) Pro případ $P = Q = \mathsf{E}_1$ („funkce dvou reálných proměnných") jsme to prováděli už v **DI**, kap. XIII, § 1, příkl. 2 a text před ním.

[34]) Nelze ovšem obecně psáti každou množinu $A \subset P$ v tomto tvaru; na př. kružnici $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 = 1) \subset \mathsf{E}_2$ nelze psáti jako kartézský součin dvou množin v E_1.

Důkaz tvrzení 1. Platí-li (19) a (20) a je-li $A \neq \emptyset$, je podle tvrzení 2 $A_j \subset B_j$ a rovněž $B_j \subset A_j$.

Poznámka 5. Pro kartézský součin neplatí zákon komutativní, jak jsme viděli, ale také neplatí zákon asociativní. Jsou-li P, Q, R neprázdné množiny, jsou

$$(P \times Q) \times R, \ P \times Q \times R, \ P \times (Q \times R) \tag{22}$$

tři různé množiny, neboť se skládají po řadě z těchto navzájem různých prvků:

$$[[p, q], r], \ [p, q, r], \ [p, [q, r]] \tag{23}$$

($p \in P$, $q \in Q$, $r \in R$). Na př. $[[p, q], r]$ je dvojice $[s, r]$, kde $s = [p, q]$. Ale je jasno, že rozdíl mezi množinami (22) je jen formální, proto je „ztotožníme" (t. j. ztotožníme vždy každé tři prvky (23)); je téměř na první pohled jasno, že tímto způsobem dojdeme vždy k správným výsledkům. Ale snad bude dobře, když se na to podíváme blíže. Budiž M množina všech prvků (23) (takže každé uspořádané trojici p, q, r odpovídají tři prvky (23) z M); provedu rozklad množiny M na třídy ekvivalentních prvků[35]) tak, že každá třída se skládá ze tří prvků (23). Budiž Z množina všech těchto tříd. Je-li $a \in M$ (takže a má některý z tvarů (23)), označím znakem $\zeta(a)$ třídu (t. j. prvek množiny Z), který obsahuje a. Representantem třídy $z \in Z$ nazvu kterýkoliv ze tří prvků třídy z (a to representantem prvního, druhého nebo třetího druhu, podle toho, kterého ze tří tvarů (23) tento representant jest). Je jasno toto: Jestliže mezi representanty téhož druhu a jejich množinami platí nějaká množinová relace (na př. $a \in A \cap (B \dot{-} C)$ nebo $A \subset B$ nebo $A \neq B$ a pod.), platí táž relace mezi příslušnými třídami a jejich množinami — a rovněž naopak. Jestliže se nyní smluvíme na tom, že symboly (23) budeme pojímati jen jako tři různá označení pro jednu a touž věc, totiž pro třídu, jejímiž prvky tito representanti jsou, znamenají tři znaky (23) vskutku totéž.[36]) Vztahy,

---

[35]) Ve smyslu § 7.

[36]) Takové ztotožnění není čtenáři cizí. Na př. racionální číslo je vlastně třída zlomků, na př. $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots, \frac{-2}{-3}, \frac{-4}{-6}, \ldots$, a přesto mluvíme o čísle $\frac{4}{6}$ a ne o čísle (třídě), do níž patří zlomek $\frac{4}{6}$; píšeme potom $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ a míníme tím, že příslušné třídy jsou totožné; viz cvič. 5 k § 7.

které takto dostaneme, jsou vlastně vztahy mezi prvky a částmi množiny Z; jestliže v nich na př. píši vesměs representanty prvního (nebo vesměs druhého nebo vesměs třetího) druhu, dostanu správné vztahy mezi prvky a částmi množiny $(P \times Q) \times R$ (po příp. $P \times \times Q \times R$, $P \times (Q \times R)$).

K čemu toto ztotožňování je, ukážeme snad nejlépe na příkladě. V prostoru $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1$ vyšetřujme „kvádr" $Q = \langle -1, 1\rangle \times \times \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. V $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1$ budiž K kruh $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 \leqq 1)$; načež $V = K \times \langle 0, 1\rangle$ je „válec" v prostoru $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1) \times \times \mathbf{E}_1$. Budeme říkati, že $V \subset Q$, ačkoliv bychom měli vlastně říci toto: Jestliže každý bod $[[x, y], z] \in V$ nahradíme bodem $[x, y, z]$, dostaneme množinu $V' \subset Q$. Nebo také bychom mohli říci: Jestliže každý bod $[x, y, z] \in Q$ nahradíme bodem $[[x, y], z]$, dostaneme množinu $Q' \supset V$. Čtenář by se v každém případě mohl obejíti bez tohoto ztotožňování (ale doporučuji mu to jen v těch případech, kde mu něco bude nejasné), ovšem za cenu ztráty přehlednosti.

Užívajíce tohoto ztotožňování, budeme psáti na př. $(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1) \times \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1)$, t. j. $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \times \mathbf{E}_2$; podobně $\mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_s \times \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{r+s+t}$ atd. Ve speciálních případech, na př. u prostoru $\mathbf{E}_r$ a jeho částí, můžeme tuto obtíž s asociativností překonati ještě jinak, viz konec úvodu ke kap. VII.

Cvičení

1. V $\mathbf{E}_3$ je $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$ „kvádr" $\underset{[x,y,z]}{\mathcal{E}}(a_1 \leqq x \leqq b_1, a_2 \leqq y \leqq b_2, a_3 \leqq z \leqq b_3)$. Položme $K = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 \leqq 1) \subset \mathbf{E}_2$ (kruh). Množina $V = K \times \langle 0, 1\rangle$ je válec (plný) se základnou K a s výškou 1. Ukažte, že — na rozdíl od I — nelze V vyjádřiti ve tvaru $V = A \times B \times C$, kde $A \subset \mathbf{E}_1$, $B \subset \mathbf{E}_1$, $C \subset \mathbf{E}_1$.[37]) Ukažte, že kouli $M = \underset{[x,y,z]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1)$ nelze vyjádřit v žádném z těchto tvarů: $M = A \times B \times C$ (A, B, C množiny v $\mathbf{E}_1$), $M = A \times B$ ($A \subset \mathbf{E}_1$, $B \subset \mathbf{E}_2$), $M = A \times B$ ($A \subset \mathbf{E}_2$, $B \subset \mathbf{E}_1$). Ukažte též, že válec V nelze vyjádřit ve tvaru $V = A \times B$ ($A \subset \mathbf{E}_1$, $B \subset \mathbf{E}_2$).

[37]) Kdyby to bylo možné, potom by na př. pro každé $z \in C$ byla podmínka $[x, y, z] \in V$ ekvivalentní s podmínkami $x \in A$, $y \in B$. V celém tomto cvičení ovšem ztotožňuji $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1$.

§ 9. **Terminologické poznámky.** Budiž f zobrazení A na B (místo zobrazení lze říci též funkce). Je-li $A \subset \mathbf{E}_r$ (po příp. $A \subset \mathbf{K}_r$), říkáme, že f je funkce r *reálných* (po příp. *komplexních*) proměnných. B může býti při tom množina jakéhokoliv druhu. Přiřadím-li na př. každému reálnému číslu x posloupnost čísel $[x]$, $[2x]$, $[3x]$, ... (při tom $[\alpha]$ značí největší celé číslo, jež není větší než α, viz **DI**, věta 46), sestrojil jsem tím funkci jedné reálné proměnné (ježto $\mathbf{E}_1 \subset \mathbf{K}_1$, smím také říci: jedné komplexní proměnné). Naopak, je-li $B \subset \mathbf{E}_1$ (po příp. $B \subset \mathbf{K}_1$), říkáme, že f je *konečná reálná* (po příp. *konečná komplexní*) funkce. Přitom může A býti jakákoliv množina. Přiřadím-li na př. každé konečné reálné funkci φ v oboru $\langle 0, 1 \rangle$, která je spojitá v $\langle 0, 1 \rangle$, číslo $\int_0^1 \varphi(t)\, dt$, je tím definována konečná reálná funkce. Jejím oborem je množina všech takových funkcí φ. Tyto názvy ovšem kombinujeme: na př. zobrazení z $\mathbf{E}_2$ do $\mathbf{K}_1$ nazýváme konečnou komplexní funkcí dvou reálných proměnných. V následující kapitole přidáme k $\mathbf{E}_1$ ještě buďto dva „nevlastní" prvky $+\infty$, $-\infty$ (množinu $\mathbf{E}_1 \cup (+\infty) \cup (-\infty)$ označíme $\mathbf{E}_1^*$) nebo jeden „nevlastní" prvek ∞[38]) (označíme $\mathbf{E}_1 \cup (\infty) = {}^*\mathbf{E}_1$) a rovněž ke $\mathbf{K}$ přidáme jeden prvek ∞ (znak ${}^*\mathbf{K} = \mathbf{K} \cup (\infty)$). Zobrazení libovolné množiny do $\mathbf{E}_1^*$[39]) nebo do ${}^*\mathbf{E}_1$ nazveme *reálnou funkcí* a zobrazení do ${}^*\mathbf{K}$ nazveme *komplexní funkcí* (vynechávajíce adjektivum „konečná").

U reálných a komplexních funkcí je přirozeno zavésti součet a součin dvou funkcí takto: Znakem $f + g$ rozumíme funkci h takto definovanou: $h(x)$ je definováno tehdy a jen tehdy, jestliže $f(x) + g(x)$ má smysl, načež $h(x) = f(x) + g(x)$.[40]) Podobně pro součin fg (hodnota této funkce v bodě x je $f(x)\, g(x)$, pokud tento symbol má smysl). Ježto zde zřejmě platí komutativní a asociativní zákon, je jasný smysl složitějších výrazů, jako $f_1 f_2 f_3^2 + g_1 g_2 - h^3$ (ovšem $f^2 = f \,.\, f$). Řeknu-li na př., že

[38]) Prvek ∞ zavedeme až v kap. VI, § 4, příklad 2.

[39]) Připouštějí se tedy též hodnoty $f(x) = +\infty$ a $f(x) = -\infty$.

[40]) Prozrazuji napřed: v příští kapitole budeme definovati $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$, je-li a „konečné" (t. j. číslo z $\mathbf{E}_1$) nebo $a = +\infty$; podobně $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$, je-li a konečné nebo $-\infty$. Naproti tomu nebudeme definovati $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$. Tedy: $h(x)$ není definováno v těch bodech, kde je $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$ nebo obráceně.

$$f + g = hk \quad \text{v} \quad M\,,$$

rozumím tím, že je

$$f(x) + g(x) = h(x)\,k(x) \quad \text{pro každé } x \in M\,,$$

neboli že jest $(f + g)_M = (hk)_M$ („parciální funkce“).

Označení, která jsme zavedli, jsou pohodlná v úvahách obecných: funkce je označena určitým symbolem, třeba f (nebo, speciálně, třeba tg), načež obraz prvku x se značí $f(x)$, tg(x) a pod.[41]) Ale při speciálnějších funkcích je toto zdánlivě jednoduché označení těžkopádné. Proto si často dovolíme určité odchylky, licence, ovšem jen tam, kde nehrozí nedorozumění. Na př. „funkce x^2 v oboru E_1“ bude znamenati „funkci f v oboru E_1, definovanou pro každé $x \in E_1$ rovnicí $f(x) = x^2$“. Nebo řekneme-li „dosadím-li $x = 3$ do funkce $f(x, y)$, dostanu funkci $f(3, y)$ proměnné y“, rozumíme tím přechod od funkce f, jejímž oborem je jistá množina A dvojic $[x, y]$, k funkci $f^{3,*}$ s oborem $A^{3,*}$; atd.

§ 10. Moduly (nebo lineární nebo vektorové prostory). Je mnoho množin, v nichž lze přirozeným způsobem zavésti dvě operace: „sčítání“ dvou prvků a „násobení“ prvku reálným, po příp. komplexním číslem.[42])

Vezměme několik příkladů.

Příklad 1. Budiž M množina všech konečných reálných funkcí v oboru $\langle 0, 1\rangle$. Je-li a reálné číslo, definuji součet $f + g = h$ a násobek $af = k$ rovnicemi $h(x) = f(x) + g(x)$, $k(x) = af(x)$.

Příklad 2. Vyšetřujme E (po příp. K_r). Jsou-li $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $y = [y_1, \ldots, y_r]$ dva body, a reálné (po příp. komplexní) číslo, je přirozeno definovati $x + y = [x_1 + y_1, \ldots, x_r + y_r]$, $ax = [ax_1, \ldots, ax_r]$.

Příklad 3. Budiž M množina všech posloupností reálných čísel. Je-li x posloupnost $x_1, x_2, \ldots$, je-li y posloupnost $y_1, y_2, \ldots$ a je-li a reálné číslo, je přirozeno definovati ax jako posloupnost $ax_1, ax_2, \ldots$ a $x + y$ jako posloupnost $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots$

---

[41]) Je ovšem zvykem psáti tg x.

[42]) „Čísla“ $+\infty$, $-\infty$, ∞, o nichž jsem se předběžně zmínil v § 9, zde vylučuji.

Ježto se příklady toho druhu velmi často vyskytují, je vhodno, zavésti tuto definici:

Definice 3. *Budiž M neprázdná množina, ve které každé dvojici prvků $x \in M$, $y \in M$ je přiřazen prvek množiny M, zvaný součtem $x + y$, a ve které dále každému číslu $a \in \mathsf{E}_1$ (po příp. $a \in \mathsf{K}$) a každému prvku $x \in M$ je přiřazen prvek z M, zvaný násobkem ax. Potom množina M, opatřená těmito dvěma operacemi, se nazývá reálným (po příp. komplexním) modulem*[43] *(nebo také lineárním nebo vektorovým prostorem), jestliže jsou pro všechna x, y, w z M a pro všechna a, b z E_1 (po příp. z K) splněny tyto podmínky:*

I. $x + y = y + x$. *II.* $(x + y) + w = x + (y + w)$. *III.* Je-li $x + y = x + w$, je $y = w$. *IV.* $a(x + y) = ax + ay$. *V.* $(a + b)\,x = ax + bx$. *VI.* $a(bx) = (ab)\,x$. *VII.* $1x = x$.

(Pozor! $a + b$, ab jsou obyčejné součty a součiny čísel; $x + y$, ax a pod. jsou operace, zavedené v M, které se sčítáním a násobením čísel nemusí míti nic společného). Je zřejmo, že v příkl. 1—3 byly uvedeny příklady modulů.

Dokažme některé jednoduché vlastnosti modulu M. Pro každé $x \in M$ je[44] $x + 0x = 1x + 0x = (1 + 0)\,x = 1x = x$. Ke každému x existuje tedy prvek $\Theta_x = 0x \in M$ tak, že $x + \Theta_x = x$, a takový prvek je podle III jen jeden (jestliže $x + \xi = x = x + \eta$, je $\xi = \eta$). Tvrdím, že $\Theta_x = \Theta_y$ pro libovolná $x \in M$, $y \in M$. Neboť $x + \Theta_x = x$, tedy $(x + \Theta_x) + y = x + y$, načež užitím I a II plyne $x + (y + \Theta_x) = x + y$, tedy podle III $y + \Theta_x = y$. Ale současně $y + \Theta_y = y$, takže opět podle III je $\Theta_x = \Theta_y$. Prvek $\Theta_x = 0x$ je tedy pro všechna $x \in M$ týž prvek, označme jej Θ („počátek" nebo „nulový prvek", „nula" modulu M). Pro každé $x \in M$ je tedy $x + \Theta = \Theta + x = x$. Později budeme tento prvek označovati často znakem o.

Nyní tvrdím: Jsou-li dány $x \in M$, $z \in M$, existuje právě jedno $\eta \in M$ tak, že $x + \eta = z$; je to prvek $\eta = (-1)\,.\,x + z$. Neboť předně $x + ((-1)\,.\,x + z) = (1\,.\,x + (-1)\,.\,x) + z = 0x + z = \Theta + z = z$. Za druhé: je-li $x + \eta_1 = z = x + \eta_2$, je nutně $\eta_1 = \eta_2$ (podle III).

[43]) Říkává se též obšírněji (a z dobrých důvodů): modul nad tělesem reálných (po příp. komplexních) čísel.

[44]) Užíváme po řadě VII, V, vlastnosti nuly $1 + 0 = 1$, a opět VII.

Zavádí se nyní označení $-x = (-1) \,.\, x$, takže $-(ax) = (-1)(ax) = (-1 \,.\, a)\, x = (-a)\, x$ (užije se VI). Místo $x + (-y)$ se potom píše $x - y$; řešení η rovnice $x + \eta = z$ lze potom psáti $\eta = z + (-1)\, x = z + (-x) = z - x$ a odtud a z komutativního a asociativního zákona plyne, že součty a rozdíly lze psáti obvyklým způsobem; na př.[45])

$$x - 3y + 2z - 5u$$

znamená $x + (-3)\, y + 2z + (-5)\, u$ atd. — tak jak jste zvyklí z aritmetiky.

Cvičení

M budiž modul; označení jako v textu.

1. Je-li $ax = bx$, $a \neq b$, je $x = \Theta$ neboli: je-li $ax = bx$, $x \neq \Theta$, je $a = b$ (rovnici lze „krátit“ libovolným prvkem $x \neq \Theta$). Ovšem $a\Theta = \Theta$ vždy.

2. Je-li $ax = ay$, $a \neq 0$, je $x = y$ (lze „krátit“ libovolným číslem $a \neq 0$). Ovšem $0x = \Theta$ vždy.

[45]) Ježto v součtu $(x + y) + z$ a pod. lze závorky přemístit podle II, nepíší se tyto závorky vůbec.