Kapitola XV

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

§ 1. Zavedení komplexních čísel. Rozšíříme nyní obor reálných čísel, vybudovaný v kap. I, o nová čísla, čímž dospějeme k oboru tzv. komplexních čísel. Věc je vám asi poněkud známa ze školy; proto budu postupovat dosti rychle. Ostatně je přechod od čísel reálných k číslům komplexním, jak uvidíte, nesrovnatelně jednodušší než přechod od čísel racionálních k číslům reálným, provedený v kap. I.

Předmětem našich úvah budou uspořádané dvojice $[a, b]$ reálných čísel; přitom dvojice $[a, 0]$ budiž pouze novým označením pro reálné číslo a, kdežto dvojice $[a, b]$, v nichž $b \neq 0$, budou novým předmětem našich úvah. Dvojice $[a, b]$ budeme nazývat komplexními čísly; číslo a nazýváme reálnou částí, číslo b imaginární částí čísla $[a, b]$. Čísla reálná jsou speciálním případem komplexních čísel: jsou to ona komplexní čísla, jejichž imaginární část se rovná nule. Dvě komplexní čísla $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ jsou si rovna tehdy a jen tehdy, je-li $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$; v tomto případě píšeme $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$; není-li tomu tak, píšeme $[a_1, b_1] \neq [a_2, b_2]$. Komplexní čísla budeme kratčeji označovat též jediným písmenem; v této kapitole budou malá řecká písmena znamenat vždy komplexní čísla, malá latinská písmena budou znamenat reálná čísla — s jedinou výjimkou: *latinské písmeno i nebude značit reálné číslo, nýbrž číslo* $[0, 1]$. (Ježto také každé reálné číslo je komplexním číslem, nevadí, bude-li nějaké reálné číslo — např. kladná čísla ε, δ ve větách 181, 184 — označeno řeckým písmenem.)

Definice 34. *Jsou-li* $\alpha_1 = [a_1, b_1]$, $\alpha_2 = [a_2, b_2]$ *komplexní čísla, nazýváme číslo* $[a_1 + a_2, b_1 + b_2]$ *jejich součtem (znak* $\alpha_1 + \alpha_2$*) a číslo* $[a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1]$ *jejich součinem (znak* $\alpha_1\alpha_2$ *nebo* $\alpha_1 . \alpha_2$*).*

Pro $b_1 = b_2 = 0$ je pojem součtu a součinu podle definice 34 ve shodě s pojmem součtu a součinu reálných čísel; vskutku vychází $[a_1, 0] + [a_2, 0] = [a_1 + a_2, 0]$; $[a_1, 0] . [a_2, 0] = [a_1a_2, 0]$. Pro součet a součin komplexních čísel platí, jak ukážeme, věty 1—10, které platí pro reálná čísla, jak jsme ukázali v kap. I. U vět 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 (zákony komutativní, asociativní, distributivní, přičítání nuly, násobení jedničkou) provedeme důkaz prostým počtem; proveďme to třeba pro větu 6. Máme dokázat, že $(\alpha_1\alpha_2)\,\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$. Levá strana této rovnice je[1])

$$[a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1] . [a_3, b_3] =$$
$$= [a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3,\ a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_2b_1a_3];$$

[1]) Píši stále $\alpha_k = [a_k, b_k]$.

propočtete-li pravou stranu, dostanete totéž. Podrobný důkaz vět 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 mohu zajisté přenechat čtenáři. Dokážeme nyní větu 4: *jsou-li dána* α_1, α_2, *existuje jedno a jen jedno* ξ *tak, že* $\alpha_2 + \xi = \alpha_1$ (znak: $\xi = \alpha_1 - \alpha_2$; místo $0 - \alpha_2$ se píše krátce $-\alpha_2$). Důkaz: rovnice $[a_2, b_2] + [x, y] = [a_1, b_1]$ je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $a_2 + x = a_1$, $b_2 + y = b_1$, tj. $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$ (takže hledané číslo ξ je $\xi = [a_1 - a_2, b_1 - b_2]$). Dále dokážeme větu 10: *jsou-li dána* α_1, α_2 *a je-li* $\alpha_2 \neq 0$, *existuje jedno a jen jedno* $\xi = [x, y]$ *tak, že* $\alpha_2\xi = \alpha_1$ $\left(\text{znak } \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \alpha_1 : \alpha_2\right)$. Důkaz: má být $[a_2, b_2] . [x, y] = [a_1, b_1]$, tj. $a_2x - b_2y = a_1$, $b_2x + a_2y = b_1$. Ježto $\alpha_2 \neq 0$, není $a_2 = b_2 = 0$, takže jistě $a_2^2 + b_2^2 > 0$; uvedené rovnice pro neznámé x, y mají tedy právě jedno řešení $x = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$, $y = \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Větu 9 konečně nemusíme dokazovat, neboť plyne z ostatních vět (viz kap. I, § 2, cvičení 1). Tím jsou dokázány věty 1—10 též pro komplexní čísla; tedy platí pro komplexní čísla i všechny věty, jež z těchto vět plynou (viz pozn. 4 v kap. I, § 2).

Mezi důsledky vět 1—10 patří také vzorce (33), (34) z kap. I o mocninách; tedy i tyto věty platí též pro komplexní čísla, definujeme-li mocniny komplexních čísel (s celým mocnitelem) podobně jako u reálných čísel: $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^3 = \alpha . \alpha . \alpha$, $\alpha^{-3} = 1 : \alpha^3$ atd. Spočtěme i^2; je

$$(1) \qquad i^2 = [0, 1] . [0, 1] = [0 . 0 - 1 . 1, \ \ 0 . 1 + 1 . 0] = [-1, 0] = -1 .$$

Věty 1—10 nám dovolují uvést komplexní čísla $[a, b]$ na obvyklý tvar. Je totiž

$$a + bi = [a, 0] + [b, 0] . [0, 1] = [a, 0] + [0, b] = [a, b] .$$

Komplexní číslo $[a, b]$ s reálnou částí a a imaginární částí b lze tedy psát ve tvaru $a + bi$; s těmito čísly se pak počítá podle pravidel vám běžných (plynoucích z vět 1—10), přičemž se užívá ještě rovnice (1): $i^2 = -1$. Teď už si nemusíme pamatovat ani definici 34; chceme-li počítat součet dvou komplexních čísel (tj. chceme-li stanovit jeho reálnou a imaginární část), počítáme prostě podle běžných pravidel: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$. Podobně při rozdílu, součinu a podílu; přitom užíváme ovšem též rovnosti $i^2 = -1$. Tedy např. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i$; $(a + bi)(c + di) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + (bc + ad)\, i$. Podíl $\dfrac{a + bi}{c + di}$ (za předpokladu $c + di \neq 0$, tj. $c^2 + d^2 > 0$) snad nejpohodlněji počítáme takto: násobíme čitatele i jmenovatele číslem $c - di \neq 0$;[2])

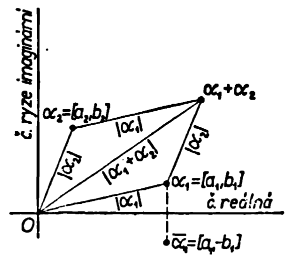
[2]) Číslo $a - bi$ nazýváme číslem *komplexně sdruženým* k číslu $a + bi$; k číslu $a - bi$ je komplexně sdružené opět číslo $a + bi$. Důležitý je vztah $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Číslo komplexně sdružené k číslu α se značí $\bar{\alpha}$. Rovnice $\alpha = \bar{\alpha}$ platí zřejmě tehdy a jen tehdy, je-li α reálné. Viz též cvičení 3.

vychází

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Poznámka 1. Komplexní číslo je, jak víme, číslem reálným, je-li jeho imaginární část rovna nule. Je-li reálná část komplexního čísla rovna nule, nazývá se toto číslo ryze imaginárním; to jsou tedy čísla tvaru bi. Číslo 0 je tedy jediné číslo, které je reálné a současně ryze imaginární.

Poznámka 2. Čísla komplexní můžeme přiřadit bodům v rovině tím způsobem, že číslu $a + bi$ přiřadíme bod o souřadnicích $[a, b]$ (viz obr. 58). Čísla reálná, popř. ryze imaginární se zobrazují na obě osy souřadnic. Dvě čísla komplexně sdružená α, $\bar{\alpha}$ (viz[2]) se zobrazují na dva body, souměrně položené podle osy reálných čísel. Sčítání čísel α_1, α_2 vede k velmi názorné konstrukci, běžné např. z fyziky („rovnoběžník sil"; viz body α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$ na obr. 58).



Obr. 58.

Prostou (*absolutní*) *hodnotou* čísla $\alpha = a + bi$ (znak $|\alpha|$) nazýváme číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$; geometricky je to vzdálenost bodu α od počátku. Ještě jednou: klademe

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{2}$$

Pro reálná čísla (tj. pro $b = 0$) máme prostě $|a| = \sqrt{a^2}$, což je ve shodě s definicí podanou v kap. I, § 2. Platí pak tato

Věta 180. A) $|\alpha| = |\bar{\alpha}| = |-\alpha|$. B) *Pro* $\alpha \neq 0$ *je* $|\alpha| > 0$. C) $|\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1|\,.\,|\alpha_2|$. D) *Pro* $\alpha_2 \neq 0$ *je* $\left|\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \dfrac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}$. E) $|\alpha_1 + \alpha_2| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2|$. F) $|\alpha_1 + \alpha_2| \geqq ||\alpha_1| - |\alpha_2||$. G) $|\alpha|^2 = \alpha\,.\,\bar{\alpha}$.

Důkaz. A) B), G) jsou zřejmá. C) dokážeme takto: podle (2) je $|(a_1 + ib_1)\,.\,(a_2 + ib_2)|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + b_2a_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)\,.\,(a_2^2 + b_2^2)$; odmocněním dostaneme C). Pro $\alpha_2 \neq 0$ je podle C): $|\alpha_1| = \left|\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\,.\,\alpha_2\right| = \left|\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|.\,|\alpha_2|$; odtud plyne D). Abychom dokázali E), stačí dokázat nerovnost

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leqq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,. \tag{3}$$

Ježto zde jsou obě strany nezáporné, znamená nerovnost (3) totéž jako nerovnost, kterou dostaneme, umocníme-li obě strany na druhou; po zrušení členů a_1^2, b_1^2, a_2^2, b_2^2 bude to nerovnost

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leqq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}\,. \tag{4}$$

Nerovnost (4) bude jistě splněna, platí-li nerovnost

$$(5) \qquad |a_1a_2 + b_1b_2| \leqq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}\,.$$

Ale to je nerovnost mezi nezápornými čísly; tedy bude (5) splněna, je-li splněna obdobná nerovnost mezi druhými mocninami, tj. nerovnost $(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leqq \leqq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$, tj. nerovnost $2a_1a_2b_1b_2 \leqq a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2$; ale tato nerovnost platí, neboť $a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \geqq 0$. Tím je E) dokázáno. F) plyne z E), A) takto: $|\alpha_1| = |-\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)| \leqq |-\alpha_2| + |\alpha_1 + \alpha_2| = = |\alpha_2| + |\alpha_1 + \alpha_2|$, tedy $|\alpha_1| - |\alpha_2| \leqq |\alpha_1 + \alpha_2|$, tedy též $|\alpha_2| - |\alpha_1| \leqq |\alpha_2 + \alpha_1| = = |\alpha_1 + \alpha_2|$. Pro reálná x je však $|x| = \mathrm{Max}\,(x, -x)$, takže $||\alpha_1| - |\alpha_2|| = = \mathrm{Max}\,(|\alpha_1| - |\alpha_2|, -|\alpha_1| + |\alpha_2|) \leqq |\alpha_1 + \alpha_2|$.

Poznámka 3. Ježto $|-\alpha_2| = |\alpha_2|$, plyne z E), F) též $||\alpha_1| - |\alpha_2|| \leqq |\alpha_1 - - \alpha_2| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2|$.

Poznámka 4. Nerovnost E) říká – geometricky řečeno – že v trojúhelníku není žádná strana větší než součet druhých dvou (viz obr. 58; trojúhelník, o nějž jde, může být též „zvrhlý", tj. jeho vrcholy 0, α_1, $\alpha_1 + \alpha_2$ mohou ležet na přímce).

Cvičení

1. Vypočtěte čísla $(2 + 3i)(\pi - \sqrt{2}i) - (7 + 5i)^2$; $\dfrac{2 + 3i}{5 - 7i}$ (tj. najděte jejich reálnou a imaginární část). Vyjde $(2\pi + 3\sqrt{2} - 24) + i(3\pi - 2\sqrt{2} - 70)$; $-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i$.

2. Dokažte $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$, $|\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n| = |\alpha_1| \,.\, |\alpha_2| \ldots \ldots |\alpha_n|$ (n přirozené). Pro celé n je $|\alpha^n| = |\alpha|^n$, $|\alpha^{-n}| = 1 : |\alpha|^n$ ($\alpha = 0$ je nutno po případě vyloučit).

3. Označme znakem $\bar{\alpha}$ číslo komplexně sdružené k číslu α. Dokažte: $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$; $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$; $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \,.\, \bar{\beta}$; $\overline{\alpha : \beta} = \bar{\alpha} : \bar{\beta}$ (poslední pro $\beta \neq 0$). Z toho plyne: vytvořím-li nějaké číslo λ čtyřmi základními výkony početními z čísel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, dostanu číslo $\bar{\lambda}$ tak, že čísla $\alpha, \beta, \ldots$ nahradím čísly $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$; např. je-li $\lambda = (3 + 2\alpha\beta - i\gamma) : (\beta\delta^2 + 2\varrho)$, je $\bar{\lambda} = (3 + 2\bar{\alpha}\bar{\beta} + i\bar{\gamma}) : : (\bar{\beta}(\bar{\delta})^2 + 2\bar{\varrho})$ (všimněte si ovšem, že $\bar{i} = -i$). Dále je $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$ pro celé n (pro $n < 0$ je nutno vyloučit $\alpha = 0$).

4. Pro která komplexní $\alpha = a + bi$ je číslo α^2 1) kladné, 2) záporné, 3) ryze imaginární (vyjdou tyto podmínky: 1) $a \neq 0$, $b = 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = \pm b$).

5. Ke každému komplexnímu číslu $\alpha = a + bi \neq 0$ existují právě dvě čísla x taková, že $x^2 = \alpha$; jsou to čísla

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + ik\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right),$$

kde $k = 1$ pro $b \geqq 0$, $k = -1$ pro $b < 0$. Jak vypadají tato dvě čísla pro α kladné, α záporné, α ryze imaginární? ($x = \pm\sqrt{a}$, $x = \pm i\sqrt{-a}$, $x = \pm \dfrac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{2}}(1 + ik)$.)

6. Čtenář si snad všiml, že jsme v oboru komplexních čísel nezavedli vztah $\alpha > \beta$, tj. pořadí podle velikosti.[3]) Ukažme: v oboru komplexních čísel není možno definovat vztah $\alpha > \beta$ tak, aby platily věty 11, 13, 14.[4]) Předpokládejme, že nějaký takový vztah máme; z toho odvodíme spor. Ježto $i \neq 0$, je podle věty 11 buďto $i > 0$ nebo $0 > i$. V druhém případě podle věty 13 je $0 + (-i) > i + (-i)$, tj. $-i > 0$. V prvním případě podle věty 14 je $-1 = i \cdot i > i \cdot 0 = 0$; v druhém obdobně $-1 = (-i) \cdot (-i) > (-i) \cdot 0 = 0$. Tedy je jistě $-1 > 0$.[5]) Odtud podle věty 14 $1 = (-1) \cdot (-1) > (-1) \cdot 0 = 0$; ze vztahu $1 > 0$ plyne pak podle věty 13 $1 + (-1) > 0 + (-1)$, tj. $0 > -1$. Tedy máme současně $-1 > 0$, $0 > -1$, což je ve sporu s větou 11.

§ 2. Posloupnosti a řady s komplexními členy.

Budiž

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots (\alpha_n = a_n + ib_n) \tag{6}$$

posloupnost komplexních čísel. Posloupnost (6) nazýváme *omezenou*, existuje-li číslo K tak, že je $|\alpha_n| \leqq K$ pro všechna n.[6]) *Posloupnost* (6) *je omezená tehdy a jen tehdy, jsou-li omezené obě posloupnosti*

$$a_1, a_2, \ldots; \quad b_1, b_2, \ldots \tag{7}$$

Důkaz: je-li $|\alpha_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqq K$ pro všechna n, je tím spíše $|a_n| = \sqrt{a_n^2} \leqq K$ a obdobně $|b_n| \leqq K$; je-li naopak $|a_n| \leqq K_1$, $|b_n| \leqq K_2$ pro všechna n, je $|\alpha_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqq \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$.

Definice 35. *Existují-li vlastní limity* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *říkáme, že posloupnost* (6) *je konvergentní a má limitu* $a + bi$ (znak $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a + bi$).[7]) *Posloupnost* (6), *která není konvergentní, nazýváme divergentní.*

Příklad: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-5}{n} + \dfrac{n^2-n+1}{3n^2-1} i\right) = 2 + \frac{1}{3}i.$

Tuto definici lze přepsat též v tento tvar, jenž je úplně obdobný definici 6:

Věta 181. *Posloupnost* (6) *má limitu* $\alpha = a + bi$ *tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *tak, že pro všechna* $n > n_0$ *je* $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$.

Důkaz. I. Budiž vyslovená podmínka splněna; ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $|\alpha_n - \alpha| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$,

[3]) Tedy také pojmy kladný (> 0) a záporný (< 0) jsme nezavedli nikde mimo obor čísel reálných.

[4]) Vět 12, 15 si tedy ani nemusíme všímat.

[5]) Že tento vztah neplatil při pořadí reálných čísel, zavedeném v kap. I, nevadí: naše nynější pořadí může být zcela jiné.

[6]) Tedy je $K \geqq 0$, neboť $0 \leqq |\alpha_n| \leqq K$. Uvědomte si, že jsme mimo obor reálných čísel vůbec nedefinovali vztah $\alpha < \beta$ a tedy ani pojmy „α je kladné" (tj. $\alpha > 0$), „α je záporné" (tj. $\alpha < 0$). Znak n bude v tomto paragrafu znamenat vždy přirozené číslo (takže např. výrok „pro všechna $n > n_0$" značí: pro všechna přirozená čísla n, jež jsou větší než n_0).

[7]) Podle této definice a podle věty 51 nemůže mít posloupnost (6) více než jednu limitu. Že pro *reálná* α_n je tato definice ve shodě s definicí 6 z kap. II, je jasné.

tím spíše tedy $\sqrt{(a_n - a)^2} < \varepsilon$, tj. $|a_n - a| < \varepsilon$ a obdobně $|b_n - b| < \varepsilon$; tedy je (podle definice 6) $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a tedy $\lim \alpha_n = a + bi = \alpha$ (podle definice 35).

II. Budiž za druhé $\lim \alpha_n = \alpha = a + bi$, tj. (podle definice 35) $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje podle definice 6 číslo n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro $n > n_0$ je potom $|\alpha_n - \alpha| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2} < \varepsilon$, takže podmínka vyslovená ve větě 181 je splněna.

Z definice 35 plyne ihned, že věty 52, 53, 54 (o konstantní posloupnosti, o změně konečného počtu členů, o omezenosti konvergentní posloupnosti) platí též pro posloupnosti s komplexními členy. Dále platí věty 55, 56, rovnice (31) z kap. II, věta 57 a věta 62 (limita součtu, rozdílu, součinu, podílu a prosté hodnoty; $\lim \alpha_n = 0$ znamená totéž jako $\lim |\alpha_n| = 0$; vybrané posloupnosti) též pro posloupnosti s komplexními členy. To seznáte takto: k důkazu oněch vět (prohlédněte si je!) jsme užili pouze běžných vět o čtyřech základních výkonech početních a vět o prosté hodnotě (jež platí též pro komplexní čísla, viz větu 180) a konečně definice 6 (kterou nyní nahradíme větou 181).

O *nekonečné řadě* s komplexními členy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \quad (\alpha_n = a_n + ib_n) \tag{8}$$

budeme říkat, že je konvergentní, je-li konvergentní posloupnost $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, kde $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$; číslo $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n$ nazýváme potom součtem řady (8) (viz obdobnou definici 12 pro řady s reálnými členy; označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ apod. užíváme i zde v podobném smyslu jako dříve). Řadu, která není konvergentní, nazýváme divergentní. Je zřejmé, že řada (8) konverguje tehdy a jen tehdy, konvergují-li řady

$$a_1 + a_2 + \ldots, \quad b_1 + b_2 + \ldots \tag{9}$$

a že potom platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Věty 76, 77, 80 platí i pro řady s komplexními členy (důkazy podané v kap. IV platí, jak ihned seznáte, i zde). Též věta 78 platí v tomto tvaru: je-li k přirozené číslo a konverguje-li jedna z řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n$, konverguje i druhá z nich, a je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n .$$

Dále platí

Věta 182. *Řada*

$$(10) \qquad |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots$$

je konvergentní tehdy a jen tehdy, jsou-li řady (9) *absolutně konvergentní.*

Důkaz. Jde totiž o řadu (10) a o řady

$$(11) \qquad |a_1| + |a_2| + \dots, |b_1| + |b_2| + \dots;$$

všechny tři řady mají reálné nezáporné členy. Ježto $|a_n| \leqq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\alpha_n|$, $|b_n| \leqq \leqq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\alpha_n|$, je vidět, že z konvergence řady (10) plyne konvergence řad (11) (viz větu 82). Naopak, z konvergence řad (11) plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ a tedy i konvergence řady (10), neboť

$$|\alpha_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqq |a_n| + |b_n|.$$

Z věty 182 a z věty 90 plyne: konverguje-li řada (10), konvergují řady (9) a tedy konverguje i řada (8); věta 90 platí tedy i pro řady s komplexními členy. Konverguje-li řada (10), budeme říkat, že řada (8)[8]) je *absolutně konvergentní.* Přečtete-li si v kap. IV věty 91, 92, 93 (kritéria pro divergenci nebo absolutní konvergenci) a jejich odůvodnění obsažené v poznámkách[5]) až [9]) pod čarou, vidíte ihned, že tyto věty platí i pro řady s komplexními členy.

§ 3. e^ξ pro komplexní ξ. Řada

$$(12) \qquad 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}$$

je absolutně konvergentní pro všechna ξ, neboť podle věty 157 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n : n!$ konvergentní (má součet $e^{|\xi|}$). Pro reálná ξ se součet řady (12) rovná e^ξ; pro jiná než reálná ξ nebyl symbol e^ξ dosud definován. Rozšíříme nyní definici symbolu e^ξ pro všechna komplexní ξ tím, že klademe

$$(13) \qquad e^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \text{ pro každé } \xi.$$

Pro reálná ξ, η platí rovnice

$$(14) \qquad e^\xi e^\eta = e^{\xi+\eta}.$$

Dokážeme nyní tuto větu:

Věta 183. *Rovnice* (14) *platí pro všechna komplexní* ξ, η.

[8]) Jež je konvergentní, jak jsme právě zjistili.

Důkaz. Položíme-li (pro přirozené k)

$$\sigma_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{\xi^n}{n!}, \qquad \tau_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{\eta^m}{m!}, \qquad \lambda_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{(\xi + \eta)^l}{l!},$$

je podle (13) $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = e^\xi$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = e^\eta$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = e^{\xi+\eta}$. Dokážeme-li rovnici

$$\lim_{k\to\infty} (\sigma_k\tau_k - \lambda_k) = 0\,, \tag{15}$$

bude tím podle vzorců (31) v kap. II dokázáno, že $\lim \sigma_k \,.\, \lim \tau_k - \lim \lambda_k = 0$, tj. $e^\xi e^\eta - e^{\xi+\eta} = 0$, což je rovnice (14).

Součin $\sigma_k \,.\, \tau_k$ je zřejmě součet všech členů tvaru

$$\frac{\xi^n\eta^m}{n!\,m!} \tag{16}$$

pro něž je $0 \leqq n \leqq k$, $0 \leqq m \leqq k$; tj.

$$\sigma_k\tau_k = \sum_{\substack{0\leqq n\leqq k\\ 0\leqq m\leqq k}} \frac{\xi^n\eta^m}{n!\,m!}\,. \tag{17}$$

Rozvineme-li $(\xi + \eta)^l$ podle binomické formule a píšeme-li $m = l - n$, obdržíme $\left(\text{ježto } \binom{l}{n} = \dfrac{l!}{n!\,(l-n)!}\right)$

$$\frac{1}{l!}(\xi + \eta)^l = \frac{1}{l!}\sum_{n=0}^{l} \frac{l!}{n!(l-n)!}\,\xi^n\eta^{l-n} = \sum_{\substack{n\geqq 0,\, m\geqq 0\\ m+n=l}} \frac{\xi^n\eta^m}{n!\,m!}\,.^{9)} \tag{18}$$

Výraz λ_k dostaneme tak, že výraz (18) sčítáme přes všechna l od 0 do k, takže λ_k je součtem všech členů (16), pro něž je $n + m \leqq k$; tj.

$$\lambda_k = \sum_{\substack{n\geqq 0,\, m\geqq 0\\ n+m\leqq k}} \frac{\xi^n\eta^m}{n!\,m!}\,. \tag{19}$$

Sestrojím-li rozdíl $\sigma_k\tau_k - \lambda_k$, zruší se všechny výrazy (16), pro něž je $n + m \leqq k$, takže zbude

$$\sigma_k\tau_k - \lambda_k = \sum_{\substack{0\leqq m\leqq k\\ 0\leqq n\leqq k\\ n+m>k}} \frac{\xi^n\eta^m}{n!\,m!}\,.$$

Tedy je (klademe-li pro zjednodušení $|\xi| = a$, $|\eta| = b$)

$$|\sigma_k\tau_k - \lambda_k| \leqq \sum_{\substack{0\leqq m\leqq k\\ 0\leqq n\leqq k\\ n+m>k}} \frac{a^nb^m}{n!\,m!} \leqq \sum_{\substack{n\geqq 0,\, m\geqq 0,\\ k<n+m\leqq 2k}} \frac{a^nb^m}{n!\,m!} \tag{20}$$

[9]) Doufám, že čtenáři je jasný smysl symbolu $\sum\limits_{\substack{n\geqq 0,\, m\geqq 0,\\ n+m=l}}$ a podobných symbolů; tento symbol znamená: sčítá se přes všechny celé nezáporné hodnoty n, m, jejichž součet se rovná číslu l.

(neboť, je-li $n \leqq k, m \leqq k$, je $n + m \leqq 2k$, takže poslední součet obsahuje jistě všechny členy předcházejícího součtu). Ale součet všech členů $a^n b^m : (n!\, m!)$, pro něž $n + m$ se rovná danému číslu l, je podle (18) roven $(a + b)^l : l!$, takže podle (20) je

$$(21) \qquad |\sigma_k \tau_k - \lambda_k| \leqq \sum_{l=k+1}^{2k} \frac{(a + b)^l}{l!} \leqq \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{(a + b)^l}{l!};$$

poslední výraz je však zbytek konvergentní řady $\sum_{l=0}^{\infty} (a + b)^l : l! = e^{a+b}$ a má tedy pro $k \to \infty$ limitu 0. Podle (21) platí tedy (15) a tedy i (14).

Důsledky věty 183. Klademe-li ve (14) $\eta = -\xi$ (tedy $\eta + \xi = 0$), obdržíme $e^\xi . e^{-\xi} = e^0 = 1$. Tedy

$$(22) \qquad e^\xi \neq 0\,, \quad e^{-\xi} = 1 : e^\xi \textit{ pro každé } \xi\,.$$

Dále dokážeme:

$$(23) \qquad (e^\xi)^n = e^{n\xi} \textit{ pro každé } \xi \textit{ a každé celé } n\,.$$

Důkaz. Pro $n = 0, 1$ je (23) zřejmé. Budiž (23) již dokázáno pro jistou hodnotu $n = k$ (k přirozené), takže $(e^\xi)^k = e^{k\xi}$. Potom je $(e^\xi)^{k+1} = (e^\xi)^k . (e^\xi)^1 = e^{k\xi} . e^\xi = e^{k\xi + \xi} = e^{(k+1)\xi}$ (předposlední vztah plyne z (14)), což je vzorec (23) pro $n = k + 1$. Tím je (23) úplnou indukcí dokázáno pro každé přirozené n. Je-li konečně n celé záporné, položme $n = -m$, takže $m > 0$, $(e^\xi)^m = e^{m\xi}$. Tedy (užijte (22))

$$(e^\xi)^n = (e^\xi)^{-m} = 1 : (e^\xi)^m = 1 : e^{m\xi} = e^{-m\xi} = e^{n\xi}\,.$$

Všimněme si hodnoty e^ξ pro ryze imaginární ξ. Položme tedy v řadě (13) $\xi = iy$ (y reálné); vyjde (srovnej větu 156)

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = \cos y + i \sin y\,;$$

píšeme-li zde ještě $-y$ místo y, máme

$$(24) \qquad e^{iy} = \cos y + i \sin y\,, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y \textit{ pro každé reálné } y\,.$$

Sečtením a odečtením plynou odtud důležité vzorce Eulerovy:

$$(25) \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\,, \ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \textit{ pro každé reálné } y.$$

Dosadíme-li do vzorce $e^{niy} = (e^{iy})^n$ (pro přirozené n) podle (24), dostaneme důležitou formuli Moivreovu

$$(26) \qquad \cos ny + i \sin ny = (\cos y + i \sin y)^n \quad (n \textit{ přirozené, } y \textit{ reálné}).$$

Srovnáte-li zde reálné a imaginární části obou stran, snadno dostanete vyjádření čísel $\cos ny$, $\sin ny$ pomocí $\cos y$, $\sin y$ (viz cvičení 1). Vzorce (14), (24) dovolují stanovit reálnou a imaginární část, jakož i prostou hodnotu čísla e^{ξ} ($\xi = x + iy$; x, y reálná). Je totiž $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, tedy $|e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x \cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$.

Pro reálná x, y je tedy

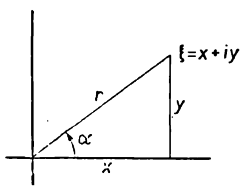
$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,, \quad |e^{x+iy}| = e^x\,. \tag{27}$$

Kdy je $e^{x+iy} = 1$ (pro reálná x, y)? Musí být především $|e^{x+iy}| = |1|$, tj. $e^x = 1$, $x = 0$, načež jde o rovnici $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$, jež je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $\cos y = 1$, $\sin y = 0$, tj. $y = 2k\pi$ ($k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$). Rovnice $e^{\xi} = 1$ platí tedy tehdy a jen tehdy, je-li $\xi = 2k\pi i$ (k celé). *Rovnice $e^{\xi} = e^{\eta}$ platí tedy tehdy a jen tehdy, je-li $\xi = \eta + 2k\pi i$ (k celé)*; neboť jde o rovnici $e^{\xi - \eta} = 1$.

Odvozené vzorce nám poskytují nové účelné vyjádření libovolného komplexního čísla $\xi = x + iy \neq 0$. Položme $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\xi|$, takže $r > 0$. Potom je $\xi = r\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; ježto $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$, existuje podle kap. XII, § 7, cvičení 2 číslo a tak, že je $\cos a = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin a = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; tedy je

$$\xi = r(\cos a + i \sin a) = re^{ia} \quad (r > 0,\ a \text{ reálné})\,. \tag{28}$$

Každé číslo $\xi \neq 0$ lze tedy psát ve tvaru (28). Přitom je číslo r číslem ξ jednoznačně určeno, neboť z (28) plyne $|\xi| = |r| \cdot |e^{ia}|$, tj. $r = |\xi|$ (neboť $r > 0$). Z rovnice (28) potom plyne $e^{ia} = \xi : |\xi|$, takže číslo e^{ia} je číslem ξ určeno; tedy je číslo ia určeno jednoznačně až na násobek čísla $2\pi i$, tj. číslo a je určeno až na násobek čísla 2π. Geometricky odpovídá přechod od tvaru $x + iy$ k tvaru re^{ia} přechodu od pravoúhlých souřadnic k polárním, viz obr. 59. Číslo a, určené až na násobek čísla 2π, se nazývá *argumentem* neboli *amplitudou* čísla $\xi = re^{ia}$.



Obr. 59.

Cvičení

1. Z (26) odvoďte: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$; $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$, $\sin 4x = \sin x\,(8\cos^3 x - 4\cos x)$.

2. Uveďte čísla i, -1, $-i$, -5, $1+i$, $\sqrt{3} - i$, $-1 + i$ na tvar re^{ia} ($r > 0$). Výsledek: $i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$, $-1 = e^{\pi i}$, $-i = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$, $-5 = 5e^{\pi i}$, $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$, $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{1}{6}\pi i}$, $-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

3. Dokažte: probíhá-li ξ všechna komplexní čísla, probíhá e^{ξ} všechna komplexní čísla různá od nuly. e^{ξ} ($\xi = x + iy$) je kladné tehdy a jen tehdy, je-li $y = 2k\pi$; záporné tehdy a jen tehdy, je-li $y = (2k+1)\pi$ (k celé).

4. Je-li $\xi = re^{ia}$, $\eta = Re^{iA}$ ($r > 0$, $R > 0$, a reálné, A reálné), je $\xi\eta = rRe^{i(a+A)}$, $\dfrac{\xi}{\eta} = \dfrac{r}{R} \cdot e^{i(a-A)}$, $\dfrac{1}{\xi} = \dfrac{1}{r} e^{-ia}$. Číslo komplexně sdružené ke ξ je re^{-ia}. Pro libovolné celé n je $\xi^n = r^n e^{ina}$.

Vidíte, že se s tvarem (28) při násobení, dělení, mocnění a při přechodu ke komplexně sdruženému číslu pohodlně pracuje.

5. Budiž n celé kladné. Rovnice $\xi^n = 0$ je splněna pouze pro $\xi = 0$. Je-li $\alpha \neq 0$, tedy $\alpha = re^{ia}$ (a reálné, $r > 0$), je rovnice $\xi^n = \alpha$ splněna právě pro n různých hodnot $\xi = \sqrt[n]{r}\, e^{i(a+2k\pi)/n}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

6. Rovnice $\xi^4 = -1$ má kořeny $e^{i\pi(2k+1)/4}$ ($k = 0, 1, 2, 3$); tyto kořeny lze psát též ve tvaru $\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (všechny čtyři kombinace znamének).

7. Rovnice $\xi^3 = -1 + i$ má kořeny $\sqrt[6]{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i}$ ($k = 0, 1, 2$); tyto kořeny lze též psát

$$\xi_1 = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})),$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(-1 + \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3})).$$

8. Definujete-li $\cos \xi$, $\sin \xi$ obvyklými řadami (viz větu 156) také pro všechna *komplexní* ξ, platí vzorce (24), (25), (26) i pro všechna komplexní y.

§ 4. Komplexní funkce reálné proměnné. Budiž M nějaká množina reálných čísel; je-li každému číslu $x \in M$ přiřazeno jisté komplexní číslo $\varphi(x)$, říkáme, že φ je komplexní funkce reálné proměnné; množinu M nazýváme oborem funkce φ. Na rozdíl od komplexních funkcí nazýváme funkce ve smyslu kap. V též reálnými funkcemi (jedné reálné proměnné). Dát funkci φ znamená, dát pro každé $x \in M$ číslo $\varphi(x)$, tj. reálnou část $f(x)$ a imaginární část $g(x)$ tohoto čísla $\varphi(x)$, takže $\varphi(x) = f(x) + ig(x)$; dát komplexní funkci φ znamená tedy totéž jako dát dvě reálné funkce f, g. Pro komplexní funkce zavádíme pojem limity a spojitosti takto:

Definice 36. *O funkci $\varphi(x) = f(x) + i\,g(x)$ říkáme, že má v bodě c limitu $A + iB$ (znak: $\lim_{x \to c} \varphi(x) = A + iB$), je-li $\lim_{x \to c} f(x) = A$, $\lim_{x \to c} g(x) = B$. Říkáme, že funkce φ je spojitá v bodě c, jsou-li obě funkce f, g spojité v bodě c.* (Obdobně pro spojitost a limitu zprava a zleva, jakož i pro limitu v bodech $+\infty$, $-\infty$.)[10])

Podobně jako v § 2 se dokáže

Věta 184. *Komplexní funkce $\varphi(x)$ má v bodě c limitu α tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $|\varphi(x) - \alpha| < \varepsilon$. Funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě c tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|x - c| < \delta$ je $|\varphi(x) - \varphi(c)| < \varepsilon$.* (Obdobně pro spojitost a limitu zprava a zleva, jakož i pro limitu v bodech $+\infty$, $-\infty$.)

[10]) Slovem „limita“ nebo „derivace“ rozumím v tomto paragrafu *vlastní* limitu nebo derivaci.

Důkaz (velmi jednoduchý a obdobný důkazu věty 181) přenechávám čtenáři.

Podobně jako v § 2 zjistíte nyní na základě definice 36 a věty 184, že následující věty z kap. V platí i pro komplexní funkce: věta 101 (o jednoznačnosti limity), věty 99, 102 (o vztazích mezi jednostrannou a oboustrannou spojitostí, popř. limitou), věty 103, 104 (spojitost v bodě c znamená $\lim \varphi(x) = \varphi(c)$), věty 97, 100, 106, 107 (o spojitosti a limitě prosté hodnoty, součtu, rozdílu atd.), cvičení 8, 9 z § 5, cvičení 1 z § 7 (pouze pro vlastní limitu). Spojitost komplexní funkce v intervalu zavádíme jako v § 8 (definice 23).

Limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$
$$= f'(x) + i\,g'(x)$$

nazýváme derivací funkce φ v bodě x (jestliže ovšem tato limita existuje, tj. jestliže existují vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$); znak $\varphi'(x)$ nebo $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ apod. (tedy $\varphi'(x) = f'(x) + ig'(x)$, má-li pravá strana smysl). Podobně definujeme derivaci zprava a zleva. Projdete-li si důkazy z kap. VIII, § 2 a užijete-li oněch vět z kap. V, jejichž správnost pro komplexní funkce jsme právě zdůraznili, zjistíte, že i pro komplexní funkce platí věta 122 (z existence derivace plyne spojitost), věta 123 (vztah mezi derivací a derivacemi zprava a zleva – ovšem jen pro vlastní derivace), věta 124 a poznámky 2, 3 k této větě (derivace součtu, součinu, rozdílu, podílu). Derivace vyšších řádů zavádíme obdobně jako v kap. VIII, § 3. Poznámka 1 a příkl. 4, 5 z tohoto § 3 (vyšší derivace součtu a součinu) platí rovněž pro komplexní funkce.

Poznámka 1. Zobecnění, provedené v tomto paragrafu, je poměrně málo podstatné: každému *reálnému* x z jisté množiny M přiřadím dvě reálná čísla $f(x)$, $g(x)$; mám zde tedy nikoliv jednu, nýbrž dvě reálné funkce $f(x)$, $g(x)$; místo abych je vyšetřoval každou zvlášť, spojím je dohromady rovnicí $\varphi(x) = f(x) + i\,g(x)$ a vyšetřuji funkci φ. Nic podstatně nového zde vlastně není (což je vidět také z toho, že jsme mnohé věty o reálných funkcích i s jejich důkazy mohli beze změny přenést na komplexní funkce). Ale komplexní funkce jsou často užitečné tím, že zjednodušují výpočet i výsledky; např. je jistě pohodlnější pracovat s výrazem $(i + x)^{10}$ než např. s jeho reálnou částí; účelnost zavedení komplexních funkcí zjistíte ještě při mnoha příležitostech (viz též cvičení 3).

Mohli bychom ovšem vyšetřovat též funkce *komplexní proměnné* ξ; např. bychom každému komplexnímu ξ mohli přiřadit číslo $\varphi(\xi) = e^{\xi} + \xi^2$; tím bychom však byli vedeni k otázkám podstatně jiného rázu, které nezapadají do rámce této knihy (soustavně se těmito otázkami zabývá tzv. teorie analytických funkcí).

Příklad 1. Budiž $\alpha = a + bi$ komplexní číslo; každému reálnému x přiřaďme číslo $e^{\alpha x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$. To je komplexní funkce reálné proměnné x; tvrdím, že pro každé reálné x je $\frac{\mathrm{d}e^{\alpha x}}{\mathrm{d}x} = \alpha e^{\alpha x}$ (stejně jako pro reálné α). Podle pravidla o derivování součinu dostanu vskutku

$$\frac{\mathrm{d}e^{\alpha x}}{\mathrm{d}x} = ae^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + be^{ax}(-\sin bx + i \cos bx) =$$

$$= e^{ax}(a + ib)(\cos bx + i \sin bx) = \alpha e^{\alpha x}.$$

Uveďme ještě tuto větu:

Věta 185. *Budiž $\varphi(x)$ komplexní funkce, jež je spojitá v intervalu J a má derivaci rovnou nule v každém vnitřním bodě intervalu J. Potom je funkce φ konstantní v J* (to znamená ovšem, že pro všechna $x \in J$ je $\varphi(x)$ totéž číslo).

Důkaz. Položím-li $\varphi(x) = f(x) + i\,g(x)$, jsou reálné funkce f, g podle předpokladu spojité v J a v každém vnitřním bodě intervalu J je $f'(x) = g'(x) = 0$. Podle věty 135 (poslední případ) jsou tedy funkce f, g konstantní v J.

Věta 186. *Buďte $\varphi(x)$, $\psi(x)$ dvě komplexní funkce spojité v intervalu J; v každém vnitřním bodě intervalu J budiž $\varphi'(x) = \psi'(x)$. Potom je funkce $\varphi(x) - \psi(x)$ konstantní v J.*

Důkaz. Užijte věty 185 na funkci $\varphi(x) - \psi(x)$.

Cvičení

1. Definujete-li $\cos \xi$, $\sin \xi$, jak bylo vylíčeno v § 3, cvičení 8, zjistíte, že vzorce $(\cos \alpha x)' = -\alpha \sin \alpha x$, $(\sin \alpha x)' = \alpha \cos \alpha x$ platí (při reálném x) též pro libovolné komplexní α.

2. Je-li $h(x)$ reálná funkce, $\varphi(y) = f(y) + ig(y)$ komplexní funkce, platí pro spojitost, limitu a derivaci složené funkce $\varphi(h(x))$ věty 98, 108, 126 (o funkci h předpokládám, že je reálná, abych měl zaručeno, že do funkce $\varphi(y)$ dosazuji za y *reálné* číslo $h(x)$).

3. Položme $\varphi(x) = f(x) + ig(x) = \cos x + i \sin x$; budiž n přirozené číslo. Podle (26) platí velmi jednoduchý vztah $\varphi(nx) = \varphi^n(x)$. Pro reálnou funkci $f(x) = \cos x$ platí vzorec podstatně složitější:

$$f(nx) = f^n(x) - \binom{n}{2} f^{n-2}(x)(1 - f^2(x)) + \binom{n}{4} f^{n-4}(x)(1 - f^2(x))^2 -$$

$$- \binom{n}{6} f^{n-6}(x)(1 - f^2(x))^3 + \ldots$$

(řada pokračuje tak dlouho, pokud ve výrazu $\binom{n}{2k}$ je $2k \leq n$).

4. Zaveďte komplexní funkce dvou reálných proměnných $\varphi(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$, pro tyto funkce definujte limitu, spojitost, parciální derivace, totální diferenciál a zjistěte, že věty 163 až 178 z kap. XIII platí i pro tento případ. Ve větách o složených funkcích je ovšem nutné předpokládat, že „vnitřní" funkce jsou reálné.