Kapitola XIV

IMPLICITNÍ FUNKCE

§ 1. Základní věta o řešení rovnice $F(x, y) = 0$. Velmi často se vyskytuje v matematice tento problém: Budiž dána funkce $F(x, y)$ dvou proměnných; ptáme se, které body $[x, y]$ vyhovují rovnici

$$F(x, y) = 0 . \tag{1}$$

Označme znakem M množinu všech bodů $[x, y]$, jež vyhovují rovnici (1); naším úkolem pak je studovat, jak vypadá množina M. Vezměme několik běžných příkladů.

Příklad 1. Buďte a, b, r tři čísla, $r > 0$; položme $F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$. Množina M oněch bodů $[x, y]$, které vyhovují rovnici

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 , \tag{2}$$

se nazývá kružnicí o poloměru r a o středu $[a, b]$.

Příklad 2. Budiž $F(x, y) = 2y - 3x$; množina M oněch bodů $[x, y]$, jež vyhovují rovnici $2y - 3x = 0$, je právě množina všech bodů ležících na přímce $y = \frac{3}{2}x$.

Příklad 3. Budiž $F(x, y) = (2y - 3x)^2$; zde je množina M táž jako v předešlém příkladě.

Příklad 4. Budiž $F(x, y) = x^2 - y^2$; rovnice $F(x, y) = 0$, tj. $(x + y)(x - y) = 0$, je splněna tehdy a jen tehdy, je-li buďto $y = x$ nebo $y = -x$. Množina M se tedy zde skládá ze všech bodů přímek $y = x$, $y = -x$.

V dosavadních příkladech má množina M vlastnosti, které zrakový názor přisuzuje „křivkám“ nebo „čarám“. Vskutku mnohé křivky, kterými se geometrie zabývá, bývají dány rovnicí tvaru $F(x, y) = 0$, z čehož je důležitost našeho problému patrná. Ovšem leckdy může mít množina M tvar, který má jenom málo nebo vůbec nic společného s názornou představou křivky, jak ukazují následující příklady.

Příklad 5. Budiž $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$; pro žádný bod $[x, y]$ není $x^2 + y^2 + 1 = 0$, množina M je tedy prázdná.

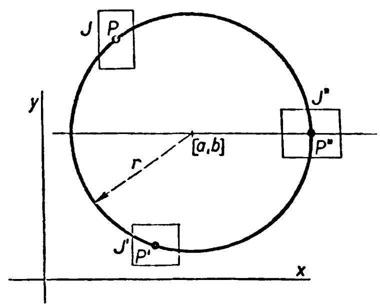
Příklad 6. Rovnice $x^2 + y^2 = 0$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $x = y = 0$. Položíme-li tedy $F(x, y) = x^2 + y^2$, skládá se množina M z jediného bodu $[0, 0]$.

Příklad 7. Budiž $F(x, y) = \sin \frac{\pi y}{x}$ pro $x \neq 0$, $F(0, y) = 0$. Rovnice $F(x, y) = 0$

je splněna tehdy a jen tehdy, je-li buďto $x = 0$ nebo $y = kx\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Množina M se zde skládá z nekonečně mnoha přímek (načrtněte si obrázek).

Příklad 8. Položme $F(x, y) = \sqrt{x^2y^2} - xy$. Podle definice odmocniny je $\sqrt{x^2y^2} = |xy|$. Je-li $xy \geqq 0$ (tj. leží-li bod $[x, y]$ na ose x nebo na ose y nebo v prvním nebo v třetím kvadrantu), je $|xy| = xy$ a tedy $F(x, y) = 0$; je-li však $xy < 0$, je $|xy| = -xy$ a tedy $F(x, y) = -2xy > 0$. Množina M se tedy skládá z prvního a třetího kvadrantu (včetně os souřadnic).

Položíme si napřed tuto otázku: je možné popsat množinu M rovnicí tvaru $y = f(x)$? To znamená: je možné nalézt funkci $f(x)$ tak, aby všechny body množiny M byly právě ony body $[x, y]$, jež vyhovují rovnici $y = f(x)$? To je možné např. v příkladech 2, 3: zde skutečně každému x odpovídá jedna a jen jedna hodnota $y = f(x)$ tak, že bod $[x, y]$ vyhovuje rovnici $F(x, y) = 0$; zde je to funkce $f(x) = \frac{3}{2}x$. Ale už v příkladě 1 to není možné; neboť ke každému x intervalu $(a - r, a + r)$ přísluší nikoliv *jedna*, nýbrž *dvě* hodnoty y tak, že bod $[x, y]$ leží na kružnici (2), totiž hodnoty



Obr. 55.

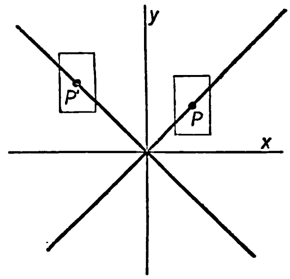
(3a) $$y = b + \sqrt{r^2 - (x - a)^2}\,,$$

(3b) $$y = b - \sqrt{r^2 - (x - a)^2}\,.$$

Podobně je tomu v příkl. 4, kde ke každé hodnotě $x \neq 0$ příslušejí dvě různé hodnoty y, totiž $y = x$; $y = -x$.

Proto tento problém zúžíme a vyslovíme jej takto: vezmu nějaký bod $P = [x_0, y_0]$ množiny M a ptám se, zda je možné sestrojit okolo bodu P jako středu nějaký dvojrozměrný interval $J = (x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1) \times (y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ tak, aby se aspoň ona část množiny M, *jež leží v intervalu* J, dala vyjádřit rovnicí tvaru $y = f(x)$ (viz např. bod P a interval J na obr. 55, kde množina M je kružnice (2)). Tedy podrobně řečeno: Dána je funkce $F(x, y)$; buďiž $[x_0, y_0]$ nějaký bod vyhovující rovnici $F(x_0, y_0) = 0$. Ptáme se, zda existují kladná čísla Δ_1, Δ_2 tak, aby ke každému x intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ existovalo v intervalu $(y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ jedno a jen jedno y tak, že je splněna rovnice $F(x, y) = 0$. Existují-li taková kladná čísla Δ_1, Δ_2, je toto y funkcí proměnné x v oboru $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$, označme ji písmenem f; tedy množina všech bodů intervalu $J = (x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1) \times (y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$, jež patří k množině M, je právě množina oněch bodů $[x, y]$, jež vyhovují podmínkám $y = f(x)$, $|x - x_0| < \Delta_1$. Zajímají nás potom ovšem ještě další vlastnosti funkce f, např. otázka, zda má funkce f v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ první, druhou, ... derivaci a jak se tyto derivace vypočtou. Tomuto problému je věnována tato kapitola.

Podívejme se třeba na příklad 1. Volím-li bod P v množině M (tj. na kružnici (2)) a interval J tak, jak je vyznačeno na obr. 55, je skutečně ona část kružnice, jež je obsažena v intervalu J, popsána rovnicí tvaru $y = f(x)$, totiž rovnicí (3a). Totéž platí pro bod P' (na dolní polokružnici) a interval J', až na to, že musíme vzít rovnici (3b). V bodě $P'' = [a + r, b]$ však tento postup selhává: ať zvolím interval J'' (obsahující bod P'') jakkoliv malý, vždy budou existovat čísla x (o něco menší než $a + r$) tak, že k takovému x existují *dvě* různé hodnoty y_1, y_2 takové, že oba body $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ leží na kružnici (2) a současně v intervalu J''. Podobně selhává tento postup v bodě $P''' = [a - r, b]$. Všimněme si ještě této okolnosti: v našem příkladě je $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - b)$; na kružnici (2) leží právě dva body, pro něž je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, tj. $y = b$; jsou to právě ony body P'', P''', v nichž náš postup selhal.



Obr. 56.

Podívejme se podobně na příklad 4, v němž se množina M skládá z přímek $y = x$, $y = -x$; zvolím li v této množině M bod P různý od počátku, mohu opět sestrojit interval J (obsahující bod P) tak, že ona část množiny M, jež leží v intervalu J, je úplně popsána buďto rovnicí $y = x$ (viz na obr. 56 bod P) nebo rovnicí $y = -x$ (viz na obr. 56 bod P'). Tento postup selhává v bodě $[0, 0]$. V našem případě je $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$; jediný bod množiny M, v němž je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ (tj. $y = 0$), je právě bod $[0, 0]$, v němž náš postup selhal. Podle příkladů 1, 4 se tedy zdá, že v těch bodech množiny M, v nichž je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, mohou být poměry značně složité; proto se omezíme na ty body množiny M, v nichž je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Vezměme tedy nějaký bod $[x_0, y_0]$, ležící v množině M, tj. vyhovující rovnici $F(x_0, y_0) = 0$; budeme předpokládat, že funkce F má v jistém dvojrozměrném otevřeném intervalu, obsahujícím bod $[x_0, y_0]$, spojité parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$, popř. ještě též spojité parciální derivace vyšších řádů (obecně až do řádu n tého, kde $n \geqq 1$). *Mimoto budeme předpokládat, že* $\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \neq 0$. Dokážeme pak tuto větu:

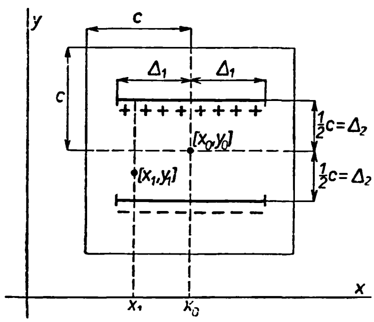
Věta 179. *Budiž $F(x, y)$ funkce, $[x_0, y_0]$ bod v rovině, n přirozené číslo. Nechť existuje otevřený dvojrozměrný interval L obsahující bod $[x_0, y_0]$ a takový, že funk-*

ce $F(x, y)$ má v L spojité parciální derivace až do řádu n-tého. Budiž dále $F(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.[1])

Potom existují kladná čísla Δ_1, Δ_2 tak, že platí toto:

I. Ke každému číslu x intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ existuje v intervalu $(y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ jedno a jen jedno číslo y tak, že je $F(x, y) = 0$. Označím-li toto y znakem $f(x)$, je rovnice $F(x, y) = 0$ pro $x_0 - \Delta_1 < x < x_0 + \Delta_1, y_0 - \Delta_2 < y < y_0 + \Delta_2$ splněna tehdy a jen tehdy, je-li $y = f(x)$.

II. Funkce $f(x)$ má v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ spojité derivace až do řádu n-tého.



Obr. 57.

Poznámka 1. Smysl této důležité věty, jež je vlastně jediným obsahem této kapitoly, si musí čtenář dokonale promyslit.

Důkaz. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že je $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} > 0$ (kdyby bylo $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} < 0$, vyšetřovali bychom místo funkce F funkci $-F$, což na obsahu věty nic nemění, ježto rovnice $F = 0$ znamená totéž co $-F = 0$). Položme $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = \alpha$, takže $\alpha > 0$. Ze spojitosti funkce $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ plyne existence čísla $c > 0$ takového, že ve všech bodech $[x, y]$ intervalu $K = (x_0 - c, x_0 + c) \times (y_0 - c, y_0 + c)$ je

$$\left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \right| < \tfrac{1}{2}\alpha$$

a tedy

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} > \tfrac{1}{2}\alpha > 0 \,. \tag{4}$$

Volme mimoto c tak malé, že $K \subset L$; potom jsou tedy všechny parciální derivace funkce F až do řádu n-tého spojité v intervalu K.[2])

---

[1]) Znak $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}$ značí ovšem hodnotu funkce $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ v bodě $[x_0, y_0]$.

[2]) Prosím čtenáře, aby si současně s výkladem načrtával obr. 57.

I. Funkce $F(x_0, y)$ (jediné proměnné y) má v intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$ podle (4) kladnou derivaci a je tam tedy rostoucí; pro $y = y_0$ má hodnotu nulovou $(F(x_0, y_0) = 0)$, tedy má v bodě $y = y_0 + \frac{1}{2}c$ hodnotu kladnou a v bodě $y = y_0 - \frac{1}{2}c$ hodnotu zápornou, tj. $F(x_0, y_0 + \frac{1}{2}c) > 0$, $F(x_0, y_0 - \frac{1}{2}c) < 0$.[3] Funkce $F(x, y_0 + \frac{1}{2}c)$ (jediné proměnné x) je v bodě x_0 spojitá a kladná; funkce $F(x, y_0 - \frac{1}{2}c)$ je v bodě x_0 obdobně spojitá a záporná. Existuje tedy číslo $\Delta_1 > 0$ tak, že je

(5) $$F(x, y_0 - \tfrac{1}{2}c) < 0\,, \quad F(x, y_0 + \tfrac{1}{2}c) > 0 \quad \text{pro} \quad |x - x_0| < \Delta_1\,;$$

volme zároveň $\Delta_1 < c$. Budiž nyní x_1 libovolné číslo intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$. Funkce $F(x_1, y)$ (jediné proměnné y) je podle (4) spojitá a rostoucí v intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$, tedy též v intervalu $\langle y_0 - \frac{1}{2}c, y_0 + \frac{1}{2}c\rangle$; pro $y = y_0 - \frac{1}{2}c$ je hodnota funkce $F(x_1, y)$ podle (5) záporná, pro $y = y_0 + \frac{1}{2}c$ je kladná. Podle věty 129 existuje tedy v intervalu $(y_0 - \frac{1}{2}c, y_0 + \frac{1}{2}c)$ číslo y_1 takové, že je $F(x_1, y_1) = 0$; a ježto $F(x_1, y)$ je rostoucí funkce v tomto intervalu, existuje *jen* jedno takové číslo y_1 v intervalu $(y_0 - \frac{1}{2}c, y_0 + \frac{1}{2}c)$. Tím je tvrzení I dokázáno: položíme-li $\Delta_2 = \frac{1}{2}c$, vidíme, že ke každému x intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ existuje v intervalu $(y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ jedno a jen jedno číslo y tak, že je $F(x, y) = 0$; toto číslo y označme znakem $f(x)$. Zároveň vidíte, že důkaz byl velmi názorný.

II. Zbývá dokázat tvrzení II. Dokažme napřed tvrzení

A) *Funkce $f(x)$ má v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ derivaci*

(6) $$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

(kde vpravo je třeba za y dosadit $f(x)$).

Důkaz. Buďte $[x_1, y_1]$, $[x_1 + h, y_1 + k]$ dva body intervalu K. Funkce $F(x, y_1)$ (proměnné x) má v intervalu $(x_0 - c, x_0 + c)$ derivaci $\dfrac{\partial F(x, y_1)}{\partial x}$; funkce $F(x_1 + h, y)$ (proměnné y) má v intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$ derivaci $\dfrac{\partial F(x_1 + h, y)}{\partial y}$. Věta o přírůstku funkce dává pak

(7) $$\begin{aligned} &F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = \\ &= (F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1 + h, y_1)) + (F(x_1 + h, y_1) - F(x_1, y_1)) = \\ &= k\,\frac{\partial F(x_1 + h, y_1 + \Theta_2 k)}{\partial y} + h\,\frac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, y_1)}{\partial x}\,, \end{aligned}$$

[3]) Na obr. 57 je znamení funkce F v určitém bodě vyznačeno připsaným znaménkem + nebo —.

přičemž $0 < \Theta_1 < 1$, $0 < \Theta_2 < 1$. Tato rovnice platí ovšem též pro $k = 0$ (potom odpadá první člen vpravo) i pro $h = 0$ (potom odpadá druhý člen vpravo). Zvolme speciálně x_1 v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$, $y_1 = f(x_1)$ (takže $y_0 - \Delta_2 < y_1 < y_0 + \Delta_2$). Budiž dále $h \neq 0$ a budiž $|h|$ tak malé, že také bod $x_1 + h$ leží v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$. Definujme funkci $k(h)$ rovnicí

$$k(h) = f(x_1 + h) - f(x_1), \quad \text{tedy} \quad f(x_1 + h) = f(x_1) + k(h) ;$$

je ovšem (podle tvrzení I) $y_0 - \Delta_2 < f(x_1 + h) < y_0 + \Delta_2$. Ježto $F(x_1, f(x_1)) = 0$, $F(x_1 + h, f(x_1) + k(h)) = F(x_1 + h, f(x_1 + h)) = 0$, plyne z rovnice (7)

$$k(h) \frac{\partial F(x_1 + h, f(x_1) + \Theta_2 k(h))}{\partial y} + h \frac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, f(x_1))}{\partial x} = 0 .$$

Ježto $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ (viz (4)), plyne z poslední rovnice

$$(8) \qquad f(x_1 + h) - f(x_1) = k(h) = - \frac{\dfrac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, f(x_1))}{\partial x} \, . \, h}{\dfrac{\partial F(x_1 + h, f(x_1) + \Theta_2 k(h))}{\partial y}} .$$

Podle (4) je jmenovatel vpravo větší než $\frac{1}{2}\alpha$, tedy

$$(9) \qquad |k(h)| \leqq \frac{2}{\alpha} \left| h \, . \, \frac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, f(x_1))}{\partial x} \right| .$$

Ze spojitosti funkce $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ zřejmě plyne

$$(10) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, f(x_1))}{\partial x} = \frac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial x} ;$$

z pravidla o limitě součinu plyne pak

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, f(x_1))}{\partial x} \, . \, h = 0 ,$$

načež z (9) plyne

$$(11) \qquad \lim_{h \to 0} k(h) = 0 .$$

Odtud však snadno plyne (ježto pro $h \to 0$ se bod $[x_1 + h, f(x_1) + \Theta_2 k(h)]$ podle (11) blíží bodu $[x_1, f(x_1)]$)

$$(12) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\partial F(x_1 + h, f(x_1) + \Theta_2 k(h))}{\partial y} = \frac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial y} .$$

Obšírný důkaz rovnice (12): Budiž $\varepsilon > 0$; ze spojitosti funkce $\frac{\partial F}{\partial y}$ plyne, že existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $|x - x_1| < \delta_1$, $|y - f(x_1)| < \delta_1$ je

$$\left|\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial y}\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Podle (11) existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $0 < |h| < \delta_2$ je $|k(h)| < \delta_1$. Položme $\delta = \operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2)$; je-li $0 < |h| < \delta$, je $|x_1 + h - x_1| < \delta \leqq \delta_1$, $|f(x_1) + \Theta_2 k(h) - f(x_1)| = |\Theta_2 k(h)| \leqq |k(h)| < \delta_1$, takže nerovnost (13) platí pro $x = x_1 + h$, $y = f(x_1) + \Theta_2 k(h)$; pro $0 < |h| < \delta$ je tedy

$$\left|\frac{\partial F(x_1 + h, f(x_1) + \Theta_2 k(h))}{\partial y} - \frac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial y}\right| < \varepsilon,$$

čímž je (12) dokázáno.

Ježto $\frac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial y} \neq 0$ (viz (4)), plyne z (8) a z (10), (12) podle pravidla o limitě podílu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial F(x_1 + \Theta_1 h, f(x_1))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x_1 + h, f(x_1) + \Theta_2 k(h))}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x_1, f(x_1))}{\partial y}}.$$

Tím je tvrzení A) dokázáno, neboť x_1 byl libovolný bod intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$. Spojitost funkce $f'(x)$ v tomto intervalu je patrná ze vzorce (6), neboť do spojitých funkcí $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ dosazujeme za y spojitou funkci $f(x)$ ($f(x)$ je spojitá, protože má derivaci).

Tím je zároveň dokázáno tvrzení II pro $n = 1$. Budiž tedy $n > 1$; máme ještě dokázat existenci a spojitost derivací $f^{(k)}(x)$ pro $2 \leqq k \leqq n$ v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$. Proveďme to napřed – pro větší názornost – pro $k = 2$. Ježto předpokládám spojitost parciálních derivací funkce $F(x, y)$ v intervalu L (a tedy též v intervalu K) až do řádu $n \geqq 2$ mají funkce $\frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial F(u, v)}{\partial v}$ v intervalu K spojité parciální derivace 1. řádu. Dosadíme-li sem $u = x$, $v = f(x)$, kde $|x - x_0| < \Delta_1$, vidíme podle věty 176 (ježto bod $[x, f(x)]$ leží v K), že existují derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, f(x))\right) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u\, \partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial v}(x, f(x))\right) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v\, \partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

kde ovšem vpravo za u, v dosazujeme $x, f(x)$; je pak ovšem $\frac{du}{dx} = 1$, $\frac{dv}{dx} = f'(x)$. Podle pravidla o derivování podílu existuje tedy derivace pravé a tedy i levé strany rovnice (6), a je

$$f''(x) = \tag{14}$$

$$= - \frac{\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} y'\right) \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} y'\right)}{\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)^2},$$

kde vpravo jsem zase psal písmena x, y místo u, v; přitom y značí $f(x)$, y' značí $f'(x)$. Tím je existence a zřejmě i spojitost funkce $f''(x)$ v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ dokázána.

Důkaz pro obecné k půjde ovšem indukcí. Tvrdím toto: budiž k celé, $1 \leqq k \leqq n$;[4]) potom platí

tvrzení C_k: V intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ existuje spojitá derivace $f^{(k)}(x)$ a je

$$f^{(k)}(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-k} . V_k(x), \tag{15}$$

kde $V_k(x)$ je součet konečného počtu členů tvaru

$$c F_1(x, f(x)) F_2(x, f(x)) \dots F_r(x, f(x)) Y_1(x) . Y_2(x) \dots Y_s(x), \tag{16}$$

přičemž $F_j(x, y)$ značí nějakou parciální derivaci funkce F až do řádu k, $Y_j(x)$ nějakou derivaci funkce $f(x)$ až do řádu $k - 1$ (může být též $s = 0$, tj. činitelé $Y_1, \dots$ $\dots, Y_s$ mohou chybět).

Podle vzorce (6) je tvrzení C_k správné pro $k = 1$ (podle vzorce (14) též pro $k = 2$). Stačí tedy dokázat ještě toto: Buďte tvrzení $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, C_k$ správná pro jistou hodnotu k ($1 \leqq k < n$); potom je správné též tvrzení C_{k+1}.[5])

Důkaz tvrzení C_{k+1}: Omezme se – aniž to budeme stále zdůrazňovat – na hodnoty x intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$. Podle věty o derivování mocniny, součinu a složené funkce bude se derivace pravé a tedy i levé strany rovnice (15) rovnat

$$- k \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-k-1} . \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right) V_k(x) + \tag{17}$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-k} \frac{dV_k(x)}{dx},$$

---

[4]) Předpokládám $n > 1$, ježto pro $n = 1$ je důkaz již hotov.

[5]) Ježto tvrzení C_1 je správné, bude tím dokázáno, že je správné tvrzení C_2, tedy též C_3, tedy $C_4, \dots$, tedy C_{n-1}, tedy C_n.

pokud ovšem existují derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right), \quad \frac{\mathrm{d}V_k(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Ale první z těchto derivací existuje podle věty 176 $\left(\text{zde jde o funkci } \frac{\partial F(u, v)}{\partial v}\right.$, kde $\left. u = x,\ v = f(x)\right)$ a rovná se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} f'(x), \tag{18}$$

kde do výsledku dosazujeme $f(x)$ za y. Derivace funkce $V_k(x)$ se rovná součtu derivací jednotlivých součinů (16) a derivace každého takového součinu se rovná součtu členů, v nichž se vždy všichni činitelé až na jeden nechají beze změny a tento činitel se derivuje – pokud ovšem jeho derivace existuje. Jde tedy o derivování těchto funkcí proměnné x:

$$F_j(x, f(x)), \quad Y_j(x).$$

Funkce $F_j(u, v)$ je nějakou parciální derivací funkce F řádu nejvýše $k < n$; tedy má ještě spojité parciální derivace 1. řádu a tedy totální diferenciál; ježto existuje $f'(x)$ (podle C_1), je podle věty 176

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_j(x, f(x))) = \frac{\partial F_j}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F_j}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x);$$

parciální derivace vpravo jsou nějaké parciální derivace funkce F, řádu nejvýše $k + 1$. Dále je $Y_j(x)$ nějaká derivace funkce $f(x)$ řádu nejvýše $k - 1$, třeba $Y_j(x) = f^{(l)}(x)$, $l \leqq k - 1$, takže podle tvrzení $C_1, \ldots, C_k$ existuje $\frac{\mathrm{d}Y_j(x)}{\mathrm{d}x} = f^{(l+1)}(x)$, přičemž $l + 1 \leqq k$. Tedy vskutku existuje $\frac{\mathrm{d}V_k(x)}{\mathrm{d}x}$ a bude zase součtem výrazů tvaru (16), až na to, že F_j může značit derivace až do řádu $k + 1$, Y_j derivace až do řádu k. Je tedy vidět, že existuje derivace pravé a tedy i levé strany rovnice (15), tj. že existuje (viz (17), (18))

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-k-1} \bigg\{ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}V_k(x)}{\mathrm{d}x} - \\ - k\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) f'(x)\right) \cdot V_k(x)\bigg\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Označíme-li výraz ve vlnité závorce $V_{k+1}(x)$, je vidět, že $V_{k+1}(x)$ je opět součet výrazů tvaru (16), až na to, že $F_j(u, v)$ může značit parciální derivaci funkce F až do řádu $k + 1$ (místo k), a že $Y_j(x)$ může značit derivaci funkce f až do řádu k (místo $k - 1$). Spojitost pravé a tedy i levé strany rovnice (19) je pak patrná z toho, že parciální derivace funkce $F(u, v)$ až do řádu $k + 1$ (ba dokonce až do řádu n) jsou spojité a že $f^{(k)}(x)$ (a tedy i $f^{(k-1)}(x), \ldots, f'(x), f(x)$) je spojitá podle C_k. Tím je tvrzení C_{k+1} dokázáno.

Poznámka 2. Poslední indukce (krok z C_k na C_{k+1}) byla trochu nudná; ale ukazuje přece jednu pozoruhodnou vlastnost. Vlastně nám šlo jenom o důkaz tohoto *tvrzení* D_k (pro $1 \leqq k \leqq n$): *V intervalu* $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ *existuje spojitá derivace* $f^{(k)}(x)$. Místo toho jsme dokázali obšírněji tvrzení C_k: v intervalu $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ existuje spojitá derivace $f^{(k)}(x)$ *a má tvar, popsaný v* (15), (16).

Přidělali jsme si snad zbytečnou práci? Nikoliv, neboť s tvrzením D_k bychom nedovedli provést indukci: předpokládejme, že tvrzení $D_1, D_2, \ldots, D_k$ jsou správná, tj. že existují spojité derivace $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$. Zde není vůbec vidět, jak dokázat tvrzení D_{k+1}, neboť ze spojitosti funkce $f^{(k)}(x)$ ještě nikterak neplyne existence její derivace. Tato okolnost se často vyskytuje při úplné indukci: máme-li dokázat indukcí, že nějaký výrok A_k (závislý na k) platí pro $k = 1, 2, \ldots$, stačí dokázat toto: 1. Výrok A_1 platí. 2. Platí-li výrok A_k pro jisté přirozené číslo k, platí i výrok A_{k+1}.[6]) Leckdy se druhý krok nedá provést a tu si často vypomáháme způsobem, který jsme právě viděli při tvrzení C_k: vedle výroku A_k dokážeme současně ještě druhý výrok B_k, a to tak, že dokážeme: 1. Výroky A_1, B_1 platí. 2. Platí-li výroky A_k, B_k pro jisté celé $k \geqq 1$, platí i výroky A_{k+1}, B_{k+1}.[7]) Tím jsou dokázány výroky A_k, B_k pro $k = 1, 2, 3, \ldots$; tedy máme dokázán žádaný výrok A_k (a vedle něho též — jako vedlejší výsledek — výrok B_k, který nás ovšem leckdy nezajímá).

Poznámka 3. Ve větě 179 byla $f(x)$ ona *jediná* hodnota y, jež vyhovuje podmínkám $F(x, y) = 0$, $|y - y_0| < \Delta_2$. Pro $x = x_0$ vyhovuje těmto podmínkám hodnota $y = y_0$ (neboť $F(x_0, y_0) = 0$). Je tedy $f(x_0) = y_0$, tj. „křivka" $y = f(x)$ prochází bodem $[x_0, y_0]$, z něhož jsme vyšli.

Poznámka 4 (velmi důležitá pro početní praxi). Označme $J = (x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$, $J_1 = (x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1) \times (y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$. Čísla Δ_1, Δ_2 byla v důkazu věty 179 volena tak, že $F(x, y)$ má v J_1 spojité parciální derivace až do n-tého řádu, přičemž $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Je-li $x \in J$, leží podle tvrzení I bod $[x, f(x)]$ v intervalu J_1. Ukázali jsme, že $f(x)$ má v J spojité derivace až do řádu n-tého; ty by se daly počítat postupným derivováním vzorce (6) (to jsme provedli pro $f''(x)$ a vlastně jsme tímto způsobem prováděli i obecný důkaz existence těchto derivací). Ale pohodlnější a *v praxi téměř výhradně používaný* způsob pro počítání derivací funkce $f(x)$ je tento:

---

6) Při C_k byl postup zdánlivě trochu jiný: předně se indukce končila u hodnoty $k = n$, za druhé vypadal druhý krok takto: Platí-li $C_1, C_2, \ldots, C_k$, platí i C_{k+1}. Malou formální změnou by se toto schéma dalo převést na obvyklé schéma úplné indukce; viz cvičení 5.

7) Vtip je právě v tom: často je těžko ukázat, že z A_k plyne A_{k+1}, ale dá se ukázat, že ze správnosti *obou* výroků A_k, B_k plyne správnost výroků A_{k+1}, B_{k+1}.

Pro všechna $x \in J$ je $F(x, f(x)) = 0$; všechny derivace levé strany se tedy rovnají (v intervalu J) derivacím pravé strany, tj. rovnají se nule. Derivace levé strany mohu však počítat opětovným použitím věty 176, v níž položím $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = f(x)$ $\left(\text{tedy ovšem } \frac{d\varphi}{dx} = 1, \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \text{ atd.}\right)$. Stačí si uvědomit, že v intervalu J_1 má funkce $F(u, v)$ spojité parciální derivace až do řádu n-tého, takže každá parciální derivace řádu nižšího než n-tého má ještě spojité parciální derivace 1. řádu a tedy totální diferenciál. Tak dostáváme postupným derivováním rovnice $F(x, f(x)) = 0$ tyto rovnice[8])

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y' = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y'' = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} y' + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} (y')^3 + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y'' +$$
$$+ 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y''' = 0 \text{ atd.}$$

Znám-li pro nějakou hodnotu x příslušnou hodnotu y (tj. $f(x)$), vypočtu z první rovnice y' $\left(\text{to je možné, ježto } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right)$, potom z druhé rovnice y'', z třetí y''' atd., pokud ovšem dovedu počítat parciální derivace funkce F. Tohoto způsobu výpočtu se téměř výhradně užívá v praxi. Přesto však nebyl důkaz tvrzení II věty 179 zbytečný; neboť použití rovnic (20) je teprve tehdy oprávněno, vím-li již odjinud, že existují derivace y', y'', ... — a tuto existenci jsme právě v tvrzení II dokázali.

Poznámka 5. Je-li dána rovnice $F(x, y) = 0$, je jí za jistých předpokladů a s jistými omezeními[9]) definováno y jakožto funkce x; říká se, že „y je implicitní funkce x" nebo snad lépe, že „y je rovnicí $F(x, y) = 0$ (a příslušnými omezeními) definováno implicitně jakožto funkce proměnné x", ježto se tato okolnost netýká podstaty funkce $f(x)$, nýbrž pouze způsobu jejího vyjádření. Např. rovnice $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ spolu s nerovností $y \geqq b$ („horní polokružnice") je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $y = b + \sqrt{r^2 - (a - x)^2}$; říkává se proto, že tato rovnice dává „explicitní vyjádření" funkce, jež je „implicitně" dána podmínkami $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, $y \geqq b$. K ilustraci uveďme dva příklady.

---

[8]) V nichž do parciálních derivací funkce $F(x, y)$ je třeba dosadit $f(x)$ za y; místo $f'(x)$, $f''(x)$, ... píši kratčeji y', y'', ... Má-li F v intervalu J_1 spojité parciální derivace všech řádů, mohu vzít n libovolně velké, takže v sestavování rovnic (20) mohu postupovat tak dlouho, jak chci.

[9]) Podrobně jsou tyto předpoklady a tato omezení — např. omezení bodů $[x, y]$ na interval $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1) \times (y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ — popsány ve větě 179.

Příklad 9. Vezměme „kružnici“

(21) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0\,.$$

Tato rovnice je splněna tehdy a jen tehdy, je-li buďto

(22a) $$y = b + \sqrt{r^2 - (a - x)^2}$$

nebo

(22b) $$y = b - \sqrt{r^2 - (a - x)^2}\,.$$

Vezmu-li nějaký bod $[x, y]$ na kružnici (21), různý od bodů $[a - r, b]$, $[a + r, b]$, mohu v blízkosti tohoto bodu užít věty 179, kde $F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2(y - b) \neq 0$. Funkce $f(x)$ z věty 179 je zde dána buďto rovnicí (22a) nebo (22b) podle toho, zda zvolený bod leží na horní nebo dolní polokružnici. Derivace příslušné funkce (22a) nebo (22b) dostaneme z rovnice (21) takto:

$$x - a + (y - b)\,y' = 0\,, \quad 1 + y'^2 + (y - b)\,y'' = 0\,,$$
$$3y'y'' + (y - b)\,y''' = 0, \ldots,$$

odkudž postupně (je $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, ježto bod $[x, y]$ leží na kružnici (21))

$$y' = -\frac{x - a}{y - b}\,, \quad y'' = -\frac{(y - b)^2 + (x - a)^2}{(y - b)^3} = -\frac{r^2}{(y - b)^3}\,,$$
$$y''' = -\frac{3r^2(x - a)}{(y - b)^5}\,, \ldots$$

Mohli jsme tyto derivace vypočíst též přímo z rovnic (22a), (22b), ale náš postup je zajisté pohodlnější.

Příklad 10. $x^2y^5 + x^4y - 2xy^3 + y^2 - 1 = 0$. Označme znakem $F(x, y)$ levou stranu této rovnice; vezmu-li nějaký bod, v němž je $F(x, y) = 0$, ale $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 5x^2y^4 + x^4 - 6xy^2 + 2y \neq 0$ – označme jej $[x_0, y_0]$ – lze všechny body, vyhovující rovnici $F(x, y) = 0$ a ležící dosti blízko bodu $[x_0, y_0]$, vyjádřit rovnicí $y = f(x)$, kterážto čára prochází bodem $[x_0, y_0]$ (tj. $f(x_0) = y_0$) a derivace y', y'', … funkce $f(x)$ lze počítat udanou metodou; tedy

$$2xy^5 + 4x^3y - 2y^3 + (5x^2y^4 + x^4 - 6xy^2 + 2y)\,y' = 0\,,$$
$$2y^5 + 12x^2y + (20xy^4 + 8x^3 - 12y^2)\,y' +$$
$$+ (20x^2y^3 - 12xy + 2)\,(y')^2 + (5x^2y^4 + x^4 - 6xy^2 + 2y)\,y'' = 0$$

atd. Jakmile znám jediný bod křivky $y = f(x)$ (tj. jakmile znám pro jedinou hodnotu x příslušnou hodnotu y), dovedu v tomto bodě počítat y', y'', …, tj. dovedu např.

stanovit tečnu, oskulační kružnici apod.; viz cvičení 1. Na tomto příkladě, v němž by obecné určení $y = f(x)$ naráželo na zásadní obtíže (rovnice $F(x, y) = 0$ je pátého stupně v y), je snad dosti jasně vidět význam věty 179.

Poznámka 6. Kdybychom ve větě 179 místo $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ předpokládali $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, platila by věta opět, ovšem s tou změnou, že bychom musili vyměnit x s y; zhruba řečeno, byla by množina M popsána v blízkosti bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí tvaru $x = f(y)$. Např. pro $F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$ (kružnice) platí v bodě $P'' = [a + r, b]$ (viz obr. 55) vztahy $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - a) = 2r \neq 0$; v blízkosti bodu P'', např. v intervalu J'', lze vyjádřit body vyšetřované kružnice rovnicí $x = a + \sqrt{r^2 - (y - b)^2}$.

Poznámka 7. Je-li v nějakém bodě $[x_0, y_0]$ současně $F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, mohou v blízkosti bodu $[x_0, y_0]$ nastat složitější případy. Např. pro $F(x, y) = x^2 + y^2$ (příklad 6) je v bodě $[0, 0]$: $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0$. Vskutku má tento bod zvláštní charakter: je, jak se říká, osamělým nebo izolovaným bodem množiny M.[10]) Pro $F(x, y) = x^2 - y^2$ (příklad 4) je v bodě $[0, 0]$ rovněž $F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ a tento bod má opět zvláštní – ale jiný – charakter: množina M se skládá ze dvou přímek $y = x$, $y = -x$, jež se protínají v bodě $[0, 0]$; říkává se proto, že množina M má v bodě $[0, 0]$ dvojný bod. Podrobnější vyšetření případu $F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ přesahuje rámec této knihy. Podotkl bych pouze, že v tomto případě mohou (jak jsme viděli), ale *nemusí* nastat složitější poměry. Např. budiž $F(x, y) = (2y - 3x)^2$ (příklad 3); množina M je zde velmi jednoduchá, je to přímka $2y - 3x = 0$, tj. $y = \frac{3}{2}x$. Množina M se zde tedy dokonce v *celém* svém rozsahu dá popsat rovnicí tvaru $y = f(x)$, tj. $y = \frac{3}{2}x$; přesto pro každý bod množiny M platí $\frac{\partial F}{\partial x} = -6(2y - 3x) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4(2y - 3x) = 0$.

Cvičení

1. Pro funkci $F(x, y)$ z příkl. 10 je $F(1, 1) = 0$. Zjistěte, že oskulační kružnice v bodě $[1, 1]$ má rovnici $(11x - 1)^2 + (11y - 6)^2 = 125$.

---

[10]) M značí stále množinu všech bodů $[x, y]$, jež vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$.

2. Křivka $y^2(2a - x) - x^3 = 0$ $(a > 0)$[11]) se nazývá kisoida. V každém bodě této křivky, s výjimkou bodu $[0, 0]$, lze užít věty 179. Zjistěte, že oskulační kružnice v bodě $[a, a]$ má rovnici $(3x + 7a)^2 + (3y - 8a)^2 = 125a^2$. Křivka se skládá ze dvou „větví" $y = \pm f(x)$ $(0 \leqq x < 2a)$; v bodě 0 má $f(x)$ derivaci zprava rovnou nule. Nakreslete si obrázek!

3. Křivka $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ neboli $(a^2 + x^2 + y^2)^2 = a^2(a^2 + 4x^2)$ $(a > 0)$ je tzv. Bernoulliova lemniskata. Její oskulační kružnice v bodě $[a\sqrt{2}, 0]$ má rovnici $(3x - 2a\sqrt{2})^2 + 9y^2 = 2a^2$ (zde musíte vzít x jako funkci y). Je patrná souměrnost podle obou os. Z druhého tvaru rovnice snadno vypočtete y^2; odtud snadno zjistíte, že počátkem procházejí dvě „větve" křivky, jejichž tečny v počátku jsou $y = x$, $y = -x$ (stačí se omezit na kladná x, y a z druhého tvaru rovnice počítat $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{y^2}{x^2}$ podle metod kap. XI).[12]) V ostatních bodech křivky lze užít věty 179. Rýsovat můžete křivku pomocí „parametrického vyjádření": zvolme číslo t a hledejme průsečíky — různé od počátku — křivky s přímkou $y = tx$; vyjde $x = \pm a\sqrt{2}\sqrt{1 - t^2} : (1 + t^2)$ (tedy přicházejí v úvahu jen hodnoty $|t| < 1$, tj. všechny body křivky — s výjimkou počátku — vyhovují nerovnosti $|y| < |x|$).[13])

4. Křivka $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$ je tzv. Descartesův list. Ve všech bodech kromě počátku lze užít věty 179 (popř. s poznámkou 6). Zjistěte, že oskulační kružnice v bodě $[\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a]$ má rovnici $(16x - 21a)^2 + (16y - 21a)^2 = 18a^2$. Pro rýsování užijme parametrického vyjádření: průsečík křivky (různý od počátku) s přímkou $y = tx$ má abscisu $x = 3at : (1 + t^3)$; vyloučeny jsou tedy hodnoty $t = 0, -1$. Připustím-li v rovnicích

$$x = 3at : (1 + t^3), \quad y = 3at^2 : (1 + t^3) \quad (t \neq -1) \tag{24}$$

též hodnotu $t = 0$, dostanu celou křivku (i s počátkem). Průběh křivky v okolí počátku vyšetřím třeba takto: rovnice křivky se nezmění, vyměním-li x s y; omezím se tedy na tu část křivky, pro kterou je $|y| \leqq |x|$, tj. $-1 < t \leqq 1$; tuto část křivky označme třeba K_1 (ostatní body křivky dostanu překlopením podle přímky $y = x$). Z (24) je vidět, že na křivce K_1 je bod $[x, y]$ blízko počátku tehdy a jen tehdy, je-li t blízko nuly. Pro malá $|t|$ (např. v intervalu $(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}})$) vyjde $\dfrac{dx}{dt} > 0$, takže x je rostoucí spojitou funkcí t; podle věty o inverzních funkcích (věta 114) jeví se t jako spojitá rostoucí funkce x (v intervalu $(-\infty, 2a\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$), mající derivaci $\dfrac{dt}{dx} > 0$ (věta 125).

---

[11]) To znamená ovšem: množina všech bodů $[x, y]$ vyhovujících této rovnici.

[12]) Říkáme proto, že lemniskata má v počátku dvojný bod.

[13]) Buďte dány dvě funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ v intervalu J. Probíhá-li t interval J, probíhá bod $[x, y]$ o souřadnicích

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{23}$$

jistou množinu M; říkáme pak, že rovnice (23) dávají parametrické vyjádření množiny M (t je „parametr"). Nejnázorněji si to můžeme představit třeba tak, že t udává čas, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ pak jsou souřadnice pohyblivého bodu v okamžiku t. Množina M je potom dráha tohoto bodu.

Příklad: rovnice $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(a > 0,\ b > 0)$ dávají parametrické vyjádření elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (proběhne-li t např. interval $\langle 0, 2\pi)$, proběhne bod $[x, y]$ právě jednou celou elipsu). Ve cvičení 3 je malá odchylka (rovnice mají tvar $x = \pm\varphi(t)$, $y = t(\pm\varphi(t))$; zavedením jiného parametru by se dala dvojznačnost znaménka odstranit).

Z druhé rovnice (24) plyne, že y se jeví jako funkce x, tj. $y = f(x)$ (pro $x < 2a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$),[14]) přičemž $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$. Pro $x = 0$, tj. pro $t = 0$ vyjde $\frac{dy}{dt} = 0$, tedy $\frac{dy}{dx} = 0$. Tedy: v blízkosti bodu $[0, 0]$ lze křivku K_1 psát ve tvaru $y = f(x)$; osa x je v počátku tečnou. Překlopením podle přímky $y = x$ dostávám druhou „větev" Descartesova listu, procházející počátkem, o rovnici $x = f(y)$; tečnou v počátku je osa y. Podobně jako u lemniskaty se zde jeví počátek jako „dvojný bod".

5. Indukce v důkazu tvrzení II věty 179 postupovala podle tohoto schématu: Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Pro $k = 1, 2, \ldots, n$ je předloženo jisté tvrzení C_k. Tato tvrzení $C_1, C_2, \ldots, C_n$ máme dokázat. Postupovali jsme takto: dokázali jsme, že C_1 platí; dále jsme dokázali: je-li k celé, $1 \leqq k < n$, a platí-li $C_1, C_2, \ldots, C_k$, platí též C_{k+1}.[15]) To je způsob zdánlivě poněkud odlišný od obvyklého schématu úplné indukce; dá se však na obvyklé schéma úplné indukce převést takto: je-li k libovolné přirozené číslo, budiž E_k toto tvrzení: „tvrzení C_r je správné pro každé přirozené $r \leqq \text{Min}\,(k, n)$". Potom lze vylíčený postup vyslovit také takto — z čehož je i jeho úplná formální shoda s obvyklým schématem úplné indukce patrná: 1. E_1 platí. 2. Je-li k přirozené číslo a platí-li E_k, platí i E_{k+1} (pro $k \geqq n$ je toto tvrzení triviální). Tedy platí všechna tvrzení E_k, tedy též E_n, tj. $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

[14]) Tím ovšem ještě není celá křivka K_1 vyčerpána; zbývají ještě body odpovídající hodnotám $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leqq t \leqq 1$.

[15]) Nemusíte se starat o to, *jaká* byla tvrzení C_k; jde zde o zcela obecnou úvahu.