Kapitola XIII. Funkce dvou proměnných

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1974. pp. 319--353.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401996

Kapitola XIII

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

§ **1. Funkce dvou proměnných.** V matematické teorii i v aplikacích se vyskytují vedle funkcí jedné proměnné též funkce většího počtu proměnných. Tak např. plocha P obdélníka o stranách x, y je $P = xy$, závisí tedy na dvou proměnných x, y; povrch kvádru o hranách x, y, z je $2(xy + yz + zx)$ a závisí tedy na třech proměnných x, y, z. Pro zjednodušení se zde omezíme na funkce *dvou* proměnných; věty, které v této kapitole odvodíme, dají se snadno přenést na funkce většího počtu proměnných.

Je pohodlné a účelné zavést geometrické názvosloví. Množinu všech uspořádaných dvojic číselných $[x, y]$ nazveme *rovinou* (což jsme již dříve učinili), množinu všech uspořádaných trojic číselných $[x, y, z]$ nazveme *prostorem*. Každou dvojici $[x, y]$ nazýváme *bodem* v rovině; čísla x, y jsou *souřadnice* tohoto bodu. Dva body $[x, y]$, $[\xi, \eta]$ považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, je-li $x = \xi$, $y = \eta$; píšeme potom $[x, y] = [\xi, \eta]$; nejsou-li tyto dva body stejné, píšeme $[x, y] \neq [\xi, \eta]$; to tedy znamená, že je buďto $x \neq \xi$ nebo $y \neq \eta$ (nebo obojí). Obdobně: uspořádanou trojici $[x, y, z]$ nazýváme bodem v prostoru, čísla x, y, z jsou jeho souřadnice. Dva body v prostoru $[x, y, z]$, $[\xi, \eta, \zeta]$ považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, je-li $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ a píšeme potom $[x, y, z] = [\xi, \eta, \zeta]$; nejsou-li tyto dva body stejné, píšeme $[x, y, z] \neq [\xi, \eta, \zeta]$.

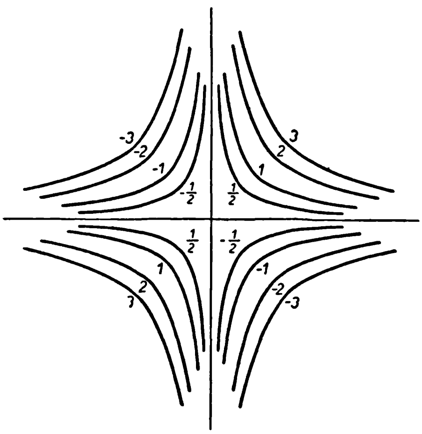
Budiž nyní M libovolná množina bodů v rovině (tj. množina číselných dvojic $[x, y]$); je-li každému bodu $[x, y]$ množiny M přiřazeno jisté reálné číslo z, říkáme, že z je *funkcí proměnných x, y v oboru M*; množina M je *obor* této funkce. Funkce dvou proměnných značíme podobně jako funkce jedné proměnné; je-li např. funkce označena písmenem f, značí $f(x, y)$ hodnotu funkce f v bodě $[x, y]$, tj. onu hodnotu z, jež je přiřazena dvojici $[x, y]$.

Příklad 1. Funkce f budiž definována rovnicí $f(x, y) = \dfrac{2^{x^2y}}{x - y}$ pro všechna x, y, pro něž tento výraz má smysl. Oborem této funkce je tedy množina všech bodů $[x, y]$ v rovině, jež neleží na přímce $y = x$ (tj. jež nevyhovují rovnici $x = y$). Je např. $f(2, \frac{1}{2}) = \dfrac{2^{4 \cdot \frac{1}{2}}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{8}{3}$, $f(\frac{1}{2}, 2) = \dfrac{2^{\frac{1}{4} \cdot 2}}{\frac{1}{2} - 2} = -\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$, kdežto např. symbol $f(1,1)$ nemá smyslu.

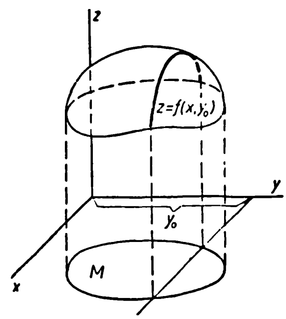
Jako u funkcí jedné proměnné užíváme i zde tzv. grafu. Budiž f funkce v oboru M; grafem této funkce nazýváme množinu všech bodů tvaru $[x, y, f(x, y)]$, tj množinu všech bodů $[x, y, z]$, kde $[x, y]$ je libovolný bod oboru funkce f a z je hodnota funkce f v bodě $[x, y]$. Říkáme někdy, že tento graf (tj. množina bodů $[x, y, z]$, vyhovujících rovnici $z = f(x, y)$) tvoří „plochu“, aniž ovšem přitom řešíme otázku, zda tato „plocha“ má vlastnosti, jež nám názor o jednoduchých plochách podává. Čtenář, který si vzpomíná ze školy na prostorové modely různých ploch, by možná tento „graf“ nazval spíše „modelem“.

Dvě funkce f, g považujeme za totožné tehdy a jen tehdy, mají-li týž obor M a platí-li v každém bodě $[x, y]$ oboru M rovnice $f(x, y) = g(x, y)$. Jinak řečeno: dvě funkce považujeme za totožné, mají-li týž graf.

Nejdokonalejší smyslovou představu o funkci $f(x, y)$ nám dává ovšem prostorový model plochy $z = f(x, y)$; na papíře si můžeme vypomoci metodami deskrip-



Obr. 45.



Obr. 46.

tivní geometrie, třeba šikmým nebo centrálním průmětem, nebo kótovaným promítáním: v rovině $[x, y]$ nakreslíme pro několik hodnot c „křivky $f(x, y) = c$“ (tj. pro každé takové c sestrojíme množinu oněch bodů $[x, y]$, pro něž je $f(x, y) = c$) a ke každé takové křivce připíšeme příslušnou hodnotu c. Viz obr. 45, kde je tento postup proveden pro funkci $z = xy$ (např. číslicí 2 je označena množina všech bodů $[x, y]$, pro něž je $xy = 2$).

Ještě jednu poznámku. Jestliže ve funkci $f(x, y)$ (její obor budiž M) položíme za y nějaké pevné číslo, třeba y_0, dostáváme výraz $f(x, y_0)$, který je funkcí *jediné* proměnné x; tato funkce je definována právě pro ty hodnoty x, pro něž bod $[x, y_0]$ patří do oboru M. Graf funkce $f(x, y_0)$ dostaneme, protneme-li „plochu“ $z = f(x, y)$ „rovinou“ $y = y_0$ (na obr. 46 je toto grafické znázornění silně vytaženo). Podobně dostaneme funkci $f(x_0, y)$ jedné proměnné y, dosadíme-li do $f(x, y)$ za x pevné číslo x_0.

Příklad 2. Pro funkci f z příkladu 1 dostáváme $f(x, y_0) = \dfrac{2^{x^2 y_0}}{x - y_0}$; tato funkce je definována pro všechna $x \neq y_0$. Např. $f(x, 0) = \dfrac{1}{x}$ (pro $x \neq 0$), $f(x, 2) = \dfrac{4^{x^2}}{x - 2}$ (pro $x \neq 2$) a obdobně $f(1, y) = \dfrac{2^y}{1 - y}$ (pro $y \neq 1$), $f(0, y) = -\dfrac{1}{y}$ (pro $y \neq 0$) atd.

Zavedeme ještě pojem *dvojrozměrného intervalu*. Jsou-li J_1, J_2 dva intervaly (v dosavadním smyslu, tzv. jednorozměrné intervaly) – omezené nebo neomezené – označujeme znakem $J_1 \times J_2$ množinu všech bodů $[x, y]$ v rovině, pro něž x leží v J_1, y v J_2. Množinu $J = J_1 \times J_2$ nazýváme pak dvojrozměrným intervalem. Jsou-li J_1, J_2 otevřené intervaly, nazýváme také interval $J_1 \times J_2$ otevřeným; budeme hlavně užívat *otevřených* dvojrozměrných intervalů.

Cvičení

1. Jsou-li $J_1 = (a, b)$, $J_2 = (c, d)$ omezené intervaly, je $J_1 \times J_2$ množina všech bodů $[x, y]$, pro něž je $a < x < b$, $c < y < d$; jsou to body uvnitř obdélníka, jejž čtenář snadno nakreslí. Čtenář nechť sám rozváží, jak vypadá otevřený interval $J_1 \times J_2$, je-li aspoň jeden z intervalů J_1, J_2 neomezený (je několik případů možných).

2. Vyšetřujte obecněji $J_1 \times J_2$ i pro ten případ, že J_1, J_2 jsou *jakékoliv* intervaly (třeba J_1 uzavřený, J_2 polouzavřený apod.); promyslete si všechny možné případy (rozdíl proti cvičení 1 je v tom, že si musíte přesně rozmyslit, které body ležící „na hranici" intervalu $J_1 \times J_2$ k němu patří a které nikoliv).

3. Zaveďte a promyslete si „trojrozměrné intervaly" $J_1 \times J_2 \times J_3$ (to je ovšem množina oněch bodů $[x, y, z]$, pro něž je $x \in J_1$, $y \in J_2$, $z \in J_3$; přitom jsou ovšem J_1, J_2, J_3 jednorozměrné intervaly).

§ 2. Spojitost a limita. Funkci $f(x, y)$ nazýváme spojitou v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže platí – přibližně řečeno – toto: leží-li bod $[x, y]$ blízko bodu $[x_0, y_0]$, tj. liší-li se x málo od x_0 a y málo od y_0, liší se $f(x, y)$ málo od $f(x_0, y_0)$. Přesně:

Definice 31. *O funkci $f(x, y)$ říkáme, že je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost*

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{1}$$

platí pro všechny body $[x, y]$, pro něž je $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$.[1])

Dále říkáme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu A, jestliže se – přibližně řečeno – hodnota $f(x, y)$ neomezeně blíží číslu A, když se bod $[x, y]$ – zůstávaje *různým* od bodu $[x_0, y_0]$ – blíží bodu $[x_0, y_0]$. Přesně:

[1]) Tj. pro všechny body intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$; tento interval je čtverec o středu (x_0, y_0) a o straně 2δ. V bodě (x_0, y_0) platí ovšem nerovnost (1) sama sebou, jakmile $f(x_0, y_0)$ je definováno, neboť levá strana se rovná nule.

Definice 32. *Funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ platí pro všechny body $[x, y]$ intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, jež jsou různé od bodu $[x_0, y_0]$.*

Věta 163. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla A, B jsou limitami funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}|B - A|$, takže $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují čísla $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tak, že platí

$$(2) \qquad |f(x, y) - A| < \varepsilon, \text{ je-li } [x, y] \neq [x_0, y_0],\ |x - x_0| < \delta_1,\ |y - y_0| < \delta_1\,;$$

$$(3) \qquad |f(x, y) - B| < \varepsilon, \text{ je-li } [x, y] \neq [x_0, y_0],\ |x - x_0| < \delta_2,\ |y - y_0| < \delta_2\,.$$

Zvolme x, y tak, že $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$, $|y - y_0| < \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; např. $x = x_0 + \frac{1}{2}\,\text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$, $y = y_0$. Potom platí (2) i (3), takže

$$|A - B| \leqq |A - f(x, y)| + |f(x, y) - B| < 2\varepsilon\,,$$

což je spor, neboť $|A - B| = 2\varepsilon$.

Poznámka 1. Důkaz věty 163 je zcela obdobný důkazu věty 101; pouze místo x se píše dvojice x, y a místo jedné nerovnosti tvaru $|x - x_0| < \delta$ se píše dvojice nerovností $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. V dalším výkladu často přenechávám čtenáři takové důkazy, které jsou zcela obdobné důkazům obdobných vět pro funkce jedné proměnné.

Limitu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ značíme znakem $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ nebo $\lim\limits_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y)$; někteří autoři píší $=$ místo $\to$. Srovnáním definice 31 s definicí 32 okamžitě plyne

Věta 164. *Funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ tehdy a jen tehdy, je-li $\lim\limits_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.*

Věta 165. *Budiž*[2]) $\lim f(x, y) = A$, $\lim g(x, y) = B$. *Potom je*

$$\lim |f(x, y)| = |A|,\quad \lim (f(x, y) + g(x, y)) = A + B\,,$$

$$\lim f(x, y)\, g(x, y) = AB \textit{ a v případě } B \neq 0 \textit{ též } \lim \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}\,.$$

Věta 166. *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $[x_0, y_0]$, jsou v tomto bodě spojité též funkce $|f(x, y)|$, $f(x, y) + g(x, y)$, $f(x, y)\, g(x, y)$ a v případě $g(x_0, y_0) \neq 0$ též funkce $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$.*

[2]) Pro zkrácení vynechávám někdy, nehrozí-li nedorozumění, znak $[x, y] \to [x_0, y_0]$.

Důkazy těchto dvou vět přenechávám čtenáři; viz obdobné důkazy vět 106, 97 provedené v kap. V, § 5.

Příklad 1. Je-li $f(x, y)$ konstantní (tj. má-li f ve všech bodech touž hodnotu), je f spojitá v každém bodě (neboť $f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0$ pro libovolné dva body $[x, y]$, $[x_0, y_0]$).

Příklad 2. Budiž $f(x, y) = x$ v každém bodě $[x, y]$, tedy např. $f(2, 5) = f(2, 0) = f(2, -3) = 2$, $f(7, 5) = 7$ atd.[3]) Tato funkce je spojitá v každém bodě $[x_0, y_0]$. Důkaz: budiž $\varepsilon > 0$; položme $\delta = \varepsilon$. Pro $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ je potom vskutku $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Podobně je funkce $g(x, y) = y$ spojitá v každém bodě.

Příklad 3. Obecněji lze např. každou funkci jedné proměnné pojímat jako funkci dvou proměnných, přesně řečeno takto: budiž $f(x)$ funkce v oboru M (obor M je tedy jistá množina na ose číselné). Definujme funkci $g(x, y)$ dvou proměnných takto: je-li $x \in M$, y libovolné, budiž $g(x, y) = f(x)$.[4]) Téměř samozřejmé je toto: funkce g je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ tehdy a jen tehdy, je-li f spojitá v bodě x_0. Neboť při spojitosti funkce g v bodě $[x_0, y_0]$ jde o splnění nerovnosti

$$|g(x, y) - g(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

tj. o splnění nerovnosti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $|x - x_0| < \delta$;[5]) ale tyto nerovnosti vystupují právě v definici spojitosti funkce $f(x)$ v bodě x_0 (definice 17).

Příklad 4. *Celistvou racionální funkcí* (nebo také mnohočlenem) proměnných x, y nazýváme součet konečného počtu členů tvaru $cx^k y^l$, kde c, k, l jsou konstanty, $k \geqq 0$ celé, $l \geqq 0$ celé; např. $2 + \sqrt{3} \,.\, x^2y + 4x^3 - \frac{1}{2}xy^3 + \pi y^2$ (o tomto mnohočlenu říkáme, že je stupně čtvrtého, protože v něm vystupuje součin xy^3, v němž součet mocnitelů při x, y je $1 + 3 = 4$, ale nevystupuje v něm žádný člen, v němž by byl součet mocnitelů větší než 4). Podle příkl. 1, 2 a podle věty 166 je každá celistvá racionální funkce spojitá v každém bodě. Tzv. *racionální funkce*, tj. podíl dvou celistvých racionálních funkcí, je spojitá v každém bodě, v němž je jmenovatel různý od nuly.

Možnost rozhodnout o spojitosti dalších funkcí dává nám věta o spojitosti složených funkcí. Zde jsou možné různé případy, např.:

I. Je $z = f(u)$, $u = \varphi(x)$, takže $z = f(\varphi(x))$; tento případ byl probrán v kap. V, věta 98.

II. Je $z = f(u)$, $u = \varphi(x, y)$, takže $z = f(\varphi(x, y))$ se jeví jako funkce dvou proměnných x, y.

---

[3]) Graf je „rovina $z = x$“; představte si to! Že hodnota funkce $f(x, y)$ vůbec nezávisí na y, nýbrž jenom na x, nevadí: každé dvojici $[x, y]$ je přiřazeno určité číslo, totiž právě číslo x.

[4]) Graf funkce g dostanete ovšem takto: v rovině x, z provedete graf funkce f a každým bodem křivky $z = f(x)$ vedete rovnoběžku s osou y.

[5]) Nerovnost $|y - y_0| < \delta$ je zde bezvýznamná, ježto $f(x)$, $f(x_0)$ nezávisí vůbec na y, y_0.

III. Je $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, takže $z = f(\varphi(x), \psi(x))$ se jeví jako funkce jedné proměnné x.

IV. Je $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, takže $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ se jeví jako funkce dvou proměnných x, y.

K tomu přistupují ještě další případy, např. $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x)$, takže $z = f(\varphi(x, y), \psi(x))$ se jeví jako funkce dvou proměnných x, y atd. Stačí probrat nejsložitější případ IV; ostatní případy jsou v něm obsaženy, neboť funkce jedné proměnné $f(u)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ atd., v nich se vyskytující, lze podle příkl. 3 pojímat jako funkce dvou proměnných, přičemž se spojitost nemění.

Věta 167. *Funkce $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ buďte spojité v bodě $[x_0, y_0]$; funkce $f(u, v)$ budiž spojitá v bodě $[u_0, v_0]$, kde klademe $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Potom je funkce (proměnných x, y) $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 98; ale proveďme jej. Budiž $\varepsilon > 0$; máme dokázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$|f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) - f(\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0))| < \varepsilon \tag{4}$$

pro $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. K číslu ε existuje $\eta > 0$ tak, že pro $|u - u_0| < \eta$, $|v - v_0| < \eta$ je

$$|f(u, v) - f(u_0, v_0)| < \varepsilon\,. \tag{5}$$

K číslu η existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že je

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| < \eta, \quad \text{tj.} \quad |\varphi(x, y) - u_0| < \eta \tag{6}$$

pro $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$ a

$$|\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)| < \eta, \quad \text{tj.} \quad |\psi(x, y) - v_0| < \eta \tag{7}$$

pro $|x - x_0| < \delta_2$, $|y - y_0| < \delta_2$. Položme $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; je-li $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, platí nerovnosti (6), (7) a tedy též nerovnost (5), píšeme-li v ní $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ místo u, v; to je však právě hledaná nerovnost (4), neboť $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$.

Příklad 5. Funkce $\sin(xy)$ je spojitá v každém bodě. Důkaz: položme $z = \sin u$, $u = xy$; xy je spojitá v každém bodě, $\sin u$ rovněž.

Příklad 6. Funkce $\dfrac{x^y}{x - y}$ je spojitá v každém bodě $[x_0, y_0]$, kde $x_0 > 0$, $x_0 \neq y_0$. Důkaz: pro $x > 0$ je $x^y = e^{y \lg x}$. Funkce $\lg x$[6]) je spojitá v každém bodě $[x, y]$, kde $x > 0$; funkce y[6]) rovněž; totéž platí tedy o součinu $y \,.\, \lg x$. Funkce e^u je spojitá v každém bodě u; tedy je $e^{y \lg x}$ spojitá v každém bodě $[x_0, y_0]$, kde $x_0 > 0$. Funkce $x - y$ je spojitá a různá od nuly v každém bodě $[x_0, y_0]$, kde $y_0 \neq x_0$. Tedy je podíl

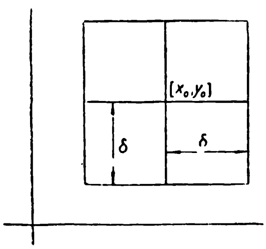
[6]) Pojímaná jako funkce dvou proměnných x, y; viz příkl. 3.

$x^y : (x - y)$ spojitý v každém bodě $[x_0, y_0]$, pro nějž je $x_0 > 0$, $x_0 \neq y_0$. Probíral jsem příklady 5, 6 schválně trochu rozvláčně; zkušený čtenář pozná spojitost takových funkcí téměř na první pohled.

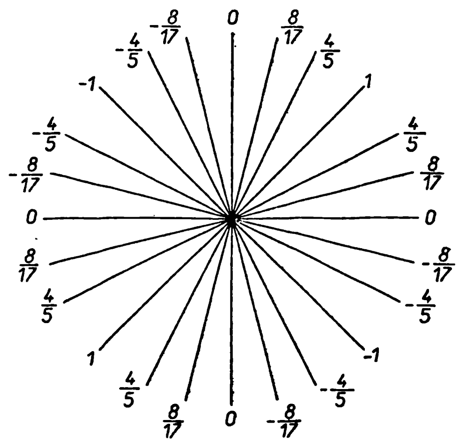
Jestliže ve funkci $f(x, y)$ dosadíme za y pevnou hodnotu y_0, dostáváme funkci jediné proměnné x, totiž $f(x, y_0)$. Platí pak tato věta:

Věta 168. *Je-li funkce $f(x, y)$ (dvou proměnných x, y) spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, je funkce $f(x, y_0)$ (jedné proměnné x) spojitá v bodě x_0 a funkce $f(x_0, y)$ (jedné proměnné y) spojitá v bodě y_0.*

Důkaz. Položme pro větší jasnost $g(x) = f(x, y_0)$. Budiž $\varepsilon > 0$; podle předpokladu existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ platí pro $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$;[7]) speciálně platí tedy tato nerovnost pro všechny body $[x, y]$, pro něž je $|x - x_0| < \delta$, $y = y_0$,[8]) takže pro $|x - x_0| < \delta$ je $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, tj. $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, čímž je první tvrzení dokázáno.



Obr. 47.



Obr. 48.

Podobně se dokáže druhé tvrzení (viz silně vytaženou svislou úsečku na obr. 47). Někdy se vyslovuje obsah této věty též takto: funkce $f(x, y)$, jež je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, je v tomto bodě „spojitá vzhledem k proměnné x" a též „spojitá vzhledem k proměnné y". Obrátit se tato věta nedá, jak ukazuje tento zajímavý

Příklad 7. Budiž

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \tag{8}$$

pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$. Funkce f je spojitá v každém bodě různém od počátku (racionální funkce!). Pro všechna x je $f(x, 0) = 0$ (pro $x \neq 0$ to plyne z rovnice (8), pro $x = 0$ z rovnice $f(0, 0) = 0$); pro všechna y je $f(0, y) = 0$. V bodě $[0, 0]$ je tedy funkce f spojitá „vzhledem k x" i „vzhledem k y". Ale funkce $f(x, y)$ není

[7]) Tj. pro všechny body uvnitř čtverce nakresleného na obr. 47.

[8]) Tj. pro všechny body, ležící na silně vytažené vodorovné úsečce na obr. 47.

spojitá v bodě $[0, 0]$. Neboť $f(0, 0) = 0$, kdežto v libovolné blízkosti bodu $[0, 0]$ leží body, pro něž je $f(x, y) = 1$; stačí totiž volit $x \neq 0$ (ale libovolně blízko nule) a potom volit $y = x$, načež podle (8) je $f(x, x) = 2x \cdot x : (x^2 + x^2) = 1$. Průběh této funkce v okolí počátku je vůbec zajímavý; sledujme jej na kótovaném průmětu, viz obr. 48. Na obou osách (tj. pro $x = 0$ nebo $y = 0$) je $f(x, y) = 0$. Je-li $y = kx$ ($k \neq 0$, $x \neq 0$, tj. leží-li bod $[x, y]$, různý od počátku, na přímce o směrnici k, jdoucí počátkem), je $f(x, y) = \dfrac{2k}{k^2 + 1}$ (na obr. 48 jsou zakresleny přímky o směrnici $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$; v počátku je $f(0, 0) = 0$, což ovšem z obrázku není patrné). Blíží-li se bod počátku např. po přímce $y = 2x$, je stále $f(x, y) = \frac{4}{5}$, pokud se nedostanu do počátku; v počátku skočí náhle funkce f na nulu. Pouze postupuji-li po ose x nebo y, nenastane žádný skok. Snad si čtenář už dovede učinit představu o průběhu funkce $f(x, y)$; zároveň vidí, jak složitý může být průběh funkcí dvou proměnných, i takových, jež jsou dány velmi jednoduchými početními výrazy. Obdobně k větě 168 platí podobná věta o limitách:

Věta 169. *Existuje-li limita* $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = A$, *je též* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x_0, y) = A$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje-li první limita, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ je $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Jestliže tedy platí $0 < |x - x_0| < \delta$, je $|f(x, y_0) - A| < \varepsilon$ (neboť $[x, y_0] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \delta$, $|y_0 - y_0| < \delta$) a obdobně: je-li $0 < |y - y_0| < \delta$, je $|f(x_0, y) - A| < \varepsilon$.

Příklad 8. Obrátit se tato věta nedá; je-li f funkce z příkl. 7, je $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = 0$, ale $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$ neexistuje, jak je patrné z diskuse podané v příkl. 7.

Poznámka 2. Pojmy „spojitost" a „limita" mají i u funkcí dvou proměnných lokální charakter: je-li $[x_0, y_0]$ bod, je-li $\delta > 0$ a je-li $f(x, y) = g(x, y)$ ve všech bodech intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, potom platí: je-li f spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, je též g spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. Podobně pro limitu v bodě $[x_0, y_0]$; při limitě nezáleží dokonce ani na hodnotě funkce v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámka 3. Budiž J dvojrozměrný otevřený interval; je-li funkce f spojitá v každém bodě intervalu J, říkáme krátce, že je *spojitá v intervalu* J. Z poznámky 2 plyne: je-li $f(x, y) = g(x, y)$ ve všech bodech intervalu J a je-li f spojitá v J, je též g spojitá v J.

Cvičení[9])

1. Je-li $\lim f(x, y) = \lim h(x, y) = A$ a existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ je $f(x, y) \leqq g(x, y) \leqq h(x, y)$, je též $\lim g(x, y) = A$.

[9]) Znak $[x, y] \to [x_0, y_0]$ vynechávám.

2. Je-li $\lim f(x, y) < \lim g(x, y)$, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ je $f(x, y) < g(x, y)$.

3. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ je $f(x, y) \leqq g(x, y)$ a existují-li $\lim f(x, y)$, $\lim g(x, y)$, je $\lim f(x, y) \leqq \lim g(x, y)$.

4. Vyslovte speciální případy cvičení 2, 3, je-li některá z funkcí f, g konstanta.

5. Rovnice $\lim f(x, y) = 0$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $\lim |f(x, y)| = 0$.

6. Je-li $\lim g(x, y) = 0$ a existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ je $|f(x, y)| \leqq |g(x, y)|$,[10]) je též $\lim f(x, y) = 0$.

7. Funkce $f(x, y) = \dfrac{\lg (x : y)}{x^2 - y^2}$ je spojitá v každém bodě $[x, y]$, v němž je $xy > 0$, $x \neq y$.

8. Doplním-li definici funkce f z cvičení 7 definicí $f(x, x) = \dfrac{1}{2x^2}$ pro $x \neq 0$, je tato funkce spojitá i v každém bodě $[x_0, x_0]$, kde $x_0 \neq 0$. (Návod: je-li bod $[x, y]$ blízko bodu $[x_0, x_0]$, je buďto $x \neq y$, tj. $x = y\,(1 + \lambda)$, kde $\lambda \neq 0$ je blízko nuly, tedy $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2} \dfrac{\lg (1 + \lambda)}{(1 + \lambda)^2 - 1^2}$: zde je y blízko x_0, zlomek pak odhadnu podle zobecněné věty o přírůstku funkce. Nebo je $x = y$, tedy $f(x, y) = \dfrac{1}{2x^2}$, což je blízko $\dfrac{1}{2x_0^2}$) .

§ 3. Parciální derivace.

Dosaďme do funkce $f(x, y)$ za y pevnou hodnotu y_0; tím dostaneme funkci jedné proměnné x, totiž funkci $g(x) = f(x, y_0)$, Může se stát, že tato funkce $g(x)$ má derivaci v jistém bodě x_0, tj. že existuje

$$(9) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Tuto derivaci nazýváme parciální nebo částečnou derivací funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$. Podobně se může stát, že funkce $f(x_0, y)$ (to je funkce proměnné y) má derivaci v bodě y_0, tj. že existuje limita

$$(10) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h};$$

tuto derivaci nazýváme parciální nebo částečnou derivací funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$. Bod $[x_0, y_0]$ může být ovšem libovolný bod; pišme dále kratčeji x, y místo x_0, y_0. Parciální derivaci funkce f podle x v bodě $[x, y]$ značíme znakem $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ nebo $f'_x(x, y)$ nebo $f_x(x, y)$. Značíme-li funkci $f(x, y)$ písmenem z, píšeme též

[10]) Místo této nerovnosti by stačilo též $|f(x, y)| \leqq k|g(x, y)|$, kde k je jakákoliv konstanta.

$\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, z_x. Podobně značíme parciální derivaci podle y znakem $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ nebo $f'_y(x, y)$ atd. Podle definice je tedy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Zde je $[x, y]$ pevně zvolený bod; výraz za znamením lim je funkce proměnné h, jejíž limita se hledá. Z (11) a snad ještě lépe z (9) vidí čtenář, že se parciální derivace funkce f podle x v bodě $[x_0, y_0]$ hledá tak, jako by y byla konstanta: hledá se derivace funkce $f(x, y_0)$ v bodě x_0. Rovněž parciální derivace funkce f podle y (viz (10)) se hledá tak, jako by x byla konstanta. Můžeme tedy při hledání parciálních derivací vydatně užívat znalostí získaných v kap. VIII. Co bylo řečeno na konci předešlého paragrafu o lokálním charakteru pojmu spojitosti, platí zřejmě též pro pojem parciálních derivací.

Příklad 1. Budiž $z = 3x^2y + 2x + y^3 - 1 + \sin(xy^2)$. Potom je $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + 2 + y^2 \cos(xy^2)$ (na y se dívám jako na konstantu), $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 2xy \,.\, \cos(xy^2)$ (na x se dívám jako na konstantu).

Příklad 2. Budiž $z = x^y$; potom je pro $x > 0$: $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \lg x$.

Limity (11) závisí ovšem obecně na tom, *který* bod $[x, y]$ jsme zvolili; jeví se tedy $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ opět jako funkce proměnných x, y, jejichž derivace opět můžeme hledat. Tím dostáváme *parciální derivace druhého řádu* funkce f, jež značíme takto: derivaci $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)$, jež vznikne tím, že derivujeme funkci $\frac{\partial f}{\partial x}$ parciálně podle x, označujeme kratčeji znakem $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ (nebo $f''_{xx}(x, y)$ nebo $f_{xx}(x, y)$ atd.); derivujeme-li funkci $\frac{\partial f}{\partial x}$ parciálně podle y, obdržíme derivaci $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$,[11]) kterou značíme kratčeji $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ nebo f''_{xy} nebo f_{xy} (funkci f jsme napřed derivovali podle x, potom podle y). Derivujeme-li funkci $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciálně podle x, obdržíme derivaci $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, kterou

[11]) Znak (x, y) u f vynechávám, což se leckdy činí.

značíme kratčeji $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ nebo f''_{yx} nebo f_{yx} (funkci f derivujeme napřed podle y, potom podle x); derivujeme-li konečně funkci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ parciálně podle y, obdržíme derivaci $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, kratčeji $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nebo f''_{yy} nebo f_{yy}. Derivujeme-li derivace druhého řádu, vznikají parciální derivace třetího řádu atd. Např. $\dfrac{\partial^7 f(x, y)}{\partial x\, \partial x\, \partial y\, \partial x\, \partial y\, \partial y\, \partial y}$ značí parciální derivaci sedmého řádu, jež vznikne takto: funkci f derivujeme parciálně podle x, potom opět podle x, potom podle y, potom opět podle x a konečně třikrát po sobě podle y. Místo toho se kratčeji psává $\dfrac{\partial^7 f(x, y)}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x\, \partial y^3}$. Je nutné, aby si čtenář toto označení dobře uvědomil, aby později nevznikly omyly.

P ř í k l a d 3. Pro funkci z příkladu 1 je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y - y^4 \sin(xy^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6x + 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 6x + 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x \cos(xy^2) - 4x^2y^2 \sin(xy^2).$$

P ř í k l a d 4. Pro funkci z příkladu 2 je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y - 1)\, x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \lg x = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \lg^2 x.$$

V obou těchto příkladech nám vyšlo $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$. To nebyla náhoda, jak ukazuje tato věta:

Věta 170. *Jsou-li* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ *v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojité, platí v bodě* $[x_0, y_0]$ *rovnost* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$.

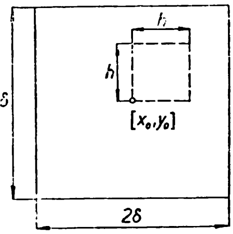
D ů k a z. Funkce $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ buďte spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Potom jistě existuje číslo $\delta > 0$ tak, že funkce $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ jsou definovány v intervalu (čtvercovém)

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta).$$

Pro $0 < h < \delta$ sestrojme funkci proměnné h

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0 + h,\, y_0 + h) - f(x_0 + h,\, y_0) - f(x_0,\, y_0 + h) + f(x_0,\, y_0)\right)$$
(12)

(závorka je sestrojena z hodnot funkce $f(x, y)$ ve vrcholech čárkovaného čtverce na obr. 49). Položím-li (při pevně zvoleném h)



Obr. 49.

$$(13) \qquad \varphi(y) = f(x_0 + h,\, y) - f(x_0,\, y)\,, \qquad \psi(x) = f(x,\, y_0 + h) - f(x,\, y_0)\,,$$

je podle (12)

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left(\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0)\right) = \frac{1}{h^2}\left(\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)\right).$$
(14)

Ježto $0 < h < \delta$, má funkce $\varphi(y)$ zřejmě derivaci v intervalu $\langle y_0, y_0 + h\rangle$ (i v krajních bodech) a je tedy v tomto intervalu spojitá; podle věty o přírůstku funkce je tedy

$$(15) \qquad \varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0) = h\,\varphi'(y_0 + \Theta_1 h) = h\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h,\, y_0 + \Theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0 + \Theta_1 h)\right),$$ [12]

kde $0 < \Theta_1 < 1$ (číslo Θ_1 ovšem závisí na h). Položme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \Theta_1 h) = g(x)$ (je to, při pevném h, a tedy pevném Θ_1, funkce proměnné x). Leží-li x v intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$, leží bod $[x, y_0 + \Theta_1 h]$ v intervalu $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta,\, y_0 + \delta)$ a tedy existuje derivace[13] $g'(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y_0 + \Theta_1 h)$. Věta o přírůstku funkce dává $g(x_0 + h) - g(x_0) = h\, g'(x_0 + \Theta_2 h)$, $0 < \Theta_2 < 1$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h,\, y_0 + \Theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0 + \Theta_1 h) = h\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0 + \Theta_2 h,\, y_0 + \Theta_1 h)\,.$$

Dosadím-li odtud do (15) a konečně do (14), dostávám

$$(16) \qquad F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0 + \Theta_2 h,\, y_0 + \Theta_1 h), \quad 0 < \Theta_1 < 1, \quad 0 < \Theta_2 < 1\,.$$

[12] $\frac{\partial f}{\partial y}(u, v)$ značí ovšem hodnotu parciální derivace funkce f podle y v bodě $[u, v]$; a podobně dále.

[13] Funkci $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivuji podle x.

Podobně (ale teď už trochu rychleji): je

$$\psi(x_0 + h) - \psi(x_0) = h\,\psi'(x_0 + \Theta_3 h) = \tag{17}$$

$$= h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_3 h,\ y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_3 h, y_0)\right),$$

kde $0 < \Theta_3 < 1$. Položím-li (při pevném h a tedy pevném Θ_3) $\gamma(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_3 h, y)$, je (pro $y \in \langle y_0, y_0 + h\langle$) $\gamma'(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0 + \Theta_3 h, y)$[14]) a tedy $\gamma(y_0 + h) - \gamma(y_0) = h \,.\, \gamma'(y_0 + \Theta_4 h)$, kde $0 < \Theta_4 < 1$, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_3 h,\ y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_3 h, y_0) = h\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0 + \Theta_3 h, y_0 + \Theta_4 h)$. Dosadím-li odtud do (17) a konečně do (14), dostávám

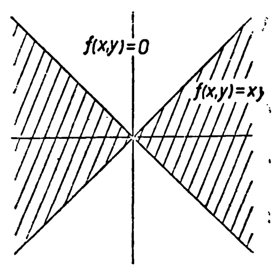
$$F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0 + \Theta_3 h, y_0 + \Theta_4 h), \quad 0 < \Theta_3 < 1,\ 0 < \Theta_4 < 1\,. \tag{18}$$

Ke každému h intervalu $(0, \delta)$ existují tedy čtyři čísla $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ intervalu $(0, 1)$ tak, že platí (16), (18). Ježto $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$, plyne z (16) a (18)

$$\lim_{h\to 0+} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0),\ \lim_{h\to 0+} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

Ježto levé strany těchto dvou rovnic jsou stejné, jsou stejné i pravé strany, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0)\,.$$



Obr. 50.

Poznámka 1. V druhém svazku tohoto Diferenciálního počtu je obsažena věta 192, jež je obecnější a tím i účinnější než naše věta 170. To umožňuje také zobecnit naši větu 171 — viz větu 197 v Diferenciálním počtu II. Neuvádím zde tyto obecnější věty, protože jejich důkaz vyžaduje jemnější limitní úvahy než důkaz věty 170.

Příklad 5. Nejsou-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ spojité, nemusí si být rovny, i když existují. Vezměme tuto funkci f: pro $|x| \geqq |y|$ (tj. ve šrafovaném oboru na obr. 50) budiž

[14]) Funkci $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivuji podle y.

$f(x, y) = xy$; pro $|x| < |y|$ budiž $f(x, y) = 0$. Zřejmě je $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ pro $y \neq 0$; pro $y = 0$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot 0 - 0}{h} = 0 .$$

Pro $x \neq 0$ je dále

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{xh - 0}{h}\ ^{15}) = x$$

a konečně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 .$$

Tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h \to 0} 0 = 0,$$

ale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1 .$$

Viz též cvičení 4.

Jsou-li parciální derivace druhého řádu funkce f spojité v nějakém otevřeném dvojrozměrném intervalu J, máme v tomto intervalu pouze tři podstatně různé derivace druhého řádu místo čtyř: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$. Úplnou indukcí snadno zjistíme, že obdobná věta platí i pro derivace vyšších řádů:

Věta 171. *Budiž n celé, $n \geqq 2$. Budiž $f(x, y)$ funkce, jež má v otevřeném dvojrozměrném intervalu J spojité parciální derivace až do řádu n-tého. Potom jsou tyto derivace (až do řádu n) záměnné v J, tj. hodnota takové derivace závisí pouze na tom, kolikrát se derivuje podle x a kolikrát podle y, nikoliv však na tom, v jakém pořadí se tyto derivace provádějí.*

D ů k a z. I. Pro $n = 2$ je věta 171 správná podle věty 170. II. Budiž $n > 2$ a předpokládejme, že tvrzení věty 171 je správné, píšeme-li v něm $n - 1$ místo n; máme dokázat, že tvrzení je správné i pro hodnotu n. Vyšetřujme všechny parciální derivace n-tého řádu funkce f, které vznikají tak, že se derivuje k-kráte podle x, m-kráte podle y, ale v různém pořadí ($k > 0$, $m > 0$, $k + m = n$). Máme dokázat,

[15]) Neboť pro $|h| \leqq |x|$ je $f(x, h) = xh$.

že v J jsou při daném k, m všechny tyto derivace stejné. Každá z těchto derivací vznikne buďto tak, že se funkce f derivuje napřed k-krát podle x a $(m - 1)$-krát podle y, tedy celkem $(n - 1)$-kráte (přičemž na pořadí nezáleží, ježto derivace řádu $n - 1$ jsou podle předpokladu záměnné), načež se výsledek derivuje podle y; nebo se derivuje funkce f napřed $(k - 1)$-kráte podle x a m-kráte podle y (přičemž opět nezáleží na pořadí) a výsledek se derivuje podle x. Takže všechny derivace, při nichž se derivuje k-kráte podle x a m-kráte podle y, mají tvar

$$\text{buďto } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^k\, \partial y^{m-1}}\right) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{k-1}\, \partial y^m}\right).$$

Ježto derivace až do řádu $n - 1$ jsou záměnné, lze první tvar též psát

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{m-1}\, \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{m-1}}\right)\right)^{16)}, \tag{19}$$

kdežto druhý je

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{m-1}\, \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{m-1}}\right)\right). \tag{20}$$

Ale podle předpokladu má funkce $\dfrac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{m-1}}$ v intervalu J spojité parciální derivace druhého řádu; podle věty 170 je tedy jedno, derivuji-li tuto funkci napřed podle x a potom podle y nebo napřed podle y a potom podle x. Tím je dokázáno, že se výraz (19) rovná výrazu (20).

Příklad 6. Praktický užitek této věty je značný; jsou-li předpoklady splněny např. pro $n = 3$, stačí místo osmi derivací třetího řádu počítat jen čtyři:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\left(= \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}\right),$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\left(= \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}\right),\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Že derivace, o něž běží, jsou spojité, poznáme často na první pohled, bez jejich výpočtu. Vezměme třeba $f(x, y) = x^y$ pro $x > 0$, tj. v intervalu $J = (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$. V intervalu J je $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \lg x$. Že parciální derivace

[16]) Pro $k = 1$ ovšem značí symbol ∂x^0, že se podle x vůbec nederivuje; např. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^0\, \partial y^2}$ značí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\dfrac{\partial^0 f}{\partial x^0\, \partial y^0}$ značí funkci f.

těchto funkcí $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v J, je vidět na první pohled;[17]) tedy stačí vypočíst $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)\,x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\lg x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \lg^2 x$. Že parciální derivace těchto tří funkcí jsou spojité v J, je opět patrné na první pohled;[17]) stačí tedy vypočíst $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ (proveďte to!).

Cvičení

1. Budiž $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ je $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. Budiž $f(x, y) = \lg(x^2 + y^2)$. Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

3. Budiž $f(x, y) = \lg \sqrt{\frac{(1-x)^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}}$, $g(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$. Pro $x^2 + y^2 \neq 1$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$. Ježto i parciální derivace druhého řádu jsou pro $x^2 + y^2 \neq 1$ spojité, dostanete derivováním posledních dvou rovnic (s užitím záměnnosti) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

4. Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ budiž $f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; položíme-li ještě $f(0, 0) = 0$, je f všude spojitá. Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ vyjde $\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$; dále snadno zjistíte, že $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$ a že $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou všude spojité. Derivace druhého řádu existují ovšem všude mimo počátek a jsou tam spojité. Ale také v počátku (tj. v bodě $[0, 0]$) existují derivace druhého řádu: $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x\,\partial y} = -1$, ale $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y\,\partial x} = 1$. Tedy: v počátku nejsou parciální derivace 2. řádu záměnné, ač je funkce definována velmi rozumným způsobem. Dokažte všechna tvrzení a ukažte též, že žádná parciální derivace druhého řádu není spojitá v počátku.

§ 4. Totální diferenciál. Zopakujte si před čtením tohoto paragrafu § 4 z kap. VIII. Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivace, platí toto: definuji-li funkci $\tau_1(h)$ rovnicí

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \,.\, h + \tau_1(h) \,.\, h\,, \tag{21}$$

[17]) Podle x se totiž derivuje mocnina nebo logaritmus, podle y mocnina nebo exponenciální funkce.

tj. položím-li

$$\tau_1(h) = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

je

(22) $$\lim_{h \to 0} \tau_1(h) = 0 .$$

Obdobně: definuji-li funkci $\tau_2(k)$ rovnicí

(23) $$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) . k + \tau_2(k) . k ,$$

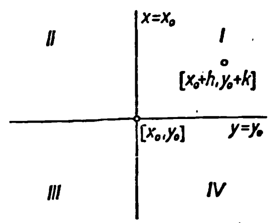
je

(24) $$\lim_{k \to 0} \tau_2(k) = 0 .$$

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ nám však neříkají nic o přírůstku $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$, leží-li bod $[x_0 + h, y_0 + k]$ *uvnitř* některého z kvadrantů *I*, *II*, *III*, *IV* (viz obr. 51), nýbrž popisují tento přírůstek (viz rovnice (21) až (24)) jenom pro ten případ, že bod $[x_0 + h, y_0 + k]$ leží buďto na přímce $x = x_0$ (tj. $h = 0$) nebo na přímce $y = y_0$ (tj. $k = 0$). Abychom mohli přírůstek funkce f

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

vyšetřovat obecně, postupujeme obdobně jako v kap. VIII, § 4: ptáme se, zda existují čísla A, B (nezávislá na h, k) tak, aby rozdíl



Obr. 51.

(25) $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk) = \zeta(h, k)$$

byl pro malé hodnoty $|h|$, $|k|$ podstatně menší než vzdálenost bodů $[x_0, y_0]$, $[x_0 + h, y_0 + k]$, tj. tak, aby bylo

(26) $$\lim_{[h,k] \to [0,0]} \frac{\zeta(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 .$$

Přepišme rovnici (26) na trochu obvyklejší tvar. Je

$$\sqrt{h^2 + k^2} \leqq |h| + |k| \leqq \sqrt{2}\sqrt{h^2 + k^2}$$ [18])

[18]) Důkaz: $h^2 + k^2 - 2|hk| = (|h| - |k|)^2 \geqq 0$, tedy $2|hk| \leqq h^2 + k^2$, tedy $h^2 + k^2 \leqq (|h| + |k|)^2 = h^2 + k^2 + 2|hk| \leqq 2(h^2 + k^2)$; odtud odmocněním plynou žádané nerovnosti.

a tedy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|\zeta(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq \frac{|\zeta(h,k)|}{|h|+|k|} \leqq \frac{|\zeta(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Rovnice (26) znamená tedy totéž co

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\zeta(h,k)}{|h|+|k|} = 0 \tag{27}$$

(viz cvičení 6 k § 2). Existují-li čísla A, B tak, že funkce $\zeta(h, k)$ definovaná rovnicí (25) vyhovuje rovnici (27), nazýváme výraz $Ah + Bk$ (což je funkce proměnných h, k) *totálním* (nebo *úplným*) *diferenciálem* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Položíme-li ještě $\eta(h, k) = \zeta(h, k) : (|h| + |k|)$, můžeme definici totálního diferenciálu vyslovit též takto:

Definice 33. *Buď dána funkce $f(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$. Existují-li dvě čísla A, B tak, že funkce $\eta(h, k)$, definovaná rovnicí*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + (|h| + |k|)\,\eta(h, k), \tag{28}$$

splňuje rovnici

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \eta(h, k) = 0, \tag{29}$$ [19])

nazýváme funkci $Ah + Bk$ (proměnných h, k) totálním diferenciálem funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Totální diferenciál dává tedy podle (28) přibližné vyjádření přírůstku $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ s chybou $(|h| + |k|)\,\eta(h, k)$, o jejíž velikosti nás informuje rovnice (29). Vedle totálního diferenciálu máme ještě pojem parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.[20]) Budeme nyní vyšetřovat, v jakém vztahu je totální diferenciál k parciálním derivacím.

Věta 172. *Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál $Ah + Bk$, existují v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a je*

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \qquad B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}. \tag{30}$$

Důkaz. Položíme-li v rovnici (28) $h \neq 0$, $k = 0$, dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A + \frac{|h|}{h}\,\eta(h, 0).$$

[19]) Obor funkce η je ovšem množina oněch bodů $[h, k] \neq [0, 0]$, pro něž je $f(x_0 + h, y_0 + k)$ definována. Že $\eta(h, k)$ není rovnicí (28) definováno pro $h = k = 0$, nevadí.

[20]) Jež dovedeme v mnohých případech počítat.

Z rovnice (29) plyne podle věty 169, že je též $\lim_{h \to 0} \eta(h, 0) = 0$. Tedy dostáváme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A,$$

čímž je první rovnice (30) dokázána. Druhá se dokáže obdobně (do (28) dosadíme $h = 0$, $k \neq 0$).

Věta 173. *Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál, je funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá.*

Důkaz. Z rovnic (28), (29) plyne ihned

$$\lim_{[h,k] \to [0,0]} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0).$$

Příklad 1. Víte, že funkce $f(x)$ jedné proměnné, která má v bodě x_0 derivaci, je jistě v bodě x_0 spojitá. Ale funkce dvou proměnných $f(x, y)$, jež má v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, nemusí být v tomto bodě spojitá.[21]) Příklad: volím-li $f(x, y) = 0$ pro $x = 0$ a pro $y = 0$ (tj. na obou osách souřadnic), $f(x, y) = 1$ pro $xy \neq 0$, je zřejmě $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$, ale funkce f není spojitá v bodě $[0, 0]$.

V kap. VIII, § 4 jsme viděli, že funkce jedné proměnné má v bodě x_0 diferenciál tehdy a jen tehdy, má-li funkce v bodě x_0 derivaci. Ale příklad právě probraný ukazuje, že funkce $f(x, y)$ dvou proměnných, která má v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivace, nemusí mít v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál;[22]) neboť uvedená funkce má v bodě $[0, 0]$ derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ale není v tomto bodě spojitá, a tedy nemá podle věty 173 v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál. Ale existence a *spojitost* derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ stačí k existenci totálního diferenciálu, jak ukazuje tato věta:

Věta 174. *Parciální derivace $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ buďte spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Potom má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál.*

Důkaz. Z předpokládané spojitosti plyne existence čísla $\delta > 0$ takového, že $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existují ve všech bodech intervalu $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.

[21]) To je pochopitelné: změníte-li funkci f uvnitř kvadrantů *I, II, III, IV* (viz obr. 51), nemá to vliv na existenci parciálních derivací v bodě $[x_0, y_0]$, ale spojitost v bodě $[x_0, y_0]$ se tím může porušit.

[22]) Větu 172 tedy nelze obrátit.

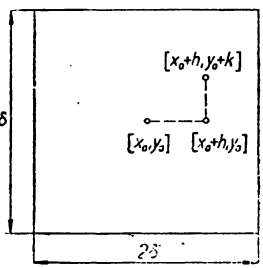
Budiž $[x_0 + h, y_0 + k]$ libovolný bod intervalu J, různý od bodu $[x_0, y_0]$ (viz obr. 52). Potom je

$$(31) \qquad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\ = (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)) + (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) .$$

Funkce $g(y) = f(x_0 + h, y)$ je (při pevném h, k) funkcí jediné proměnné y, jež má v intervalu $\langle y_0, y_0 + k \rangle$[23]) derivaci $g'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y)$ a tedy je v tomto intervalu podle věty 122 spojitá. Podle věty o přírůstku funkce je tedy pro $k \neq 0$

$$(32) \qquad \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) &= g(y_0 + k) - g(y_0) = \\ &= k\, g'(y_0 + \Theta_1 k) = k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \Theta_1 k) \, (0 < \Theta_1 < 1) , \end{aligned}$$

a tento vzorec platí i pro $k = 0$ (neboť potom jsou všechny výrazy v (32) rovny nule). Podobně: funkce $\gamma(x) = f(x, y_0)$ má v intervalu $\langle x_0, x_0 + h \rangle$[24]) derivaci $\gamma'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ a z věty o přírůstku funkce plyne pro $h \neq 0$



Obr. 52.

$$(33) \qquad \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) &= \gamma(x_0 + h) - \gamma(x_0) = \\ &= h\, \gamma'(x_0 + \Theta_2 h) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_2 h, y_0) \; (0 < \Theta_2 < 1) , \end{aligned}$$

což platí i pro $h = 0$. Dosadíme-li z (32), (33) do (31), dostaneme

$$(34) \qquad \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_2 h, y_0) + \\ &+ k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \Theta_1 k) . \end{aligned}$$

Položím-li

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_2 h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mu(h, k) ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \Theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda(h, k) ,$$

plynou ze spojitosti funkcí $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ rovnice

$$(35) \qquad \lim_{[h,k] \to [0,0]} \mu(h, k) = \lim_{[h,k] \to [0,0]} \lambda(h, k) = 0 ;$$

[23]) Je-li $k < 0$, je nutno psát $\langle y_0 + k, y_0 \rangle$.

[24]) Je-li $h < 0$, je nutno psát $\langle x_0 + h, x_0 \rangle$.

rovnici (34) lze pak psát

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + h\,\mu(h, k) + k\,\lambda(h, k)\,.$$

Zvolíme-li tedy v (25) za A, B čísla

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\text{[25]} \quad \text{je} \quad \zeta(h, k) = h\,\mu(h, k) + k\,\lambda(h, k)\,;$$

tedy

$$\frac{|\zeta(h, k)|}{|h| + |k|} \leqq \frac{|h| \,.\, |\mu(h, k)|}{|h| + |k|} + \frac{|k| \,.\, |\lambda(h, k)|}{|h| + |k|} \leqq |\mu(h, k)| + |\lambda(h, k)|\,;$$

tedy je podle (35)

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\zeta(h, k)}{|h| + |k|} = 0\,,$$

takže výraz

$$h \,.\, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \,.\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

je vskutku totálním diferenciálem.

Tato věta je často užitečná, ježto se v praxi často setkáváme s funkcemi, u nichž spojitost parciálních derivací dovedeme dokázat.

Poznámka 1. Definici diferenciálu u funkcí jedné i dvou proměnných lze dát ještě poněkud jiný tvar, jenž bývá pro aplikace pohodlnější.

U funkcí *jedné* proměnné není rovnicí (viz rovnici (25) v kap. VIII, § 4)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + h \,.\, \tau(h) \tag{36}$$

hodnota $\tau(h)$ definována pro $h = 0$ (pro $h = 0$ je rovnice (36) splněna, ať volíme $\tau(0)$ jakkoliv). Doplňme definici funkce $\tau(h)$ tím, že definujeme $\tau(0) = 0$. Potom rovnice $\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0$ znamená podle věty 103 totéž jako výrok „funkce $\tau(h)$ je spojitá v bodě 0“. Lze tedy definici diferenciálu funkce $f(x)$ vyslovit též takto:

Budiž $f(x)$ funkce, x_0 číslo. Budiž A číslo; položme $\tau(0) = 0$ a definujme $\tau(h)$ pro $h \neq 0$ rovnicí (36).[26] *Je-li funkce τ spojitá v bodě 0, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 diferenciál Ah.*

[25]) Podle věty 172 nemůže žádná jiná volba čísel A, B vést k cíli.

[26]) Rovnice (36) je ovšem splněna též pro $h = 0$. Obor funkce $\tau(h)$ je množina oněch čísel h, pro něž $f(x_0 + h)$ je definováno.

Obdobně u funkcí *dvou* proměnných: číslo $\eta(0, 0)$ není rovnicí (28) definováno; doplníme-li definici funkce $\eta(h, k)$ tím, že klademe $\eta(0, 0) = 0$, znamená rovnice (29) totéž jako spojitost funkce η v bodě $[0, 0]$. Lze tedy definici 33 vyslovit též takto: Budiž dána funkce $f(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$. Jsou-li A, B dvě čísla, položme $\eta(0, 0) = 0$ a definujme funkci $\eta(h, k)$ pro $[h, k] \neq [0, 0]$ rovnicí $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + (|h| + |k|)\, \eta(h, k)$.[27]) Je-li funkce η spojitá v bodě $[0, 0]$, nazýváme funkci $Ah + Bk$ totálním diferenciálem funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámka 2. Vezměme funkci $g(x, y)$, jež „nezávisí na y", takže existuje funkce $f(x)$ tak, že je $g(x, y) = f(x)$ (tj. má-li jedna strana této rovnice smysl, má i druhá smysl a obě strany jsou si rovny). Tvrdím: funkce g má v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál tehdy a jen tehdy, má-li funkce f v bodě x_0 diferenciál (tj. vlastní derivaci $f'(x_0)$) a oba diferenciály jsou si rovny. Důkaz: Především je patrné, že

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{a že} \quad \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

takže $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li $f'(x_0)$. Neexistuje-li $f'(x_0)$, neexistuje tedy (podle věty 172) ani totální diferenciál funkce g. Nechť za druhé existuje $f'(x_0)$. Potom je podle poznámky 1

$$g(x_0 + h, y_0 + k) - g(x_0, y_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \\ = f'(x_0)\, h + h\, \tau(h), \tag{37}$$

kde $\tau(0) = 0$ a $\tau(h)$ je spojitá v bodě 0. Klaďme $\lambda(h, k) = \tau(h)$, takže $\lambda(0, 0) = 0$ a funkce $\lambda(h, k)$ je podle § 2, příkl. 3 spojitá v bodě $[0, 0]$, takže $\lim_{[h,k] \to [0,0]} \lambda(h, k) = 0$ (věta 164). Jestliže pro $[h, k] \neq [0, 0]$ položíme

$$\eta(h, k) = \frac{h}{|h| + |k|}\, \lambda(h, k),$$

je podle (37)

$$g(x_0 + h, y_0 + k) - g(x_0, y_0) = f'(x_0)\, h + (|h| + |k|)\, \frac{h}{|h| + |k|} \cdot \tau(h) =$$

$$= f'(x_0)\, h + (|h| + |k|)\, \eta(h, k) \quad \text{pro} \quad [h, k] \neq [0, 0]\,;$$

dále je (pro $[h, k] \neq [0, 0]$) $|\eta(h, k)| \leq |\lambda(h, k)|$, takže je též $\lim_{[h,k] \to [0,0]} \eta(h, k) = 0$; podle definice 33 je tedy vskutku $f'(x_0) \,.\, h$ totálním diferenciálem funkce g v bodě $[x_0, y_0]$.

[27]) Tato rovnice je ovšem splněna též pro $h = k = 0$. Obor funkce $\eta(h, k)$ je množina těch bodů $[h, k]$, pro něž $f(x_0 + h, y_0 + k)$ je definováno.

Přejdeme nyní k obvyklému označení totálního diferenciálu. Totální diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ se značívá znakem $\mathrm{d}f(x, y)$, takže podle věty 172 je

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k,$$

existuje-li ovšem tento totální diferenciál (podle příkl. 1 se může stát, že totální diferenciál neexistuje, i když pravá strana má smysl). Je-li $f(x, y)$ dáno nějakým početním výrazem, píšeme totální diferenciál funkce f tak, že za symbol d napíšeme onen početní výraz, např. $\mathrm{d}(x^2y + xy^3) = (2xy + y^3)\,h + (x^2 + 3xy^2)\,k$. Speciálně pro $f(x, y) = x$ vyjde $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, tedy $\mathrm{d}x = h$ a obdobně $\mathrm{d}y = k$. Proto se proměnným h, k dává název „diferenciály nezávisle proměnných" a píše se místo nich $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$; totální diferenciál se potom píše ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \mathrm{d}y.$$

V daném bodě $[x, y]$ je totální diferenciál mnohočlenem nejvýše prvního stupně v proměnných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Jeho význam je v tom, že pro malé hodnoty $|\mathrm{d}x|$, $|\mathrm{d}y|$ dává přibližné vyjádření pro přírůstek funkce f, totiž pro číslo $f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)$; označíme-li tento přírůstek znakem $\Delta f(x, y)$, je míra přesnosti tohoto přiblížení dána rovnicemi (25), (26), (27), jež lze psát ve tvaru

$$\lim_{[\mathrm{d}x,\mathrm{d}y]\to[0,0]} \frac{\Delta f(x, y) - \mathrm{d}f(x, y)}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}} = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{[\mathrm{d}x,\mathrm{d}y]\to[0,0]} \frac{\Delta f(x, y) - \mathrm{d}f(x, y)}{|\mathrm{d}x| + |\mathrm{d}y|} = 0.$$

Cvičení

1. Mají-li funkce $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál, je $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y\, \partial x}$ (tato věta udává tedy novou podmínku, jejíž splnění zaručuje záměnnost parciálních derivací). Návod k důkazu: $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, takže existuje v jistém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Nyní počítáme jako v důkazu věty 170 až do rovnice (15). Zde píšeme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \Theta_1 h) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + h \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0) + \Theta_1 h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + (|h| + |\Theta_1 h|)\, \eta(h, \Theta_1 h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \Theta_1 h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \Theta_1 h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + |\Theta_1 h|\, \eta(0, \Theta_1 h),$$

kde $\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \eta(h, k) = 0$. Odečtením a dosazením do (15) a (14) vyjde

$$\lim_{h\to 0+} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0),$$

obdobně vyjde ze (17)

$$\lim_{h\to 0+} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0).$$

§ 5. Derivování složených funkcí. Zde jsou možné různé případy, např.: I. $z = f(u)$, $u = \varphi(x)$, tedy $z = f(\varphi(x))$. II. $z = f(u)$, $u = \varphi(x, y)$, tedy $z = f(\varphi(x, y))$. III. $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, tedy $z = f(\varphi(x), \psi(x))$. IV. $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, tedy $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$. Rozřešíme tyto případy postupně, ač bychom je mohli též řešit najednou. Komu se toto rozlišení nezdá zcela úplným, bude jistě uspokojen poznámkou 5.

Případ I byl rozřešen větou 126: existuje-li derivace funkce $\varphi(x)$ v bodě x_0 a derivace funkce $f(u)$ v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, existuje též derivace funkce $f(\varphi(x))$ v bodě x_0 a má hodnotu $\dfrac{\mathrm{d}f(u_0)}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi(x_0)}{\mathrm{d}x}$. [28]

Tuto větu vyjadřujeme obyčejně rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

kde ovšem $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ znamená derivaci funkce $\varphi(x)$, jež vyjadřuje u pomocí x; $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$ značí derivaci funkce $f(u)$, jež vyjadřuje z pomocí u, a to v bodě $u = \varphi(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ značí derivaci funkce $f(\varphi(x))$, jež vyjadřuje z pomocí x; rovnice $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ platí, má-li pravá strana smysl, tj. existuje-li $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ v bodě x a $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$ v bodě $u = \varphi(x)$.

Případ II. **Věta 175.** *Nechť má $\varphi(x, y)$ parciální derivaci podle x v bodě $[x_0, y_0]$; nechť má $f(u)$ derivaci v bodě $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$. Potom má též funkce $f(\varphi(x, y))$ v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivaci podle x, jejíž hodnota je*

$$\frac{\mathrm{d}f(u_0)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}$$

[28]) Znakem $\dfrac{\mathrm{d}f(u_0)}{\mathrm{d}u}$ rozumím derivaci funkce $f(u)$ v bodě u_0, znakem $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ rozumím parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$ apod.

Důkaz. Jde o parciální derivaci funkce $f(\varphi(x, y))$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$. Položme tedy $y = y_0$ a jde o derivaci funkce $f(\varphi(x, y_0))$ (jedné proměnné x) v bodě x_0. Ježto funkce $\varphi(x, y_0)$ (proměnné x) má v bodě x_0 derivaci $\frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}$ a ježto funkce $f(u)$ má derivaci $\frac{\mathrm{d}f(u_0)}{\mathrm{d}u}$ v bodě $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, plyne věta 175 z případu I, tj. z věty 126.

Poznámka 1. Tato věta se opět psává ve tvaru $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, přičemž rovnice platí, má-li pravá strana smysl. Přitom značí $\frac{\partial u}{\partial x}$ parciální derivaci funkce $\varphi(x, y)$, jež vyjadřuje u pomocí x, y; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$ značí derivaci funkce $f(u)$, jež vyjadřuje z pomocí u, a to v bodě $u = \varphi(x, y)$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ pak značí parciální derivaci funkce $f(\varphi(x, y))$, jež vyjadřuje z pomocí x, y. Za obdobných předpokladů platí ovšem též vzorec

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Příklad 1. $z = f(u)$, kde $u = \sin\frac{x}{y}$. Potom je $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{1}{y} \cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = - f'(u) \cdot \frac{x}{y^2} \cos\frac{x}{y}$, přičemž do funkce $f'(u)$ jest dosadit $u = \sin\frac{x}{y}$. Vzorce platí za těchto předpokladů: 1. $y \neq 0$; 2. $f'(u)$ existuje v bodě $u = \sin\frac{x}{y}$.

Případ III. **Věta 176.** *Nechť funkce $\varphi(x)$, $\psi(x)$ mají derivaci v bodě x_0; nechť funkce $f(u, v)$ má totální diferenciál*[29]) *v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = \varphi(x_0)$, $v_0 = \psi(x_0)$. Potom funkce $f(\varphi(x), \psi(x))$ (proměnné x) má v bodě x_0 derivaci, jejíž hodnota je*

$$\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(x_0)}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi(x_0)}{\mathrm{d}x}. \tag{38}$$

Poznámka 2. Tuto větu vyjadřujeme opět rovnicí $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, které dáváme obdobný smysl jako v případech I, II $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}, \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\right.$,

[29]) Nestačí pouhá existence parciálních derivací! Viz o tom cvičení 5.

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial v}$ (přičemž klademe $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$), $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dF}{dx}$, kde $F(x) = f(\varphi(x), \psi(x))\Big)$.

Rovnice platí za předpokladu, že existuje $\dfrac{d\varphi}{dx}$, $\dfrac{d\psi}{dx}$ a že v příslušném bodě $[u, v] = [\varphi(x), \psi(x)]$ má funkce $f(u, v)$ totální diferenciál.

Poznámka 3. Větu 175 (případ II) jsme převedli na případ I tím, že jsme při parciálním derivování podle x pojímali y jako konstantu. Zde podobný postup není možný: změním-li x, změní se obecně ve funkci $f(u, v)$ *obě* proměnné $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Proto musíme užít totálního diferenciálu.

Důkaz. Podle předpokladu existuje funkce $\eta(h, k)$ tak, že je (viz § 4, poznámka 1)

$$f(u_0 + h, v_0 + k) - f(u_0, v_0) = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} h + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} k + \\ + (|h| + |k|)\,\eta(h, k), \tag{39}$$

přičemž $\eta(0, 0) = 0$ a funkce $\eta(h, k)$ je spojitá v bodě $[0, 0]$. Naším cílem je vypočíst limitu

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi(x_0 + t), \psi(x_0 + t)) - f(\varphi(x_0), \psi(x_0))}{t}. \tag{40}$$

Položili jsme již

$$u_0 = \varphi(x_0), \quad v_0 = \psi(x_0); \tag{41}$$

klaďme dále

$$h(t) = \varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0), \quad k(t) = \psi(x_0 + t) - \psi(x_0), \tag{42}$$

takže

$$\varphi(x_0 + t) = u_0 + h(t), \quad \psi(x_0 + t) = v_0 + k(t). \tag{43}$$

Ježto funkce φ, ψ jsou spojité v bodě x_0 (mají tam derivaci), jsou funkce $h(t)$, $k(t)$ spojité v bodě 0; podle (42) je $h(0) = k(0) = 0$. Funkce $\eta(h(t), k(t))$ je tedy spojitá v bodě 0 a je tedy

$$\lim_{t \to 0} \eta(h(t), k(t)) = \eta(h(0), k(0)) = \eta(0, 0) = 0. \tag{44}$$

Dále je

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} = \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, \quad \lim_{t \to 0} \frac{k(t)}{t} = \frac{d\psi(x_0)}{dx}. \tag{45}$$

Výraz stojící v (40) za znamením lim lze tedy podle (41), (43) psát ve tvaru

$$(f(u_0 + h(t), v_0 + k(t)) - f(u_0, v_0)) : t,$$

což podle (39) dává

$$\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \cdot \frac{h(t)}{t} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} \cdot \frac{k(t)}{t} \pm \eta(h(t), k(t)) \cdot \left(\left| \frac{h(t)}{t} \right| + \left| \frac{k(t)}{t} \right| \right), \tag{46}$$

kde znamení + platí pro $t > 0$, znamení − pro $t < 0$.[30]) Výraz $\pm (|h(t) : t| + |k(t) : t|)$ má tedy v bodě 0 podle (45) limitu zprava $\left|\frac{\mathrm{d}\varphi(x_0)}{\mathrm{d}x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}\psi(x_0)}{\mathrm{d}x}\right|$ a limitu zleva touž až na znamení, kdežto $\eta(h(t), k(t))$ má podle (44) v bodě 0 zprava i zleva limitu nulu. Poslední člen v (46) vpravo má tedy v bodě 0 limitu nulu (zprava i zleva). Všimneme-li si ještě rovnic (45), vidíme, že výraz (46) má v bodě $t = 0$ limitu (38).

Příklad 2. Budiž $z = f(u, v)$, $u = e^x$, $v = \frac{1}{x}$; potom je $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot e^x - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x^2}$. Vzorec platí v každém bodě $x \neq 0$ takovém, že funkce f má totální diferenciál v bodě $\left[e^x, \frac{1}{x}\right]$.

Případ IV. **Věta 177.** *Nechť v bodě $[x_0, y_0]$ mají funkce $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ parciální derivace $\frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi(x_0, y_0)}{\partial x}$. Nechť funkce $f(u, v)$ má totální diferenciál v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Potom funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ má v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivaci podle x, jejíž hodnota je*

$$\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Poznámka 4. Větu 177 vyjadřujeme opět vzorcem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{47}$$

Za obdobných předpokladů platí ovšem též

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{48}$$

Přitom klademe

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \text{ atd.},$$

[30]) Neboť pro $t > 0$ je $\frac{|h(t)|}{t} = \left|\frac{h(t)}{t}\right|$, kdežto pro $t < 0$ je $\frac{|h(t)|}{t} = -\left|\frac{h(t)}{t}\right|$.

přičemž $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$; konečně $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ jsou parciální derivace funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$. Vzorec (48) např. platí tehdy, existují-li $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ a má-li „vnější" funkce $f(u, v)$, vyjadřující z pomocí u, v, totální diferenciál v bodě $[u, v] = [\varphi(x, y), \psi(x, y)]$.

Důkaz. Ježto jde o parciální derivaci podle x, položíme $y = y_0$ a počítáme derivaci funkce $f(\varphi(x, y_0), \psi(x, y_0))$[31]) v bodě x_0. Funkce $\varphi(x, y_0)$, $\psi(x, y_0)$ mají v bodě x_0 derivace $\dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\psi(x_0, y_0)}{\partial x}$ a funkce $f(u, v)$ má totální diferenciál v bodě $[u_0, v_0] = [\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0)]$. Můžeme tedy užít věty 176, jež dává ihned žádaný výsledek.

Poznámka 5. Snad je téměř zbytečné poznamenávat, že tento postup vede k cíli i tehdy, když některá z funkcí φ, ψ závisí jen na jedné z obou proměnných x, y: např. $z = f(\varphi(x, y), \psi(x))$ nebo $z = f(\varphi(x), \psi(y))$; situace je podobná jako při spojitosti složených funkcí (viz text před větou 167).

Příklad 3. Budiž $z = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = xy$. Potom je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + y\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + x\dfrac{\partial z}{\partial v}$. Výsledek platí, má li funkce f totální diferenciál v bodě $[x + y, xy]$.

Poznámka 6. Věty 126, 175 až 177 se pamatují velmi snadno, zapamatujeme-li si jen vzorec (47) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Že pro $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ platí obdobný vzorec (48), je již jasné. Závisí-li u, v pouze na x, odpadá vzorec (48) a ve vzorci (47) píšeme $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ místo $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ atd. Závisí-li z pouze na u, odpadá ovšem $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ a místo $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ píšeme $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$. Předpoklad o existenci totálního diferenciálu funkce $f(u, v)$ v bodě $[u, v]$ (věta 176 a 177) je ovšem splněn, jsou-li parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ v tomto bodě spojité (viz větu 174).

Odvodíme ještě větu o vyšších derivacích složených funkcí, přičemž proberu nejsložitější případ IV:

Věta 178. *Budiž n přirozené číslo; buďte J, J_1 dva otevřené dvojrozměrné intervaly. Předpokládejme, že jsou splněny tyto tři předpoklady:*

1_n) *Funkce $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ mají spojité parciální derivace až do řádu n-tého v intervalu J.*

[31]) Je to funkce jedné proměnné x.

2_n) *Funkce $f(u, v)$ má spojité parciální derivace až do řádu n-tého v intervalu J_1.*

3_n) *Je-li $[x, y]$ libovolný bod intervalu J, leží bod $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ v intervalu J_1.*

Potom platí toto tvrzení:

A_n) *Funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ má v intervalu J spojité parciální derivace až do řádu n-tého.*

Poznámka 7. Důkaz provedu úplnou indukcí. Abych však čtenáři ukázal, jak se derivace funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ skutečně počítají, proberu napřed případy $n = 1, 2, 3$. Přitom stále pamatujte, že ze spojitosti parciálních derivací plyne existence totálního diferenciálu (věta 174) a odtud spojitost funkce (věta 173).

Znaky $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}, \ldots$ budou značit derivace funkce $f(u, v)$; znaky $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \ldots$ budou značit derivace „složené" funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$; znaky $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$ budou značit derivace funkce φ a znaky $\frac{\partial v}{\partial x}, \ldots$ budou značit derivace funkce ψ.

Budiž předně $n = 1$. Je-li $[x, y] \in J$, má funkce f v bodě $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ spojité parciální derivace 1. řádu a tedy totální diferenciál; podle věty 177 je tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{49}$$

kdež ovšem do funkcí $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ (což jsou funkce proměnných u, v, spojité v bodě $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$) dosazuji za u, v čísla $\varphi(x, y), \psi(x, y)$; spojitost pravých (a tedy i levých) stran rovnic (49) je tedy podle věty 167 zřejmá.[32]) Tím je případ $n = 1$ dokázán. Budiž nyní $n = 2$, takže předpokládám, že $1_2, 2_2, 3_2$ jsou splněny; tím spíše jsou splněny předpoklady $1_1, 2_1, 3_1$, takže v celém intervalu J platí rovnice (49). Má-li tedy v některém bodě intervalu J pravá strana některé z rovnic (49) nějakou parciální derivaci,[33]) má i levá strana touž parciální derivaci. Parciální derivace pravé strany první rovnice (49) podle x je (podle pravidla o derivování součtu a součinu)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{50}$$

pokud ovšem derivace zde vyznačené existují. Předně je zřejmě $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

[32]) Podobné zřejmé poznámky o spojitosti v dalším vynechávám.

[33]) Jde o funkce proměnných x, y, neboť za u, v si musíme myslit dosazeno $\varphi(x, y), \psi(x, y)$.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Derivaci $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$ počítáme pak podle věty 177 jako derivaci složené funkce: $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ je funkce u, v, jež má podle předpokladu 2_2 spojité parciální derivace $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$ v bodě $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$; ve funkci $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ je pak za u, v dosazeno $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Podle věty 177 je tedy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) . \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x}$$

a podobně

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) . \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} . \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Dosadíme-li odtud do (50) a užijeme ještě věty 171 (záměnnost derivací), dostáváme, že existuje parciální derivace pravé a tedy i levé strany první rovnice (49) podle x a že je

$$\text{(51)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} .$$

Spojitost funkce $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ v intervalu J je zřejmá. Podobně (ale teď postupuji již rychleji) dostávám derivováním první rovnice (49) podle y

$$\text{(52)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} , \end{aligned}$$

což je zřejmě funkce proměnných x, y, spojitá v J. Derivováním druhé rovnice (49) podle x by vyšlo $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$; je patrné, že vyjde funkce spojitá v J, takže v každém bodě intervalu J je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$; výpočet si tedy můžeme uspořit. Derivováním druhé rovnice (49) podle y vychází konečně

$$\text{(53)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} .$$

Vezměme ještě případ $n = 3$ a počítejme třeba $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$; derivujme k tomu cíli rovnici (51) podle y. Vychází[34])

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial u^2 \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 z}{\partial v^2 \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial v^3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}.$$

Sloučením a užitím záměnnosti (věta 171) by se tento výraz dal ještě zjednodušit. Čtenáři je, doufám, již jasné, jak se v jednotlivých případech postupuje. Vezměme ještě jeden příklad:

Příklad 4. Budiž $z = f(x, y)$, $x = u + v$, $y = uv$ (volím schválně obrácené označení proměnných, aby si čtenář zvykl užívat též jiných písmen). Za příslušných předpokladů o spojitosti parciálních derivací funkce f je

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}u. \tag{54}$$

K počítání derivací vyšších řádů nedosazujme ovšem do složitých obecných vzorců (51), (52), (53), nýbrž derivujeme přímo rovnice (54) podle pravidel o derivování součtu a součinu, užívajíce pro derivování „složených funkcí“ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ věty 177:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}v + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}v^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(u + v) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}uv + \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}u + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}u^2.$$

---

[34]) Je ovšem $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ apod.

Dále je např.:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^2\,\partial v} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}(u + 2v) + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}(2uv + v^2) +$$
$$+ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} uv^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} v\,.$$

Důkaz věty 178. Máme dokázat pro každé přirozené n tuto větu: „Jsou-li splněny předpoklady $1_n, 2_n, 3_n$, platí tvrzení A_n“. Na začátku poznámky 7 jsme dokázali tuto větu pro $n = 1$. Budiž dále n přirozené číslo a předpokládejme, že věta je již dokázána pro tuto hodnotu n; máme ukázat, že potom je tato věta správná též pro hodnotu $n + 1$. Buďte tedy dány funkce $f(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, splňující podmínky 1_{n+1}, 2_{n+1}, 3_{n+1}. Potom platí podle věty 177 v intervalu J rovnice (49), jež píši obšírněji takto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}\,. \tag{55}$$

Zde jsou $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ funkce proměnných x, y mající v J spojité parciální derivace až do řádu n-tého; $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ jsou funkce proměnných u, v – pišme $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = g(u, v)$, $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = h(u, v)$, jež mají v J_1 spojité parciální derivace až do řádu n-tého; do nich ovšem máme dosadit $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$; „složené funkce“ $g(\varphi(x, y), \psi(x, y))$, $h(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ mají tedy podle A_n v intervalu J spojité parciální derivace (podle x, y) až do řádu n-tého. Píšeme-li ještě $F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$, lze rovnice (55) psát podrobně

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = g(\varphi(x, y), \ \psi(x, y))\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + h(\varphi(x, y), \ \psi(x, y))\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = g(\varphi(x, y), \ \psi(x, y))\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} + h(\varphi(x, y), \ \psi(x, y))\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}\,.$$

Odtud je (podle pravidel o derivování součtu a součinu) patrné, že pravé a tedy i levé strany těchto rovnic mají v J spojité parciální derivace řádu n-tého;[35]) tj.

[35]) Jsou-li totiž $f_1(x, y), \ldots, f_4(x, y)$, čtyři funkce mající v J spojité parciální derivace až do řádu n-tého, má též funkce $f_1 f_2 + f_3 f_4$ v J spojité parciální derivace až do řádu n-tého. Podrobně by se toto téměř samozřejmé tvrzení dokázalo úplnou indukcí, což si může čtenář sám provést.

funkce $F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ má v J spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$, čímž je tvrzení A_{n+1} dokázáno.

Poznámka 8. Jak se postupné derivace funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ v praxi počítají $\left(\text{značili jsme je v poznámce 7 znaky } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \ldots\right)$, vyložili jsme jistě dostatečně v poznámce 7 a v příkladu 4. Vzhledem ke spojitosti derivací lze při tom užívat věty 171 o záměnnosti. Pokud se týče předpokladů 1_n, 2_n, 3_n, vyskytuje se v praxi nejčastěji tento případ: máme počítat parciální derivace funkce $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ v nějakém bodě x_0, y_0; položme $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Přitom obyčejně víme, že funkce $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ mají v jistém „okolí" bodu $[x_0, y_0]$, tj. v jistém intervalu $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$ spojité parciální derivace až do řádu n-tého a že funkce $f(u, v)$ má obdobně spojité parciální derivace až do řádu n-tého v jistém intervalu $(u_0 - \delta_2, u_0 + \delta_2) \times (v_0 - \delta_2, v_0 + \delta_2) = J_1$. Ze spojitosti funkcí φ, ψ v bodě $[x_0, y_0]$ plyne, že existuje číslo $\delta_3 > 0$ tak, že pro $|x - x_0| < \delta_3$, $|y - y_0| < \delta_3$ je $|\varphi(x, y) - u_0| < \delta_2$, $|\psi(x, y) - v_0| < \delta_2$. Položíme-li tedy $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1, \delta_3)$, $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, vidíme: funkce φ, ψ mají v J spojité parciální derivace až do n-tého řádu; leží-li bod $[x, y]$ v J, leží bod $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ v J_1. Můžeme tedy v intervalu J – a tedy speciálně v bodě $[x_0, y_0]$ – užít věty 178 a postupu užitého v poznámce 7.

Poznámka 9. Věta 178 se týkala případu IV (viz počátek tohoto paragrafu). Ostatní případy I, II, III se dají na tento případ převést takto: kde se v nich vyskytuje funkce *jedné* proměnné (např. $f(u)$ místo $f(u, v)$), pojímám ji jako funkci dvou proměnných; parciální derivace podle té druhé proměnné je rovna nule, místo parciální derivace podle té první proměnné píšeme obyčejnou derivaci (se symbolem d); spojitost se neporuší (viz § 2, příkl. 3). Jako příklad uveďme větu odpovídající případu III:

Budiž n přirozené číslo. Buďte splněny tyto předpoklady:

1) Funkce $\varphi(x)$, $\psi(x)$ mají spojité derivace až do řádu n-tého v jistém otevřeném (jednorozměrném) intervalu J.

2) Funkce $f(u, v)$ má spojité parciální derivace až do n-tého řádu v jistém otevřeném (dvojrozměrném) intervalu J_1.

3) Je-li $x \in J$, je $[\varphi(x), \psi(x)] \in J_1$.

Potom má funkce $f(\varphi(x), \psi(x))$ v J spojité derivace až do n-tého řádu.

Tyto derivace se ovšem počítají podle věty 176 takto (píší-li $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$):

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} \text{ atd.}$$

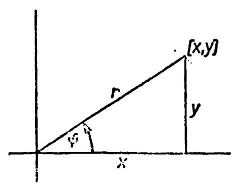
Poznámka 10. Právě tak jako jsme se omezili ve větě 178 na případ IV, mohli jsme se omezit na větu 177 a dokázat věty 126, 175, 176 jako speciální případy věty 177; volil jsem raději obšírnější způsob, jenž je snad pro začátečníka příjemnější.

Cvičení

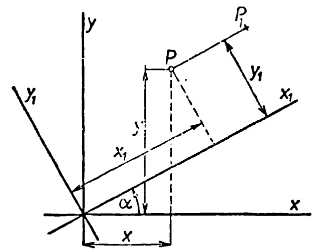
Následující čtyři cvičení jsou dosti důležitá; jde o příklady, jež se často vyskytují.

1. Budiž $z = f(x, y)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. (Tomuto vztahu mezi proměnnými x, y a proměnnými r, φ odpovídá tzv. záměna pravoúhlých souřadnic za polární, viz obr. 53.) Má-li f v bodě $P = [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$ totální diferenciál, je

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$



Obr. 53.



Obr. 54.

Má-li f v jistém otevřeném intervalu obsahujícím bod P spojité parciální derivace do druhého řádu, je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

2. Budiž α dané číslo, $z = f(x, y)$, $x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha$, $y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$. (Tomuto vztahu mezi proměnnými x, y a proměnnými x_1, y_1 odpovídá „otočení os souřadnic", viz obr. 54.) Za předpokladů obdobných jako ve cvičení 1 je

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}.$$

3. Podržme označení předešlého cvičení. Potom je (má-li f v bodě $[x, y]$ totální diferenciál)

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha. \tag{56}$$

Tento výraz má jednoduchý význam. Je $z = f(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$; nechám-li zde y_1 pevné, x_1 proměnné (tj. nechám-li se bod $[x, y]$ pohybovat po přímce svírající s osou x úhel α), bude z funkcí jediné proměnné x_1; její derivace je právě výraz (56), proto se výrazu (56) říká též „derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $P = [x, y]$ ve směru α". Ve tvaru limity lze výraz (56) psát takto: hodnotu funkce $f(x, y)$ v bodě $P = [x, y]$ značme $f(P)$. Zvolme bod P; posuňme jej ve směru kladné osy x_1 o délku h; tím dostaneme bod P_1 (obr. 54). Derivace funkce f v bodě P ve směru α je potom dána limitou

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P_1) - f(P)}{h}$$

a udává tedy, s jakou rychlostí vzrůstá funkce f, posunuji-li bod P směrem α. Zajímá nás proto, ve kterém směru bude tato rychlost největší, tj. pro které α bude výraz (56) největší.[36]) To nastává právě pro jeden směr α_0, a to pro ten, jenž je definován rovnicemi

$$\cos\alpha_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \sin\alpha_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Derivace v tomto směru α_0 má hodnotu $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$. V „protilehlém" směru $\alpha_0 + \pi$ má derivace touž hodnotu až na znamení;[37]) v obou směrech „kolmých" $\alpha_0 + \frac{1}{2}\pi$, $\alpha_0 - \frac{1}{2}\pi$ má derivace hodnotu 0.

4. V kap. VIII, § 2, příkl. 9 jsme počítali derivaci funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$. To lze učinit též podle věty 176, klademe-li $z = u^v$, $u = f(x)$, $v = g(x)$. Proveďte!

5. Definujme $f(u, v)$ takto: $f(u, v) = \dfrac{u^2 v}{u^2 + v^2}$ pro $[u, v] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$ (takže funkce f je všude spojitá). Je $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$. Dále je $f(x, x) = \frac{1}{2}x$. Položíme-li tedy $z = f(u, v)$, $u = x$, $v = x$, je $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{2}$; mechanické použití věty 176 by dalo nesprávný výsledek

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

Jistě tedy nemá funkce f v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál (přesvědčte se o tom přímo!). Tento příklad ukazuje, že existence parciálních derivací *nestačí* k tomu, abychom mohli užít předpisu obsaženého ve větě 176.

[36]) Při pevně zvoleném bodě $P = [x, y]$. V dalším výkladu předpokládám, že v bodě P není $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; potom by totiž byl výraz (56) ve všech směrech roven nule.

[37]) Směr $\alpha_0 + \pi$ je tedy směrem „nejrychlejšího klesání" funkce f v bodě P.