Kapitola VII

INVERZNÍ FUNKCE

§ 1. **Inverzní funkce.** Budiž M nějaká neprázdná číselná množina; budiž $f(x)$ funkce, definovaná v množině M (nevadí ovšem, je-li funkce $f(x)$ definována též v některých bodech, ležících mimo množinu M). Probíhá-li x množinu M, probíhá hodnota $f(x)$ jistou neprázdnou číselnou množinu N;[1]) budeme říkat, že *funkce $f(x)$ zobrazuje množinu M na množinu N.*

Příklad 1. Funkce x^2 zobrazuje interval $(-1, 1)$ na interval $\langle 0, 1)$. To znamená: *předně*, je-li $x \in (-1, 1)$ (tj. $|x| < 1$), je $0 \leqq x^2 < 1$, což je vskutku pravda; *za druhé*: je-li y libovolné číslo intervalu $\langle 0,1)$, t. j. $0 \leqq y < 1$, potom existuje číslo x (aspoň jedno) v intervalu $(-1, 1)$, pro něž je $x^2 = y$; a to je také pravda, neboť, zvolím-li $x = \sqrt{y}$, je $x^2 = y$ a současně $0 \leqq x < 1$, takže vskutku $x \in (-1, 1)$ (mohli jsme ovšem zvolit také $x = -\sqrt{y}$).

Příklad 2. Pro každé x je $x^2 \geqq 0$; naopak, je-li $y \geqq 0$, existuje číslo x tak, že $x^2 = y$ — stačí volit např. $x = \sqrt{y}$ (nebo též $x = -\sqrt{y}$). Tedy: funkce x^2 zobrazuje interval $(-\infty, +\infty)$ na interval $\langle 0, +\infty)$.

Příklad 3. Budiž $f(x)$ funkce z kap. V, § 1, příkl. 7 (tj. $f(x) = 2 + x$ pro $x \leqq 0$, $f(x) = 1$ pro $x > 0$). Tvrdím, že funkce $f(x)$ zobrazuje interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na množinu N, jež se skládá z bodu 1 a ze všech bodů intervalu $(\frac{3}{2}, 2\rangle$. Vskutku: probíhá-li x interval $(-\frac{1}{2}, 0\rangle$, probíhá $f(x)$ zřejmě všechny hodnoty intervalu $(\frac{3}{2}, 2\rangle$; probíhá-li x dále čísla intervalu $(0, \frac{1}{2})$, je příslušná hodnota $f(x)$ stále rovna 1.

Příklad 4. Budiž $f(x) = 1$ pro racionální x, $f(x) = -1$ pro iracionální x (kap. V, § 1, příkl. 9). Tato funkce zobrazuje každý interval na množinu, složenou právě ze dvou bodů -1, $+1$. Neboť jiných hodnot než $+1$, -1 funkce vůbec nenabývá a za druhé leží v každém intervalu jednak racionální čísla x (pro něž $f(x) = 1$), jednak iracionální čísla x (pro něž $f(x) = -1$). Budiž dále M množina všech racionálních čísel; funkce $f(x)$ zobrazuje zřejmě množinu M na „jednobodovou" množinu, tj. na množinu obsahující jediné číslo (totiž číslo 1).

Příklad 5. Funkce $f(x)$ zobrazuje interval J na jednobodovou množinu tehdy a jen tehdy, je-li $f(x)$ konstantní v J. To je zřejmé.

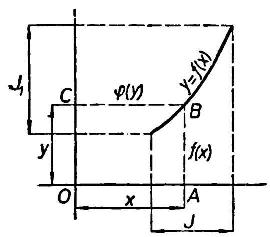
[1]) Množina N je tedy definována takto: číslo y patří do množiny N tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo x tak, že $x \in M, f(x) = y$.

V kap. IX dokážeme tuto důležitou větu:

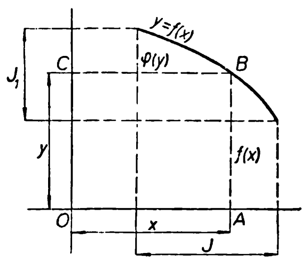
Věta 130. *Budiž $f(x)$ funkce spojitá v intervalu J. Potom funkce $f(x)$ zobrazuje interval J buďto na jednobodovou množinu nebo na interval.*

Prosím čtenáře, aby zatím tuto větu přijal za správnou bez důkazu. Příklady na tuto větu jsou obsaženy v příkl. 1, 2, 5 tohoto paragrafu; příklady 3, 4 ukazují, že u funkcí, jež nejsou spojité, nemusí být tvrzení této věty správné. Druh intervalu nemusí zůstat zachován; např. funkce x^2 zobrazuje *otevřený* interval $(-1, +1)$ na *polouzavřený* interval $\langle 0, 1)$.

Nyní přicházíme k hlavnímu bodu tohoto paragrafu. Budiž $f(x)$ funkce spojitá a ryze monotónní (tj. buďto rostoucí nebo klesající) v intervalu J. Interval J budiž oborem funkce f.[2]) Podle věty 130 zobrazuje funkce f interval J na jistý interval J_1.[3]) To tedy znamená: *předně*, je-li $x \in J$, leží číslo $y = f(x)$ v intervalu J_1; *za druhé*: je-li y libovolné číslo intervalu J_1, existuje v intervalu J číslo x tak, že $f(x) = y$; a takové číslo x existuje v intervalu J *jen* jedno, neboť rostoucí či klesající funkce



Obr. 25.



Obr. 26.

$f(x)$ nemůže ve dvou různých bodech intervalu J nabývat téže hodnoty y. Tím je každé hodnotě y intervalu J_1 přiřazena jedna a jen jedna hodnota x intervalu J, a to ta hodnota x, pro kterou je $f(x) = y$; tato hodnota x se nám tedy jeví jako jistá funkce proměnné y, označme ji znakem $\varphi(y)$. Definice funkce $\varphi(y)$ je tedy tato: pro libovolné $y \in J_1$ je $\varphi(y)$ ono číslo x intervalu J, pro které platí $f(x) = y$.[4]) Oborem funkce φ je interval J_1; funkci φ nazýváme *funkcí inverzní k funkci f*. Viz obr. 25 (pro funkci rostoucí) a obr. 26 (pro funkci klesající).[5])

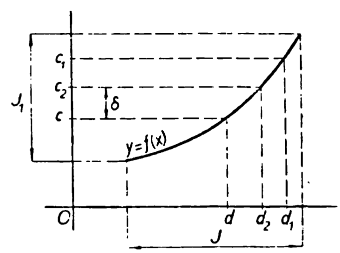
[2]) Viz definici 14. Obor funkce f je množina všech bodů x, v nichž je funkce f definována. Kdyby funkce byla definována také v některých bodech mimo interval J, vynechme tyto body z oboru funkce. Tím se ovšem neporuší ani rostoucí nebo klesající ráz funkce v J ani spojitost funkce v J (viz konec § 8 v kap. V).

[3]) Funkce f (rostoucí nebo klesající v J) nemůže být konstantní v J a tedy nemůže zobrazovat interval J na jednobodovou množinu.

[4]) Pro každé $y \in J_1$ je tedy $f(\varphi(y)) = y$. Lze také říci: rovnice $\varphi(y) = x$ platí pro $x \in J$, $y \in J_1$ tehdy a jen tehdy, je-li $y = f(x)$.

[5]) Chci-li k číslu $x \in J$ sestrojit číslo $f(x)$, sestrojím bodem A rovnoběžku s osou y; potom je $\overline{AB} = f(x)$. Chci-li k číslu $y \in J_1$ sestrojit číslo $\varphi(y)$, sestrojím bodem C rovnoběžku s osou x; potom je $\overline{CB} = \varphi(y)$.

Tvrdím: *funkce φ zobrazuje interval J_1 na interval J.* Předně je zřejmé, že pro každé $y \in J_1$ je $\varphi(y) \in J$. Za druhé: budiž $x \in J$; máme ukázat, že existuje $y \in J_1$ tak, že $\varphi(y) = x$. To je snadné: sestrojme číslo $y = f(x)$, takže jistě $y \in J_1$; podle definice funkce φ je pak vskutku $x = \varphi(y)$. Dále tvrdím: *Je-li f rostoucí v J, je φ rostoucí v J_1; je-li f klesající v J, je φ klesající v J_1.* Důkaz: Buďte y_1, y_2 dvě čísla intervalu J_1, $y_1 < y_2$. Položme $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$, takže $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$; čísla x_1, x_2 leží ovšem v J. Je-li f rostoucí v J, je $x_1 < x_2$ (kdyby totiž bylo $x_1 \geqq x_2$, bylo by $f(x_1) \geqq f(x_2)$), tj. $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$, takže funkce φ je rostoucí v J_1. Je-li f klesající v J, je $x_1 > x_2$ (kdyby totiž bylo $x_1 \leqq x_2$, bylo by, ježto f je klesající, $f(x_1) \geqq f(x_2)$), tj. $\varphi(y_1) > \varphi(y_2)$, takže funkce φ je klesající v J_1. Dále tvrdím: *funkce φ je spojitá v intervalu J_1.* Máme tedy dokázat[6]: 1) že funkce φ je spojitá zprava v každém bodě intervalu J_1, jenž není jeho koncovým bodem; 2) že funkce φ je spojitá zleva v každém bodě intervalu J_1, jenž není jeho počátečním bodem. Dokážeme první část tohoto tvrzení; druhou zcela obdobnou část si čtenář doplní sám.



Obr. 27.

Budiž tedy c bod intervalu J_1, jenž není jeho koncovým bodem, takže jistě existuje v intervalu J_1 bod $c_1 > c$.[7]) Položme $d = \varphi(c)$, takže $d \in J$, $c = f(d)$; dále $d_1 = \varphi(c_1)$, takže $d_1 \in J$, $c_1 = f(d_1)$. Budiž dále ε kladné číslo; máme ukázat, že existuje kladné δ tak, že pro všechna y intervalu $(c, c + \delta)$ platí $|\varphi(y) - \varphi(c)| < \varepsilon$. Rozeznávejme dva případy.

A) Funkce f je rostoucí v J a tedy funkce φ je rostoucí v J_1. Tedy $d_1 = \varphi(c_1) > \varphi(c) = d$; v intervalu J leží tedy bod $d_1 > d$, takže bod d jistě není koncovým bodem intervalu J. Existuje tedy v intervalu J jistě bod d_2 tak, že $d < d_2 \leqq d + \varepsilon$. Položme $f(d_2) = c_2$, takže $d_2 = \varphi(c_2)$. Poslední nerovnosti lze tedy psát $\varphi(c) < \varphi(c_2) \leqq \varphi(c) + \varepsilon$. Jest $f(d) < f(d_2)$, tj. $c < c_2$. Položme $c_2 - c = \delta$, takže $\delta > 0$. Leží-li y v intervalu $(c, c + \delta)$, tj. v intervalu (c, c_2), je $\varphi(c) < \varphi(y) < \varphi(c_2) \leqq \varphi(c) + \varepsilon$ a tedy vskutku $|\varphi(y) - \varphi(c)| < \varepsilon$.

B) Funkce f je klesající v J, takže funkce φ je klesající v J_1.[8]) Nyní je $d_1 = \varphi(c_1) < \varphi(c) = d$; v intervalu J leží tedy bod $d_1 < d$, takže bod d jistě není počátečním bodem intervalu J. Existuje tedy v intervalu J jistě bod d_2 tak, že $d > d_2 \geqq d - \varepsilon$. Položme $f(d_2) = c_2$, takže $d_2 = \varphi(c_2)$. Poslední nerovnosti lze tedy psát $\varphi(c) > \varphi(c_2) \geqq \varphi(c) - \varepsilon$. Jest $f(d) < f(d_2)$ (f je klesající!), tj. $c < c_2$. Položme $c_2 - c = \delta$, takže $\delta > 0$. Leží-li y v intervalu $(c, c + \delta)$, tj. v intervalu (c, c_2), je

[6]) Viz kap. V, § 8 ke konci.
[7]) Prosím čtenáře, aby si současně s těmito výklady načrtával obrázek 27.
[8]) Prosím, aby si čtenář nyní současně s výkladem načrtával obrázek obdobný k obr. 27, ale s klesající funkcí f.

(ježto φ je klesající) $\varphi(c) > \varphi(y) > \varphi(c_2) \geqq \varphi(c) - \varepsilon$, a tedy vskutku $|\varphi(y) - \varphi(c)| < \varepsilon$.

A ještě jednu poznámku. Funkce $\varphi(y)$ je spojitá a buďto rostoucí nebo klesající v intervalu J_1 a zobrazuje tento interval na interval J. Tedy existuje k této funkci φ inverzní funkce, takto definovaná: každému x intervalu J přiřadím onu (jedinou) hodnotu y intervalu J_1, pro kterou je $\varphi(y) = x$. Ale tato rovnice, jak víme (viz poznámku[4])), znamená totéž co $y = f(x)$. Inverzní funkce k funkci φ je tedy funkce f.

Všechno, co jsme nyní dokázali, shrňme v tuto větu:

Věta 114. *Budiž f funkce, jejímž oborem je jistý interval J. Funkce $f(x)$ budiž spojitá v J a buďto rostoucí v J nebo klesající v J; funkce f zobrazuje tedy interval J na jistý interval J_1.*

Potom ke každé hodnotě $y \in J_1$ existuje jedna a jen jedna hodnota $x \in J$ tak, že $f(x) = y$; označíme-li tuto hodnotu x znakem $\varphi(y)$, je φ funkce, jejímž oborem je interval J_1. Funkci φ nazýváme funkcí inverzní k funkci f. Tato funkce φ je spojitá v J_1 a zobrazuje J_1 na J. Je-li f rostoucí v J, je φ rostoucí v J_1; je-li f klesající v J, je φ klesající v J_1. Funkce inverzní k funkci φ je funkce f.

Oživíme tuto obecnou úvahu několika příklady.

Příklad 6. Funkce a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$ je spojitá a buďto rostoucí (pro $a > 1$) nebo klesající (pro $0 < a < 1$) v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na interval $(0, +\infty)$; neboť vždy je $a^x > 0$ a naopak, ke každému $y > 0$ existuje x tak, že $a^x = y$; stačí totiž položit $x = \log_a y$. Inverzní funkce φ je definována takto: $\varphi(y)$ je ona hodnota x, pro kterou je $a^x = y$; tedy $\varphi(y) = \log_a y$. Inverzní funkcí k funkci logaritmické o základu a je ovšem zase naše původní funkce, tj. exponenciální funkce o základu a.

Příklad 7. Funkce x^n ($n > 0$; za obor funkce vezmeme interval $\langle 0, +\infty)$)[8a]) je spojitá a rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, +\infty)$; neboť pro $x \geqq 0$ je $x^n \geqq 0$ a ke každému $y \geqq 0$ existuje číslo $x \geqq 0$ tak, že $x^n = y$; stačí položit $x = y^{1/n}$. Tím už jsme zároveň zjistili, že k funkci x^n (v oboru $\langle 0, +\infty)$, $n > 0$) je inverzní funkce $y^{1/n}$ (tj. rovnice $x^n = y$ platí pro $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $x = y^{1/n}$). Podobně pro $n < 0$, pouze je v tomto případě nutno vyloučit hodnotu $x = 0$ (a jde ovšem o klesající funkci).

Příklad 8. Pro *celé* kladné n je mocnina x^n ovšem definována pro všechna x (i záporná). Je-li n *liché* kladné, je, jak ihned zjistíte, funkce x^n rostoucí v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a ke každému y existuje jedno a jen jedno x tak, že $x^n = y$, totiž $x = \sqrt[n]{y}$ (viz poznámku 1 k větě 43 v kap. I, § 8, kde jsme pro liché kladné n definovali $\sqrt[n]{y}$ i pro záporné y). Pro *liché* kladné n má tedy funkce x^n v oboru $(-\infty, +\infty)$ inverzní funkci $\sqrt[n]{y}$.

[8a]) Jde tedy o funkci f takto definovanou: pro $x \geqq 0$ jest $f(x) = x^n$, pro $x < 0$ funkci $f(x)$ nedefinujeme.

Pro *sudé* kladné n je tomu však jinak; vezměme třeba $n = 2$ (ale pro ostatní sudá $n > 0$ je to podobné). V intervalu $\langle 0, +\infty)$ je x^2 rostoucí, nezáporné a naopak ke každému $y \geqq 0$ existuje jedno a jen jedno x intervalu $\langle 0, +\infty)$ tak, že $x^2 = y$, totiž $x = \sqrt{y}$. Tedy: funkce x^2 má v oboru $\langle 0, +\infty)$ inverzní funkci $\sqrt{y}$. Vyšetřujme nyní hodnoty $x \leqq 0$, tj. funkci x^2 v oboru $(-\infty, 0\rangle$. V tomto intervalu je x^2 klesající, nezáporná a naopak, ke každému $y \geqq 0$ existuje jedno a jen jedno x intervalu $(-\infty, 0\rangle$, pro něž je $x^2 = y$, totiž $x = -\sqrt{y}$. Tedy: funkce x^2 má v oboru $(-\infty, 0\rangle$ inverzní funkci $-\sqrt{y}$ (tedy nikoliv $\sqrt{y}$). Kdybychom chtěli sestrojit funkci inverzní k funkci x^2 v oboru $(-\infty, +\infty)$, narazili bychom na tuto obtíž: ke každému $y > 0$ neexistuje pouze jedno x intervalu $(-\infty, +\infty)$, pro něž je $x^2 = y$, nýbrž *dvě* taková x, totiž $x = \sqrt{y}$ a rovněž $x = -\sqrt{y}$. Z toho je vidět: chceme-li sestrojit v nějakém intervalu k funkci x^2 funkci inverzní, musíme se omezit na takový interval, v němž tato funkce je buďto rostoucí (to je interval $\langle 0, +\infty)$ nebo jeho části) nebo klesající (to je interval $(-\infty, 0\rangle$ nebo jeho části). S podobnou okolností se ještě zřetelněji setkáme v § 2. Zároveň vidíte, že je při definici inverzní funkce k funkci f důležité udat obor funkce f.

Poznámka 1. Pro ulehčení čtenáři jsem proměnnou ve funkci f značil stále písmenem x, v inverzní funkci φ písmenem y, což ovšem není podstatné; okolnost, že funkce φ je inverzní k funkci f, závisí na tvaru těchto funkcí a ne na písmenu, kterým označuji nezávisle proměnnou (např.: k logaritmické funkci o základu a je inverzní funkcí exponenciální funkce o základu a). Jsme-li nuceni proměnnou vypisovat, značíme ji často u funkce f i u funkce φ týmž písmenem; např. říkáme, že k funkci e^x je inverzní funkce $\lg x$ atd.

Poznámka 2. Buďte f, φ funkce z věty 114. Označme písmenem A graf funkce f, písmenem B graf funkce φ. Tedy: A je množina všech bodů (čili uspořádaných dvojic) $[x, y]$, jež splňují rovnici $y = f(x)$; B je množina všech bodů $[x, y]$, jež splňují rovnici $y = \varphi(x)$.[9]) Ale podle poznámky[4]) znamená rovnice $y = \varphi(x)$ totéž co rovnice $x = f(y)$. Množina B je tedy množina oněch bodů $[x, y]$, pro něž platí $x = f(y)$; tj. *množina B vznikne z množiny A* tím, že vyměním x s y, tj. *překlopením podle přímky* $y = x$. Viz obr. 16, kde je znázorněn speciální případ $f(x) = (\frac{3}{2})^x$, $\varphi(x) = \log_{3/2} x$.

V poznámce[4]) jsme zjistili, že pro každé $x \in J_1$ je $f(\varphi(x)) = x$ (píši x místo y). Ježto naopak je f inverzní funkcí k φ, je $\varphi(f(x)) = x$ pro každé $x \in J$ (úlohy intervalů J, J_1 se vymění). Např.: pro $a > 0$, $a \neq 1$ je $\log_a(a^x) = x$ pro každé x, $a^{\log_a x} = x$ pro každé $x > 0$; pro $n \neq 0$, $x > 0$ je $(x^{1/n})^n = x$ a pod.

---

[9]) **Skutečně takto, a ne $x = \varphi(y)$; neboť za první souřadnici (abscisu) x beru hodnotu nezávisle proměnné ve funkci φ, za druhou souřadnici (ordinátu) y hodnotu funkce φ.**

Cvičení

1. Pojem inverzní funkce lze zobecnit. Budiž f funkce v oboru M, jež zobrazuje množinu M na jistou množinu N. Nechť kterýmkoliv dvěma různým hodnotám x (z množiny M) odpovídají též dvě *různé* hodnoty $f(x)$ (tak je tomu např. u funkce rostoucí nebo klesající). Potom ke každému $y \in N$ existuje jedno a jen jedno $x \in M$ tak, že $y = f(x)$. Toto x označme $\varphi(y)$; funkci φ nazýváme opět funkcí inverzní k f; funkce φ zobrazuje N na M; funkce f je funkcí inverzní k funkci φ.

2. Budiž M množina všech čísel různých od nuly. V oboru M položme $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$; funkce f zobrazuje M na M. Inverzní funkce ve smyslu cvičení 1 je $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3. Budiž M množina složená ze všech kladných čísel iracionálních a ze všech nekladných čísel racionálních. Funkci f v oboru M definujme rovnicí $f(x) = x^2$. Pro dvě různé hodnoty x množiny M dostáváme též dvě různé hodnoty $f(x)$. Inverzní funkce φ (v oboru $\langle 0, +\infty)$) je definována takto: je-li $\sqrt{y}$ racionální, je $\varphi(y) = -\sqrt{y}$; je-li $\sqrt{y}$ iracionální, je $\varphi(y) = \sqrt{y}$. Ukažte, že funkce φ není spojitá zprava ani zleva v žádném bodě $y > 0$, je však spojitá zprava v bodě 0.

4. Z věty 130 plyne věta 43 (o existenci n-té odmocniny) takto: budiž n celé kladné; potom funkce x^n je spojitá a rostoucí v $\langle 0, +\infty)$. Je-li $K \geqq 1$, platí pro $x = K$ nerovnost $x^n \geqq K$. Z toho a z věty 130 ihned vidíte, že funkce x^n zobrazuje interval $\langle 0, +\infty)$ na $\langle 0, +\infty)$. Tedy existuje ke každému $a \geqq 0$ číslo $x \geqq 0$ tak, že $x^n = a$; ježto je x^n rostoucí, existuje *jen* jedno takové $x \geqq 0$.

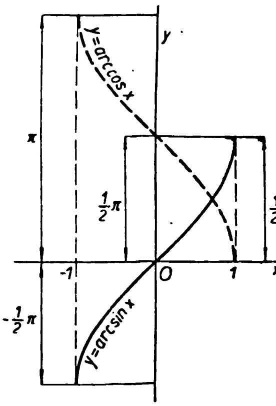
§ 2. Funkce cyklometrické. Funkce $\sin x$ je spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$, ale není v něm monotónní; je např. rostoucí v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ (viz kap. VI, § 2), potom je klesající v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ (což je ihned patrno z rovnice $\sin(x + \pi) = -\sin x$), potom je opět rostoucí v intervalu $\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \rangle$ atd. Chceme-li k funkci $\sin x$ sestrojit funkci inverzní, musíme obor funkce $\sin x$ omezit na nějaký interval, v němž je tato funkce monotónní; vybereme si interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ (ten je příjemný proto, že obsahuje interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$, odpovídající úhlům mezi 0° a 90°). Ježto funkce $\sin x$ je v intervalu $J = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ rostoucí, je nejmenší hodnota funkce $\sin x$ v intervalu J rovna $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$, největší hodnota $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$. Interval J_1, na nějž funkce $\sin x$ interval J podle věty 130 zobrazuje, je nutně interval $\langle -1, 1 \rangle$. Z věty 114 plyne tedy ihned

Věta 115. *Funkce* $\sin x$ *v oboru* $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$[9a]) *zobrazuje tento interval na interval* $\langle -1, 1 \rangle$. *Funkci inverzní k této funkci označíme znakem* $\arcsin x$ (*čti arkus sinus x*). *Tato funkce* $\arcsin x$ *má tyto vlastnosti: jejím oborem je interval* $\langle -1, 1 \rangle$, *který je funkcí* $\arcsin x$ *zobrazen na interval* $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.[10]) *V intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$ *je funkce* $\arcsin x$ *rostoucí a spojitá.*

[9a]) Slova „Funkce $\sin x$ v oboru $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$“ znamenají ovšem funkci f takto definovanou: oborem funkce f jest interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ a pro každé x tohoto intervalu je hodnota $f(x)$ této funkce dána rovnicí $f(x) = \sin x$. Podobný smysl mají obdobná rčení i v jiných případech.

[10]) Pro $|x| \leqq 1$ je tedy vždy $-\frac{1}{2}\pi \leqq \arcsin x \leqq \frac{1}{2}\pi$.

Funkce, z níž jsme vyšli, byla funkce $\sin x$ v oboru $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$; tj. hodnota této funkce v každém bodě x tohoto intervalu je rovna $\sin x$, kdežto mimo tento obor funkce není definována.[11]) Grafické znázornění této funkce je silně vytažená část křivky $y = \sin x$ na obr. 22; graf inverzní funkce $\arcsin x$ dostaneme podle poznámky 2 v § 1. Viz plně vytaženou čáru na obr. 28. Smysl funkce $\arcsin x$ je jasný a snadno se pamatuje už z pojmenování funkce: rovnice $y = \arcsin x$ znamená totéž, co $x = \sin y$, $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$. Čili slovy: arkus sinus x je ono číslo (nebo chcete-li, onen „úhel“, „oblouk“ = arcus) intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, jehož sinus se rovná číslu x. Tedy např. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi$, ježto $\frac{1}{4}\pi$ je právě ono číslo intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, jehož sinus je $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Podobně $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$, $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$.



Obr. 28.

Věta 116. *Pro* $|x| \leqq 1$ *jest* $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. (Tj. $\arcsin x$ je lichá funkce.)

Důkaz. Budiž x dáno; položme $\arcsin x = y$, tedy $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\sin y = x$. Tedy také číslo $-y$ leží v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a jest $\sin(-y) = -\sin y = -x$, takže $-y = \arcsin(-x)$.

Odtud např. $\arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi$, $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$ atd.

Příklad 1. Budiž $|x| \leqq 1$. Hledejme ona y, pro něž je $\sin y = x$. V intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ leží, jak víme, právě jedno takové y, totiž $y_1 = \arcsin x$. Probíhá-li y interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, probíhá číslo $\pi - y$, jak ihned zjistíte, interval $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$; vzhledem k rovnosti $\sin(\pi - y) = \sin y$ leží v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$ právě jedno řešení rovnice $\sin y = x$, a to číslo $y_2 = \pi - y_1 = \pi - \arcsin x$. Tím máme odbyt interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$, jenž má délku 2π. Ostatní řešení rovnice $\sin y = x$ dostaneme již okamžitě z periodičnosti funkce $\sin x$. Všechna řešení rovnice $\sin y = x$ jsou tedy tato čísla: $\arcsin x + 2k\pi$, $(2k + 1)\pi - \arcsin x$ $(k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$.

Příklad 2. Z rovnosti $\sin(y_1 + y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2$ odvodíme zajímavý vztah pro funkci $\arcsin x$. Budiž $|x_1| \leqq 1$, $|x_2| \leqq 1$. Položme $y_1 = \arcsin x_1$, $y_2 = \arcsin x_2$, tedy $-\frac{1}{2}\pi \leqq y_1 \leqq \frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi \leqq y_2 \leqq \frac{1}{2}\pi$; $-\pi \leqq y_1 + y_2 \leqq \pi$; $\sin y_1 = x_1$, $\sin y_2 = x_2$, $\cos y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$,[12]) $\cos y_2 = \sqrt{1 - x_2^2}$. Tedy $\sin(y_1 + y_2) = Z$, kde pro zkrácení klademe $Z = x_1\sqrt{1 - x_2^2} + x_2\sqrt{1 - x_1^2}$. Z toho, že $\sin(y_1 + y_2) = Z$, nemůžeme ovšem ještě usuzovat, že $y_1 + y_2 = \arcsin Z$; to

[11]) Takto jsme musili omezit obor funkce $\sin x$, abychom mohli mluvit o inverzní funkci.

[12]) Je $\cos y_1 \geqq 0$, ježto $|y_1| \leqq \frac{1}{2}\pi$; podobně $\cos y_2 \geqq 0$; tedy je znamení u odmocnin správně zvoleno.

by bylo správné jen tehdy, kdybychom věděli, že $|y_1 + y_2| \leqq \frac{1}{2}\pi$; ale my víme jenom, že $|y_1 + y_2| \leqq \pi$. Proto musíme rozeznávat tyto případy:

A) $-\frac{1}{2}\pi \leqq y_1 + y_2 \leqq \frac{1}{2}\pi$. Potom je $y_1 + y_2$ ono číslo intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, jehož sinus je Z; tedy $y_1 + y_2 = \arcsin Z$.

B) $\frac{1}{2}\pi < y_1 + y_2$ (a ovšem $y_1 + y_2 \leqq \pi$). Potom je $0 \leqq \pi - (y_1 + y_2) < \frac{1}{2}\pi$; číslo $\pi - (y_1 + y_2)$ leží tedy v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a jeho sinus je $\sin(\pi - (y_1 + y_2)) = \sin(y_1 + y_2) = Z$; tedy $\pi - (y_1 + y_2) = \arcsin Z$.

C) $y_1 + y_2 < -\frac{1}{2}\pi$ (a ovšem $y_1 + y_2 \geqq -\pi$). Potom je $-\frac{1}{2}\pi < -\pi - (y_1 + y_2) \leqq 0$; číslo $-\pi - (y_1 + y_2)$ leží tedy v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a jeho sinus je $\sin(-\pi - (y_1 + y_2)) = -\sin(\pi + y_1 + y_2) = \sin(y_1 + y_2) = Z$; tedy $-\pi - (y_1 + y_2) = \arcsin Z$.

Máme tedy tento výsledek: budiž $|x_1| \leqq 1$, $|x_2| \leqq 1$, a položme $Z = x_1\sqrt{1 - x_2^2} + x_2\sqrt{1 - x_1^2}$. Potom platí:

A) Je-li $|\arcsin x_1 + \arcsin x_2| \leqq \frac{1}{2}\pi$, je
$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin Z.$$

B) Je-li $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 > \frac{1}{2}\pi$, je
$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \pi - \arcsin Z.$$

C) Je-li $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 < -\frac{1}{2}\pi$, je
$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = -\pi - \arcsin Z.$$

U funkcí $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ mohu již zajisté postupovat rychleji. Funkce $\cos x$ je spojitá a klesající v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ a zobrazuje tedy tento interval na jistý interval J_1. Ježto je $\cos x$ klesající, je koncovým bodem intervalu J_1 hodnota $\cos 0 = 1$, počátečním bodem $\cos \pi = -1$, takže $J_1 = \langle -1, 1\rangle$. Věta 114 dává tedy:

Věta 117. *Funkce* $\cos x$ *v oboru* $\langle 0, \pi\rangle$ *zobrazuje interval* $\langle 0, \pi\rangle$ *na interval* $\langle -1, 1\rangle$. *Funkci inverzní k této funkci značím* $\arccos x$ (*čti arkus kosinus* x). *Tato funkce* $\arccos x$ *má tyto vlastnosti: jejím oborem je interval* $\langle -1, 1\rangle$, *jejž funkce* $\arccos x$ *zobrazuje na interval* $\langle 0, \pi\rangle$.[13]) *V intervalu* $\langle -1, 1\rangle$ *je funkce* $\arccos x$ *klesající a spojitá.*

Graf dostaneme z obr. 22; viz obr. 28. Např. jest $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$ atd.

Příklad 3. Pro $|x| \leqq 1$ je $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$. Důkaz: Položme $\arcsin x = y$, takže $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\sin y = x$. Tedy $\cos(\frac{1}{2}\pi - y) = x$, $0 \leqq \frac{1}{2}\pi - y \leqq \pi$; číslo $\frac{1}{2}\pi - y$ je tedy ono číslo intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, jehož kosinus je x; tedy vskutku $\frac{1}{2}\pi - y = \arccos x$. Funkce $\arccos x$ souvisí tedy tak úzce s funkcí $\arcsin x$, že nám již nic v podstatě nového neposkytuje.

[13]) Pro každé $|x| \leqq 1$ je tedy $0 \leqq \arccos x \leqq \pi$. Smysl definice funkce $\arccos x$ je tento: $\arccos x$ je ono číslo intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, jehož kosinus je roven číslu x.

Funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá a rostoucí v *otevřeném* intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a zobrazuje tedy tento interval na jistý interval J_1. Jest (viz větu 112) $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi -} \operatorname{tg} x = +\infty$; ke každému číslu K existují tedy čísla x intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, pro něž je $\operatorname{tg} x > K$, tj. interval J_1 obsahuje čísla větší než K, ať si K zvolíme jakkoliv; tedy není interval J_1 shora omezen. Z rovnice $\lim_{x \to -\frac{1}{2}\pi +} \operatorname{tg} x = -\infty$ plyne obdobně, že interval J_1 není zdola omezen. Tedy je nutně $J_1 = (-\infty, +\infty)$ (neboť každý jiný interval je buďto shora nebo zdola omezen) a věta 114 dává:

Věta 118. *Funkce* $\operatorname{tg} x$ *v oboru* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ *zobrazuje interval* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ *na interval* $(-\infty, +\infty)$. *Funkci inverzní k této funkci značíme* $\operatorname{arctg} x$ *(čti arkus tangens x). Tato funkce má tyto vlastnosti: jejím oborem je interval* $(-\infty, +\infty)$, *jejž funkce* $\operatorname{arctg} x$ *zobrazuje na interval* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.[14]) *V intervalu* $(-\infty, +\infty)$ *je funkce* $\operatorname{arctg} x$ *rostoucí a spojitá.*

Věta 119. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (tj. $\operatorname{arctg} x$ je lichá funkce).

Důkaz jako u věty 116.

Graf viz na obr. 29. Např. je $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi$, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{6}\pi$ atd.

Věta 120. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\pi$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{2}\pi$.

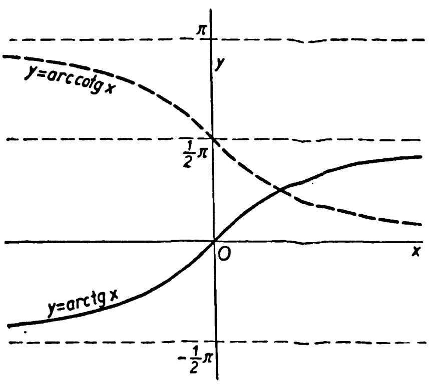
Důkaz. Dokažme třeba druhou rovnici; první si pak čtenář dokáže sám. Budiž dáno libovolné kladné ε; mám dokázat, že existuje číslo K tak, že pro $x < K$ je $|\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\pi| < \varepsilon$. Je-li $\varepsilon \geqq \pi$, je ona nerovnost splněna pro každé x (neboť $|\operatorname{arctg} x| < \frac{1}{2}\pi$, takže $|\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\pi| < \pi \leqq \varepsilon$); v tomto případě lze tedy volit K libovolně. Budiž za druhé $0 < \varepsilon < \pi$; položme $\operatorname{tg}(-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon) = K$. Ježto $-\frac{1}{2}\pi < -\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, vidíme, že $\operatorname{arctg} K = -\frac{1}{2}\pi + \varepsilon$. Pro $x < K$ je tedy $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x < \operatorname{arctg} K = -\frac{1}{2}\pi + \varepsilon$, takže vskutku $0 < \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\pi < \varepsilon$.

Příklad 4. *Pro každé x je* $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Důkaz: Položme $\operatorname{arctg} x = y$, tj. $\operatorname{tg} y = x$, $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Přejdu od $\operatorname{tg} y$ k $\sin y$ takto: $\frac{\sin y}{\cos y} = x$, $\sin^2 y = x^2 (1 - \sin^2 y)$, $\sin y = \pm \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. V intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ je $\cos y > 0$, takže $\sin y$ má totéž znamení jako $\operatorname{tg} y$, tj. jako x. Tedy platí znaménko $+$; číslo y je tedy

14) Pro každé x je tedy $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x < \frac{1}{2}\pi$. Definici funkce $\operatorname{arctg} x$ lze též vyslovit takto: $\operatorname{arctg} x$ je ono číslo intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, jehož tangenta je rovna číslu x.

ono číslo intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, jehož sinus je $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, takže vskutku jest $y =$ $= \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Funkce $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{tg}(x - \frac{1}{2}\pi)$ probíhá v intervalu $(0, \pi)$ až na znaménko minus stejně jako funkce $\operatorname{tg} x$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Tedy: $\operatorname{cotg} x$ je v intervalu $(0, \pi)$ spojitá a klesající a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, +\infty)$. Z věty 114 plyne tedy:



Obr. 29.

Věta 121. *Funkce* cotg x *v oboru* $(0, \pi)$ *zobrazuje tento interval na interval* $(-\infty, +\infty)$. *Funkci inverzní k této funkci nazveme* arccotg x (*čti arkus kotangens* x). *Tato funkce* arccotg x *má tyto vlastnosti: jejím oborem je interval* $(-\infty, +\infty)$, *jejž funkce* arccotg x *zobrazuje na interval* $(0, \pi)$.[15] *V intervalu* $(-\infty, +\infty)$ *je funkce* arccotg x *klesající a spojitá.*

Příklad 5. Pro každé x je $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$. Důkaz: Položme $\operatorname{arctg} x =$ $= y$, tedy $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{tg} y = x$. Jest $x = \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{\cos(\frac{1}{2}\pi - y)}{\sin(\frac{1}{2}\pi - y)} =$ $= \operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - y)$ a současně $0 < \frac{1}{2}\pi - y < \pi$, takže vskutku $\frac{1}{2}\pi - y = \operatorname{arccotg} x$.

Příklad 6. Z příkl. 5 a věty 120 plyne $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x) =$ $= 0$. Podobně $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$ atd. se nazývají *cyklometrické*.

Cvičení

1. Případ A) v příkl. 2 nastane tehdy, je-li buďto $x_1 x_2 \leqq 0$ nebo $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$; případ B) nastane, je-li $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1^2 + x_2^2 > 1$; případ C) nastane, je-li $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_1^2 + x_2^2 >$ > 1. Návod: Je-li $x_1 x_2 \leqq 0$, např. $x_1 \leqq 0$, $x_2 \geqq 0$, je (v označení příkl. 2) $y_1 \leqq 0$, $y_2 \geqq 0$ a odtud snadno $-\frac{1}{2}\pi \leqq y_1 + y_2 \leqq \frac{1}{2}\pi$. Je-li $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, je $0 < y_1 \leqq \frac{1}{2}\pi$, $0 < y_2 \leqq \frac{1}{2}\pi$. Ježto $\sin^2 y$ je rostoucí pro $0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$ a ježto $\sin^2 y_1 + \sin^2(\frac{1}{2}\pi - y_1) = 1$, je $\sin^2 y_1 +$ $+ \sin^2 y_2 \leqq 1$ pro $y_2 \leqq \frac{1}{2}\pi - y_1$, ale $\sin^2 y_1 + \sin^2 y_2 > 1$ pro $y_2 > \frac{1}{2}\pi - y_1$. Obdobně pro $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.

2. Je-li $|x| \leqq 1$, jsou všechna řešení rovnice $x = \cos y$ dána vzorcem $y = 2k\pi \pm \arccos x$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

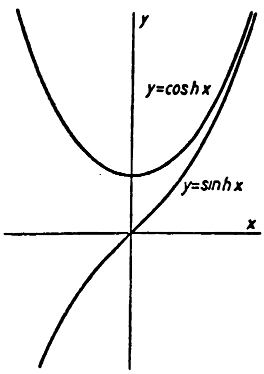
[15]) Tedy $0 < \operatorname{arccotg} x < \pi$ pro každé x. Definice arccotg x se dá vyslovit takto: arccotg x je ono číslo intervalu $(0, \pi)$, jehož kotangenta se rovná číslu x. Graf viz na obr. 29 (čárkovaně).

3. Je-li x libovolné, jsou všechna řešení rovnice $x = \operatorname{tg} y$ dána vzorcem $y = \operatorname{arctg} x + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); obdobně pro $\operatorname{cotg} y$.

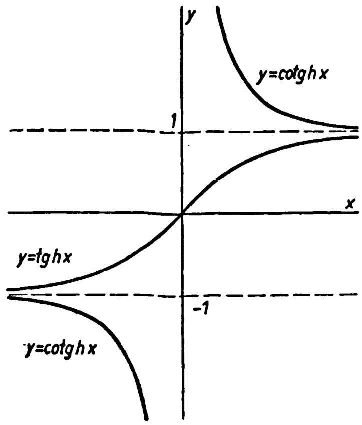
4. Pro $|x| < 1$ je $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

5. Pro $0 \leqq x \leqq 1$ je $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$; pro $0 > x \geqq -1$ je však $\arcsin x = -\arccos \sqrt{1 - x^2}$.

6. Pro $x \geqq 0$ je $\operatorname{arccotg} x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; pro $x < 0$ je $\operatorname{arccotg} x = \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.



Obr. 30.



Obr. 31.

7. Toto a následující cvičení se počítá podle vzoru příkl. 2 a cvičení 1. Pro $|x_1| \leqq 1$, $|x_2| \leqq 1$ položme $Y = x_1x_2 - \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}$. Potom je $\arccos x_1 + \arccos x_2 = \arccos Y$, je-li $x_1 + x_2 \geqq 0$; $\arccos x_1 + \arccos x_2 = 2\pi - \arccos Y$, je-li $x_1 + x_2 < 0$.

8. Pro $x_1x_2 \neq 1$ položme $X = \dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2}$; potom je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} X$ pro $x_1x_2 < 1$, $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} X + \pi$ pro $x_1x_2 > 1$, $x_1 > 0$, $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} X - \pi$ pro $x_1x_2 > 1$, $x_1 < 0$.

Probereme nyní funkce inverzní k funkcím hyperbolickým; viz cvičení 1 až 8 ke kap. VI, § 3.

9. $\sinh x$ je funkce rostoucí v $(-\infty, +\infty)$; je $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$. Tedy: $\sinh x$ zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(-\infty, +\infty)$; inverzní funkce $\operatorname{argsinh} x$ činí totéž. Dokažte, že $\operatorname{argsinh} x = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1})$ (návod: položíte-li $\operatorname{argsinh} x = y$, je $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$; to je rovnice 2. stupně pro e^y; při řešení uvažte, že e^y je kladné).

10. Podle cvičení 9 a podle kap. VI, § 3, cvičení 5 zjistíte, že $\cosh x$ je rostoucí v $\langle 0, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na $\langle 1, +\infty)$. Inverzní funkce k funkci $\cosh x$ v oboru $\langle 0, +\infty)$ je funkce $\operatorname{argcosh} x = \lg (x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geqq 1$), jež zobrazuje $\langle 1, +\infty)$ na $\langle 0, +\infty)$. Inverzní funkce k funkci $\cosh x$ v oboru $(-\infty, 0\rangle$ je $-\operatorname{argcosh} x$.

11. Jest $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tgh} x = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{tgh} x = -1$; funkce $\operatorname{tgh} x$ je rostoucí v $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na $(-1, +1)$. Inverzní funkce je $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$.

12. Jest $\lim_{x \to 0+} \operatorname{cotgh} x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{cotgh} x = 1$, $\lim_{x \to 0-} \operatorname{cotgh} x = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cotgh} x = -1$. Funkce $\operatorname{cotgh} x$ zobrazuje klesajíc interval $(0, +\infty)$ na $(1, +\infty)$ a interval $(-\infty, 0)$ na $(-\infty, -1)$. Inverzní funkce (ve zobecněném smyslu § 1, cvičení 1) $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \lg \frac{x+1}{x-1}$ $(|x| > 1)$ zobrazuje klesajíc interval $(-\infty, -1)$ na $(-\infty, 0)$ a interval $(1, +\infty)$ na $(0, +\infty)$.

13. Z cvičení 3 v kap. VI, § 3 odvoďte

$$\operatorname{argsinh} x_1 + \operatorname{argsinh} x_2 = \operatorname{argsinh} (x_1\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2\sqrt{x_1^2 + 1}).$$

Ověřte tento výsledek též přímo dosazením $\operatorname{argsinh} x = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

14. Podobně odvoďte (oběma uvedenými způsoby) pro $x_1 \geqq 1$, $x_2 \geqq 1$ $\operatorname{argcosh} x_1 + \operatorname{argcosh} x_2 = \operatorname{argcosh} (x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 - 1} \cdot \sqrt{x_2^2 - 1})$.

15. Obdobně pro $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$

$$\operatorname{argtgh} x_1 + \operatorname{argtgh} x_2 = \operatorname{argtgh} \frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}.$$

16. Pro $\operatorname{cotgh} x$ dostanete jako v kap. VI, § 3, cvičení 3:

$$\operatorname{cotgh} (x + y) = \frac{\operatorname{cotgh} x \operatorname{cotgh} y + 1}{\operatorname{cotgh} x + \operatorname{cotgh} y} \text{ pro } x \neq 0,\ y \neq 0,\ x + y \neq 0.$$

Odvoďte jako v cvičeních 13, 14, 15 pro $|x_1| > 1$, $|x_2| > 1$, $x_1 + x_2 \neq 0$:

$$\operatorname{argcotgh} x_1 + \operatorname{argcotgh} x_2 = \operatorname{argcotgh} \frac{x_1 x_2 + 1}{x_1 + x_2}.$$