Kapitola IV. Nekonečné řady

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1974. pp. 119--143.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401987

Kapitola IV

NEKONEČNÉ ŘADY

§ 1. Konvergence a divergence nekonečné řady. Nekonečnou řadou nazýváme symbol

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

místo něhož zavádíme též symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (nebo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nebo $\sum\limits_{t=1}^{\infty} a_t$ atd.; jakým písmenem označujeme index, „podle něhož se sčítá", na tom nezáleží). Reálná čísla $a_1, a_2, \dots$ nazýváme „členy řady", a to člen a_n „n-tým členem". Řada (1) je dána, je-li dána posloupnost jejích členů

(2) $$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Je-li dána řada (1), dovedeme sestrojit součet jejích prvních dvou, tří, čtyř, ... členů, tj. dovedeme sestrojit posloupnost $s_1, s_2, s_3, \dots$ takto definovanou:

(3) $$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots;$$

číslo $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ se nazývá n-tým částečným součtem řady (1). Zavádíme pak tuto definici:

Definice 12. *Je-li posloupnost* (3) *konvergentní, tj. existuje-li vlastní limita* $\lim s_n = s$,[1]) *říkáme, že řada* (1) *je konvergentní (nebo že konverguje) a číslo s nazýváme součtem řady* (1).[2]) *Je-li posloupnost* (3) *divergentní, říkáme také o řadě* (1), *že je divergentní. V případě divergence jsou možné tyto tři případy: je-li* $\lim s_n = +\infty$, *říkáme, že řada* (1) *diverguje k* $+\infty$; *je-li* $\lim s_n = -\infty$, *říkáme, že řada* (1) *diverguje k* $-\infty$; *neexistuje-li* $\lim s_n$ *(vlastní ani nevlastní), říkáme, že řada* (1) *osciluje.*

Poznámka 1. Je-li řada (1) konvergentní, bude symbol $a_1 + a_2 + \dots$ nebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ značit nejenom řadu (1), nýbrž i hodnotu jejího součtu; diverguje-li řada (1) k $+\infty$ (nebo k $-\infty$), bude uvedený symbol značit též symbol $+\infty$ nebo $-\infty$.

---

[1]) Kde je v této kapitole vynechán znak $n \to \infty$, jest jej vždy takto doplnit (tedy vždy $n \to \infty$ a nikoliv $k \to \infty$ nebo pod.).

[2]) Definice je velmi názorná, řekneme-li ji trochu populárně: blíží-li se částečný součet $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ s rostoucím n neomezeně jistému číslu s, říkáme, že číslo s je součtem celé nekonečné řady $a_1 + a_2 + \dots$

Např. rovnice $a_1 + a_2 + \ldots = 3$ bude znamenat „řada (1) je konvergentní a má součet 3"; nebo rovnice $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{n=1}^{\infty} d_n + A$ značí: uvedené čtyři řady jsou konvergentní a součet první řady, zmenšený o součet druhé řady, rovná se číslu A zvětšenému o součin součtů třetí a čtvrté řady.

Příklad 1. Řadě

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \tag{4}$$

(n-tý člen je aq^{n-1}) říkáme „geometrická řada"; číslo q se nazývá jejím „kvocientem". Její n-tý částečný součet s_n dostaneme z identity

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}),$$

odkud pro $q \neq 1$ plyne

$$s_n = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - q^n\,\frac{a}{1 - q}. \tag{5}$$

Je-li $|q| < 1$, je podle kap. II, § 2, příkl. 3 $\lim q^n = 0$, takže podle (5) je $\lim s_n = \frac{a}{1 - q}$. Řada (4) je tedy pro $|q| < 1$ konvergentní a má součet $\frac{a}{1 - q}$.

Příklad 2. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1$ $\left(n\text{-tý člen je } \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Důkaz: jest $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, takže n-tý částečný součet je $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, tedy $\lim s_n = 1$.

Příklad 3. Řada $1 + 1 + 1 + \ldots$ diverguje k $+\infty$, řada $(-1) + (-1) + (-1) + \ldots$ diverguje k $-\infty$.

Důkaz: n-tý částečný součet první řady je roven n a má tedy limitu $+\infty$, u druhé řady je roven $-n$ a má tedy limitu $-\infty$.

Příklad 4. Řada $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ (n-tý člen je $(-1)^{n+1}$) osciluje. Částečné součty tvoří totiž posloupnost $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, jež nemá limitu (ani nevlastní) — to se pozná třeba z toho, že obsahuje dvě vybrané posloupnosti $1, 1, 1, \ldots$; $0, 0, 0, \ldots$, jež mají různé limity.

Podle toho, co jsme řekli o pojmu nekonečné řady, je vidět, že vlastně není podstatného logického rozdílu mezi nekonečnou řadou a posloupností: dát řadu (1) znamená, dát její členy $a_1, a_2, \ldots$, tj. dát posloupnost (2). Rozdíl mezi posloupností a řadou se jeví teprve v tom, *co s nimi děláme*: v teorii posloupností se zajímáme hlavně o to, co se děje s n-tým členem a_n té posloupnosti, když n roste nade všechny meze; v teorii řad se nezajímáme tolik o jednotlivé členy a_n, nýbrž o *součty* $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Součet nekonečné řady $a_1 + a_2 + \dots$ jeví se podle definice 12 přirozenou analogií k součtu konečného počtu čísel $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Dá se proto očekávat, že mnohé věty, známé pro *konečné* součty, budou platit i pro součty *nekonečných* řad. Ale některé z nich neplatí; vezměme si příklad:

Příklad 5. Řada

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots \tag{6}$$

(první člen je $1 + (-1)$, druhý rovněž $1 + (-1)$ atd.) má všechny členy rovné nule, tedy též všechny částečné součty rovny nule; tedy je konvergentní a má součet 0. Vynechám-li závorky, dostanu řadu $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ (první člen je 1, druhý -1 atd.) z příkl. 4, jež je divergentní. Žádný podobný zjev nenacházíme u součtu *konečného* počtu sčítanců. Zato však platí věta:

Věta 76. *Budiž $a_1 + a_2 + \dots = s$ (s smí být popř. též $+\infty$ nebo $-\infty$). Budiž $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ rostoucí posloupnost přirozených čísel; potom je též*

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) &+ \\ + (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \dots + a_{k_3}) + \dots &= s\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Poznámka 2. První člen řady (7) je číslo $a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}$, druhý je $a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}$ atd. Sloučím-li tedy v řadě, jež má určitý součet (třeba též $+\infty$ nebo $-\infty$), vždy několik po sobě jdoucích členů v jediný člen, dostanu novou řadu, jež má týž součet jako řada původní.

Důkaz. Kladu-li $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Částečné součty řady (7) jsou zřejmě $s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, \dots$ a tvoří tedy posloupnost vybranou; tedy je též (viz větu 62 a příklad 4 v kap. II, § 3) $\lim\limits_{n\to\infty} s_{k_n} = s$, tj. řada (7) má součet s.

Věta 77. *Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergentní řady. Buďte c, A, B čísla. Potom je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = As + Bt\,.$$

Důkaz. Klademe-li $a_1 + \dots + a_n = s_n$, $b_1 + \dots + b_n = t_n$, mají poslední dvě řady n-tý částečný součet cs_n, popříp. $As_n + Bt_n$. Podle (31) (kap. II) je $\lim cs_n = cs$, $\lim (As_n + Bt_n) = As + Bt$.

Ještě dvě poznámky k označení. Předně: řada (1) začínala indexem 1; řada může však začínat též libovolným jiným celým indexem; např. $\sum\limits_{l=-3}^{\infty} a_l$ čili $a_{-3} +$

$+ a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ je rovněž nekonečná řada; první člen je a_{-3}, druhý a_{-2}, čtrnáctý a_{10} atd. Podobně $\sum_{k=4}^{\infty} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + \ldots$ Za druhé: jako v konečných součtech, píšeme i v nekonečných řadách často $- a$ místo $+(- a)$; např. řadu s členy $1, - 2, 3, - 4, \ldots$ bychom měli psát vlastně $1 + (- 2) + + 3 + (- 4) + \ldots$; místo toho píšeme stručněji $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$; omyl nemůže vzniknout.

Poznámka 3. V součtu konečného počtu sčítanců smíme vynechat sčítance rovné nule; součet se tím nezmění. V podstatě totéž, jak ukážeme, platí u nekonečných řad. Má-li předně řada vůbec jen konečný počet členů různých od nuly, lze ji psát ve tvaru $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 0 + 0 + 0 + \ldots$; tato řada je zřejmě konvergentní a má součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Má-li za druhé řada nekonečně mnoho členů různých od nuly a vynechám-li (některé nebo všechny) nulové členy, dostanu opět nekonečnou řadu; např. z řady

$$0 + 0 + c_1 + c_2 + 0 + 0 + 0 + c_3 + 0 + c_4 + \ldots \tag{8}$$

dostanu řadu

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots; \tag{9}$$

položím-li $s_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, má řada (9) částečné součty

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, \tag{10}$$

kdežto řada (8) má částečné součty

$$0, 0, s_1, s_2, s_2, s_2, s_2, s_3, s_3, s_4, \ldots \tag{11}$$

Celý rozdíl mezi (10) a (11) je ten — vedle dvou nul v (11) — že se v (11) někteří členové posloupnosti (10) několikráte opakují. Podle příkl. 6 v kap. II, § 3 mají tedy posloupnosti (10), (11) tytéž vlastnosti, pokud se týče existence a hodnoty limity. Řady (8), (9) tedy buďto obě oscilují nebo mají obě týž součet (který může ovšem být též $+ \infty$ nebo $- \infty$). Tohoto vynechávání nebo přidávání nulových členů budeme často bez dalších poznámek užívat.

Věta 78. *Budiž k přirozené číslo. Potom řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ buďto obě konvergují nebo obě divergují k $+ \infty$ nebo obě divergují k $- \infty$ nebo obě oscilují. Jestliže konvergují, platí rovnice*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n . \tag{12}$$

Rovnice (12) je velmi názorná: součet konvergentní řady $a_1 + a_2 + \ldots$ se dostane tak, že se sečte prvních k členů $a_1, \ldots, a_k$ a k tomuto součtu se přičte „zbytek řady po k-tém členu“, tj. součet řady $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$

Důkaz. Položme $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; řadu $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ můžeme podle poznámky 3 psát též ve tvaru $0 + 0 + \ldots + 0 + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ (přidám k nulových členů); je-li σ_n n-tý částečný součet této řady, je $\sigma_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ $\ldots + a_n$ pro $n > k$, tedy

$$s_n = (a_1 + \ldots + a_k) + \sigma_n, \quad \sigma_n = s_n - (a_1 + \ldots + a_k)$$

pro $n > k$. Odtud však tvrzení věty podle známých vět o limitách okamžitě plyne (viz (31) v kap. II a cvičení 6, 8 v kap. II, § 3).

Poznámka 4. Z věty 78 ihned plyne: přidám-li, odstraním-li nebo změním-li v nekonečné řadě *konečný* počet členů, nezmění se chování řady; pouze v případě konvergence se změní hodnota součtu samozřejmým způsobem. Např.: řady

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots, b_1 + b_2 + a_5 + a_6 + \ldots$$

mají týž zbytek $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$. Obě řady jsou konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li tento „zbytek" konvergentní; je-li součet první řady s, součet druhé t, dostaneme mezi s, t tento vztah (podle věty 78)

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \sum_{n=5}^{\infty} a_n, \quad t = b_1 + b_2 + \sum_{n=5}^{\infty} a_n,$$

$$t = s + b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 .$$

V praxi je často důležitá tato snadná věta:

Věta 79. *Buďte $a_1 + a_2 + \ldots = s$, $b_1 + b_2 + \ldots = t$ dvě konvergentní řady; budiž $a_n \leqq b_n$ pro každé n. Potom je $s \leqq t$; jestliže aspoň pro jednu hodnotu n je $a_n < b_n$, je dokonce $s < t$.*

Důkaz. Položme $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$; tedy je $s_n \leqq t_n$, tedy též $\lim s_n \leqq \lim t_n$, tj. $s \leqq t$. Je-li $a_n = b_n$ pro všechna n, je ovšem $s = t$. Existuje-li však přirozené k tak, že $a_k < b_k$, je předně $a_1 + \ldots + a_k < b_1 + \ldots + b_k$ a za druhé – podle toho, co jsme právě dokázali – je $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n$; podle věty 78 je však $s = (a_1 + \ldots + a_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $t = (b_1 + \ldots + b_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n$ a tedy $s < t$.

Věta 80. *Je-li řada $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergentní, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Důkaz. Kladu-li $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$, existuje vlastní limita $\lim s_n = s$. Ale $a_n = s_n - s_{n-1}$, tedy $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$.

Příklad 6. V příkl. 1 jsme dokázali konvergenci geometrické řady $1 + q + q^2 + \ldots$ pro $|q| < 1$ (vezmu případ $a = 1$, z něhož obecný případ ihned plyne). Vyšetřeme ostatní případy: Budiž předně $q \geqq 1$; potom je $q^k \geqq 1$ pro každé přirozené k, $s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} \geqq n$, tedy $\lim s_n = +\infty$, $1 + q + q^2 + \ldots = +\infty$. Budiž za druhé $q \leqq -1$. Potom je $|q^n| \geqq 1$ pro každé přirozené k, tedy není limita n-tého členu rovna nule, takže řada diverguje. Může snad mít součet $+\infty$ nebo $-\infty$? Nikoliv, neboť podle (5) je $s_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Pro n sudé je $q^n \geqq 1$, tedy $s_n \leqq 0$ (jmenovatel $q - 1$ je záporný); pro n liché je $q^n \leqq -1$, tedy $s_n > 0$. Zřejmě tedy nemůže být $\lim s_n = +\infty$ ani $\lim s_n = -\infty$. Geometrická řada tedy pro $q \leqq -1$ osciluje.

Příklad 7. Je-li $\lim a_n = 0$, nemusí proto ještě řada $a_1 + a_2 + \ldots$ být konvergentní. Vezměme řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ $\left(\text{tzv. } \textit{řada harmonická}, n\text{-tý člen je } \dfrac{1}{n}\right)$.

Zde je $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} = s_{n-1} + \dfrac{1}{n} > s_{n-1}$, tedy $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$

Posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ má tedy limitu, buďto vlastní nebo $+\infty$ (podle věty 63). Vybraná posloupnost $s_2, s_{2^2}, s_{2^3}, \ldots, s_{2^n}, \ldots$ má tedy touž limitu. Je však $s_2 = \frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2}$, $s_{2^2} = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqq s_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \geqq \frac{2}{2}$, $s_{2^3} = s_{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geqq s_{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{8} \geqq \frac{3}{2}$; obecně $s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \dfrac{1}{2^n + 1} + \dfrac{1}{2^n + 2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Počet sčítanců, stojících zde za číslem s_{2^n}, je roven $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ a každý z nich je aspoň roven 2^{-n-1}. Tedy $s_{2^{n+1}} \geqq s_{2^n} + 2^n \cdot 2^{-n-1} = s_{2^n} + \frac{1}{2}$. Odtud postupně (úplnou indukcí)

$$s_2 \geqq \tfrac{1}{2},\quad s_{2^2} \geqq \tfrac{2}{2},\quad s_{2^3} \geqq \tfrac{3}{2}, \ldots, s_{2^n} \geqq \frac{n}{2}, \ldots;$$

naše vybraná posloupnost a tedy i celá posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ má limitu $+\infty$. Tedy: *harmonická řada* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ *diverguje k* $+\infty$, *ačkoliv je* $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

Cvičení

1. Řada $\dfrac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{0}} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \ldots$ diverguje k $+\infty$.

Návod: pište $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ a zjistíte $s_n = \sqrt{n}$.

2. Budiž z libovolné, ale ne celé záporné; budiž k přirozené číslo. Položme

$$a_n = \frac{1}{(z+n)(z+n+1)(z+n+2)\ldots(z+n+k)}.$$

Potom je

$$a_1 + a_2 + \ldots = \frac{1}{k(z+1)(z+2)\ldots(z+k)}.$$

Návod: pište

$$a_n = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{(z+n)(z+n+1)\dots(z+n+k-1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(z+n+1)(z+n+2)\dots(z+n+k)}\right).$$

3. K řadě

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

jsme sestrojili posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, \dots$ ($s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$). Naopak: ke každé posloupnosti $s_1, s_2, \dots$ lze sestrojit řadu (1) tak, že $s_1, s_2, \dots$ je právě posloupnost částečných součtů řady (1). Návod: $a_1 = s_1$, $a_2 = s_2 - s_1$, $a_3 = s_3 - s_2, \dots$

§ 2. **Řady s nezápornými členy.** Tak nazýváme řady $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, v nichž je $a_n \geqq 0$ pro každé n. Pro takovou řadu je $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n \geqq \geqq s_{n-1}$, takže posloupnost $s_1, s_2, \dots$ je neklesající. Ježto součet řady byl definován jako limita posloupnosti $s_1, s_2, \dots$, plyne z věty 63 ihned

Věta 81. *Budiž $a_1 + a_2 + \dots$ řada s nezápornými členy. Je-li posloupnost $s_1, s_2, \dots$ ($s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$) shora omezená, je řada konvergentní a má součet* $\sup\limits_{n=1,2,\dots} s_n$; *není-li posloupnost $s_1, s_2, \dots$ shora omezená, diverguje řada k $+\infty$.*

U řad s nezápornými členy je tedy rozhodování o konvergenci podstatně zjednodušeno: stačí zjistit, zda posloupnost částečných součtů je shora omezena. Odtud plyne ihned tato základní věta:

Věta 82. *Buďte*

(13) $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

(14) $$b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje přirozené číslo k tak, že pro $n \geqq k$ je $a_n \leqq b_n$. Potom platí: I. Je-li řada (14) konvergentní, je i řada (13) konvergentní. II. Je-li řada (13) divergentní, je též řada (14) divergentní.

Důkaz. I. Budiž (14) konvergentní; podle věty 78 konverguje tedy též řada $b_k + b_{k+1} + b_{k+2} + \dots$; její částečné součty jsou tedy podle věty 81 vesměs menší než jisté číslo K; tím spíše jsou částečné součty řady $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$ menší než K; tedy je tato řada podle věty 81 konvergentní; podle věty 78 konverguje tedy též řada $a_1 + a_2 + \dots$ II. Budiž (13) divergentní. Kdyby (14) konvergovala, konvergovala by též (13) (podle I), což je spor.

Příklad 1. Řada $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ je konvergentní.

Důkaz. Řada $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$ je konvergentní (§ 1, příkl. 2). Je

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Tedy je též řada $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ konvergentní.

Příklad 2. Budiž $\alpha < 1$; potom je řada $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$ divergentní; neboť $\frac{1}{n^\alpha} \geqq \frac{1}{n}$ a harmonická řada (§ 1, příkl. 7) diverguje.

Význam věty 82, I je zřejmě tento: víme-li o nějaké řadě $A_1 + A_2 + \ldots$ ($A_n \geqq 0$), že konverguje, je tím zaručena též konvergence každé řady $a_1 + a_2 + \ldots$, pro kterou je $0 \leqq a_n \leqq A_n$ (stačí dokonce, platí-li poslední nerovnost pro dostatečně velká n). Podobný je význam tvrzení II. Víme např., že řada $q + q^2 + q^3 + \ldots$ je konvergentní pro $0 < q < 1$; odtud plyne ihned tato věta:

Věta 83. *Budiž*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{15}$$

řada s nezápornými členy.

I. Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geqq k$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$, je řada (15) konvergentní.

II. Platí-li nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$ pro nekonečně mnoho hodnot n, je řada (15) divergentní.

Důkaz. I. Z nerovnosti $\sqrt[n]{a_n} < q$ plyne $a_n < q^n$ a řada $q + q^2 + q^3 + \ldots$ je konvergentní. II. Platí-li nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$ a tedy $a_n \geqq 1$ pro nekonečně mnoho n, není $\lim a_n = 0$ a z věty 80 plyne divergence.

Poznámka 1. V části I je ovšem podstatné, že číslo q nezávisí na n, tj. číslo q má být menší než 1 a současně větší než *všechna* čísla $\sqrt[k]{a_k}, \sqrt[k+1]{a_{k+1}}, \sqrt[k+2]{a_{k+2}}, \ldots$ Všimněte si, že důkaz části II nespočíval na větě 82. Větě 83 se říkává „*Cauchyovo kriterium*" pro konvergenci, popř. divergenci řady (15).

Z věty 83 plyne toto „limitní Cauchyovo kriterium":

Věta 84. *Budiž (15) řada s nezápornými členy. Potom platí: je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *je řada konvergentní; je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ *(popř. $= +\infty$), je řada divergentní.*

Důkaz. Položme $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$. Budiž předně $l < 1$, takže lze zvolit číslo q tak, že $l < q < 1$. Podle poznámky 3 v kap. II, § 2 existuje přirozené k tak, že pro

$\geqq k$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$; věta 83 dává pak konvergenci. Obdobně: je-li $l > 1$ (popř. $l = +\infty$), existuje přirozené k tak, že pro $n \geqq k$ je $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$, z čehož plyne divergence.

Poznámka 2. Věta 84 selhává, jestliže limita $\lim \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje nebo je rovna 1.

Pohodlnější než věta 82 bývá často následující věta, ač vypadá na pohled složitěji:

Věta 85. *Buďte* (13), (14) *dvě řady s kladnými členy* (tj. $a_n > 0$, $b_n > 0$ *pro každé* n). *Nechť existuje dále přirozené číslo* k *tak, že je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ pro každé } n \geqq k. \tag{16}$$

Potom platí: I. Je-li (14) *konvergentní, je* (13) *konvergentní. II. Je-li* (13) *divergentní, je* (14) *divergentní.*

Důkaz. I. Z (16) plyne pro $n > k$

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_k},$$

tj. $a_n \leqq \frac{a_k}{b_k} b_n$ pro $n > k$ (poslední nerovnost platí dokonce též pro $n = k$). Konverguje-li řada (14), konverguje též řada $\frac{a_k}{b_k} b_1 + \frac{a_k}{b_k} b_2 + \ldots + \frac{a_k}{b_k} b_n + \ldots$ (věta 77) a podle věty 82 tedy též řada $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ II. Diverguje-li řada (13), nemůže řada (14) konvergovat; neboť kdyby (14) konvergovala, konvergovala by též (13) podle bodu I.

Užiji-li speciálně konvergentní řady $q + q^2 + q^3 + \ldots$ ($0 < q < 1$; podíl dvou po sobě následujících členů je q) a divergentní řady $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ (podíl dvou po sobě následujících členů je 1), dostávám tuto větu (tzv. *d'Alembertovo kriterium*):

Věta 86. *Budiž*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{17}$$

řada s kladnými členy.

I. Existuje-li číslo $q < 1$ *a přirozené číslo* k *tak, že pro všechna* $n \geqq k$ *je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, *je řada* (17) *konvergentní.*

II. Existuje-li přirozené číslo k *tak, že pro všechna* $n \geqq k$ *je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, *je řada* (17) *divergentní.*

Zcela podobně, jako z věty 83 plyne věta 84, plyne z věty 86 tato věta (tzv. limitní d'Alembertovo kritérium):

Věta 87. *Budiž* (17) *řada s kladnými členy; je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *je řada konvergentní, je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (*popř.* $+\infty$), *je řada divergentní.*

Příklad 3. Budiž $x > 0$. Sestrojme řadu

$$\frac{(1!)^2}{2!}x + \frac{(2!)^2}{4!}x^2 + \frac{(3!)^2}{6!}x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n. \tag{18}$$

Podíl $(n + 1)$-vého a n-tého členu je

$$\frac{(1 \,.\, 2 \ldots n \,.\, (n+1))^2}{1 \,.\, 2 \ldots 2n(2n+1)(2n+2)}\, x^{n+1} \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \ldots 2n}{(1 \,.\, 2 \ldots n)^2}\, x^{-n} = \tag{19}$$

$$= \frac{(n+1)^2 x}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{x}{4}\,\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Limita tohoto výrazu pro $n \to \infty$ je $\frac{1}{4}x$; z toho plyne konvergence pro $0 < x < 4$, divergence pro $x > 4$; pro $x = 4$ nedává věta 87 žádné rozhodnutí, ale z věty 86 plyne divergence, neboť výraz (19) je pro $x = 4$ větší než 1.

Poznámka 3. Podobně jako v tomto příkladě je tomu často. Obecně lze říci, že věta 87 bývá často pohodlnější, věta 86 však vydatnější, takže dovoluje leckdy rozhodnout i tam, kde věta 87 selže.

Příklad 4. Sestrojme řadu $1^\alpha \,.\, x + 2^\alpha \,.\, x^2 + 3^\alpha \,.\, x^3 + \ldots$, kde α je libovolné, x kladné. Zde jde o limitu podílu

$$\frac{(n+1)^\alpha x^{n+1}}{n^\alpha x^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha x. \tag{20}$$

Snadno ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1$. Neboť $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$; pro každé přirozené k je tedy $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 1$, $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-k} = \dfrac{1}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k} = 1$, tedy $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta = 1$ pro každé celé $\beta \gtreqless 0$. Volme nyní celá čísla β, γ tak, že $\beta < \alpha < \gamma$, takže $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\gamma$; zde mají obě „křídla" limitu 1; podle věty 61 je tedy vskutku $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1$. Limita výrazu (20) je tedy x; odtud konvergence pro $0 < x < 1$, divergence pro $x > 1$. Případ $x = 1$ vyřešíme v § 3, příkl. 1.

Příklad 5 (k větám 82, 79). Budiž

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s \tag{21}$$

konvergentní řada s nezápornými členy. Budiž $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom řada

$$a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \ldots = t \tag{22}$$

je také konvergentní.

Důkaz. Ony členy řady (21), jež jsou v řadě (22) vynechány, nahraďme nulami; tím dostaneme řadu tvaru

$$0 + 0 + \ldots + 0 + a_{k_1} + 0 + \ldots + 0 + a_{k_2} + 0 + \ldots + 0 + a_{k_3} + \ldots \tag{23}$$

(některé skupiny nul mohou ovšem scházet), která má podle poznámky 3 v § 1 tytéž vlastnosti jako řada (22). Ježto $a_n \geqq 0$, plyne konvergence řady (23) z konvergence řady (21) a z věty 82. Z věty 79 plyne dále: jest $t \leqq s$; rovnice $t = s$ platí tehdy a jen tehdy, neschází-li v řadě (22) žádný kladný člen řady (21).

Poznámka 4. Řady, které obsahují pouze konečný počet záporných členů, lze vyšetřovat též metodami tohoto paragrafu; u takových řad existuje totiž přirozené číslo k tak, že řada $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ má vesměs nezáporné členy; věta 78 dovoluje pak přejít k řadě $a_1 + a_2 + \ldots$ Řady s nekladnými členy ($a_n \leqq 0$) lze též vyšetřovat metodami tohoto paragrafu; stačí násobit všechny členy číslem $c = -1$ a užít věty 77.

Cvičení

V těchto cvičeních (není-li jinak poznamenáno) užijte věty 87; selže-li, užijte věty 86.

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je konvergentní pro každé $x > 0$.

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ je divergentní pro každé $x > 0$.

3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ je konvergentní pro $0 < x < e$, divergentní pro $x \geqq e$ $\left(\text{užijte toho, že } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\right)$.

4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ je konvergentní pro $0 < x < \frac{1}{4}$, divergentní pro $x \geqq \frac{1}{4}$ (pro $x = \frac{1}{4}$

je podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ roven $\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$ a je větší než obdobný podíl $\frac{n}{n+1}$ u řady harmonické; užijte věty 85; věta 87 ani 86 nevede pro $x = \frac{1}{4}$ k cíli).

5. Řada $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$ je konvergentní pro $0 < x < 1$, divergentní pro $x \geqq 1$ (pro $x = 1$ uvažte : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$ je divergentní, podle věty 82 je tedy divergentní řada $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$).

§ 3. Řady, u nichž $|a_1| \geqq |a_2| \geqq |a_3| \geqq \ldots$ Z řad tohoto typu jsou důležité tyto dva případy: A) Všechny členy jsou kladné. B) Znamení se pravidelně střídají.

Věta 88. *Budiž* $a_n \geqq a_{n+1} > 0$ *pro každé* n *(tj.* $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots > 0$). *Potom řada* $a_1 + a_2 + \ldots$ *konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}. \tag{24}$$

Poznámka 1. Na větě je zajímavé to, že o konvergenci řady $a_1 + a_2 + \ldots$ rozhodují – ovšem za vytčených předpokladů – pouze členy $a_2, a_4, a_8, a_{16}, a_{32}, \ldots$ Věta by se dala značně zobecnit.

Důkaz. Posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ($s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$) je rostoucí a má tedy limitu (vlastní nebo $+\infty$). Touž limitu má vybraná posloupnost

$$s_2, s_{2^2}, s_{2^3}, s_{2^4}, \ldots \tag{25}$$

Jest

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \ldots + a_{2^n};$$

zde je počet sčítanců 2^{n-1} a každý sčítanec je $\leqq a_{2^{n-1}}$ a současně $\geqq a_{2^n}$, takže

$$2^{n-1}a_{2^{n-1}} \geqq s_{2^n} - s_{2^{n-1}} \geqq 2^{n-1}a_{2^n} = \tfrac{1}{2} \cdot 2^n a_{2^n}. \tag{26}$$

I. Je-li řada (24) konvergentní, je podle věty 82 a podle (26) konvergentní řada, jejíž n-tý člen je $s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$, tj. řada

$$(s_{2^2} - s_2) + (s_{2^3} - s_{2^2}) + (s_{2^4} - s_{2^3}) + \ldots;$$

n-tý částečný součet této řady je $s_{2^{n+1}} - s_2$, tedy existuje vlastní limita $\lim (s_{2^{n+1}} - s_2)$, tedy též $\lim s_{2^{n+1}} = \lim (s_{2^{n+1}} - s_2) + s_2$ a tedy též vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2^{n+1}}$.

II. Je-li řada (24) a tedy též řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 2^n a_{2^n}$ divergentní, je podle věty 82 a podle (26) divergentní též řada, jejíž n-tý člen je $s_{2^n} - s_{2^{n-1}}$, tj. řada $(s_2 - s_1) + (s_{2^2} - s_2) + (s_{2^3} - s_{2^2}) + \ldots$; n-tý částečný součet této řady je $s_{2^n} - s_1$, tedy $\lim (s_{2^n} - s_1) = +\infty$, a tedy zřejmě též $\lim s_{2^n} = +\infty$.

Příklad 1. Vyšetřujme řadu $1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots$ Je-li $\alpha > 0$, je $n^\alpha < (n+1)^\alpha$ a věty 88 nelze užít; v tomto případě však je $n^\alpha \geqq 1$, tedy není $\lim n^\alpha = 0$ a řada diverguje. Jestliže je $\alpha \leqq 0$, je $n^\alpha \geqq (n+1)^\alpha > 0$ a věty 88 lze užít. Jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n . (2^n)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1+\alpha})^n$ (geometrická řada o kvocientu $2^{1+\alpha}$). Tedy: konvergence pro $2^{1+\alpha} < 1$, tj. pro $\alpha < -1$, divergence pro $2^{1+\alpha} \geqq 1$, tj. $\alpha \geqq -1$ (viz § 2, příkl. 4).

Případu B) se týká tato věta:

Věta 89. *Pro všechna n budiž $a_n \geqq a_{n+1} > 0$. Potom je řada*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (n\text{-tý člen } (-1)^{n+1} a_n) \tag{27}$$

konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li $\lim a_n = 0$. Pro součet s této řady platí pak $a_1 - a_2 \leqq s \leqq a_1$.

Důkaz. Není-li $\lim a_n = 0$, nemůže řada (27) konvergovat (věta 80). Budiž tedy $\lim a_n = 0$; položme $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n$; tedy

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqq s_{2n}, \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqq s_{2n-1} \end{aligned} \tag{28}$$

(neboť $a_{2n} \geqq a_{2n+1} \geqq a_{2n+2}$). Odtud

$$s_2 \leqq s_4 \leqq s_6 \leqq s_8 \leqq \ldots; \tag{29}$$

$$s_1 \geqq s_3 \geqq s_5 \geqq s_7 \geqq \ldots \tag{30}$$

Dále je

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leqq s_{2n-1}, \tag{31}$$

takže posloupnost (29) je neklesající a shora omezená (neboť $s_{2n} \leqq s_{2n-1} \leqq s_1$), existuje tedy vlastní $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Podle (31) je též $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = s$.

Ke každému $\varepsilon > 0$ existují tedy přirozená čísla n_1, n_2 tak, že je $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ pro $n \geqq n_1$, $|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$ pro $n \geqq n_2$. Klaďme $m_0 = \mathrm{Max}(2n_1, 2n_2 - 1)$. Je-li m přirozené číslo, $m \geqq m_0$, je buďto m sudé, tedy $m = 2n \geqq 2n_1$, tedy $n \geqq n_1$, tedy $|s_m - s| = |s_{2n} - s| < \varepsilon$; nebo je m liché, tedy $m = 2n - 1 \geqq 2n_2 - 1$, tedy $n \geqq n_2$, tedy opět $|s_m - s| = |s_{2n-1} - s| < \varepsilon$. Tedy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje m_0 tak, že pro všechna přirozená $m \geqq m_0$ je $|s_m - s| < \varepsilon$. Tedy vskutku $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Z (29), (30) a z důsledků vět 63, 64 pak plyne $a_1 - a_2 = s_2 \leqq s$, $a_1 = s_1 \geqq s$.

Příklad 2. Řada $1^\alpha - 2^\alpha + 3^\alpha - 4^\alpha + \ldots$ je divergentní pro $\alpha \geqq 0$, neboť $n^\alpha \geqq 1$ a tedy není $\lim (-1)^{n+1} n^\alpha = 0$. Ale pro $\alpha < 0$ je konvergentní, neboť potom je $n^\alpha > (n+1)^\alpha > 0$, $\lim n^\alpha = 0$. Speciálně řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ je konvergentní; její součet je $\geqq \frac{1}{2}$ a současně $\leqq 1$.

Cvičení

1. Je-li řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní, je $\lim a_n = 0$. Je-li mimoto $a_n \geqq a_{n+1} > 0$ pro každé n, je dokonce $\lim na_n = 0$. Návod: z věty 88 a 80 dostanete $\lim\limits_{m\to\infty} 2^m a_{2^m} = 0$ a tedy též $\lim\limits_{m\to\infty} 2^{m+1} a_{2^m} = 0$. Je-li dáno $n > 2$, najdeme přirozené m tak, že $2^m \leqq n < 2^{m+1}$, načež $na_n \leqq 2^{m+1} a_{2^m}$.

2. Je-li $0 < \alpha < \beta$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\beta}$ konvergentní. Návod: výraz $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ se zmenší, zvětším-li n; a jeho limita je nula.

3. Je-li $0 < \alpha < \beta$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\beta}$ konvergentní (že členy této řady jsou v prosté hodnotě menší než u řady cvičení 2, není nic platno, ježto nejde o řady s nezápornými členy). Návod: $\lim \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\beta} = 0$ je snadné. Ještě jde o to, dokázat, že aspoň pro dosti velká n je

$$\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta} > \frac{(n+1)^\alpha}{(n+2)^\beta}, \quad \text{tj.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^\beta.$$

Zvolme racionální čísla $\dfrac{p}{r}$, $\dfrac{q}{r}$ (p, q, r přirozená) tak, že $\alpha < \dfrac{p}{r} < \dfrac{q}{r} < \beta$; stačí dokázat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p/r} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{q/r}, \quad \text{tj.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^q.$$

Binomická poučka dá

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = \frac{q}{n+1} + \binom{q}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots - \frac{p}{n} - \binom{p}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots$$

Snadno zjistíte, že tento výraz, násobený číslem n, má limitu $q - p > 0$; tedy je tento výraz pro velká n kladný a věta 89, aplikovaná na zbytek vyšetřované řady, dává její konvergenci.

§ 4. Absolutní konvergence. Věta 90. *Je-li řada*

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \tag{32}$$

konvergentní, je i řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{33}$$

konvergentní.

Poznámka 1. Obrátit se věta nedá: řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ je konvergentní, ač řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ je divergentní.

Důkaz. Řada (32) budiž konvergentní. Sestrojme řady

$$b_1 + b_2 + \ldots, \tag{34}$$

$$c_1 + c_2 + \ldots \tag{35}$$

takto: Je-li $a_n < 0$, položme $b_n = 0$; je-li $a_n \geqq 0$, položíme $b_n = a_n = |a_n|$, takže vždy je

$$0 \leqq b_n \leqq |a_n| . \tag{36}$$

Obdobně: je-li $a_n \geqq 0$, položme $c_n = 0$; je-li $a_n < 0$, položíme $c_n = -a_n = |a_n|$, takže vždy je

$$0 \leqq c_n \leqq |a_n| .\text{[3]} \tag{37}$$

Podle (36), (37) plyne z věty 82 a z konvergence řady (32), že řady (34), (35) jsou konvergentní; buďte σ, τ jejich součty. Pro každé n je $a_n = b_n - c_n$, neboť pro $a_n < 0$ je $b_n = 0$, $c_n = -a_n$ a pro $a_n \geqq 0$ je $b_n = a_n$, $c_n = 0$. Podle věty 77 plyne tedy konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = \sigma - \tau.\text{[4]}$$

Definice 13. *O řadě (33) říkáme, že je absolutně konvergentní, konverguje-li řada (32) (načež ovšem, podle věty 90, konverguje též řada (33)). Konverguje-li řada (33) a řada (32) diverguje, říkáme, že řada (33) je neabsolutně (nebo též relativně) konvergentní.*

Nekonečné řady se tedy dělí podle tohoto schématu:

$$\text{Řady} \begin{cases} \text{konvergentní} & \begin{cases} \text{absolutně} \\ \text{neabsolutně} \end{cases} \\[2ex] \text{divergentní} & \begin{cases} \text{divergující k } +\infty \\ \text{divergující k } -\infty \\ \text{oscilující.} \end{cases} \end{cases}$$

Poznámka 2. Vynechání, přidání nebo změnění konečného počtu členů nemá vlivu na konvergenci řady (32), tedy ani na absolutní konvergenci řady (33).

Poznámka 3. Absolutně konvergentní řady mají mnohé důležité vlastnosti, kterými se budeme zabývat většinou až v 2. svazku tohoto díla. Uveďme aspoň zběžně jednu z nich (přesnou formulaci a důkaz odkládám až do 2. svazku). Součet

[3]) Slovy: řada (34) vzniká z (33) tím, že záporné členy nahradíme nulami; řada (35) vzniká z (33) tím, že nezáporné členy nahradíme nulami a u záporných změníme znamení.

[4]) Podobně vychází $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) = \sigma + \tau$.

konečného počtu čísel se nemění přerovnáním sčítanců; např. $a + b = b + a$, $a + b + c + d = d + c + a + b$. Podobně je tomu u řad absolutně konvergentních: přerovnám-li členy absolutně konvergentní řady, obdržím opět řadu absolutně konvergentní o témž součtu. Naopak: součet neabsolutně konvergentní řady lze vhodným přerovnáním změnit.

Kriterií, obsažených ve větách 83, 84, 86, 87, lze užít i na řady s libovolnými (kladnými i zápornými) členy, a to v tomto tvaru:

Věta 91. *Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro $n \geqq k$ je $\sqrt[n]{|a_n|} < q$, je řada (33) absolutně konvergentní.*[5] *Platí-li nerovnost $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1$ (tj. $|a_n| \geqq 1$) pro nekonečně mnoho hodnot n, je řada (33) divergentní.*[6]

Věta 92. *Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro $n \geqq k$ je $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$,*[7] *je řada (33) absolutně konvergentní.*[8] *Existuje-li však přirozené číslo k tak, že pro $n \geqq k$ je $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1$,*[7] *je řada (33) divergentní.*[9]

Odtud plyne běžným limitním přechodem (viz důkaz věty 84):

Věta 93. *Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ nebo $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, je řada (33) absolutně konvergentní; je-li jedna z těchto limit větší než 1 (popř. $= +\infty$), je řada (33) divergentní.*

Poznámka 4. Věty 91, 92, 93 dovolují někdy rozhodnout buďto o absolutní konvergenci nebo o divergenci řady; pro vyšetřování neabsolutní konvergence se tyto věty nehodí.

Příklad 1. Řada $\dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots$ je absolutně konvergentní pro $x = 0$. Pro $x \neq 0$ je $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{x^n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x|$; limita tohoto výrazu je $|x|$. Tedy máme absolutní konvergenci pro $|x| < 1$, divergenci pro $|x| > 1$. Pro $x = 1$ dostáváme divergentní řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, pro $x = -1$ neabsolutně konvergentní řadu $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$

[5]) Neboť řada (32) je konvergentní podle věty 83.

[6]) Neboť není $\lim a_n = 0$.

[7]) V této nerovnosti je — jak jsem již jednou (kap. II, pozn.[12])) zdůraznil — implicitně obsaženo, že $a_n \neq 0$ pro $n \geqq k$; neboť kdyby bylo $a_n = 0$, neměl by zlomek $a_{n+1} : a_n$ smysl a uvedená nerovnost by nemohla platit.

[8]) Neboť řada $|a_k| + |a_{k+1}| + \ldots$ je konvergentní podle věty 86.

[9]) Neboť pro $n \geqq k$ je potom $|a_n| \geqq |a_k| > 0$, takže nemůže být $\lim a_n = 0$.

Cvičení

1. Vyšetřete absolutní konvergenci, neabsolutní konvergenci a divergenci řad, vyšetřovaných v cvičeních k § 2, a to pro všechna x (i záporná). V cvičení 1 dostanete absolutní konvergenci pro všechna x, v cvičení 2 dostanete divergenci pro všechna $x \neq 0$, v cvičení 3 absolutní konvergenci pro $|x| < e$, divergenci pro $|x| \geqq e$, v cvičení 5 absolutní konvergenci pro $|x| < 1$, divergenci pro $|x| \geqq 1$. V cvičení 4 obdržíte absolutní konvergenci pro $|x| < \frac{1}{4}$, divergenci pro $|x| > \frac{1}{4}$ a pro $x = \frac{1}{4}$.

2. Pro $x = -\frac{1}{4}$ je řada z cvičení 4, § 2 obtížnější. Dostanete řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \,.$$

Prosté hodnoty členů ubývají, lze tedy užít věty 89. Snadno zjistíte, že pro $k > 0$ je $\frac{2k-1}{2k} < \sqrt{\frac{k}{k+1}}$ (umocněte a odstraňte jmenovatele). Tedy

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \ldots \frac{n}{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{n+1}}\,;$$

limita tohoto výrazu je nula a řada pro $x = -\frac{1}{4}$ konverguje a to neabsolutně (proč?).

§ 5. Nekonečné desetinné zlomky. Způsob, jak se vyjadřují celá čísla v desítkové soustavě a rovněž teorie tzv. konečných desetinných zlomků, např. $3{,}257 = \frac{3257}{1000}$, patří do nauky o racionálních číslech, jejíž znalost jsem předpokládal. Zato tzv. nekonečný desetinný zlomek znamená součet nekonečné řady $\left(\text{např. } 3{,}14159 \ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots\right)$. Je vidět, že teorie nekonečných desetinných zlomků patří do teorie nekonečných řad, tj. spočívá na pojmu limity, jehož přesnou teorii jste ve škole neprobírali. Proto musím teorii nekonečných desetinných zlomků teprve vybudovat, chci-li jí dále s plným oprávněním používat; to učiním v tomto paragrafu.

Nekonečným desetinným zlomkem budu nazývat každou řadu tvaru

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots, \tag{38}$$

kde a_n jsou celá čísla, $0 \leqq a_n \leqq 9$. Číslo a_n se nazývá n-tým *desetinným číslem* nebo n-tou *decimálou* zlomku. Je-li s součet řady (38), říkáme, že zlomek (38) má hodnotu s nebo že vyjadřuje číslo s. Dva zlomky považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, mají-li stejné decimály (může se ovšem stát, jak uvidíme, že dva různé zlomky[10]) mohou

[10]) Tj. dva zlomky, jež se liší aspoň v jedné decimále.

mít stejnou hodnotu). Řadu (38) vyjadřujeme také stručnějším znakem $0, a_1a_2a_3 \dots$ Hlavní výsledky teorie nekonečných desetinných zlomků jsou shrnuty v této větě:

Věta 94. *I. Každý nekonečný desetinný zlomek* $0{,}a_1a_2a_3 \dots = s$ *je konvergentní řada a jest* $0 \leqq s \leqq 1$. *Rovnost* $s = 0$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $a_n = 0$ *pro všechna* n; *rovnost* $s = 1$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $a_n = 9$ *pro všechna* n.

II. Dva různé nekonečné desetinné zlomky mají tehdy a jen tehdy touž hodnotu, má-li jeden z nich tvar $0{,}a_1a_2 \dots a_{k-1}a_k0000 \dots$ $(k > 0,\ a_k > 0$, *samé nuly za* $a_k)$ *a druhý tvar* $0{,}a_1a_2 \dots a_{k-1}\ (a_k - 1)\,9999 \dots$ (*samé devítky za decimálou* $a_k - 1$).

III. Každé číslo s, *vyhovující podmínce* $0 \leqq s < 1$, *lze vyjádřit jedním a jen jedním zlomkem* $0{,}a_1a_2a_3 \dots$ *takovým, že pro nekonečně mnoho hodnot* n *je* $a_n \neq 9$ (*naopak, hodnota* s *každého takového zlomku vyhovuje podle I nerovnostem* $0 \leqq s < 1$).

Důkaz. Podle § 1, příkl. 1 (součet geometrické řady) je $\frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$. Odtud, z vět 82, 79 a z nerovností $0 \leqq a_n \leqq 9$ plyne tvrzení I. Buďte nyní

$$s = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots, t = \frac{b_1}{10^1} + \frac{b_2}{10^2} + \dots$$

dva různé zlomky; budiž k nejmenší přirozené číslo, pro něž je $a_k \neq b_k$; volme označení tak, že $b_k < a_k$, takže $t = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots$ Jest

$$s \geqq \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \tag{39}$$

a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0$ (věta 79). Podobně je (ježto $b_k \leqq a_k - 1$)

$$t \leqq \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k - 1}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \frac{9}{10^{k+3}} + \dots \tag{40}$$

$$= \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_k}{10^k} - \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^k}$$

(sečteme poslední geometrickou řadu) a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $b_k = a_k - 1$, $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = 9$. Z (39), (40) plyne, že $t \leqq s$; znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $b_k = a_k - 1$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0$, $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = 9$. Tím je bod II dokázán. Abychom dokázali bod III, vyšetřujme libovolné číslo s, vyhovující nerovnostem $0 \leqq s < 1$. Sestrojím nyní posloupnos celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tak, že pro každé n je

$$0 \leqq s - \frac{a_1}{10^1} - \frac{a_2}{10^2} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}. \tag{41}$$

K tomu cíli zvolíme předně celé číslo a_1 tak, aby bylo $0 \leqq s - \dfrac{a_1}{10} < \frac{1}{10}$, tj. $a_1 \leqq$ $\leqq 10s < a_1 + 1$, tj. položíme $a_1 = [10s]$ (viz větu 46). Ježto $0 \leqq 10s < 10$, je $0 \leqq a_1 \leqq 9$. Předpokládejme, že celá čísla $a_1, \ldots, a_{n-1}$ byla již sestrojena; sestrojíme nyní celé číslo a_n tak, aby platilo (41), tj. tak, aby bylo $a_n \leqq 10^n s - 10^{n-1}a_1 - \ldots$ $\ldots - 10a_{n-1} < a_n + 1$; tj. zvolíme

$$a_n = [10^n s - 10^{n-1}a_1 - \ldots - 10a_{n-1}]. \tag{42}$$

Tvrdím, že je $0 \leqq a_n \leqq 9$ pro každé n. Pro $n = 1$ jsme to před okamžikem dokázali; pro $n > 1$ to dokážeme takto: napíšeme-li nerovnost (41) s hodnotou $n - 1$ místo n, dostaneme

$$0 \leqq s - \frac{a_1}{10^1} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-1}},$$

tj.

$$0 \leqq 10^n s - 10^{n-1}a_1 - \ldots - 10a_{n-1} < 10,$$

takže podle (42) je vskutku $0 \leqq a_n \leqq 9$. Podle (41) je pak

$$s = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \tag{43}$$

Tvrdím konečně, že pro nekonečně mnoho hodnot n je $a_n < 9$. Kdyby totiž existovalo přirozené číslo k takové, že

$$a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = \ldots = 9,$$

bylo by podle (43)

$$s - \frac{a_1}{10^1} - \ldots - \frac{a_k}{10^k} = \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \ldots = \frac{1}{10^k},$$

což je ve sporu s nerovnostmi (41). Tím je dokázáno, že číslo s lze vyjádřit nekonečným desetinným zlomkem $0{,}a_1a_2a_3\ldots$, v němž pro nekonečně mnoho hodnot n je $a_n \neq 9$. Že nemohou dva různé takové zlomky vyjadřovat totéž číslo s, plyne z bodu II.

Poznámka 1. Omezíme-li se na nekonečné desetinné zlomky, v nichž je nekonečně mnoho decimál různých od 9, vidíme: každý takový zlomek vyjadřuje číslo s, pro něž je $0 \leqq s < 1$; naopak lze každé takové číslo s vyjádřit jedním a jen jedním takovým zlomkem $s = 0{,}a_1a_2 \ldots$ ($a_n < 9$ pro nekonečně mnoho n). Podle (41) dopustíme se chyby menší než 10^{-k}, nahradíme-li číslo s *konečným* desetinným zlomkem $0{,}a_1a_2 \ldots$ $\ldots a_k$ $\left(\text{tento zlomek znamená ovšem číslo } \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}\right)$. *Libovolné* nezáporné číslo x vyjadřujeme pak takto: najdeme číslo $[x]$ a položíme $x - [x] = s$, takže $0 \leqq s < 1$, $x = [x] + s$, načež číslo s vyjádříme nekonečným desetinným zlomkem. Výsledek potom píšeme dohromady způsobem vám běžným; např. místo $256 + 0{,}137\ldots$ píšeme $256{,}137\ldots$

Zlomek $0{,}a_1a_2a_3 \ldots$ nazýváme *periodickým*, existují-li celá čísla $k \geqq 0$, $r > 0$ tak, že pro $n > k$ je $a_{n+r} = a_n$, takže zlomek má tento tvar

$$s = 0{,}a_1a_2 \ldots a_ka_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{k+r}a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{k+r}a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{k+r} \ldots$$

Číslo s je racionální, neboť

$$s = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} +$$

$$+ \left(\frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots + \frac{a_{k+r}}{10^{k+r}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10^r} + \frac{1}{10^{2r}} + \frac{1}{10^{3r}} + \ldots\right)^{11)}$$

a číslo

$$1 + \frac{1}{10^r} + \frac{1}{10^{2r}} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^r}}$$

je racionální. Větu lze obrátit:

Věta 95. *Zlomek* $0{,}a_1a_2a_3 \ldots$ *vyjadřuje racionální číslo tehdy a jen tehdy, je-li periodický.*

Důkaz. I. Je-li zlomek periodický, je jeho hodnota racionální číslo, jak jsme právě ukázali.

II. Budiž nyní s racionální číslo, $s = 0,\ a_1a_2a_3 \ldots$; máme dokázat, že zlomek je periodický. Jsou-li všechna a_n od jistého místa počínaje rovna 9, je zlomek periodický. Předpokládejme tedy, že pro nekonečně mnoho n je $a_n < 9$. Potom je $0 \leqq s < 1$, tedy $s = \frac{p}{q}$, p, q celá, $q > 0$, $0 \leqq p < q$. Položíme-li $s_n = 0{,}a_1a_2 \ldots a_n$, je

$$s - s_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a_m}{10^m} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^m} = \frac{1}{10^n}$$

a tedy

$$0 \leqq s - s_n < \frac{1}{10^n}\,. \tag{44}$$

11) Sloučil jsem vždy r členů jedné „periody" v jeden člen, což smíme podle věty 76.

Za druhé je $10^n \,.\, s_n$ celé číslo, tedy

$$(45) \qquad 10^n(s - s_n) = 10^n \frac{p}{q} - 10^n s_n = \frac{c_n}{q},$$

kde c_n je celé číslo; podle (44) je $0 \leqq \frac{c_n}{q} < 1$, takže pro každé n je číslo c_n, definované rovnicí (45), jedním z q čísel $0, 1, 2, \ldots, q - 1$. Mezi $q + 1$ čísly $c_1, c_2, \ldots, c_{q+1}$ jsou tedy aspoň dvě stejná, třeba $c_k = c_l$ $(k < l)$. Položme $l - k = r$, tedy $r > 0$, $c_k = c_{k+r}$. Podle (45) je

$$\frac{c_k}{q} = 10^k(s - s_k) = \frac{a_{k+1}}{10} + \frac{a_{k+2}}{10^2} + \frac{a_{k+3}}{10^3} + \ldots,$$

$$\frac{c_k}{q} = \frac{c_{k+r}}{q} = 10^{k+r}(s - s_{k+r}) = \frac{a_{k+r+1}}{10} + \frac{a_{k+r+2}}{10^2} + \frac{a_{k+r+3}}{10^3} + \ldots$$

Zde máme dva rozvoje čísla $\frac{c_k}{q}$, v nichž nekonečně mnoho decimál je různých od 9; podle věty 94 jsou tedy oba zlomky totožné, tj. $a_{k+1} = a_{k+r+1}$, $a_{k+2} = a_{k+r+2}$, $a_{k+3} = a_{k+r+3}$, obecně $a_n = a_{n+r}$ pro $n > k$, což jsme měli dokázat.

Cvičení

1. Periodický zlomek s, napsaný na předešlé stránce, má tzv. „předperiodu" $a_1 a_2 \ldots a_k$ a „periodu" $a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+r}$; někdy se to vyznačuje tak, že píšeme

$$s = 0{,}\ a_1 a_2 \ldots a_k \overline{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+r}}$$

(může být též $k = 0$, tj. předperioda může scházet). Např. zlomek $t = 0{,}23785785785\ldots$ s předperiodou 23 a periodou 785 píšeme také $t = 0{,}23\overline{785}$. Dokažte, že hodnotu periodického zlomku s můžeme vypočítat takto: Napíšeme zlomek $\frac{A}{B}$, kde B je celé číslo napsané v desítkové soustavě tak, že napřed přijde r devítek a potom k nul. Čitatel A dostanu tak, že napíši číslo $a_1 a_2 \ldots$ $\ldots a_{k+r}$ (tj. $a_1 \,.\, 10^{k+r-1} + a_2 \,.\, 10^{k+r-2} + \ldots + a_{k+r-1} \,.\, 10 + a_{k+r}$) a od něho odečtu číslo $a_1 a_2 \ldots a_k$. Např.

$$t = \frac{23785 - 23}{99900} = \frac{23762}{99900}.$$

Může se stát, že předperiodu a periodu napíši „zbytečně" dlouhou — z neobratnosti, nebo možná i z vážnějšího důvodu. Např. mohu psát

$$t = 0{,}237\overline{857857} = \frac{237857857 - 237}{999999000};$$

výsledek je ovšem týž jako dříve.

2. Číslo 10 bychom mohli nahradit libovolným celým číslem $g > 1$ a vyšetřovat obecně „nekonečné zlomky o základu g", tj. řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{g^n}$ (a_n celá, $0 \leqq a_n \leqq g - 1$). Proveďte úvahy tohoto paragrafu pro tento obecný případ.

3. Při základu 5 je $\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{0}{5^3} + \ldots$ (číslo 7 by se ovšem psalo v soustavě o základu 5 ve tvaru $1 . 5 + 2$).

4. Při základu 2 lze číslo $\frac{5}{7}$ rozvinout v periodický zlomek s tříčlennou periodou

$$\frac{5}{7} = \frac{1 . 4 + 0 . 2 + 1}{1 . 4 + 1 . 2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{0}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{0}{256} + \frac{1}{512} + \ldots$$

§ 6. Závěrečné poznámky. Dosud jsme vyšetřovali hlavně konvergenci nekonečné řady. Zjistíme-li, že řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{46}$$

konverguje, naskýtá se další úkol: stanovit součet s této řady. Ale co to vlastně znamená, stanovit součet řady (46)? Např. jsme zjistili, že řada $\frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{2 . 3} + \frac{1}{3 . 4} + \ldots$ má součet 1, nebo že geometrická řada $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ má součet $\frac{1}{2}$. V těchto případech – a vůbec obecně v těch případech, kdy nám vyjde součet řady roven racionálnímu číslu – můžeme zajisté říci, že jsme součet řady stanovili. Ale tyto případy jsou velmi řídké: u většiny řad, s nimiž se setkáváme, je součet iracionální nebo aspoň nedovedeme zjistit, zda je racionální či iracionální. V takových případech se můžeme na úlohu „stanovit součet s řady (46)" dívat dvojím způsobem. *Předně* se můžeme snažit vyjádřit číslo s čísly, která už odjinud považujeme za známá; např. v kapitole XII zjistíme, že je

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots \tag{47}$$ [12])

Díváme-li se na číslo e jako na číslo dostatečně známé, můžeme říci, že rovnicí (47) je stanoven součet řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ Je však vhodno uvážit toto: číslo e jsme v kap. II, § 4, příkl. 1 definovali jistou limitou, totiž

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; \tag{48}$$

[12]) Kdo propočítal cvičení 11 v kap. II, § 4, zná již tento výsledek.

součet nekonečné řady je pak limitou částečných součtů, takže rovnici (47) lze psát v tomto tvaru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right). \tag{49}$$

V podstatě tedy rovnice (47) neříká nic jiného, než že dva určité limitní výrazy si jsou rovny; dívám-li se v (49) na levou stranu jako na „známou", je jí „stanovena" limita vpravo; dívám-li se na pravou stranu jako na známou, je rovnicí (49) stanovena její levá strana.

Za druhé se můžeme snažit stanovit rozvoj součtu s řady (46) v nekonečný desetinný zlomek; podaří-li se to, dostaneme součet řady (46) vyjádřený opět nekonečnou řadou, totiž desetinným zlomkem; tato nová řada má však tu důležitou vlastnost, že nás bezprostředně poučuje o velikosti čísla s; zarazím-li desetinný zlomek u k-té decimály, dostanu číslo s s chybou menší než 10^{-k}. Obyčejně ovšem nedovedeme stanovit najednou všechny decimály čísla s (nebývá obyčejně patrná žádná jednoduchá zákonitost mezi jednotlivými decimálami) a potom si klademe úkol takto: nalézt číslo s s přesností, kterou právě potřebujeme, a to s námahou co nejmenší; tomuto úkolu říkáme „numerické sčítání řad". Obyčejně postupujeme takto: rozdělíme řadu (46) na „začátek" a „zbytek":

$$s = s_n + r_n, \quad s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \; r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m .$$

Jest $\lim r_n = \lim (s - s_n) = 0$. Chci-li tedy nalézt s s chybou třeba menší než 10^{-k}, zvolím n tak velké, že $|r_n| < 10^{-k}$, načež vypočtu s_n; číslo s_n dává pak hledané číslo s s chybou menší než 10^{-k}.

Příklad 1. V řadě (47) je

$$r_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right).$$

Tedy (součet geometrické řady)

$$0 < r_{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n\,.\,n!}.$$

Ježto faktoriály rostou velmi rychle, dostáváme pro větší hodnoty n velmi malou hodnotu r_{n+1}. Např. $14! > 8 \cdot 10^{10}$, $14 \cdot 14! > 10^{12}$. Tedy číslo $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{14!}$ dává číslo e s chybou menší než 10^{-12}; propočtěte to; vyjde pro e přibližná hodnota 2,71828182845...

Příklad 2. V kap. XII, § 4 zjistíme, že

$$\log_e 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots; \tag{50}$$

zde je

$$r_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \ldots \right).$$

Podle věty 89 je $|r_n| < \dfrac{1}{n+1}$. Abychom měli podle této nerovnosti zaručen např. vztah $|r_n| < 10^{-6}$ (což není příliš veliká přesnost), musili bychom zvolit n tak, aby $n + 1 \geqq 10^6$, tj. aspoň $n = 999999$. To by byla ohromná práce. Řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ se tedy – alespoň v tomto tvaru – k numerickému počítání čísla $\log_e 2$ nehodí. V kap. XII si odvodíme jiné, pohodlnější řady k výpočtu tohoto čísla.

Cvičení

1. Budiž $s = \dfrac{1}{(1!)^2} + \dfrac{1}{(2!)^2} + \dfrac{1}{(3!)^2} + \ldots$ Snadno dostaneme

$$0 < r_k < \frac{1}{((k+1)!)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{k!(k+1)!\,k};$$

na příklad pro $k = 5$ vyjde $r_5 < \frac{1}{4} \cdot 10^{-5}$. Odtud $s = 1{,}27958\ldots$

2. Budiž $s = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3} + \ldots$ (konvergence plyne z příkl. 1, § 3). Zde je $r_p = \sum_{m=p+1}^{\infty} \dfrac{1}{m^3}$, tedy (pro $p > 2$)

$$\sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)(m+2)} < r_p < \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)\,m(m+1)}. \tag{51}$$

Klademe-li vpravo $m = p + n$, probíhá n čísla 1, 2, 3, ... a máme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1+n)(p-1+n+1)(p-1+n+2)} = \frac{1}{2p(p+1)} \text{ (§ 1, cvičení 2).}$$

Podobně vypočteme levou stranu v (51) a máme

$$\frac{1}{2(p+1)(p+2)} < r_p < \frac{1}{2p(p+1)}. \tag{52}$$

Chceme-li např. mít podle nerovností (52) zaručeno, že $r_p < \frac{1}{2 \cdot 10^6}$, musíme volit aspoň $p = 1000$. Tento postup se dá však poněkud zlepšit. Číslo r_p se totiž liší od aritmetického průměru čísel $\frac{1}{2p(p+1)}$, $\frac{1}{2(p+1)(p+2)}$ o méně než polovinu jejich rozdílu $\frac{1}{2p(p+1)} - \frac{1}{2(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$. Nahradím-li tedy číslo $s = \frac{1}{1^3} + \ldots + \frac{1}{p^3} + r_p$ nikoliv číslem $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{p^3}$, nýbrž číslem $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2p(p+2)}$, dopustím se chyby menší než $\frac{1}{2p(p+1)(p+2)}$. Např. pro $p = 100$ bude chyba menší než $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$. To je již značně výhodnější výsledek než dříve, ale přesto by výpočet tímto způsobem byl ještě příliš namáhavý.