Štěpánka Bilová
Vývoj teorie svazů do roku 1948

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. II. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. pp. 227–238.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401901

VÝVOJ TEORIE SVAZŮ DO ROKU 1948

ŠTĚPÁNKA BILOVÁ

1. Úvod

Teorie svazů přináší důležité výsledky např. v teorii reprezentací, v teorii pravděpodobnosti či v teorii kvantové mechanice. Pro matematiky, kteří se jí věnují nebo věnovali, oplývá značnou krásou a elegancí zvláště proto, že je založena na postulátech, jež jsou velmi jednoduché a velmi obecné, a přitom jsou plodným zdrojem abstraktních pojmů společných pro ta odvětví matematiky, která spolu tradičně nesouvisejí. Aplikace výsledků této teorie tedy umožňuje propojit myšlenky a objevit nové vazby mezi různými oblastmi matematiky.

Její historie je svým způsobem typická pro matematické teorie, její vývoj je ovlivněn vývojem matematiky samotné a osudy svazových pojmů odrážejí dobu, v níž se tvořily. Cesta ke „svazům" nebyla přímá ani jednoduchá. Ačkoli se teorie svazů jako taková začala vědomě tvořit až ve 30. letech 20. století, vznik pojmů, které s ní souvisejí, je spjat s rozvojem matematické logiky. Její prvopočátky můžeme nalézt již v BOOLEOVĚ *Mathematical Analysis of Logic*, tedy roku 1847. Skutečného rozvoje se však teorie svazů dočkala až po roce 1930, kdy se v matematice vytvořilo vhodné prostředí pro studium podobných abstraktních struktur.

Jako v řadě jiných matematických teorií, historicky první zkoumaný objekt zdaleka nebyl onen pojem, s nímž se setkáváme v úvodu dané teorie. Jako je determinant o 100 let starší než matice a limita se objevila až dlouho po integrálu a derivaci, byly první zkoumané svazové struktury Booleovy algebry (i když je i nyní samozřejmě můžeme studovat, aniž bychom věděli, že se jedná o svazy), které jsou v kurzu teorie svazů prezentovány až jako velmi speciální typ po mnohých svazech obecnějších.

Svaz je uspořádaná množina, ve které ke každým dvěma prvkům existuje suprémum a infimum. Suprémum prvků a, b nazveme spojení a označíme $a \vee b$. Infimum prvků a, b nazveme průsek a označíme $a \wedge b$. Na svaz ovšem můžeme pohlížet také jako na množinu se dvěma binárními operacemi $\vee$ a $\wedge$, které jsou asociativní, komutativní a splňují zákony absorpce: $a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$. Vztah mezi oběma přístupy je vzájemně jednoznačný.

Srovnáme-li vlastnosti svazů s vlastnostmi uspořádaných množin, které nejsou svazy, zjistíme, že nabízejí nesrovnatelně bohatší možnosti zkoumání a popisu, což přímo nabádá k detailnějšímu studiu. Navíc se svazy v matematice vyskytují poměrně hojně: množina všech podmnožin libovolné množiny s operací inkluze, množina všech podgrup libovolné grupy s operací inkluze, množina všech přirozených čísel s relací dělitelnosti, množina všech relací kongruence na abstraktní algebře, kde relace uspořádání je zjemnění, je jen několik učebnicových příkladů svazů.

Ze speciálních typů svazů uveďme ty nejzákladnější. *Modulární svazy* splňují následující podmínku:

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Distributivní svazy jsou svazy, jejichž prvky splňují distributivní zákon:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Má-li svaz největší a nejmenší prvek i a o, pak prvek x nazveme komplementem prvku a, jestliže platí $a \wedge x = o$ a $a \vee x = i$. Jestliže má každý prvek svazu alespoň jeden komplement, nazývá se svaz komplementární. Komplementární distributivní svaz nazveme *Booleova algebra.*

2. Vývoj teorie svazů od roku 1847 do počátku 20. století

Období od roku 1847 do 30. let 20. století můžeme považovat za „prvopočátky“ teorie svazů. Pojem svaz se sice ještě nikde nevyskytoval, avšak se strukturami, které dnes takto nazýváme, pracovali G. BOOLE, CH. S. PEIRCE a především E. SCHRÖDER a R. DEDEKIND.

GEORGE BOOLE se ve svém spise *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) pokusil o vytvoření nové logiky vystavěné po vzoru algebry. Navazoval na HAMILTONA a DE MORGANA, kteří zpracovávali klasickou logiku pomocí rovnic a množin, jeho algebra logiky však byla soustava algebraických zákonů umožňující různou interpretaci. Vznikla tak nová (abstraktní) matematika – systém pravidel, který splňují různé algebry (výroková algebra, množinová algebra, dvouhodnotová algebra nebo „časová“ algebra). V BOOLEOVĚ základní algebře logiky se vyskytovaly tři binární operace: $+$, $\times$ a $-$. První dvě operace splňovaly komutativní, asociativní a distributivní zákony, třetí odpovídala tvoření komplementů. Tento logický kalkul znamenal tedy první specializovanou svazovou strukturu – Booleovu algebru.

G. BOOLE učinil důležitý krok k abstrakci algebry, neboť se snažil o obecný pohled na matematické operace bez zřetele na objekty, kterých se týkaly. Jak sám napsal v *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* z roku 1854: „Není základem matematiky zabývat se myšlenkami čísla a kvantity." Tento přístup však ostatní matematici té doby nesdíleli.

Na práci G. BOOLA navázal americký matematik CHARLES SANDERS PEIRCE. Ve svém díle *On an Improvement in Booles Calculus of Logic* (1867) se pokusil o první zdokonalení BOOLEOVY algebraické logiky a v dalším spise *Description of a Notation for the Logic of Relatives* (1870) začal místo pojmu ekvivalence používat jako primární operaci relaci inkluze, kterou definoval jako tranzitivní a reflexivní binární operaci. Jeho další práce *On the Algebra of Logic* (1880) obsahuje poněkud nerigorózní (CH. S. PEIRCE je znám tím, že nekladl velký důraz na detaily) axiomatizaci algebraické logiky, ve které zavedl první definice logické adice a multiplikace vhodné pro moderní Booleovu algebru.

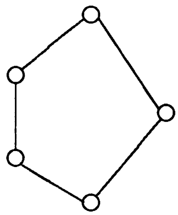
PEIRCOVA algebra logiky je bližší moderní matematické logice než BOOLEOVĚ algebře logiky. Jeho přínos zahrnuje kromě axiomatizace výrokové logiky i zavedení kvantifikátorů a objev duality pro algebraickou logiku. Stejně jako BOOLE zastával i PEIRCE názor, že jeho algebraická logika je vcelku abstraktní a může být interpretována jako množinový kalkul, predikátový kalkul nebo výrokový kalkul.

O další rozvoj algebraické logiky se zasloužil ERNST SCHRÖDER, který tím přispěl i ke studiu svazových struktur. Své první úvahy o formální algebře a logice napsal bez znalosti výsledků svých předchůdců (*Lehrbuch der Aritmetik und Algebra*, 1873). O existenci BOOLEOVY logiky se dozvěděl někdy koncem roku 1873 a jeho další práce *Der Operationskreis des Logikkalküls* (1877) obsahuje kritické přezkoumání BOOLEOVY algebry logiky. Jeho největší a nejdůležitější dílo je *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1850–1905) což je velkolepý projekt, který zůstal nedokončený, ačkoli jeho současníci považovali již samotné první dvě části za dokončenou algebru logiky.

SCHRÖDER vnesl do algebraické logiky důkladnost a přesnost. Systematicky rozpracoval princip duality, svůj systém založil na inkluzi a axiomatickém přístupu. Z hlediska svazů je velmi podstatné, že zkoumal dva systémy algebraické logiky, a tedy rozlišil dvě různé svazové struktury: logický kalkul a identický kalkul. Dokázal totiž, že distributivní zákon neplyne z ostatních, jak se v této době předpokládalo (CH. S. PEIRCE tvrdil, že „distributivní zákon lze lehce odvodit, avšak důkaz je příliš nudný a zdlouhavý"). Logický kalkul byl založen na axiomech, které distributivní zákon neobsahovaly, SCHRÖDER tedy studoval „svazy", které nebyly distributivní. Druhý systém – identický kalkul odpovídal Booleovým algebrám.

Svazové struktury se však studovaly i ve zcela odlišné oblasti než je algebraická logika. Zabýval se jimi RICHARD DEDEKIND, jenž se věnoval teorii čísel. Snažil se převést pojmy z elementární teorie čísel, především vlastnosti relace dělitelnosti, do teorie algebraických celých čísel. V 80. a 90. letech 19. století studoval struktury, které byly v podstatě svazy modulů, na nichž pracoval s operacemi hledání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Dané struktury nazýval „duální grupy". DEDEKIND zavedl modulární zákon, neboť rozlišoval a zkoumal svazy distributivní a modulární, které nazýval „duální grupy ideálového typu" a „duální grupy modulárního typu". Prezentoval i svazy nemodulární, a proto dospěl k obecnějším svazovým strukturám než SCHRÖDER.

DEDEKIND dokázal, kromě jiného, že z distributivity plyne modularita svazů a uvedl svaz normálních podgrup jako příklad modulárního svazu. Udal nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby svaz byl modulární: svaz je modulární tehdy a jen tehdy, jestliže neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem



Dále uvedl nutnou a dostatečnou podmínka pro to, aby svaz nebyl modulární (svaz obsahuje podsvaz, který nesplňuje Jordan-Dedekindovu podmínku řetězců). Uvedl podmínky o pokrytí (pro prvky modulárního svazu platí: (i) jestliže prvky x a y, $x \neq y$, pokrývají prvek a, pak prvek $x \vee y$ pokrývá prvky x a y, a (ii) jestliže prvek a pokrývá prvky x a y, $x \neq y$, pak prvky x a y pokrývají prvek a. V r. 1900 začal DEDEKIND studovat volný modulární svaz se třemi generátory. Jeho 28 prvků vyjádřil za pomocí generátorů a dokázal jeho uzavřenost.

Práce SCHRÖDERA a DEDEKINDA týkající se svazů zprvu nenalezly žádnou odpověď (KRONECKER se dokonce v jednom z dopisů vyjádřil ve smyslu, že DEDEKIND musel přijít o rozum, jestliže se zabývá tak velkou abstrakcí [12]). Výjimkou byl E. HUNTINGTON, který se věnoval axiomatickým základům matematických systémů. Ve své práci *Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic* (1904) položil abstraktní a silné axiomatické základy Booleovy algebry, přičemž představil tři axiomatické systémy. První je založen na operacích logického sjednocení a průniku, druhý vychází z relace uspořádání a poslední je modifikací obou, kdy je relace uspořádání převedena do jedné operace. Dokázal, že od jakékoli idempotentní, komutativní a asociativní binární operace lze přejít k uspořádané množině, ve které ke každým dvěma prvkům existuje suprémum/infimum.

3. „Svazy" kolem roku 1930

Zkoumání svazových struktur v 19. století nemělo příliš velký vliv na ostatní matematiky, a tedy ani na rozvoj matematiky samotné. Jejich užitečnost se však projevila později, kdy došlo k novému formování svazových struktur. Kolem roku 1930 se znovu objevily v několika různých oblastech: projektivní geometrii, logice a algebře. Tyto nové počátky také nebyly jednoznačné, situace se však v průběhu 30. let měnila ve prospěch abstraktních struktur.

Díky studiu projektivních geometrií dospěl ke svazovým strukturám německý matematik KARL MENGER. Sestavil soubor axiomů charakterizujících projektivní geometrie, které ovšem zároveň tvoří komplementární modulární svazy. MENGER tyto struktury nazval „Feld". Jeho článek *Bemerkungen zu Grundlagenfragen* (1928) však nevyvolal okamžitou reakci a v dalším rozvoji těchto myšlenek následně pokračoval pouze MENGER a jeho žáci.

Svazům jako zobecněným strukturám formální logiky se v řadě prací věnoval další německý matematik FRITZ KLEIN. V článku *Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen* (1932) použil pro své struktury název „Verknüpfungen", z něhož později vznikl název „Verband" v němčině (používaný od r. 1934), tj. „svaz" v češtině. Pro označení operací ve svazu použil symbolů $\cap$ a $\cup$.

Axiomatickou výstavbu svazů založenou na relaci uspořádání provedl ALBERT A. BENNETT. V článku *Semi-Serial Order* (1930) zavedl speciální uspořádání (nacházející se mezi Booleovou algebrou a lineárním uspořádáním), ze kterého svazy vycházejí.

Nejdůležitější podněty pro tvorbu svazových pojmů ovšem přicházely z oblasti algebry. Německý matematik ROBERT REMAK se zabýval teorií grup a ve svých článcích *Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte* (1930) a *Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktorem* (1932) zkoumal vlastnosti podgrup a faktorgrup, které studoval z hlediska svazových struktur. Další matematik, který počátkem 30. let 20. století rozvíjel pojem svaz v souvislosti s algebrou byl OYSTEIN ORE. Cílem jeho zkoumání byly především věty o algebraickém rozkladu.

4. Teorie svazů v letech 1933 – 1939

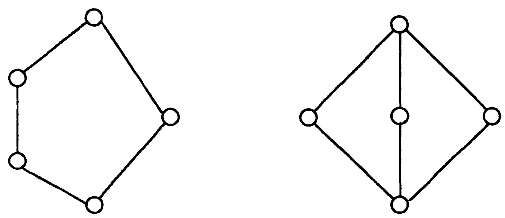
Ve 30. letech 20. století se v matematice vytvořilo vhodné prostředí pro studium abstraktních struktur především díky VAN DER WAERDENOVÉ monografii *Moderne Algebra* (1930). Ačkoliv se axiomatický přístup i mnoho z obsahu této knihy datuje již do druhé poloviny 19. století, většina z pojmů a metod v ní prezentovaných byla ještě i ve dvacátých letech 20. století považována za něco okrajového. Až poté, kdy práce EMMY NOETHER a její školy ukázala matematickou a filozofickou jednotu této nové algebry a VAN DER WAERDENOVA učebnice ji představila v ucelené podobě okolnímu světu, se moderní algebra dostala v matematice do centra pozornosti a stala se plodným zdrojem pro mnoho matematiků, mezi nimiž byl i GARRETT BIRKHOFF, který je nazýván „zakladatelem" nebo „otcem" teorie svazů, neboť se o její raný vývoj zasloužil nejvíce.

G. BIRKHOFF na tyto počátky vzpomíná takto:

> *Hodně jsem přemýšlel o podgrupách a normálních podgrupách grup a o Remakových článcích o struktuře grup. Poté, co jsem přečetl van der Waerdena a Remaka, došel jsem k přesvědčení, že svazy jsou důležité pro porozumění struktuře grup* (viz [5]).
>
> *Byl jsem asi první člověk, který viděl ve svazech základní nástroj algebry ...* [4]

Ve svém prvním článku o svazech *On the combination of subalgebras* (1933) zopakoval G. BIRKHOFF mimo jiné nezávisle DEDEKINDOVY výsledky a v dalších článcích jednotlivé body prohloubil a věnoval se různým aplikacím. Pro svaz použil anglické slovo „lattice", které se významově liší od „svazu" či „Verband". „Lattice" znamená mřížka a tento název vznikl díky znázornění svazů pomocí hasseovských diagramů – některé z nich připomínají mřížku. Roku 1934 dokázal BIRKHOFF nutnou a dostačující podmínku pro to, aby byl svaz distributivní: svaz je distributivní tehdy a jen tehdy, jestliže neobsahuje podsvaz izomorfní s jedním ze svazů, jejichž diagramy jsou na dalším obrázku.

Po publikaci BIRKHOFFOVA článku z roku 1933 počet matematiků zabývající se svazovými strukturami vzrostl a celková atmosféra jejich studiu přála. Svazy nacházely své uplatnění v řadě matematických odvětví, a tudíž docházelo k rozvoji a propojování různých pohledů a myšlenek. Zkoumaly se v algebře, geometrii, topologii i v analýze. Termi-



nologie a symbolika se teprve tvořily, názvy a označení pro svazy ve 30. letech ještě nebyly jednotné.

V rámci algebry našly svazové pojmy a metody uplatnění zejména v teorii grup, dále se zkoumaly vlastnosti svazových homomorfizmů a věty o rozkladu. Ve svém díle týkající se svazů pokračovali G. BIRKHOFF i O. ORE. G. BIRKHOFF se věnoval zejména struktuře abstraktních algeber, podgrupám abelovských grup, aplikacím svazů při studiu ideálů a svazům relací ekvivalence. O. ORE zkoumal aplikaci svazů v teorii grup, věnoval se základům abstraktních algeber, Jordan-Hölderově větě, transponování intervalů, aj. Nově se svazy začali zabývat např. REINHOLD BAER (struktura podgrup v grupě, aplikace teorie svazů v teorii grup, vztah mezi systémem podgrup a strukturou grupy), ALEXANDER G. KUROŠ (ireducibilní komponenty v okruzích, Jordan-Hölderova věta ve svazech), MORGAN WARD (svazové homomorfizmy), ROBERT P. DILWORTH (svazy s jednoznačným rozkladem na ireducibilní prvky), PAUL DUBREIL a MARIE-LOUISE DUBREIL-JACOTIN (algebraické vlastnosti relace ekvivalence, Jordan-Hölderova věta).

KARL MENGER pokračoval ve výstavbě základů nejen projektivní, ale i afinní a neeukleidovské geometrie pomocí spojení a průseků. G. BIRKHOFF se zabýval vztahem mezi abstraktní lineární závislostí a svazy a věnoval se i kombinatorickým vztahům v projektivních geometriích. Svazové pojmy v geometrii dále studovali i HASSLER WHITNEY (abstraktní vlastnosti lineární závislosti) a SAUNDERS MACLANE (lineární závislost). Důležité výsledky do teorie svazů přinesl JOHN VON NEUMANN, který se věnoval spojitým geometriím. G. BIRKHOFF o jeho přínosu řekl *Brilantní mozek Johna von Neumanna zazářil nad teorií svazů během krátké doby okolo let 1935 až 1937 jako meteor* – viz [5].

V rámci teorie svazů se začaly studovat i topologické pojmy, např. různé druhy konvergence a vlastnosti týkající se diskrétních prostorů. Zabývali se jimi PAVEL S. ALEXANDROV, GARRETT BIRKHOFF a JAMES

V. ALEXANDER.

Svazy našly uplatnění i v matematické analýze, věnovali se jim např. LEONID V. KANTOROVIČ (lineární operace, lineární polouspořádané prostory a jejich aplikace), CONSTANTIN CARATHÉODORY (teorie integrálů, teorie reálných funkcí), HOLBROOK M. MACNEILLE (aplikace teorie svazů na integrály), GARRETT BIRKHOFF (uspořádané lineární prostory, závislá pravděpodobnost a L-prostory) a SHIZUO KAKUTANI (abstraktní L-prostory).

Rostoucí počet matematiků se zabýval i Booleovými algebrami. MARSALL H. STONE zkoumal strukturu Booleových algeber, teorii reprezentací a systém axiomů pro Booleovy algebry. Věnoval se čistě Booleovým algebrám, svazy jako takové nestudoval. Vlastnostmi Booleových algeber se zabývali i ALFRED TARSKI (základy Booleových algeber), GARRETT BIRKHOFF (uspořádané lineární prostory), HOLBROOK M. MACNEILLE (rozšíření distributivních svazů na Booleovy okruhy) a NEAL H. MCCOY (podokruhy direktních součtů).

Začaly vznikat i první souhrnné práce týkající se svazů a roku 1938 se ve *Fortschritten der Mathematik* objevila kategorie „Svazy, okruhy, tělesa“ místo dřívější „Okruhy, tělesa“. Téhož roku se konalo i první sympózium na téma teorie svazů. Bylo to v dubnu 1938 ve spojení s pravidelným setkáním Americké matematické společnosti.

5. G. Birkhoff: *Lattice Theory*, 1940

V roce 1940 vyšla první monografie o svazech. Napsal ji G. BIRKHOFF a nazval ji *Lattice Theory* (Teorie svazů). Jednalo se o první zpracování problematiky teorie svazů jako celku. G. BIRKHOFF sjednotil a v některých případech i rozšířil poznatky obsažené v článcích z předchozích let. G. BIRKHOFF v úvodu k *Lattice Theory* vysvětluje příčiny a nezbytnost vzniku této knihy a připomíná i počátky svazů v matematické logice [1]:

> *Od publikování Schröderovy monumentální knihy Algebra der Logik se vývoj matematické logiky ubíral směrem dosti vzdáleným od Booleových algeber, avšak Booleovy algebry nacházely své aplikace v nejrůznějších oblastech, které již s logikou neměly mnoho společného. Moderní algebra, projektivní geometrie, teorie množin, funkcionální analýza a pravděpodobnost začaly záviset na zobecněné „algebře logiky“ ve smyslu Schrödera. Kromě toho, obecné algebraické techniky, jejichž použití značně vzrostlo, přinášely při aplikaci na Booleovy algebry velké množství nových výsledků.*

> *Tyto skutečnosti si žádají existenci knihy o „algebře logiky" napsané spíše z pohledu algebry než logiky. A právě takovou jsem se snažil vytvořit. Za přitažlivé považuji zejména zahrnutí myšlenek, které nezávisle rozvíjeli matematici odlišných zájmů, pod jedinou strukturu.*

Lattice Theory se sestává z devíti kapitol, v nichž jsou v úvodních odstavcích rozvinuty pojmy teorie svazů, přičemž od kapitoly ke kapitole jsou představeny speciálnější druhy svazů, jejichž vlastnosti a aplikace jsou detailněji popsány v dalších částech. G. BIRKHOFF se soustředí zejména na propojení svazů s různými oblastmi, a proto je kniha zdrojem i dalších matematických poznatků. Na konci monografie je uvedeno 17 nevyřešených problémů.

6. Teorie svazů v letech 1940 – 1948

BIRKHOFFOVA monografie prezentovala pojmy teorie svazů v aktuální a ucelené podobě, a proto se stala důležitým impulzem pro další rychlý rozvoj. Ve 40. letech se teorie svazů stala uznávanou částí moderní algebry. Standardizovala se postupně terminologie (Verband v němčině, lattice v angličtině, treillis ve francouzštině) i označení: pro spojení a průsek se začaly používat symboly $\cup$ a $\cap$. Někteří matematikové však pokračovali ve vlastní terminologii či značení, např. W. D. DUTHIE ještě v roce 1942 používá symboly $+$ a $.$ a M. P. SCHUTZENBERGER v roce 1943 užívá název Dedekindova struktura.

Články vycházející ve 40. letech se většinou věnují problémům, které naznačil ve své knize G. BIRKHOFF: věty o homomorfizmech a izomorfizmech, kongruentní svazy, svazy podalgeber, volné svazy a aplikace svazů. Počet příspěvků vzrůstal. V době 2. světové války byl počet článků od evropských matematiků samozřejmě omezen, avšak rok 1946 přinesl radikální zvýšení počtu prací i v teorii svazů.

Mezi nejvýznamnější matematiky, kteří přispěli k obohacení teorie, patří G. BIRKHOFF, C. CARATHÉODORY (teorie míry a integrace, identifikace prvků ve svazu), R. P. DILWORTH (komplementární svazy, Birkhoffovy svazy, polomodulární svazy, jednoznačně komplementární svazy), J. C. EVERETT (úplné svazy, l-grupy, Galoisova teorie ve svazech), O. FRINK (Booleovy algebry, komplementární modulární svazy, projektivní prostory), A. G. KUROŠ (Jordan–Hölder–Schreierova věta, direktní rozklady, vztah mezi teorií svazů a teorií grup), S. MACLANE (řetězce v uspořádaných množinách), H. M. MACNEILLE (teorie integrace), J. C. C. MCKINSEY (reprezentace projektivních algeber, algebra topologie), T. NAKAYAMA (ideály ve svazech, l-grupy), M. H. A.

NEWMAN (Booleovy svazy a okruhy, relativně komplementární algebry), O. ORE (svazy a struktura grup, relace ekvivalence, řetězce v uspořádaných množinách, relace uzávěru, Galoisova korespondence), F. RIESZ (ergodická teorie), M. H. STONE (aplikace Booleových algeber, charakteristická funkce posloupnosti množin, uspořádání v abelovských grupách), M. WARD (Booleovy algebry, okruhové a svazové homomorfizmy, modulární svazy, operace uzávěru) a P. M. WHITMAN (volné svazy, ideály ve svazech, relace ekvivalence, svazový homomorfizmus).

Z českých matematiků zkoumali svazové pojmy v rámci oblastí, jimiž se zabývali, BEDŘICH POSPÍŠIL, VLADIMÍR KOŘÍNEK, LADISLAV RIEGER a KAREL KOUTSKÝ. B. POSPÍŠIL se věnoval topologii; v práci [7] studoval vlastnosti různorodých topologických prostorů, jež mu umožnily rozbor mnoha důležitých Booleových okruhů a prostorů, které se vyskytují v topologii a teorii míry, dále zkoumal abstraktně algebraické vlastnosti reálných funkcí definovaných v Booleově okruhu ([8], [9], [10]). V těchto pracích navazoval zejména na pojmy M.H. STONEA. V článku [11] POSPÍŠIL zkoumá ideály Booleovy algebry všech podmnožin pevné třídy nekonečného kardinálního čísla.

VL. KOŘÍNEK se věnoval teorii grup a v článku *Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden* (1941) studoval vlastnosti svazu s relací, která představuje abstraktní analogii „b je normální podgrupa a“. V článku jsou rozebrány podmínky, které se vztahují k různým částem Schreier-Zassenhausovy věty.

L. RIEGER se zabýval uspořádanými grupami a ideály. Neznaje výsledky G. BIRKHOFFA znovuobjevil l-ideály a jejich vztah k relacím kongruence a lexikografickému součinu. Definoval rovněž cyklicky uspořádané grupy a zkoumal jejich vlastnosti („On the Ordered and Cyclically Ordered Groups,“ 1946, 1947/48).

K. KOUTSKÝ se v článku *Sur les lattices topologique,* 1947 věnoval topologickým svazům, což je zde svaz s operací $x \to x^-$, která je monotónní, aditivní, idempotentní a/nebo incidentní. KOUTSKÝ rozebírá různé vlastnosti zvláště pro případ komplementárních modulárních svazů.

7. G. Birkhoff: Lattice Theory, 1948

V roce 1948 bylo publikováno druhé vydání BIRKHOFFOVY monografie *Lattice Theory*, které je však značně upravené a rozšířené o výsledky ze 40. let. Na prvním vydání je patrné, že „teorie svazů“ teprve vzniká, nové vydání je ucelenější, daná teorie má „svůj“ řád, není to již spojení samostatných odstavců popisující různé pojmy či vztahy k pojmům z jiných oborů. Je psáno přehledněji, odstavce a kapitoly tvoří logičtější celky. Na konci každého odstavce přibyly příklady na procvičení, jsou zde zařazené zajímavé problémy týkající se předchozích kapitol. G. Birkhoff uvádí i problémy řešené jinými matematiky a odkazuje na jejich články. V některých příkladech jsou definovány i další termíny, týká-li se jich dané cvičení. V tomto vydání je uvedeno 111 nevyřešených úloh (8 z prvního vydání bylo vyřešeno), které se opět staly zdrojem a impulsem pro další rozvoj nejen teorie svazů, ale i dalších oblastí. Srovnáním obou vydání *Lattice Theory* je patrné, kterými směry se vývoj nové teorie ve 40. letech ubíral. Matematici zejména dále rozvíjeli pojmy, jejich vlastnosti a aplikace, nacházeli nové vztahy a pohledy, došlo k propojení pojmů, které se zpočátku vyskytovaly samostatně. Nový přístup většinou vyústil i v nové důkazy. Docházelo k zobecňování existujících pojmů, např. polosvaz, semimodulární svaz, či ke zobecnění pojmu zkoumaného ve speciální struktuře na obecnější strukturu; např. neutrální prvky ve svazu poprvé zavedl O. Ore u komplementárních modulárních svazů, u svazů obecně je později definoval G. Birkhoff. Nové poznatky a vztahy často vedly i k přeformulování již existujících pojmů, vhodnější definice se uplatnila např. u pseudokomplementu, ortokomplementu, atomárního svazu, ideálu či neutrálního prvku. Vznikaly samozřejmě i zcela nové pojmy, jako např. medián nebo segment, a docházelo i ke změnám v označení a pojmenování.

Po roce 1948 teorie svazů pokračovala v dalším rozvoji, a to přirozeně ještě ve větším měřítku. Birkhoffova monografie se stala i nadále „základní antologií", ve které matematici nacházeli zdroj inspirace pro mnoho zajímavých problémů.

Literatura

[1] Birkhoff, G., *Lattice Theory*„ New York, 1940.

[2] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, New York, 1948.

[3] Birkhoff, G., On the Combination of Subalgebras, *Proc. Cambridge* **29**, 441–464.

[4] Birkhoff, G., *What Can Lattices Do For You? Trends in Lattice Theory*, New York, 1970.

[5] Mehrtens, H., *Die Entstehung der Verbandstheorie*, Gerstenberg Verlag – Hildesheim, 1979.

[6] Peckhaus, V., 19th Century Logic Between Philosophy and Mathematics, *The Bulletin of Symbolic Logic 5* 4(1999), 433–450.

[7] Pospíšil, B., On Bicompact Spaces, *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* **270**(1939), 1–16.

[8] Pospíšil, B., Über die messbaren Funktionen, *Math. Ann.* **117**(1940) 327–355.

[9] Pospíšil, B., Eine Bemerkung über stetige Verteilungen, *Čas. Mat. Fys.* **70**(1941), 68–72.

[10] Pospíšil, B., Von den Verteilungen auf Booleschen Ringen, *Math. Ann.* **118**(1941) 32–40.

[11] Pospíšil, B., Wesentliche Primideale in Vollständingen Ringen, *Fundam, Math.* **33**(1945) 66–74.

[12] Rota, G., The Many Lives of Lattice Theory, *Notices of the AMS* **44**(1997) 1440–1445.

Štěpánka Bilová
Katedra matematiky PřF MU
Brno
e-mail: bilova@math.muni.cz