Příloha 2

Fermatův dopis Carcavimu

V této příloze uvádíme Fermatův dopis Carcavimu ze srpna 1659. Čtenář si může udělat představu, jak v této době vypadal matematický text. V tomto dopise Fermat sděluje své nejdůležitější objevy z teorie čísel. Mimo to se můžeme nejen mezi řádky dozvědět, že Fermat byl na svoje objevy, především na metodu nekonečného sestupu, právem pyšný.

Vztah nových objevů-věda o číslech

1. A protože obyčejné metody, uváděné v knihách, byly nedostatečné pro dokazování tak obtížných pouček, nalezl jsem konečně úplně zvláštní cestu, jak toho dosáhnout. Tento způsob dokazování nazval jsem nekonečný či neomezený sestup a nejprve jsem ho použil jen abych dokázal záporné poučky jako například: Neexistuje žádné číslo než trojnásobek zmenšený o jednotku, které by bylo složeno z druhé mocniny a trojnásobku jiné druhé mocniny; že neexistuje žádný pravoúhlý trojúhelník v číslech, jehož plocha by byla druhou mocninou.

Důkaz je možno provésti tímto způsobem: Kdyby existoval nějaký pravoúhlý trojúhelník v celých číslech, jehož plocha by se rovnala druhé mocnině, existoval by jiný trojúhelník, menší než první, který by měl stejnou vlastnost. Kdyby existoval druhý, menší než první, mající stejnou vlastnost, existoval by podle stejné úvahy třetí, menší než tento druhý, který by měl stejnou vlastnost a konečně čtvrtý, pátý a tak dále až do nekonečna-sestupem. Avšak je-li dáno číslo, neexistuje nekonečný bod při sestupu menší než jednička (mám stále na mysli celá čísla). Z toho tedy usuzujeme, že není možné, aby existoval nějaký pravoúhlý trojúhelník, jehož plocha by byla druhou mocninou.

Od toho odvozujeme, že neexistuje ani ve zlomcích trojúhelník, jehož plocha by byla druhou mocninou, neboť kdyby existoval ve zlomcích, byl by také v celých číslech, což nemůže být, jak je možno dokázat sestupem. Neuvádím způsob, jakým jsem odvodil, že kdyby existoval pravoúhlý trojúhelník tohoto druhu, existoval by jiný stejného druhu menší než první, protože povídání by bylo příliš dlouhé a to je celé tajemství mé metody. Velmi by mne potěšilo, kdyby Pascal, Roberval a mnozí další učenci zkoumali problémy podle mého náznaku.

2. Dlouho jsem nemohl aplikovat svoji metodu v kladných otázkách, protože cesta a okliky, abych k ní dospěl, jsou mnohem těžší než ta, kterou používám u záporných, tak že když jsem musel dokázat, že každé prvočíslo, které přesahuje jednotku o násobek čtyř skládá se ze dvou druhých mocnin, byl jsem v nesnázích. Ale nakonec hloubání, opakované mnohokráte, mi osvětlilo cestu a moje metoda obstála pro kladné otázky pomocí několika nových vět, které jsem byl nucen přidat. Tento pokrok v mém uvažování o těchto kladných otázkách je následující: Jestliže prvočíslo přesahující jednotku o násobek čtyř není složeno ze dvou druhých mocnin, existuje prvočíslo stejné povahy, menší než dané číslo a pak třetí, ještě menší a tak dále sestupem do nekonečna, až přijdete k číslu pět, které je menší než všechny tohoto druhu a přece tomu tak je. Musíme z toho odvodit, při přihlédnutí k nekonečnému, že všechna čísla tohoto druhu jsou tudíž složena ze dvou druhých mocnin.

3. Existuje nekonečné množství otázek tohoto druhu, ale je jich několik, které si vyžadují nové principy, u kterých by bylo možno aplikovat sestup, ale zkoumání je někdy tak obtížné, že dojdeme k cíli jen s velkými obtížemi. Je to následující otázka, o které Bachet při komentování Diofanta přiznává, že ji nikdy nemohl dokázat. Pan Descartes v jednom ze svých dopisů učinil stejné prohlášení na toto téma; přiznává, že ji shledává tak těžkou, že nevidí cestu, jak ji řešit. Každé číslo je buď druhou mocninou, nebo je složeno ze dvou, tří či čtyř druhých mocnin. Já jsem na ni nakonec aplikoval svoji metodu a dokazuji, že kdyby dané číslo nebylo této povahy, existovalo by menší, které by také nebylo, pak třetí menší než druhé a tak dál až do nekonečna; z toho odvozujeme, že všechna čísla jsou této povahy.

4. Tvrzení, které jsem sdělil panu Freniclovi a jiným, je velmi významné a obtížné dokázat. Každé neumocněné číslo je takové povahy, že existuje nekonečně mnoho mocnin, které násobíce dané číslo, dají druhou mocninu zmenšenou o jedničku. Dokazuji to sestupem aplikovaným zvláštním způsobem. Přiznávám, že pan Frenicle uvedl různá zvláštní řešení a taktéž pan Wallis, ale obecný důkaz spočívá v sestupu náležitě a správně aplikovanému; naznačil jsem jim, aby k těmto jednotlivým řešením přidali obecný důkaz a konstrukci této poučky.

5. Pak jsem prozkoumal některé otázky, které, i když záporné, nebyly velmi obtížné. Metoda, při které bylo možno použít sestupu, byla úplně odlišná od předcházejících, jak to lze snadno dokázat-viz následující: Žádnou krychli nelze rozdělit na dvě krychle. Existuje pouze jedna druhá mocnina celého čísla, která zvětšena o dvě dá třetí mocninu – touto mocninou je dvacet pět. Existují pouze dvě druhé mocniny, které zvětšeny o čtyři, dají třetí mocninu. Těmito mocninami jsou čtyři a sto dvacet jedna. Všechny čtvercové mocniny dvojky, zvětšené o jednotku, jsou prvočísla. …

6. Po prozkoumání všech těchto otázek, z nichž většina je různé povahy a dokazovatelná různým způsobem, přešel jsem k nalezení všeobecných pravidel, abych vyřešil jednoduché a dvojité rovnice Diofanta. Navrhujeme například, 2Q+7967 rovné dvojmocnině. Mám všeobecné pravidlo pro řešení této rovnice je-li řešitelná, nebo umím prokázat její neřešitelnost jednak u dvojmocnin, jednak u jednotek.

Uvažme následující dvojitou rovnici: 2N+3 a 2N+5 každá se rovná druhé mocnině. Bachet se chlubí ve svých Komentářích o Diofantovi, že našel pravidlo ve dvou zvláštních případech; uznávám jej všeobecným ve všech případech a pravidlem zjišťuji, je-li možné nebo ne. Pak jsem poopravil většinu Diofantových vadných návrhů a provedl jsem ty, které Bachet přiznává, že neví jak je uskutečnit a také většinu těch, u kterých sám Diofantos váhal. Předložím důkazy a příklady, jakmile budu mít volnou chvíli.

7. Přiznávám, že můj vynález, abych odhalil, je-li dané číslo prvočíslo nebo ne, není dokonalý, ale mám mnoho cest a metod, abych zmenšil počet dělení a ještě jej více zmenšil zkrácením obyčejného postupu. Jestli p. Frenicle odevzdá to, nad čím dosud uvažoval, domnívám se, že to bude význačná pomoc pro vědce.

8. Otázka, kterou jsem se zabýval, aniž bych nalezl jakékoliv řešení, je následující; je to poslední z Diofantovy knihy *De multangulis numeris.* Dato numero, invenire quod modis multangulus esse possit.[1] Diofantův text je porušený, nemůžeme uhádnout jeho metodu. Bachetova myšlenka se mi nelíbí a je velmi obtížná pro velká čísla. Našel jsem lepší, ale ještě mne neuspokojuje.

9. V tomto návrhu je nutno ještě hledat řešení následujícího problému: Najít číslo, které bude tolikrát mnohoúhelníkové, ale ne vícekrát než chceme, a najít nejmenší z těch, které vyhoví otázce.

10. To je ve stručnosti výčet mého bádání nad otázkou čísel. Napsal jsem to, protože se obávám, že chvíle na rozšíření a dotažení do konce všech těchto výkladů mi budou chybět. V každém případě tato zpráva poslouží vědcům, aby sami nalezli co jsem nedokončil, zejména jestli pánové de Carcavi a Frenicle využijí některé důkazy pomocí sestupu, které jsem jim poslal a které se týkají některých záporných návrhů.

Možná potomstvo bude mi vděčno, že jsem ho seznámil s tím, že klasičtí autoři nevěděli všechno a tato zpráva přejde do povědomí těch, kteří přijdou po mně *pro traditio lampadis ad filios*[2], jak pronesl velký Kancléř Anglie a k čemuž přidávám: *Multi pertransibunt et augebitur scientia*[3].

[1] Je dáno číslo, najít kolika způsoby může být mnohoúhelníkem.
[2] Ve prospěch předávání pochodně budoucím
[3] Mnozí projdou a věda jimi bude obohacována.