ZÁKLADY ALGEBRY

V této kapitole pojednáme jednak o Kořínkově učebnici *Základy algebry*, jednak o starších českých učebnicích pokrývajících některé základní partie algebry. Pokusíme se navíc Kořínkovu učebnici porovnat s některými učebnicemi, našimi i cizími, které byly součástí vývoje naší algebraické literatury nebo V. Kořínka při sepisování jeho *Základů algebry* ovlivnily.

Kořínkovy „Základy algebry"

Učebnice *Základy algebry* je jediným knižním dílem Vladimíra Kořínka. O tom, jak vznikala, V. Kořínek píše:

Knihu jsem psal za války, kdy byly naše vysoké školy zavřeny a nacisté na nich hospodařili po svém. Na konci války byla kniha v prvním konceptu hotova. Když však byly po válce naše vysoké školy znovu otevřeny, bylo na nich po okupaci tolik organisační i učitelské práce, že jsem se v prvních poválečných letech nedostal k definitivní úpravě knihy. Mezitím jsem látku několikrát přednášel v úvodních přednáškách z algebry a podle zkušeností, které jsem přitom získal, jsem knihu upravoval. V této době jsem napsal druhou část knihy o lineární algebře úplně znova. Zatím však čas pokročil a bylo potřebí knihu vydat. Tím se stalo, že jsem neměl čas druhou část knihy tak vybrousit jako první a třetí.[1]

Kniha vyšla ve dvou vydáních, v letech 1953 a 1956. Pro druhé vydání měl autor v úmyslu část o lineární algebře zcela přepsat. Z časových důvodů k tomu však nedošlo, a tak bylo druhé vydání pouze rozšířeno o dva dodatky. V sedmdesátých letech uvažoval V. Kořínek o třetím vydání. Do něho chtěl zařadit pasáž věnovanou teorii grup a celou knihu podstatně přepracovat. Mělo se spíše jednat o sepsání nové učebnice. K realizaci těchto plánů však již nedošlo.

V předmluvě k prvnímu vydání své učebnice V. Kořínek píše:

Kniha byla napsána jako úvod do algebry pro posluchače matematiky na universitě z prvního roku. Látka takového úvodního kursu je v celkových rysech dána potřebami ostatních matematických přednášek prvního a druhého roku. Pokusil jsem se tuto tradiční látku zpracovati způsobem, jakým postupuje dnešní algebra, hleděl jsem však stále k tomu, aby kniha neztratila ráz úvodního kursu a byla plně srozumitelná každému, kdo má matematické vědomosti z jedenáctiletky.

Uvidíme, že snaha o udržení „rázu úvodního kursu" převážila nad cílem vykládat algebru moderním způsobem.

Kniha je rozdělena do tří částí – *Základní pojmy a úkony algebry* (196 stran), *Lineární algebra* (130 stran) a *Algebraické rovnice jedné neznámé* (130 stran). Každá část se dále dělí na tři kapitoly, které jsou číslovány průběžně (I až IX), a dále na paragrafy. První vydání končí jedním, druhé třemi dodatky.

---

[1] Z předmluvy k prvnímu vydání.

Základní pojmy a úkony algebry

I. *Základní pojmy algebry a čísla racionální* (98 stran)

První část knihy začíná objasněním základních matematických a algebraických pojmů. V prvním paragrafu jsou probrány např. pojmy rovnost, posloupnost, princip úplné indukce apod. Výklad je budován od základů, veškerá vysvětlení jsou snad až příliš podrobná. Jako ukázku uveďme poslední z trojice příkladů určených k přiblížení pojmu rovnosti čísel:

Vezměme si množinu všech orientovaných úseček v obyčejném (trojrozměrném) prostoru. Vezměme si jednu úsečku a utvořme si množinu všech úseček, které z ní dostaneme posunutím. Tu množinu tvoří všechny úsečky, které jsou s vybranou úsečkou rovnoběžné a mají s ní stejnou délku i smysl. Nepokládáme-li nyní všechny tyto úsečky za různé, dostaneme v prostoru geometrický útvar, který má směr a velikost, u něhož však nezáleží na poloze v prostoru. (Mohu si jej, jak chci, v prostoru libovolně posunovat.) Takový útvar, jak známo, nazýváme vektor. Vektor dostaneme tehdy, když v množině všech orientovaných úseček prostoru pokládáme za sobě rovné všechny úsečky, které jsou rovnoběžné a mají stejnou velikost i smysl. Z elementární geometrie plyne, že rovnost takto definovaná mezi orientovanými úsečkami v prostoru je vztah reflexivní, symetrický, transitivní. Vektor může pak být representován kteroukoliv úsečkou z množiny sobě rovných a rovnoběžných úseček. To je význam rčení, že u vektoru nezáleží na poloze v prostoru. (str. 20)[2]

V protikladu k tomuto velmi podrobnému přístupu jsou např. dvě stručně formulovaná cvičení k prvnímu paragrafu, v nichž je definována relace a její vlastnosti; reflexivita, symetrie a tranzitivita byly totiž v předchozím výkladu zavedeny pouze jako vlastnosti rovnosti.[3]

Cv. 1,4. *Budiž $\mathfrak{M}$ nějaká množina. Budiž $\mathfrak{N}$ jistá daná část množiny všech uspořádaných dvojic $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ (viz 0,2). Pišme aRb, když dvojice $(a, b) \in \mathfrak{N}$, a non Rb, když (a, b) non $\in \mathfrak{N}$. Vztahu aRb říkáme relace mezi prvky v $\mathfrak{M}$. Dokažte: a) Pro každou relaci R v $\mathfrak{M}$ platí axiom R_0, nahradíme-li v něm vztah $=$ vztahem R a vztah $\neq$ vztahem non R. b) Rovnost definovaná podle 1,2 v $\mathfrak{M}$ je relace v $\mathfrak{M}$.*

Cv. 1,5. *Relace R definovaná v množině $\mathfrak{M}$ se nazývá reflexivní, když platí aRa pro každé $a \in \mathfrak{M}$, t. j. když platí R_1 pro R. R se nazývá symetrická, když platí $aRb \Rightarrow bRa$, t. j. když platí R_2 pro R. R se nazývá transitivní, když platí aRb, $bRc \Rightarrow aRc$, t. j. když platí R_3 pro R. Vyšetřete, jaké vlastnosti musí mít část $\mathfrak{N}$ množiny $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, aby relace touto částí podle cv. 1,4 definovaná, byla a) reflexivní, b) symetrická, c) transitivní.* (str. 24)

V následujícím paragrafu je z množiny přirozených čísel připojením nuly a celých záporných čísel vytvořena množina čísel celých. Na této množině je

[2] Uváděná čísla stran odpovídají druhému vydání knihy.

[3] Vlastnost R_0 značí, že pro každá dvě čísla a, b platí právě jeden ze vztahů $a = b$, $a \neq b$. Symboly R_1, R_2, R_3 označují reflexivitu, symetrii a tranzitivitu rovnosti.

definováno sčítání, dále je zformulován komutativní a asociativní zákon a uvedeny axiomy o existenci nulového prvku (nuly) a opačného čísla. Podobným způsobem je probráno násobení. Dokázány jsou věty týkající se těchto operací, například o tvaru opačného čísla k součinu, o jednoznačnosti jednotkového prvku atd.

Ve třetím paragrafu je zaveden pojem oboru integrity. Ve vysokoškolských matematických kursech bývá dnes běžné nový pojem nejprve definovat a pak ho studentům přiblížit na příkladech. Kořínkův postup je na některých místech opačný, odpovídá jednomu ze základních požadavků Jana Ámose Komenského – postupovat od jednoduššího ke složitějšímu.

Ve čtvrtém paragrafu je definován inverzní (v Kořínkově terminologii převrácený) prvek a zaveden pojem tělesa. Nejprve jsou zformulovány axiomy pro sčítání a násobení racionálních čísel, pak je definováno (komutativní) těleso jako množina, která má alespoň dva prvky a pro sčítání a násobení jsou tyto axiomy splněny. Po důkazech několika jednoduchých vět je konstruováno podílové těleso oboru integrity.

V tomto případě již V. Kořínek postupuje tak, jak jsme ve vysokoškolské algebře zvyklí. Z prvků libovolného oboru integrity J je vytvořena množina uspořádaných dvojic, zavedena příslušná ekvivalence, definovány operace sčítání a násobení; pak je dokázáno, že se jedná o těleso. Až poté je vysvětleno, že vyjdeme-li z oboru integrity celých čísel, získáme jako podílové těleso těleso čísel racionálních. V. Kořínek na začátku výkladu poznamenal:

Kdo má však raději konkretní představy, může si představovat pod J obor integrity celých čísel C. (str. 52)

Uspořádané dvojice V. Kořínek zapisuje v tvaru $\frac{a_1}{a_2}$, prvky a_1, a_2 nazývá čitatel a jmenovatel. V poznámce uvádí:

Tyto názvy a značení zavádím již zde na začátku výkladu, abych věty a vzorce mohl vyslovit a psát ve tvaru, v jakém se pro zlomky vyslovují a píší. Prosím však čtenáře, aby pro tento výklad zapomněl vše, co o zlomcích a počítání se zlomky zná, a aby pod slovem zlomek a pod symbolem a_1/a_2 si představoval jen dvojici prvků (a_1, a_2) z J. Při následujícím výkladu půjde nám totiž právě abstraktně o způsob, jímž lze zlomky zavést. (str. 52)

Otázkou je, zda je čtenář schopen se od představ o zlomcích oprostit.

Pro obory integrity je dále definován pojem izomorfismu, některé jeho vlastnosti jsou uvedeny pouze jako neřešená cvičení.

Následující paragraf se zabývá uspořádáním obecného oboru integrity. Začátek výkladu je opět budován až příliš od základů, jako příklad uveďme část prvního odstavce:

Zřejmě $a > b$ neznamená nic jiného než $b < a$, takže by nebylo vlastně třeba ani znak $>$ zaváděti. Jest to však pro mnohé vzorce výhodné. Znak $<$ (a stejně znak $>$) znamená, že číslo stojící před znakem jest v jistém vztahu k číslu stojícímu za znakem, t. j. ve vztahu „menší“. Podobně znak $=$ vyjadřuje, že číslo stojící před znakem jest v jistém vztahu k číslu stojícímu za znakem, *t. j. ve vztahu „rovná se". Vzorcům, které jsme právě napsali, říkáme nerovnosti. Znaky $<$, $>$ nazýváme znaménka nerovnosti.* (str. 63)

Další výklad již odpovídá charakteru vysokoškolské učebnice (definice uspořádaného oboru integrity, prvky kladné a záporné, vlastnosti atd.), i když je zde jako věta uvedeno i tvrzení, které by bylo možno přesunout do cvičení:

V uspořádaném oboru integrity J platí pro každý prvek $a \neq 0$ $\quad a^2 > 0$. (str. 66)

V šestém paragrafu je definována absolutní hodnota a ohodnocení oboru integrity.

V sedmém paragrafu je probírána dělitelnost v oboru integrity (dělitelnost, jednotky, asociované prvky, vlastní a nevlastní dělitelé, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek atd.). Nacházíme zde například i tvrzení o jednoznačnosti nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele v obecném oboru integrity, Eukleidův algoritmus apod.

Osmý paragraf je věnován prvočíslům a rozkladům celých čísel v součin prvočísel. Autor ukazuje základní vlastnosti prvočísel, zavádí prvočíselný rozklad celého čísla a dokazuje jeho existenci a jednoznačnost. V této části se poprvé zmiňuje o tom, že se v knize objevuje i něco, co již posluchači znají:

Již na jedenáctileté škole jste se učili, že každé celé kladné číslo dá se vyjádřit jakožto součin kladných prvočísel ... (str. 95)

Následující dva paragrafy jsou věnovány kongruencím na množině celých čísel. Nejprve je zaveden pojem kongruence a zbytkové třídy, pak se autor věnuje kongruencím podle prvočíselného modulu, dokazuje malou Fermatovu větu a zavádí charakteristiku libovolného oboru integrity.

V desátém paragrafu je definován okruh; pak je uvedeno, které věty vyslovené pro obor integrity platí i pro okruh. Tento pojem je zaveden jen pro vysvětlení práce s kongruencemi podle neprvočíselného modulu.

Naším úkolem v tomto paragrafu bude najít pravidla, podle nichž se počítá s kongruencemi podle složeného modulu m. K tomu cíli si nejdříve vyšetříme, jaké věty se dají obecně odvodit pro množiny, v nichž je definována rovnost, mající vlastnosti R_0 až R_3 z 1,2, sčítání a násobení splňující všechny axiomy oboru integrity až na axiom I. (str. 111)

V této kapitole najdeme i dva příklady toho, jak důsledné číslování všech tvrzení není příliš čitelné. Jde o věty 10,3 (str. 111) a 10,10 (str. 113):

V okruhu O platí věty a úvahy z odstavců 2,2 až 2,25. Má v něm smysl zkrácené psaní součtů a součinů pomocí symbolů $\sum$ a $\prod$ (3,3 a 3,4), definice mocniny a přirozeného násobku (3,5 a 3,6). Dále tam platí i všechna pravidla odvozená v 3,3 až 3,6 pro tyto symboly, mimo tvrzení o rov. (14) z 3,4.

V okruhu celých čísel mod m platí věty 4,6 až 4,9, nahradíme-li v nich slova „prvek různý od nuly" slovy „nedělitel nuly" neb „číslo nesoudělné s m."

Po definici okruhu a zavedení pojmů dělitele a nedělitele nuly jsou dokázány některé základní vlastnosti okruhu. Následuje definice Eulerovy funkce, zobecněná Fermatova věta a další věty týkající se Eulerovy funkce.

Poslední paragraf je nazván *Věta binomická a polynomická.* Po určení počtu všech pořadí n prvků seznamuje autor čtenáře poměrně zdlouhavým způsobem s určením počtu všech pořadí s opakováním. Z vysvětlujících úvah pak vyplývá věta 11,4 (str. 118):

Buďtež n, r přirozená čísla, $k_1, k_2, \dots, k_r$ celá nezáporná čísla, pro něž nechť platí (2).[4] *Mějme množinu n prvků rozdělených do r skupin tak, že i-tá skupina obsahuje právě k_i prvků. Pokládejme všechny prvky z jedné skupiny za sobě rovné, kdežto dva prvky z dvou různých skupin za různé. Počet v tomto smyslu od sebe různých n-členných pořadí, z nichž každé obsahuje všechny prvky této množiny, označme si symbolem*

$$\begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \dots, k_r \end{bmatrix} .$$

Pak platí

$$\begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \dots, k_r \end{bmatrix} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} .$$

Předchozí výraz je nazván polynomickým koeficientem, pro $k = 2$ pak binomickým koeficientem. Jako větu Kořínek uvádí základní pravidla pro počítání s binomickými koeficienty. Po zavedení Pascalova trojúhelníku a počtu kombinací k-té třídy z n prvků jsou dokázány binomická a polynomická věta v oboru integrity charakteristiky 0 a objasněny rozdíly, které vzniknou v případě obecného oboru integrity.

II. *Čísla reálná a komplexní* (22 stran)

Druhá kapitola obsahuje pouze tři paragrafy: *Těleso reálných čísel*, *Čísla komplexní* a *Geometrické znázornění čísel komplexních.*

Výklad o tělese reálných čísel začíná vysvětlením pojmů omezené množiny, suprema a infima, následuje definice limity posloupnosti a cauchyovské posloupnosti. Jsou zmíněny dva základní přístupy ke konstrukci tělesa reálných čísel. Ani jeden zde však není vyložen, autor odkazuje na další literaturu s tím, že znalost konstrukce reálných čísel není pro obsah knihy bezpodmínečně nutná.

Bez důkazu jsou uvedeny nejdůležitější vlastnosti reálných čísel a zavedena k-tá odmocnina reálného čísla. Autor uvádí i pravidla pro počítání s odmocninami, která by měla být všem studentům známa, například

$$\sqrt[k]{a.b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \qquad (k \in N, \quad a, b \in R, \quad a, b > 0) .$$

Zavedení komplexních čísel autor motivuje úvahami o nutností sestrojit těleso, v němž existuje druhá odmocnina ze záporného čísla. Důkaz, že komplexní čísla tvoří těleso, je v podstatě zdvojený. V přípravných úvahách V. Kořínek předpokládá existenci tělesa, které obsahuje těleso reálných čísel a imaginární

---

[4] (2) $\quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$

jednotku i. V něm pak označí symbolem K množinu všech prvků $a_1 + a_2 i$, kde $a_1, a_2 \in R$, a ukáže, že množina K tvoří těleso.

Vladimír Kořínek poté uvažuje množinu všech dvojic reálných čísel, definuje na ní známým způsobem sčítání a násobení a opět dokazuje, že jde o těleso. Zavádí název těleso komplexních čísel, pojmy číslo komplexně sdružené a absolutní hodnota komplexního čísla a dokazuje některé jejich vlastnosti. Jako příklad uveďme větu 13,6 (str. 133):

Jsou-li α, β dvě čísla komplexní, pak pro čísla komplexně sdružená platí tato pravidla:

$$\overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$\overline{(\alpha\beta)} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

$$\overline{(-\alpha)} = - \overline{\alpha}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{1}{\overline{\alpha}} \quad \textit{pro} \quad \alpha \neq 0$$

$$\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha\ .$$

Na závěr paragrafu věnovaného komplexním číslům V. Kořínek vysvětluje adjunkci prvku k oboru integrity a k tělesu.

Geometrické znázornění komplexních čísel je podáno dvěma způsoby; komplexní čísla jsou zobrazována jednak jako body Gaussovy roviny, jednak jako vektory. Vyjádření pomocí vektorů je zpočátku komplikované, je na něm však znázorněn součet a rozdíl komplexních čísel. Po detailním vysvětlení pojmu rotace roviny[5] je ukázáno, že násobení komplexní jednotkou odpovídá otočení Gaussovy roviny. Dále je uvedeno goniometrické vyjádření komplexního čísla a Moivreova věta.

Autor se zde do jisté míry odchyluje od své snahy budovat vše na pevném základě. Uveďme úryvek z recenze prvního vydání *Základů algebry*, kterou sepsali Jan Mařík a Václav Vilhelm a publikovali v 78. ročníku Časopisu pro pěstování matematiky:

Pro část III potřebuje autor goniometrické vyjádření komplexního čísla a Moivreovu větu. Tento úkol řeší autor geometricky tak, že zavede geometrické znázornění komplexních čísel v orientované eukleidovské rovině a užije věty (kterou uvádí bez důkazu), že každé prosté zobrazení orientované roviny na sebe, jež má právě jeden samodružný bod O a které zachovává délky úseček, se dá vytvořit rotací roviny kolem boku O o jistý úhel t. Užitím této věty pak se už snadno zavedou goniometrické funkce, goniometrické vyjádření komplexního čísla a Moivreův vzorec.

Tento postup však sotva některého čtenáře naplní uspokojením. Především lze říci, že tento postup nezapadá do rámce knihy. Na str. 15 se autor zmiňuje

[5] Výklad obsahuje i vysvětlení pojmů zobrazení, vzor, obraz, prosté zobrazení a zobrazení na. Opět se zde setkáváme s výkladem důležitého pojmu (zobrazení), který je uveden na místě věnovaném jiné problematice.

o axiomatické methodě; na str. 138[6] *se však bez jakéhokoli odkazu odvolává na jakousi „větu elementární geometrie". V elementární geometrii se však často vychází z jiných předpokladů, než že jsou body dány dvěma reálnými souřadnicemi; kdybychom chtěli opravdu použít nějaké věty z elementární geometrie, museli bychom napřed zjistit, že Gaussova rovina splňuje předpoklady, za nichž byla věta dokázána. To není ovšem nemožné; není to však nikterak jednoduché, má-li se vše opravdu precisovat. Bylo by asi lepší rovnou se odvolat na Jarníkův Úvod do počtu diferenciálního, kde jsou nejdůležitější věci, které souvisí s goniometrickým vyjádřením komplexního čísla, přesně odvozeny. ...*

Je snad dobře si uvědomit, že se goniometrického vyjádření komplexních čísel podstatně používá na př. na str. 350[7] *v důkazu t. zv. základní věty algebry a na str. 407*[8] *při výpočtu odmocnin z jedné. V autorově podání jsou tedy tato místa bez solidního základu.* (ČPM 78(1953), str. 360–361)

III. *Polynomy a racionální funkce* (68 stran)

Třetí kapitola je věnována polynomům jedné neurčité. Autor je definuje dvojím způsobem, a to funkčně (15. paragraf) a algebraicky (16. paragraf). V prvním případě vychází z analytické definice funkce a ukazuje, že funkce jedné reálné proměnné tvoří okruh s netriviálními děliteli nuly. Polynom je pak definován jako jistá funkce; je ukázáno, že polynomy nad oborem integrity tvoří dokonce okruh (při obvyklé definici součtu a součinu polynomů); autor poznamenává, že později bude rozebráno, kdy tvoří obor integrity. Dále je zavedena algebraická rovnice nad oborem integrity a definovány algebraické a transcendentní prvky a čísla.

Algebraická definice polynomu vychází z posloupnosti prvků (koeficientů) nějakého oboru integrity J. Je ukázáno, že daná struktura (s definovanými operacemi sčítání a násobení) tvoří obor integrity, tzv. obor integrity polynomů jedné neurčité (nad oborem integrity J).

Následující paragraf porovnává polynomy z hlediska algebraického a analytického a ukazuje výhody algebraické definice.[9]

V dalších paragrafech se autor věnuje dělitelnosti polynomů nad tělesem a jejich rozkladu v ireducibilní polynomy a dokazuje řadu vět (např. existence a jednoznačnost rozkladu). Následuje poměrně podrobný rozbor otázek dělitelnosti polynomů nad oborem integrity celých čísel; ukázány jsou shody i rozdíly s předchozími výsledky dokázanými pro polynomy nad tělesem.

Následující text je věnován derivaci polynomu a Taylorovu vzorci. Po definici derivace polynomu a důkazu věty o derivaci součtu a součinu polynomů je definována k-tá derivace, uveden Taylorův vzorec a vysvětleno Hornerovo schéma jednak jako pomůcka pro výpočet koeficientů v Taylorově rozvoji, jednak pro výpočet hodnoty polynomu. Následuje paragraf o racionální funkci jedné neurčité.

---

[6] Ve druhém vydání str. 142.
[7] Ve druhém vydání str. 360.
[8] Ve druhém vydání str. 418.
[9] Jde o dva různé pojmy; vyjdeme-li od nekonečného tělesa, pak splývají.

Autor pak přechází k polynomům n neurčitých; zavádí je analogicky s polynomy jedné neurčité. V této části se také objevuje pojem formy a parciální derivace. Poslední paragraf je věnován racionální funkci n proměnných, resp. n neurčitých. Od polynomů autor přechází k rovnicím a soustavám rovnic o n neznámých, jejichž řešení se pak věnuje v druhé části knihy.

Lineární algebra

IV. *Teorie lineárních rovnic bez determinantů* (41 stran)

Čtvrtá kapitola začíná zavedením vektorů a modulů. Množina všech n-tic prvků nějakého oboru integrity J je nazvána n-rozměrným vektorovým prostorem nad J a označena V_n, definováno je sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem z oboru integrity, ukázány jsou vlastnosti těchto operací. Vektorovým modulem je nazvána podmnožina uzavřená na sčítání a na násobení prvkem z oboru integrity J, tj. podprostor prostoru V_n. Dále je definována lineární závislost a nezávislost vektorů nad J. Pak se autor obrací k vektorovým modulům nad tělesem T a po důkazu Steinitzovy věty o výměně definuje bázi modulu a jeho dimenzi (autor užívá termínu hodnost). Vedle vektorových modulů se v tomto paragrafu hovoří i o modulech lineárních forem; je ukázáno, že lineární formy n neurčitých lze chápat jako n-rozměrné vektory.

Další paragraf je věnován maticím nad oborem integrity. Při zavedení hodnosti matice hovoří V. Kořínek z pochopitelných důvodů o matici nad tělesem. Nejedná se o jediný příklad toho, kdy je při studiu knihy nutno pozorně sledovat, nad jakou strukturou pracujeme (viz např. definice báze a hodnosti modulu v předchozím paragrafu).

V následujícím paragrafu autor dochází k problematice řešení soustav lineárních rovnic, jejichž koeficienty jsou z nějakého tělesa. Po zavedení úvodních pojmů (soustava rovnic, matice soustavy, rozšířená matice soustavy, hodnost soustavy) V. Kořínek rozebírá problém existence řešení. Z předchozího výkladu o zjištění hodnosti matice již vyplývá metoda řešení, převedení rozšířené matice na trojúhelníkový tvar. Poslední paragraf kapitoly je věnován vlastnostem množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic, především soustavy homogenní. Autor zde mimo jiné dokazuje větu o rovnosti hodností navzájem transponovaných matic.

V. *Determinanty a jejich použití na řešení lineárních rovnic* (56 stran)

Úvodní paragraf je věnován permutacím, pomocí inverze a znaménka pořadí je definován pojem sudé a liché permutace, dokázány jsou některé věty, které jsou zapotřebí v následujícím paragrafu věnovanému determinantům.

Nejprve je definován determinant matice nad oborem integrity a pak jsou dokázány základní vlastnosti determinantů (determinant transponované matice, záměna dvou sloupců, dva shodné sloupce, rozvoje determinantu atd.).

Další paragraf se zabývá výpočtem determinantů, autor nejprve popisuje základní metodu. Upravuje determinant na tvar, kdy je v prvním řádku nebo sloupci pouze jeden nenulový prvek, a pak determinant rozvádí podle tohoto řádku nebo sloupce; následují tři podrobně řešené příklady, dále výpočet determinantu, jehož prvky jsou polynomy, a dva další příklady, v nichž jsou prvky determinantů prvky nějakého oboru integrity. Paragraf uzavírá výpočet Vandermondova determinantu.

Dvě hlubší věty o determinantech, věta o násobení determinantů a Laplaceova věta, jsou dokázány v samostatném paragrafu. V něm jsou rovněž zavedeny pojmy adjungovaného a reciprokého determinantu, subdeterminantu a doplňku subdeterminantu.

Poslední paragraf této kapitoly je věnován řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů. Nejprve je dokázáno, že soustava n rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem má právě jedno řešení. Z důkazu této věty je pak odvozeno Cramerovo pravidlo. Paragraf končí větou o řešení soustavy $n-1$ rovnic o n neznámých pomocí determinantů.

VI. *Početní úkony s maticemi. Kvadratické formy* (34 stran)

Poslední kapitola druhé části knihy není příliš obsáhlá, skládá se pouze ze tří paragrafů. První z nich se zabývá početními úkony s maticemi. Je zde definováno sčítání matic, násobení matice prvkem a násobení matic, dokázán je asociativní zákon pro násobení matic, zákony distributivní a to, že matice typu (m, n) nad oborem integrity tvoří nad tímto oborem integrity vektorový prostor. Dále se autor věnuje čtvercovým maticím. Ukazuje, že tvoří nad daným oborem integrity okruh; jedná se o první příklad okruhu, v němž není násobení komutativní. V souvislosti se zavedením nekomutativního okruhu jsou definovány levý a pravý dělitel nuly. Po zavedení pojmů regulární a singulární matice je dokázána věta o existenci inverzní matice ke každé regulární matici a věta o zachování hodnosti matice při jejím násobení regulární maticí.

Druhý paragraf je věnován lineárním substitucím. Po úvodní definici je dokázána nutná a postačující podmínka pro to, aby lineární substituce byla vzájemně jednoznačným zobrazením; dále jsou definovány pojmy regulární, singulární a inverzní substituce. Autor se věnuje skládání substitucí[10] a zaměřuje se na transformace oboru integrity polynomů n neurčitých určené lineárními substitucemi neurčitých.

Poslední paragraf této kapitoly je nazván *Kvadratické formy.* Začíná definicí symetrické matice, následuje výklad úvodních partií teorie kvadratických forem (matice, koeficienty, determinant atd.) a důkaz věty o převoditelnosti každé kvadratické formy nad tělesem, jehož charakteristika není 2, na diagonální tvar pomocí lineárních substitucí. Dále je dokázán zákon setrvačnosti a zavedeny kladný a záporný index setrvačnosti a signatura formy; závěr paragrafu je věnován tzv. kongruentním maticím.

---

[10] Teprve zde je ukázána souvislost mezi skládáním substitucí a násobením příslušných matic.

Algebraické rovnice jedné neznámé

VII. *Kořeny algebraických rovnic* (37 stran)

Úvodní paragraf kapitoly věnované kořenům algebraických rovnic se zabývá obecnými vlastnostmi polynomů s komplexními a reálnými koeficienty.[11]

Půjde totiž v první řadě o to udělat si zhruba přehled, jaké funkční hodnoty, co do absolutní velikosti, daný polynom $f(x)$ nad tělesem komplexních čísel K nabývá v různých částech Gaussovy roviny neb daný polynom $f(x)$ nad tělesem reálných čísel P na různých částech osy reálné. Dále si dokážeme některé věci o limitách posloupností komplexních čísel. (str. 346)

Věty zde dokazované slouží především při důkazu základní věty algebry, některé jsou důležité i pro numerický výpočet kořenů algebraických rovnic. Dále je zavedena limita posloupnosti komplexních čísel a dokázány některé věty s tímto pojmem spjaté.

Následující paragraf je nazván *Existence kořenů rovnice s komplexními koeficienty*; jeho hlavní část tvoří důkaz základní věty algebry, která je formulována takto:

Každý polynom aspoň prvního stupně s komplexními koeficienty

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

má v tělese komplexních čísel K aspoň jeden nulový bod, t. j. rovnice

$$f(\xi) = 0$$

má v tělese K aspoň jeden kořen. (str. 354–355)

Další důležitou větou, která je zde dokázána, je věta o rozkladu polynomu s komplexními koeficienty na součin lineárních činitelů. Poté se autor obrací k rovnicím s koeficienty z libovolného tělesa a zabývá se problémem existence jejich kořenů. Zavádí kongruenci modulo polynom, kořenové a rozkladové nadtěleso polynomu a dokazuje příslušné věty s těmito pojmy spojené. Následující paragraf se zabývá násobností kořenů rovnice. Věty i definice jsou vyslovovány zároveň pro polynomy s komplexními koeficienty a pro polynomy s koeficienty z libovolného tělesa. Po zavedení kořenových činitelů, jejich násobnosti a násobnosti kořenů, je dokázána věta o počtu kořenů polynomu a ukázána souvislost násobnosti kořene a derivace polynomu. Poslední paragraf této kapitoly je věnován rovnicím s reálnými a racionálními koeficienty; např. je dokázáno, že číslo komplexně sdružené s kořenem polynomu je také jeho kořenem, popsány jsou ireducibilní polynomy nad tělesem reálných čísel. Autor rovněž ukazuje, jak nalézt všechny racionální kořeny rovnice s celočíselnými koeficienty.

---

[11] Připomeňme, že o polynomech s celočíselnými koeficienty bylo pojednáno již ve třetí kapitole.

VIII. *Symetrické funkce* (32 stran)

Osmá kapitola je věnována speciálním polynomům n neurčitých, tzv. symetrickým funkcím. Nejprve je ukázáno, že symetrické polynomy nad oborem integrity tvoří obor integrity, dále je definována racionální symetrická funkce, výška členu v polynomu, vedoucí člen polynomu a výška polynomu, vysvětlen je vznik jednoduchého symetrického polynomu.

Hlavní věta o symetrických polynomech je tématem následujícího paragrafu, v němž je rovněž ukázán jejich význam pro algebraické rovnice. Vysvětleny jsou zde početní metody, pomocí nichž lze symetrický polynom vyjádřit jako polynom v elementárních symetrických funkcích. Tento paragraf obsahuje i řešené příklady s poměrně podrobným popisem početních postupů.

Závěrečná část kapitoly o symetrických funkcích je věnována diskriminantu algebraické rovnice, který je definován jako druhá mocnina Vandermondova determinantu kořenů této rovnice; jedná se tedy o symetrickou formu. Poté jsou dokázány věty o souvislosti kořenů rovnice a jejího diskriminantu.

IX. *Řešení algebraických rovnic* (61 stran)

V úvodu poslední, deváté kapitoly Vladimír Kořínek píše:

V kapitole VII. jsme si dokázali existenci kořenů pro každou algebraickou rovnici jedné neznámé. V této kapitole si ukážeme způsoby, kterými lze tyto kořeny pro některé algebraické rovnice stanovit, a metody, kterými lze vyšetřovat jejich vlastnosti. (str. 415)

První paragraf kapitoly je věnován nejjednodušším rovnicím n-tého stupně, rovnicím pro n-té odmocniny z jedné. Autor vychází od definice n-té odmocniny z jedné, rozlišuje primitivní a neprimitivní n-tou odmocninu, dokazuje věty o jejich existenci a počtu a uvádí příklady. Ukazuje i goniometrické řešení rovnice pro n-tou odmocninu z jedné pomocí Moivreova vzorce.

Dalším speciálním typem rovnice n-tého stupně, kterým se zabývá následující paragraf, je rovnice binomická. Po důkazu tvrzení o počtu kořenů binomické rovnice se autor zabývá symbolikou, především ve spojení s n-tou odmocninou z jedné a rozebírá problematiku druhé odmocniny z komplexního čísla. V závěru paragrafu definuje pojem algebraického řešení rovnice.

Následující tři paragrafy jsou věnovány rovnicím druhého, třetího a čtvrtého stupně. Algebraické řešení kvadratické rovnice je odvozeno dvěma způsoby, charakter kořenů je dán do souvislosti s hodnotou diskriminantu. Podrobně je rozebráno řešení rovnice, v níž se vyskytuje právě n-tá a $2n$-tá mocnina neznámé; ta se dá snadno převést na kvadratickou rovnici.

V. Kořínek přikládal cvičením velký význam; v jeho učebnici nejsou pouze početní příklady, ale též cvičení důkazového typu, mnohá jsou označena jako nezbytná pro studium dalších partií knihy. Některé důležité pojmy se objevují pouze ve cvičeních. Jako příklad uveďme cvičení 13,6, které se týká tělesa K komplexních čísel:

Dokažte: Přiřadíme-li číslu α z K číslo $\overline{\alpha}$, dostaneme isomorfismus tělesa K se sebou samým. Takovému isomorfismu tělesa se sebou samým říkáme automorfismus tělesa. (str. 136)

Nikde jinde v textu učebnice není pojem automorfismu definován.

Výklad týkající se rovnic třetího stupně je uveden vysvětlením postupu, který vede k odstranění kvadratického členu. Dále jsou odvozeny Cardanovy vzorce, vyslovena věta o kořenech kubické rovnice v závislosti na hodnotě diskriminantu. Pro *casus irreducibilis* je prezentováno goniometrické řešení.

Obdobný postup jako v paragrafu o řešení kubických rovnic Vladimír Kořínek používá i pro rovnice čtvrtého stupně: odstranění kubického členu, odvození vzorců a shrnutí odvozených výsledků. Paragraf je zakončen historickou poznámkou o algebraickém řešení rovnic vyšších stupňů.

Následující paragraf se zabývá dalším speciálním typem algebraických rovnic, rovnicemi reciprokými. Příslušné polynomy jsou nejprve zavedeny, pak je ukázáno, jak musí vypadat jejich koeficienty. Jsou rozděleny na kladně a záporně reciproké. Následují důležité věty o kořenech těchto polynomů. Paragraf je zakončen několika příklady.

Závěrečný paragraf nazvaný *Geometrické konstrukce kružítkem a pravítkem* byl, jak sám V. Kořínek říká (str. 465), zařazen do knihy

pro zajímavost problému, který hrál v dějinách matematiky velkou úlohu ...

Autor nejprve vysvětluje pojem konstrukce pravítkem a kružítkem a ukazuje souvislost mezi takovýmito konstrukcemi a řešeními pomocí aritmetických operací a výpočtu druhé odmocniny. Zmiňuje též tři proslulé antické úlohy (zdvojení krychle, trisekce úhlu, kvadratura kruhu) a ukazuje, že tyto úlohy nejsou obecně eukleidovsky řešitelné. Závěr je věnován problematice konstrukcí pravidelných n-úhelníků.

Dodatky

Druhé vydání Kořínkovy učebnice obsahuje tři dodatky, z nichž první již byl součástí prvního vydání.

První dodatek má název *Druhý důkaz tak zvané základní věty algebry.* Je více algebraický než důkaz obsažený v základním textu učebnice, vychází především z věty o rozkladovém tělese polynomu.

Druhý dodatek je nazván *Dosazovací pravidla.* Pro polynomy jedné i n neurčitých byla tato pravidla srozumitelně vyložena již dříve. V. Kořínek se však zde zabývá dosazovacími pravidly podrobněji (vlastnosti izomorfismu) a uvádí příklady jejich použití.

Třetí dodatek je věnován rozkladu racionální funkce na parciální zlomky. Nejedná se pouze o výklad postupu tohoto rozkladu, autor dokazuje i řadu vět s touto problematikou souvisejících. Partie o numerickém výpočtu koeficientů rozkladu je velmi podrobná.

Algebraické učebnice vydané česky (a slovensky)

Kořínkova učebnice *Základy algebry* je první českou ucelenou učebnicí, která ve své době pokrývala téměř všechny algebraické partie základního vysokoškolského učiva. V dalším textu se pokusíme přiblížit českou algebraickou knižní produkci, která vydání Kořínkovy učebnice předcházela. Zmíníme se též o několika učebnicích pozdějších a s Kořínkovou učebnicí je srovnáme.

M. Pokorný [12]

Roku 1865 vydal Martin Pokorný nepříliš rozsáhlou učebnici *Determinanty a vyšší rovnice* (133 stran). Lze ji považovat za první česky psanou učebnici algebry, jejíž látka je na pomezí středoškolské a vysokoškolské matematiky. Byla sepsána v době, kdy se na pražské polytechnice objevily první české matematické přednášky. Jak je již z názvu zřejmé, skládá se tato kniha ze dvou částí. V předmluvě autor odůvodňuje spojení těchto dvou témat do jedné knihy:

Mám za to, že jsem veřejnosti, před niž spískem tímto předstupuji, povinen, odůvodniti věc na první pohled snad nápadnou, za jakým totiž účelem sloučeny v jeden spis dvě nauky rozdílné, dvě samostatné abych řekl monografie. V tom ohledu stačí snad poukázati jen k tomu, že ač oba oddíly, nauka totiž o determinantách a nauka o vyšších rovnicích, o sobě jsou samostatné, přece řešení rovnic o vícero neznámých použitím determinant stává se mnohem přehlednějším a stručnějším. Že však o determinantách nemáme dosud spisu, na nějž bych se byl při tom odvolati mohl, viděla se toho býti potřeba, předeslati nauce o rovnicích právě i nauku o oněch, ...

Část knihy věnovaná determinantům obsahuje přibližně 40 stran, rovnicím je věnováno stran 90. Kniha je psána velmi přehledně, autor používá symboliku, na jakou jsme dnes zvyklí. Výklad je členěn na *poučky* (věty), za nimiž následují důkazy; příkladů uvádí autor ve výkladu celou řadu.

Partie o determinantech začíná rozlišením *přestav* (permutací) podle počtu *neladů* (transpozic) na *náležící k třídě první* (sudé) a *náležící k třídě druhé* (liché). Ve druhé kapitole pak autor zavádí determinant n-tého řádu, vykládá rozvoj determinantu podle sloupce, násobení determinantů atd.; v podstatě jde o stejnou látku, jakou v příslušné pasáži své knihy vykládá i Vladimír Kořínek.

První kapitola věnovaná rovnicím se zabývá řešením rovnic 3. stupně, následuje řešení rovnic 4. stupně a speciální případy rovnic vyšších stupňů. V kapitole o obecných vlastnostech vyšších rovnic je mimo jiné uvedena i základní věta algebry, a to v následující formulaci:

Každá algebraická rovnice $n^{\text{tého}}$ stupně, uvedená v podobu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

má n kořenů.[13]

---

[12] Martin Pokorný (1836–1900) působil jako středoškolský profesor a ředitel gymnázia. V letech 1878 až 1900 stál v čele Jednoty českých mathematiků. Je autorem několika učebnic.

[13] [Po], str. 80.

Zbývající kapitoly jsou nazvány *Rovnice irracionalné*, *Rovnice transcendentní* a *Rovnice o vícero neznámých.*

Tato knížka byla určena posluchačům prvních ročníků polytechniky. Můžeme říci, že vznikla „na objednávku". Ještě před předmluvou se dočteme:

Shledav potřebu příručné knihy v oboru vyšších rovnic i determinant pro posluchače českých přednášek na polytechnickém ústavu v Praze, učinil jsem poptávku k p. spisovateli této knihy, nechtěl-li by se uvázati v sestavení takového spisu, k čemuž on se uvoliv se mnou o plán se smluvil a na základě jeho předloženou knihu sepsal.

Vyslovuje svůj souhlas s provedením celku odporučuji spis tento posluchačům svým jakožto knihu příručnou tím spíše, jelikož při přednáškách svých k němu vztahovati se budu.

Gustav Skřivan,
profesor mathematiky na k. č. polytechnice v Praze

Přestože je tato učebnice starší než knihy F. J. Studničky a V. Řehořovského, o nichž bude psáno dále, působí mnohem modernějším dojmem. Z Pokorného knížky bychom potřebné partie bez větších problémů nastudovali i dnes.

F. J. Studnička [14]

František Josef Studnička vydal roku 1870 stručnou učebnici *O determinantech* (64 stran), která vyšla též rusky a německy. Je zde podána definice determinantu, vyložena pravidla pro výpočet determinantů, dokázány jejich základní vlastnosti a uvedeny některé speciální druhy determinantů. Kniha neobsahuje žádná zobecnění a aplikace; výklad není členěn, jak bychom očekávali, na definice, tvrzení a důkazy. Poznamenejme, že tehdy byl takový postup zcela obvyklý. Zajímavé je, že Studničkova knížka [Std1] vyšla jen pět let po obdobně zaměřené učebnici [Po] od M. Pokorného.

V. Řehořovský [15]

V osmdesátých letech 19. století byl podniknut první pokus o sepsání ucelené české učebnice algebry. Z plánované třídílné učebnice *Základové vyšší algebry* od Eduarda Weyra (1852–1903) a Václava Řehořovského však vyšel roku 1883 jen první díl nazvaný *Theorie souměrných funkcí kořenů* (186 stran) od V. Řehořovského. Druhý ani třetí díl již napsán nebyl, pokus Eduarda Weyra a Václava Řehořovského o sepsání vysokoškolské učebnice algebry skončil nezdarem.

---

[14] František Josef Studnička (1836–1903) působil v letech 1864 až 1871 na pražské polytechnice a v letech 1871 až 1903 na české univerzitě v Praze. Je autorem řady českých vysokoškolských učebnic matematiky a dalších knih, desítek odborných i popularizačních prací. Věnoval se hlavně matematice, meteorologii, historii a popularizaci vědy.

[15] Václav Řehořovský (1849–1911) byl asistentem na pražské technice, v letech 1883 až 1900 profesorem na státní průmyslové škole a potom profesorem obecné mechaniky a hydromechaniky na české technice v Brně. V osmdesátých a devadesátých letech byl předsedou Jednoty českých mathematiků. Sepsal několik vysokoškolských učebnic pro studenty techniky.

Řehořovského knížka je značně nemoderní, nejen z pohledu dnešního, ale i z pohledu poloviny 20. století, kdy V. Kořínek psal svoji učebnici. Jako učebnice algebry byla již v první polovině 20. století těžko použitelná, a to z hlediska obsahu i podání.

V. Řehořovský v předmluvě své knihy píše:

Hlavní důvod, který vedl k sepsání „Základů", byla snaha, aby i česká literatura mathematická vykázati se mohla učebnou knihou onoho odvětví mathematiky, které v poměrně krátké době posledních čtyřiceti let dospělo na vysoký stupeň vývinu a jehož znalosť jest nezbytnou i v ostatních oborech mathematiky, zejména v analytické geometrii.

Celý spis rozvržen na tři díly, z nichž první obsahuje theorii souměrných funkcí kořenů algebraické rovnice, druhý jednati bude o theorii vylučování, o resultantech a diskriminantech, třetí pak o všeobecné theorii invariantů a kovariantů.

Vším právem příslušelo by pojmouti do „Základů" též theorie rovnic a determinantů; od toho však upuštěno a předpokládány discipliny ty co známé, jelikož literatura naše již spisy pp. M. Pokorného a Dr. F. J. Studničky sem spadajícími vykázati se může.

V dílu prvním, jak jej tímto předkládám, snažil jsem se pokud možno shrnouti vše, čeho zapotřebí, aby čtenář seznámivší se s obsahem jeho stál na stanovišti, na kterém dnes theorie souměrných funkcí kořenů jest, a aby některé složitější partie, které do „Základů" pojmuty býti nemohly, snadno si přisvojiti mohl.

V úvodu knihy V. Řehořovský vymezuje základní pojmy (kořen, souměrná, tj. symetrická funkce) a především používanou symboliku; bez seznámení s ní je kniha z velké části nesrozumitelná, protože například zápis $(3^2 1^3)$ značí symetrický polynom

$$\sum \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \,.$$

V. Řehořovský dále píše:

V theorii souměrných funkcí kořenů mohou tudíž vyskytovati se úlohy dvojího druhu:

1. Danou souměrnou funkci kořenů algebraické rovnice vyjádřiti v koefficientech této rovnice, a

2. danou funkci koefficientů vyjádřiti souměrnými funkcemi kořenů.[16]

Těmto dvěma typům úloh jsou věnovány první a druhý oddíl knihy. Třetí oddíl je nazván *Sestrojení a zařízení tabulek pro souměrné funkce kořenů a sestavy koefficientů rovnice* a čtvrtý *O souměrných funkcích rozdílů kořenů algebraické rovnice.*

Řehořovského kniha je přehledně psaná, používá i číselné odkazy, pokrývá však jen malou část látky, která je obsažena v Kořínkově učebnici *Základy algebry.*

---

[16] [Ř], str. 5.

F. J. Studnička

Rozsáhlejší Studničkova monografie z roku 1899 nazvaná *Úvod do nauky o determinantech* (231 stran) je rozdělena do tří částí. První má úvodní charakter, neboť je věnována symbolice, základním vlastnostem determinantů, rozvoji determinantů a jejich násobení. V druhé části se autor zabývá speciálními determinanty (mocninné, symetrické, antisymetrické, komplexní, funkcionální atd.). Ve třetí části uvádí aplikace teorie determinantů v algebře a analytické geometrii, např. při řešení soustav lineárních rovnic; dalšími tématy zde prezentovanými je transformace souřadnic, lineární substituce, rovnice přímky a roviny. Jako ukázku uveďme Studničkovu formulaci Cramerova pravidla:

Hodnota jednotlivých neznámých jeví se tu v podobě zlomku, jehož jmenovatelem jest determinant soustavy, čitatelem pak týž determinant, nahradí-li se v něm koëfficienty hledané neznámé osamocenými členy na pravé straně rovnic umístěnými.[17]

K. Zahradník [18]

Roku 1905 vyšla v Brně útlá knížka Karla Zahradníka nazvaná *O determinantech* (51 stran). Vznikla na základě autorových úvodních přednášek z vyšší matematiky, které konal na České vysoké škole technické v Brně. Determinanty jsou zde zavedeny pomocí permutací, autor diskutuje jejich základní vlastnosti, problematiku subdeterminantů a rozvoje determinantů, Laplaceovu větu, matice a jejich násobení. Věnuje se také řešení soustav lineárních rovnic.

Výklad je poměrně přehledný, s trochou nadsázky lze říci, že je moderní.

Pro porovnání se Studničkovou učebnicí z roku 1899 ukažme, jak K. Zahradník vykládá v partii věnované soustavám lineárních rovnic Cramerovo pravidlo.

Dána budiž soustava n rovnic lineárných:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= c_n\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Determinant z n^2 koeficientů neznámých, vzatých ve své poloze v soustavě, tedy determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

[17] [Std2], str. 160.

[18] Karel Zahradník (1848–1916) byl v letech 1876 až 1899 profesorem matematiky na univerzitě v chorvatském Záhřebu a od roku 1899 na české technice v Brně. Je autorem řady prací o geometrii křivek a ploch, o determinantech a několika vysokoškolských učebnic.

jmenujeme determinantem dané soustavy. Znásobíme-li prvou rovnici A_{1r}, druhou A_{2r} atd., n-tou A_{nr}, kdež je A_{hr} subdeterminant elementu a_{hr} ve Δ, a sečteme-li, obdržíme

$$x_1 \sum_{h=1}^{n} a_{h1} A_{hr} + x_2 \sum_{h=1}^{n} a_{h2} A_{hr} + \cdots + x_r \sum_{h=1}^{n} a_{hr} A_{hr} + \ldots$$

$$+ x_n \sum_{h=1}^{n} a_{hn} A_{hr} = \sum_{h=1}^{n} c_h A_{hr} .$$

Jest pak

$$\sum_{h=1}^{n} a_{hs} A_{hr} = 0 , \qquad \sum_{h=1}^{n} a_{hr} A_{hr} = \Delta ,$$

tudíž obdržíme:

$$x_r \sum_{h=1}^{n} a_{hr} A_{hr} = \sum_{h=1}^{n} c_h A_{hr} \tag{3}$$

Z rovnice 3. obdržíme hodnotu x_r, a píšeme-li $r = 1, 2, \ldots, n$, obdržíme hodnoty všech neznámých, to jest úplné řešení soustavy rovnic 1.

Všechny neznámé mají společného jmenovatele Δ a čítatele obdržíme z jmenovatele, nahradíme-li v determinantu soustavy koeficienty neznámé, jíž určit chceme, příslušnými členy druhé strany, t. j.:

$$x_r = \frac{a_{hr}/c_n \; \Delta}{\Delta} \tag{3'}$$

Řešení toto vyžaduje $\Delta \neq 0$.[19]

Vidíme, že Karel Zahradník používá symboliku, která je nám celkem blízká, jeho výklad Cramerova pravidla se od Kořínkova výkladu příliš neliší.

Poznamenejme ještě, že K. Zahradník vydal již roku 1879 malou knížku pro vyšší střední školy nazvanou *Prvé počátky nauky o determinantech* (Praha, J. Otto, 1879, 48 stran). Po definici determinantů probírá determinanty druhého a třetího stupně, jejich základní vlastnosti včetně věty o násobení determinantů. Knížka končí užitím deteminantů při řešení soustav lineárních rovnic a v geometrii.

B. Bydžovský [20]

Další učebnicí, kterou zde připomeneme, je kniha *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* (210 stran) Bohumila Bydžovského, která vyšla roku 1930. Tato učebnice má úroveň srovnatelnou s učebnicí Kořínkovou, i když

[19] [Z], str. 27–28.

[20] Bohumil Bydžovský (1880–1969) přednášel od roku 1910 na české technice a od roku 1917 na české univerzitě v Praze. Věnoval se geometrii, je autorem několika vysokoškolských a středoškolských učebnic. Velkou pozornost věnoval též reformám českého školství.

V. Kořínek se modernímu stylu přiblížil více. U Bohumila Bydžovského většinou věta vyplývá z předchozích úvah, tedy důkaz vlastně větu předchází. Kromě teorie determinantů obsahuje kniha i závěrečnou historickou poznámku o vzniku a vývoji této teorie. Ve srovnání s V. Kořínkem, který výklad determinantů zařazuje po výkladu permutací a determinant definuje právě pomocí permutací, B. Bydžovský vychází ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých s koeficienty a_{ij}; determinantem druhého stupně nazývá výraz

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a ukazuje jeho vlastnosti. Stejným způsobem pak zavádí determinant třetího stupně a až poté uvádí permutační definici determinantu. Stejně jako u V. Kořínka, i zde je ke každému tématu připojena řada cvičení, a to i důkazových. Bydžovského důkazy vět nejsou vždy provedeny tak, jak je dnes běžné, jsou spíše popisné. Uveďme ukázku:

Pro hodnost matice platí některé věty, jež plynou snadno ze známých vět o determinantech. Shrneme je v toto znění: Hodnost matice se nemění, jestliže:

a) řádky se vymění za sloupce;

b) změní se jakkoli pořadí rovnoběžných řad;

c) násobí se všechny prvky téže řady týmž činitelem, jenž není roven nule;

d) přičte se k některé řadě matice lineární kombinace jiných řad s ní rovnoběžných.

Správnost této věty se snadno nahlédne v bodech a), b), c), neboť změny v nich uvedené mohou sice měniti tvar determinantu, ale nemají vlivu na okolnost, že tento determinant je nebo není roven nule. Tak při změně a) každý determinant obsažený v původní matici je obsažen i ve změněné, jen má řádky vyměněny za sloupce, což na jeho hodnotu nemá, jak víme, vlivu. Při změně b) každý determinant původní matice je obsažen i ve změněné a to buď vůbec beze změny anebo s vyměněnými rovnoběžnými řadami. Avšak takovou výměnou se změní, jak víme, nejvýše znaménko determinantu a determinant nenulový tedy zůstává nenulovým a determinant nulový nulovým. Při změně c) každý determinant původní matice je obsažen i ve změněné a to buď vůbec beze změny anebo násoben činitelem nenulovým. I po této změně determinant nulový zůstává nulovým, determinant nenulový nenulovým.[21]

K. Petr [22]

V první polovině 20. století uvažoval o sepsání vysokoškolské učebnice algebry Karel Petr, profesor matematiky na přírodovědecké fakultě UK.

Od roku 1931 se pokoušel Karel Petr sepsat učebnici „Základy algebry“. Dostalo se mu pro tuto činnost nejrůznějších finančních podpor a příspěvků. Žádosti o řádnou dovolenou v letním semestru školního roku 1933/4, aby mohl

[21] [By], str. 48–49.

[22] Karel Petr (1868–1950) působil od roku 1903 na české univerzitě v Praze. Je autorem řady prací z teorie čísel, algebry, numerické matematiky a matematické analýzy a několika vysokoškolských učebnic.

tuto učebnici napsat, bylo vyhověno. ... Při psaní této práce spolupracoval Karel Petr, kromě jiných, i s V. Kořínkem. Přesto se Karlu Petrovi z různých příčin nepodařilo tuto knihu napsat.[23]

Karel Petr nakonec přenechal sepsání učebnice algebry svému žáku Vladimíru Kořínkovi.

O. Borůvka [24]

Další knihou, kterou zde připomeneme, je *Úvod do theorie grup* (80 stran) Otakara Borůvky, který vyšel v roce 1944. Látku autor buduje od základů, začíná zavedením pojmu množiny, na čtenáře klade jisté nároky v oblasti abstraktního uvažování. Kniha je rozdělena na tři části – *Množiny, Grupoidy* a *Grupy*, obsahuje řadu příkladů a cvičení, především důkazového typu. Tuto knihu lze nazvat učebnicí abstraktní algebry, ale bohužel pouze její úzké části. Jakým stylem O. Borůvka teorii grup vykládá, nám nejlépe naznačí krátká ukázka:

Uvažujme nyní o dvou libovolných podgrupách $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$. Protože obě podgrupy obsahují prvek $\underline{1} \in \mathfrak{G}$, existuje, jak víme z úvah o grupoidech, jejich průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ a snadno ukážeme, že tento průnik jest opět podgrupou v $\mathfrak{G}$. Jest zřejmé, že $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ jest asociativní podgrupoid v $\mathfrak{G}$ s jednotkou $\underline{1}$ a tedy stačí zjistiti, že obsahuje s každým svým prvkem a současně inversní prvek a^{-1}; když $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, pak platí současně $a \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{B}$ a protože $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou podgrupy, plyne odtud $a^{-1} \in \mathfrak{A}$, $a^{-1} \in \mathfrak{B}$, takže máme $a^{-1} \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ a tím jest důkaz proveden. Můžeme tedy říci, že každé dvě podgrupy v $\mathfrak{G}$ mají průnik a tento průnik jest podgrupou v $\mathfrak{G}$. Tento výsledek se dá snadno rozšířiti na libovolný počet podgrup v $\mathfrak{G}$.[25]

Š. Schwarz [26]

Krátce po druhé světové váce vyšla v druhém vydání malá knížka Štefana Schwarze *O rovnicích* (159 stran).[27] Obsahuje sedm kapitol a dva dodatky:

Čísla; Polynomy; Vlastnosti kořenů algebraické rovnice;[28] *Řešení rovnic 2., 3., a 4. stupně; Některé zvláštní typy rovnic;*[29] *Neřešitelnost rovnic vyššího stupně než čtvrtého; Dva další problémy o algebraických rovnicích; O konstrukci geometrických útvarů pravítkem a kružítkem; Casus irreducibilis kubické rovnice.*

---

[23] [C], str. 22–23.

[24] Otakar Borůvka (1899–1995) působil v letech 1934 až 1970 na brněnské univerzitě. Věnoval se hlavně diferenciální geometrii, teorii grup, diferenciálním rovnicím a teorii grafů.

[25] [B], str. 54–55.

[26] Štefan Schwarz (1914–1996) působil na přírodovědecké fakultě University J. A. Komenského a na elektrotechnické fakultě SVŠT v Bratislavě. Věnoval se hlavně algebře a teorii čísel, jeho nejvýznamnější výsledky se týkají teorie pologrup.

[27] První vydání vyšlo roku 1940 v podstatně menším rozsahu (94 stran).

[28] Obsahuje i základní větu algebry a symetrické funkce.

[29] Obsahuje $\sqrt[3]{1}$.

Jak je vidět, pokrývá tato kniha většinu partií třetí části Kořínkových *Základů algebry*. Je však psána populárnějším stylem (tedy nikoli stylem „definice, věta, důkaz“), avšak důkazy zcela neopomíjí. Cílem autora bylo přiblížit matematiku tomu, kdo o ní má zájem, nikoli vychovat odborného matematika. Uveďme jako ukázku Schwarzovo zavedení pojmu tělesa:[30]

Tělesem budeme rozuměti souhrn čísel majících tu vlastnost, že sčítáním, odčítáním, násobením a dělením čísel z tohoto souhrnu dostáváme opět jenom čísla z téhož souhrnu.

Příklady. a) Souhrn všech racionálních čísel tvoří těleso.

Neboť sčítáním, odčítáním, násobením a dělením dvou racionálních čísel obdržíme opět racionální čísla. Ve vzorcích

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Toto těleso budeme značiti znakem R.[31]

V. Vodička[32]

Poslední publikaci věnovanou teorii determinantů, kterou zde připomeneme, jsou dvoudílné *Determinanty a matice v theorii i v praxi* (93 + 142 stran) od Václava Vodičky; vyšly v edici *Cesta k vědění* Jednoty československých matematiků a fyziků v roce 1950.

První díl je zaměřen teoreticky, druhý se soustřeďuje na použití základních vět o determinantech a maticích v algebře. V předmluvě autor píše:

Je tedy knížka určena především potřebám inženýrů a fysiků a teprve v druhé řadě má na zřeteli matematiky z povolání.[33]

Přestože Václav Vodička v předmluvě zmiňuje Bydžovského knihu, která mu byla *v mnohém ohledu spolehlivým rádcem*, je úvodní kapitola prvního dílu věnována permutacím a na jejich základě pak autor definuje determinant. Text je psán poměrně přehledně, definice, věty i důkazy jsou označené, jsou zde i příklady. První díl obsahuje: *Permutace; Determinant a jeho základní vlastnosti; Věta Laplaceova; Hodnost matice a determinantu; Derivace determinantu; Věta Sylvesterova; Věta Sylvesterova-Frankeova; Speciální determinanty; Základy počítání maticemi.* Poslední kapitola je rozdělena do několika částí – *Rovnost dvou matic, Sčítání matic, Násobení matic, Podobnost dvou matic, Charakteristická funkce dané matice.* Nejrozsáhlejší je kapitola věnovaná speciálním determinantům (44 stran), naproti tomu nejkratší kapitola, která je věnována hodnosti matice a determinantu, má pouze 2 strany.

---

[30] [Schl], str. 79.

[31] *Čtenáře snad nepřekvapuje, že značíme celý souhrn čísel jediným znakem. Počínáme si obdobně, jak jsme zvyklí z geometrie, kde na př. kružnici (t. j. souhrn nekonečně mnoho bodů roviny) značíme také jediným znakem k a pod.* [Schl], str. 79.

[32] Václav Vodička (1911–1979).

[33] [V], str. 3.

Druhý díl je věnován použití teorie determinantů v algebře, obsahuje tyto kapitoly: *Lineární závislost číselných soustav; Pravidlo Cramerovo; Soustava homogenních lineárních rovnic; Soustava m lineárních rovnic o n neznámých; Lineární transformace a lineární formy; Formy bilineární; Formy kvadratické; Resultant dvou binárních forem; Diskriminant binární formy; Invarianty; Algebraické rovnice; Formy Hermiteovy.* Vidíme tedy, že oba díly pokrývají obsahově druhou část Kořínkových *Základů algebry*, partie věnovaná algebraickým rovnicím zasahuje i do části třetí. Mnohem podrobněji je zde pojednáno například o Hermiteových formách; tento výklad je v Kořínkově učebnici velmi stručný; V. Kořínek jej

... připojil k tomuto paragrafu[34] *na žádost prof. E. Čecha, který si přál mít výklad o nich*[35] *v knize pro jejich důležitost v geometrii.*[36]

Podrobnější výklad neměl Kořínek v úmyslu zařadit, protože

Hermitovy formy jsou ze stanoviska, které jsme zaujali při výkladech v této knize, útvarem značně umělým.[37]

Dvojdílná knížka *Determinanty a matice v theorii i v praxi* Václava Vodičky je psána poměrně přehledně a srozumitelně, nalezneme v ní i poznámky o vývoji některých pojmů. Kniha nesporně nalezla široké uplatnění u inženýrů, kterým byla především určena. Pro úplnost ještě nechme promluvit autora o tom, jak měla být původně jeho práce koncipována:

Jako druhý svazek vyjde záhy pojednání o aplikacích determinantů a matic v algebře, třetí díl bude obsahovati použití v geometrii (zčásti i ve více rozměrech) a v lineární algebře, čtvrtá část má za předmět svých úvah vyložiti roli determinantů a matic v analyse (t. j. v počtu diferenciálním, integrálním a v diferenciálních rovnicích), pátý svazek bude věnován determinantům a maticím s nekonečně mnoha řadami a v souvislosti s tím bude vyložena Fredholmova theorie integrálních rovnic a konečně bude poslední část obsahovati ukázky aplikací determinantů a matic na praktické problémy, v prvé řadě technické a fysikální.[38]

K vydání ostatních částí však nedošlo.

L. S. Rieger [39]

V roce 1952 vyšla kniha Ladislava Svante Riegra *O grupách a svazech* (207 stran). V předmluvě autor říká:

V podstatě mi šlo o toto: seznámit čtenáře s některými základními pojmy theorie grup a theorie svazů, které obě mají v současné matematice obdobný a základní význam. Ukázat na různorodém příkladovém materiálu, že běží v obou

[34] Paragraf o kvadratických formách.

[35] O Hermiteových formách.

[36] [K30], str. 342.

[37] [K30], str. 342.

[38] Z předmluvy k prvnímu dílu, [V], str. 4.

[39] Ladislav Svante Rieger (1916–1963) působil v letech 1945 až 1958 na ČVUT, potom v Matematickém ústavu ČSAV, vedl též přednášky a semináře na MFF UK. Věnoval se zejména algebře, logice a teorii množin.

případech o velmi obecnou matematickou zákonitost, kterou jsme objevili v nejrůznějších jejích konkretních tvarech, v matematice i přímo ve skutečnosti. Upozornit a pokud lze i ukázat na aplikace v přírodních a technických vědách.[40]

Zpočátku se zdá, že se v knize nepoužívají žádné definice, že se jedná spíše o „povídání"; na druhé straně autor logicky buduje postup výkladu, který vyústí např. v pojem grupy (vychází ze skládání zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka). Po zavedení pojmu grupa následují příklady grup – symetrická grupa, grupa matic atd. Další výklad je již podstatně odbornější.

Partie věnovaná svazům začíná opět velmi zeširoka:

Vezměme naproti tomu v úvahu subordinační pořádek některého úřadu. Tu shledáváme jednak, že vztah „X je služebně podřízen Y" sice celkem vzato splňuje zásadu I (princip irreflexivity), t. zn. úřední instance (zpravidla) nenařizuje sama sobě. Dále vidíme, že je vcelku dosti dobře splněna zásada III, t. j. jestliže instance X podléhá služebně instanci Y a instance Y opět služebně podléhá instanci Z, pak již je jasno, že instance X služebně podléhá instanci Z. Naproti tomu nebývá splněna zásada dichotomie II. To jest, v povaze úřadu je, že ze dvou instancí X a Y, byť kompetentních v téže záležitosti, zdaleka nikoli vždy jedna a jen jedna je úředně podřízena druhé. Nejde tedy v případě vztahu „X úředně podléhá Y" o vztah (úplného) uspořádání. Nicméně lze říci, že je (alespoň theoreticky) uznávána na místě zásady dichotomie II slabší zásada.[41]

Poté, co autor dospívá k definici svazu, je výklad opět exaktnější. Celkově lze říci, že kniha je užitečná k úvodnímu seznámení se základy teorie grup a svazů; pro hlubší studium je však třeba zvolit jiné knihy.

A. G. Kuroš[42]

Roku 1953, tj. v roce, kdy vyšly Kořínkovy *Základy algebry*, byl vydán český překlad útlé knížečky Alexandra Gennadieviče Kuroše *Algebraické rovnice libovolných stupňů* (43 stran). Knížka vznikla podle autorových přednášek konaných na moskevské univerzitě pro účastníky matematických olympiád, tomu odpovídá matematická náročnost knihy. V předmluvě autor říká:

Počítáme zde s úrovní znalostí žáka deváté třídy střední školy a podáváme přehled výsledků a metod obecné theorie algebraických rovnic. Neuvádíme při tom vůbec důkazy, poněvadž by jinak bylo nutno přepsat skoro polovinu universitní učebnice vyšší algebry.

Přestože obsah knížky není zanedbatelný (komplexní čísla, kvadratické a kubické rovnice, přibližné řešení rovnic, existence kořenů rovnic, tělesa, v doslovu je zaveden pojem grupy a okruhu, zmíněny jsou i nekomutativní a neasociativní operace), jde spíše o knížku, která má vzbudit zájem o matematiku. Do češtiny ji přeložil Karel Rychlík.

---

[40] [R], str. 3–4.

[41] [R], str. 116.

[42] Alexandr Gennadievič Kuroš (1908–1971) působil od roku 1930 na moskevské univerzitě. Věnoval se moderní algebře (grupy, okruhy, svazy), patří k hlavním představitelům *moskevské algebraické školy.* Jeho výsledky měly světový ohlas, jeho učebnice byly překládány do světových jazyků.

Š. Schwarz

V roce 1958 vyšla kniha Štefana Schwarze *Základy náuky o riešení rovníc* (345 stran). Byla určena pro široký okruh čtenářů – posluchače matematiky nižších semestrů, inženýry, přírodovědce a učitele na jedenáctiletých školách; v letech 1967 a 1968 vyšla její další vydání. Obsahově je podobná výše zmíněné knížce *O rovnicích*, navíc je zařazeno numerické řešení rovnic a problematika řešení soustav rovnic o více neznámých; velmi podstatně se od ní však odlišuje „matematickým stylem“, jsou zde uváděny věty i s důkazy. Stylem se podobá Kořínkovým „Základům“. V předmluvě autor říká:

Ako ukazuje i názov knihy, nebolo mojím úmyslom písať učebnicu algebry, tým menej abstraktnej algebry. Práve naopak, chcel som napísať knižku, ktorú by sme – pri istej dávke odvahy – mohli nazvať „konkrétnou algebrou“. Výstižnejší je, pravda, názov „klasická algebra“. To som si mohol dovoliť tým skôr, že máme dnes k dispozícii výbornú knihu akademika VL. KOŘÍNKA *Základy algebry, ktorá je spoľahlivým úvodom do metód abstraktnej algebry.*

Poznamenejme, že Š. Schwarz je rovněž autorem knihy *Algebraické čísla* (292 stran) vydané roku 1950 v Přírodovědeckém nakladatelství.

A. G. Kuroš

První knihou o abstraktní algebře v českém jazyce jsou *Kapitoly z obecné algebry* (310 stran) A. G. Kuroše vydané v roce 1968. Vědeckým redaktorem této knihy byl Vladimír Kořínek, přeložili ji Jaroslav Blažek a Ladislav Koubek. Základem knihy byly tři velké speciální přednášky o algebře, které autor konal na moskevské univerzitě. Kniha je rozdělena na šest kapitol: *Relace; Grupy a okruhy; Univerzální algebry. Grupy s multioperátory; Svazy; Grupy a okruhy s operátory. Moduly. Lineární algebry; Uspořádané a topologické grupy a okruhy. Normované okruhy.*

Název knihy je celkem výstižný, neboť je věnována jen některým tématům, které byly v algebře šedesátých let aktuální (grupy s multioperátory, grupy a okruhy s operátory atd.). Stejně jako v knize *Kurs vysšej algebry* jsou nové pojmy zaváděny v souvislém textu, někdy nejsou dostatečně zvýrazněny ani věty.

L. Procházka a kol.[43]

První česká učebnice, kterou je možno nazvat učebnicí moderní algebry, vyšla až v roce 1990. Jde o knihu *Algebra* (560 stran), kterou napsal Ladislav Procházka a kolektiv (L. Bican, T. Kepka, P. Němec). Tato kniha se svým obsahem, strukturou i přístupem naprosto odlišuje od Kořínkovy učebnice *Základy algebry*.

---

[43] Ladislav Procházka (nar. 1930) působil na MFF UK, kde se věnoval moderní algebře, zejména teorii Abelových grup.

Uveďme pro přiblížení jen názvy jednotlivých kapitol této monografie: *Úvod; Grupoidy, pologrupy a univerzální algebry; Grupy; Okruhy; Okruhy polynomů; Moduly, vektorové prostory a lineární algebry; Matice a determinanty; Komutativní tělesa; Svazy a Booleovy algebry.*

Procházkova kniha je tedy mnohem obsažnější než učebnice Vladimíra Kořínka, na druhé straně je studium této knihy podstatně náročnější. S tím však autoři počítali:

Její studium nepředpokládá žádné speciální znalosti, dokonce v úvodní kapitole jsou shrnuty i potřebné informace z teorie množin. Přesto kniha není psána pro samouky, jak tomu bylo u učebnice akademika V. Kořínka „Základy algebry", která vyšla v době, kdy na vysokých školách bylo mnoho dálkově studujících. Dnešní situace je poněkud jiná, a proto se u čtenáře předpokládá, že studium knihy bude konfrontovat s přednáškami a cvičeními věnovanými algebře na některém typu vysoké školy.[44]

Pro porovnání uveďme krátké pasáže o dělení z obou knih.[45] Nejprve Kořínkovy *Základy algebry*:

4,10. Dělení. *Stejně jako jsme v 2,25 zavedli na základě věty 2,12 v oboru integrity nový početní úkon – odčítání, lze zavést podle věty 4,7 v tělese T nový úkon početní, dělení. Tímto početním úkonem je přiřaděn ke každé dvojici prvků $\alpha \neq 0$, β z T (ve smyslu rovnosti) jednoznačně prvek ϱ rovností (5). Dělit prvek β prvkem $\alpha \neq 0$ značí tedy násobit β převráceným prvkem $\overline{\alpha}$. Dělení stejně jako odčítání závisí na pořádku prvků α, β. Prvek β, který se vyskytuje v (5) sám, nazývá se dělenec, prvek $\alpha \neq 0$, k němuž se v (5) vyskytuje prvek převrácený, nazývá se dělitel. Výsledný prvek ϱ se nazývá podíl.*[46]

A nyní obdobná problematika z monografie *Algebra* od autorského kolektivu Ladislava Procházky:

5.1 *Definice. Nechť R je okruh.*

(i) O prvcích $a, b \in R$ říkáme, že b dělí a (v okruhu R) nebo že a je násobkem b, existuje-li $c \in R$ takové, že $a = bc$. Tuto skutečnost zapisujeme symbolem $b \mid a$ (přesněji $b \mid_R a$), čímž získáváme na množině R binární relaci dělitelnosti $\mid$ (případně $\mid_R$). Relace dělitelnosti je zřejmě reflexivní a tranzitivní, čili je kvaziuspořádáním množiny R (viz I.2.1). Symbolem $b \nmid a$ vyznačujeme, že b nedělí a (v R).[47]

Je zřejmé, že výklad obdobné problematiky je v obou knihách naprosto odlišný. Nesmíme ovšem zapomenout na to, že V. Kořínek při psaní své knihy počítal s tím, že z ní budou studovat i samouci, a na téměř čtyři desetiletí, která od sebe vydání obou knih dělí.

---

[44] Z přebalu *Algebry* Ladislava Procházky a kol.

[45] Skutečnost, že v jedné se pracuje nad okruhem a v druhé nad tělesem, není pro nás nyní podstatná. Zdůrazněme však, že V. Kořínek definuje *operaci* a L. Procházka *relaci*.

[46] [K30], str. 51–52.

[47] [P], str. 212.

Cizojazyčné učebnice

Vladimír Kořínek sepisoval svoji učebnici *Základy algebry* za druhé světové války, kdy byly české vysoké školy uzavřeny. Tehdy publikoval *Návod ke studiu algebry pro začátečníky* [K49], který měl usnadnit samostatné studium této disciplíny; zveřejnil zde osnovu takovéhoto studia a doporučil vhodnou literaturu. Tato osnova se velmi podobá obsahu jeho pozdější knihy *Základy algebry*. Je pravděpodobné, že při sepisování své učebnice vycházel V. Kořínek právě z učebnic, které ve svém článku [K49] pro studium doporučoval. Jednalo se zejména o páté vydání knihy L. Bieberbacha a G. Bauera *Vorlesungen über Algebra* z roku 1933 a o dvoudílnou monografii O. Perrona *Algebra* z r. 1927, resp. 1932–1933. V soupisu literatury tehdy upozornil i na učebnice H. Webera, R. Frickeho, A. Scholze, O. Schreiera a E. Spernera, zmínil se i o knihách O. Haupta, H. Hasseho a B. L. van der Waerdena s tím, že se pro samostatné studium nehodí.[48]

V dalších dvou odstavcích se podrobněji zmíníme o monografii *Moderne algebra* od B. L. van der Waerdena a o učebnici *Kurs vysšej algebry* od A. G. Kuroše.

B. L. van der Waerden[49]

Nejdůležitější učebnicí algebry první poloviny 20. století je dvoudílná německy psaná monografie *Moderne algebra* (243 + 216 stran) od B. L. van der Waerdena z let 1930 a 1931.

Přibližme nyní ve stručnosti obsah prvního vydání knihy rozdělené do 17 kapitol;[50] přehledné schéma závislosti kapitol umožňuje rychlou orientaci při studiu. Waerdenova kniha je věnována těmto tématům: *Čísla a množiny; Grupy; Okruhy a tělesa; Celé racionální funkce; Teorie těles; Pokračování teorie grup; Galoisova teorie; Uspořádané a dobře uspořádané množiny; Nekonečná rozšíření těles; Reálná tělesa; Teorie eliminace; Teorie ideálů komutativních okruhů; Teorie ideálů v polynomiálních okruzích; Celé algebraické prvky; Lineární algebra; Teorie hyperkomplexních čísel; Teorie reprezentací grup a hyperkomplexních systémů.*

Nebudeme se podrobněji zabývat obsahem Waerdenovy monografie; již při letmém pohledu na stručný přehled jejího obsahu je patrné, že Kořínkovy *Základy algebry* pokrývají pouze malou část, přestože co do počtu stran, jsou obě knihy srovnatelné. I když vezmeme v úvahu, že Kořínkova kniha je určena k úvodnímu studiu, rozdíl je obrovský. Ještě více je patrný rozdíl ve způsobu

---

[48] O Kořínkově *Návodu ke studiu algebry pro začátečníky* [K49] bude podrobněji pojednáno v kapitole *Ostatní články Vladimíra Kořínka.*

[49] Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) se věnoval hlavně algebře, algebraické geometrii, aplikaci teorie grup v kvantové fyzice, statistice a historii matematiky. Je autorem řady prací a monografií. Jeho monografie *Moderne Algebra* sehrála klíčovou roli v rozvoji algebry.

[50] Pozdější vydání byla postupně upravována a rozšiřována až na dvacet kapitol.

výkladu, neboť B. L. van der Waerden vykládá strukturovaně moderní algebru, důraz klade na rozvoj teorie jednotlivých algebraických struktur. Oproti tomu se v Kořínkových *Základech algebry* některé algebraické struktury objevují pouze jako součást výkladu, nikoli jako jeho základ.

Hovoříme-li o algebraických strukturách, musíme připomenout pojem grupy. V Kořínkově knize není vůbec zaveden. Naskýtá se přirozená otázka, proč tomu tak je, když se jedná o jeden ze základních stavebních kamenů moderní algebry a navíc V. Kořínek v teorii grup pracoval (viz práce [K11], [K12] a [K14]). Na tuto otázku odpověděl v předmluvě k prvnímu vydání své učebnice:

... ze základních pojmů algebry není v knize uveden pojem grupy. Myslím totiž, že není vhodné zavádět v úvodní knize nějaký pojem, byť i byl sebe důležitější, k jehož použití skýtá probíraná látka jen velmi málo příležitosti a příkladů.[51]

Waerdenova monografie je mnohem hutnější než Kořínkova učebnice. V té je výklad mnohem podrobnější a postup pomalejší, což je přínosem pro úvodní studium vysokoškolské algebry. Je velmi pravděpodobné, že usnadnění studia bylo jedním z cílů Vladimíra Kořínka, který se patrně navíc snažil, aby jeho kniha byla srozumitelná i pro samouky.

Srovnáváme-li Kořínkovu učebnici s monografií B. L. van der Waerdena, srovnáváme nesrovnatelné. Zcela jiný pohled na Kořínkovy *Základy algebry* získáme srovnáním s cizojazyčnými učebnicemi určenými k úvodnímu studiu algebry.[52]

A. G. Kuroš

Ze zahraniční literatury připomeňme ještě ruskou učebnici Alexandra Gennadieviče Kuroše *Kurs vysšej algebry*. Tato kniha má stejný cíl jako Kořínkovy *Základy algebry*, totiž vyložit látku úvodního kursu vysokoškolské algebry. Navíc byla u nás hojně využívána. První vydání Kurošovy knihy vyšlo v roce 1946, V. Kořínek na ni napsal recenzi pro Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. Kniha má podobný obsah jako jeho *Základy algebry*, pojetí látky je však odlišné. Uveďme úryvek z Kořínkovy recenze:

Hned v prvním paragrafu definuje autor nejdříve úplně abstraktně algebraickou operaci na dané množině M. Je to předpis, kterým se přiřaďuje každé uspořádané dvojici prvků z M opět prvek z M. Definuje pak okruh jakožto množinu, kde jsou definovány dvě takové algebraické operace: sčítání a násobení, a vykládá jejich základní vlastnosti. V §2 definuje těleso a vykládá pojem nadtělesa a podtělesa. Sestrojuje těleso mající jen dva prvky a obecně těleso mající jen p prvků (p prvočíslo). Pak přistupuje ihned i výkladu pojmu isomorfismu tělesa a okruhu.[53]

---

[51] [K30], str. 7. Nelze ovšem souhlasit s tím, že by bylo málo příležitostí k použití grup a vhodným demonstrativním příkladům.

[52] Např. A. Lentin a J. Rivaud: *D'algèbre moderne*, 3. vyd., Librairie Vuibert, Paris, 1958.

[53] [K51], str. D42.

Vidíme tedy, že v Kurošově textu hrají algebraické struktury důležitou úlohu hned od počátku (na rozdíl od V. Kořínka, v jehož knize se objevují jako nepříliš podstatná součást výkladu). Ve druhém vydání Kurošovy knihy se již objevuje i pojem grupy; ukázány jsou základní vlastnosti grup a jako důležitý příklad nekomutativní grupy jsou uvedeny permutace. Přestože je grupám věnován pouze jeden paragraf o sedmi stranách, je začínající student s touto algebraickou strukturou obeznámen.

Kurošova a Kořínkova kniha se liší formou výkladu. A. G. Kuroš nezdůrazňuje definice, zavedení nových pojmů je skryto v textu. Např. definici hodnosti matice nalezneme přímo v textu (strana 115 druhého vydání):

Maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A se nazývá hodnost této matice.

Celkově můžeme říci, že výklad v Kurošově knize není tak členěn, jako v Kořínkově učebnici. Je sice rozdělen na hlavy a paragrafy, ale působí spíše dojmem souvislého textu, v němž jsou skryty i věty a důkazy.

Poznamenejme ještě, že Kurošova kniha *Kurs vysšej algebry* [Ku1] vyšla v řadě vydání a v několika jazycích.

Závěr

Cílem této kapitoly bylo seznámit čtenáře s nejznámějším dílem Vladimíra Kořínka, s jeho knihou *Základy algebry*. Přestože jí lze vytknout určitou nemodernost (abstrakce typická pro vývoj algebry ve dvacátých, třicátých a čtyřicátých letech 20. století se v ní neodrazila), zůstane jednou z nejdůležitějších učebnic své doby. Zaplnila totiž na poměrně dlouhou dobu velkou mezeru v naší matematické literatuře. Kořínkovy *Základy algebry* jsou i dnes často studovány, většina exemplářů v knihovnách je stále vypůjčena, i když se podle této učebnice na vysokých školách již dávno nepřednáší.

LITERATURA

[B] Borůvka O., *Úvod do theorie grup*, KČSN, Praha, 1944, 80 stran, 2. rozšířené vyd., Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952, 154 stran, 3. přepracované vyd. vyšlo pod názvem *Základy teorie grupoidů a grup*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1962, 216 stran.

[By] Bydžovský B., *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1930, 210 stran, 2. vyd. vyšlo pod názvem *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1947, 240 stran.

[C] Crkalová Z., *Život a dílo Karla Petra*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 1992.

[Ku1] Kuroš A. G., *Kurs vysšej algebry*, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1946, 2. vyd. 1950, 3. vyd. GITTL, Moskva, Leningrad, 1952, 335 stran, 4. přeprac. vyd. Gostechizdat, Moskva, 1955, 379 stran, 5. vyd. GITTL, Moskva, Leningrad, 1956, 379 stran, 6. přeprac. vyd. Fizmatgiz, Moskva, 1959, 431 stran: 8. vyd. Nauka, Moskva 1965, 431 stran, 9. vyd. Nauka, Moskva 1968, 431 stran, 12. vyd. Nauka, Moskva 1975, 431 stran; kniha vyšla i v anglickém překladu pod názvem *Higher algebra* (Mir Publ., Moskva, 1972, 1975, 1980, 1984, 1988), v italském překladu pod názvem *Corso di algebra superiore* (Riuniti-Mir, Roma, 1977), ve španělském překladu pod názvem *Curso de algebra superior* (4. vyd., Mir, 1987).

[Ku2] Kuroš A. G., *Algebraické rovnice libovolných stupňů*, SNTL, Praha, 1953, 42 stran.

[Ku3] Kuroš A. G., *Kapitoly z obecné algebry*, Academia, Praha, 1968, 310 stran, 2. vyd. 1977; v originále *Lekcii po obščej algebre*, Fizmatgiz, Moskva, 1962, 2. vyd. Nauka, Moskva, 1973, 399 stran; kniha vyšla i v anglickém překladu *Lectures in general algebra* (Pergamon Press 1965, Chelsea Publ. Comp. 1965) a v německém překladu *Vorlesungen über allgemeine Algebra* (Teubner 1964).

[N] Němcová M., *František Josef Studnička 1836–1903*, edice Dějiny matematiky, sv. 10, Prometheus, Praha, 1998.

[P] Procházka L. a kol., *Algebra*, Academia, Praha, 1990, 560 stran.

[Po] Pokorný M., *Determinanty a vyšší rovnice*, Knihtiskárna Dr. Ed. Grégra, Praha, 1865, 133 stran.

[R] Rieger L., *O grupách a svazech*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952, 207 stran.

[Ř] Řehořovský V., *Základové vyšší algebry, 1. díl, Theorie souměrných funkcí kořenů*, vl. nákl., Praha, 1883, 186 stran.

[Sch1] Schwarz Š., *O rovnicích*, JČMF, Praha, 1940, 94 stran, 2. rozšířené vyd., JČMF, Praha, 1947, 159 stran.

[Sch2] Schwarz Š., *Základy náuky o riešení rovníc*, ČSAV, Praha, 1958, 345 stran; 1. vyd. SAV, Bratislava, 1967, 439 stran, 2. vyd. 1968, 454 stran.

[Std1] Studnička F. J., *O determinantech*, vl. nákl., Praha, 1870, 64 stran.

[Std2] Studnička F. J., *Úvod do nauky o determinantech*, JČMF, Praha, 1899, 231 stran.

[V] Vodička V., *Determinanty a matice v theorii i v praxi I, II*, JČMF, Praha, 1950, 93 + 142 stran.

[W] van der Waerden B. L., *Moderne Algebra I, II*, Berlín, 1930–1931, 243 + 216 stran; existují četná další vydání, anglický a ruský překlad.

[Z] Zahradník K., *O determinantech*, J. Barvič, Brno, 1905, 51 stran.