VĚDECKÉ PRÁCE VLADIMÍRA KOŘÍNKA

Vladimír Kořínek je autorem 25 vědeckých prací. První publikoval roku 1924 v pětadvaceti letech, poslední v roce 1960 v jednašedesáti letech. Jeho vědecké práce patří, až na jednu výjimku, do různých oblastí algebry a teorie čísel; podle tématu je lze rozdělit do několika skupin, které na sebe navazují i časově. Je to dobře vidět z jeho seznamu publikací.

Na počátku své vědecké dráhy pracoval Vladimír Kořínek v teorii čísel, a to v aritmetické teorii kvadratických forem. Na tuto dráhu ho nasměroval profesor Karel Petr, který mu za jeho vysokoškolských studií jako téma seminární práce dal dokázat vzorce pro výpočet vlastních reprezentací celého záporného čísla pomocí ternárních kvadratických forem, které publikoval roku 1918 Marie-Georges Humbert (1859–1921) v časopise *Comptes Rendus*. Ve své disertační práci *O representaci celých čísel ternárními kvadratickými formami indefinitními* pak Vladimír Kořínek odvodil analogické vzorce pro reprezentace čísel přirozených. Práce z teorie kvadratických forem pak publikoval až do roku 1929; jedná se o články [K1] až [K8].

Jak již bylo řečeno v kapitole věnované životním osudům Vladimíra Kořínka, školní rok 1929/30 strávil na univerzitě v Hamburku, a to především u profesora Emila Artina (1898–1962). Tento pobyt se odrazil na dalším zaměření Kořínkovy práce. Po návratu z Hamburku začal pracovat v teorii algeber. Sem patří jeho publikace [K9] až [K12].

Po nástupu na univerzitu a jmenování mimořádným profesorem se V. Kořínek věnoval teorii grup. Do této oblasti spadají publikace [K13] až [K16] a [K18]. Nejvýznamnější prací této skupiny je článek [K13] o rozkladu grupy v direktní součiny podgrup, který měl ve světě značný ohlas.

Další skupinu tvoří práce [K19] až [K23], které patří do teorie svazů. Této disciplíně se začal Vladimír Kořínek věnovat během druhé světové války, poslední práci o svazech publikoval v roce 1951. Výsledky článků [K19] a [K20] (resp. [K21]) byly hojně citovány.

Poslední dvě vědecké práce [K24] a [K25] publikoval V. Kořínek po delší přestávce, jejíž největší příčinou byla jeho velká pracovní a organizační poválečná aktivita a poté jeho působení ve funkci děkana matematicko-fyzikální fakulty UK. Jde o publikace z let 1959 a 1960, které jsou věnovány Frattiniovým podgrupám.

Publikace [K17] se netýká algebry. S jejím tématem, Rahtsovým vzorcem, se Vladimír Kořínek setkal během svého působení ve Státním úřadě statistickém, kde jeho hlavní aktivitou byla práce na výpočtu československých tabulek úmrtnosti. Protože se jedná o článek, který se od ostatních původních vědeckých prací V. Kořínka svým tématem výrazně odlišuje a je naopak blízký jeho publikacím [K26] až [K29] o tabulkách úmrtnosti sepsaným v době jeho zaměstnání ve Státním úřadě statistickém (1933 až 1935), je o něm pojednáno v následující kapitole věnované právě tomuto tématu.

Rozdělení Kořínkových algebraických prací do jednotlivých tématických skupin je tedy následující:

1. Aritmetická teorie kvadratických forem: [K1] až [K8],
2. Teorie algeber: [K9] až [K12],
3. Teorie grup: [K13] až [K16] a [K18],
4. Teorie svazů: [K19] až [K23],
5. Frattiniovy podgrupy: [K24] a [K25].

Věnujme se nyní podrobněji jednotlivým skupinám prací Vladimíra Kořínka.

1. Aritmetická teorie kvadratických forem

Aritmetická teorie kvadratických forem byla v 19. století intenzivně studována. V polovině 19. století byla již v podstatě uzavřena problematika forem binárních a pozornost začala být přesouvána na kvadratické formy ternární a kvaternární; tato zkoumání však byla komplikovaná a technicky značně náročná; koncem století byla většina výsledků z této oblasti sepsána ve čtvrtém svazku Bachmannovy monografie *Zahlentheorie. Die Arithmetik der quadratischen Formen*, později v knihách B. W. Jonese *The Arithmetic Theory of Quadratic Forms* a Martina Eichlera[1] *Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen.*

První odbornou prací Vladimíra Kořínka a zároveň jeho první publikací byl článek *O representaci čísel ternárními kvadratickými formami indefinitními* [K1], který vycházel z jeho disertace.

Na úvod připomeňme některé pojmy z teorie kvadratických forem n proměnných, které vedou k pojmu reprezentace čísla.

Mějme dvě libovolné kvadratické formy n proměnných s celočíselnými koeficienty

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{a} \qquad g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Tyto dvě formy se nazývají ekvivalentní, jestliže existuje lineární substituce s celočíselnými koeficienty a determinantem rovným číslu 1, která převádí formu f na formu g. Množina všech forem daného diskriminantu se rozpadá na konečný počet tříd navzájem ekvivalentních forem. Třídy forem, které mají stejnou hodnotu jistých aritmetických invariantů, tzv. *charakterů*, spojujeme do tzv. *rodů.* Základním úkolem aritmetické teorie kvadratických forem je najít úplný systém neekvivalentních forem, jejich počet, počet rodů a příslušné invarianty.

Další důležitá otázka této teorie je spojena s pojmem reprezentace. Říkáme, že celé číslo c se dá reprezentovat formou $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pokud existují celá čísla ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n, pro která je

$$c = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

[1] M. Kneser: *Martin Eichler (1912–1992)*, Acta Arithmetica 65(1993), 293–300.
J. Kramer: *Leben und Werk von Martin Eichler*, Elemente der Mathematik 49(1994), 45–60.

Je zřejmé, že ekvivalentní formy reprezentují stejná čísla. Cílem dalšího snažení je zjistit, jaká čísla je možno danou formou reprezentovat, kterými formami je možno reprezentovat dané číslo, případně najít všechny n-tice, které takovou reprezentaci umožňují.

Důležitým pojmem aritmetické teorie kvadratických forem je pojem *automorfie* formy. Tak nazveme každou lineární substituci s celočíselnými koeficienty a determinantem rovným číslu 1, která zobrazuje danou formu na sebe. Množina Γ všech automorfií dané formy zřejmě tvoří podgrupu grupy G všech lineárních substitucí s celočíselnými koeficienty a determinantem rovným číslu 1. Podgrupa Γ je tzv. *reprodukční grupa dané formy.*

Vezměme nyní ternární indefinitní formu $f(x_1, x_2, x_3)$. Množina reálných bodů (x_1, x_2, x_3) vyhovujících rovnici $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ představuje kuželosečku v projektivní rovině. Dva body této roviny nazveme ekvivalentní, pokud v grupě Γ všech automorfií dané formy existuje automorfie, která zobrazuje jeden bod na druhý. Máme-li dvě reprezentace čísla c, a sice

$$c = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \qquad \text{a} \qquad c = f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \ ,$$

řekneme o nich, že jsou ekvivalentní, jsou-li body (ξ_1, ξ_2, ξ_3) a (η_1, η_2, η_3) projektivní roviny ekvivalentní.

Vladimír Kořínek ve své práci *O representaci čísel ternárními kvadratickými formami indefinitními* [K1] navázal na práce G. Humberta[2] z roku 1918, který odvodil vzorce pro počet reprezentací celých záporných čísel rodem ternárních indefinitních kvadratických forem.

V. Kořínek se zabýval reprezentacemi čísel přirozených. Odvození vzorců pro počet reprezentací přirozených čísel je ztíženo odlišným rozložením ekvivalentních bodů „uvnitř" kuželosečky (tedy bodů, pro které $f(x_1, x_2, x_3) < 0$) a „vně" kuželosečky ($f(x_1, x_2, x_3) > 0$). „Uvnitř" kuželosečky lze definovat tzv. *základní obory*, což jsou v podstatě mnohoúhelníky, které neobsahují žádné navzájem ekvivalentní body. Tyto základní obory použil ve svém odvození počtu reprezentací záporných čísel G. Humbert. „Vně" kuželosečky však tento postup použít nelze, protože ekvivalentní body jsou zde hustě rozložené.

V. Kořínek dokázal, že všechny reprezentace přirozených čísel větších než 2 lze rozdělit na p skupin neekvivalentních reprezentací a pro jejich počet p nalezl explicitní vzorce. Z každé skupiny reprezentací lze vybrat konečný počet tzv. *redukovaných reprezentací* tak, že pro danou reprezentaci $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

[2] G. Lemoine: *Le mathématicien Georges Humbert*, Revue scientifique 1921, 88–89.

H. Lebesgue: *Les professeurs de mathématiques du Collège de France. Humbert et Jordan; Roberval et Ramus*, Revue scientifique 1922, 249–262.

H. Lebesgue: *L'œuvre mathématique de Georges Humbert, quelques mots sur Camille Jordan*, Bulletin des Sciences Mathématiques 46(1922), 220–233.

G. Humbert: *Sur les représentations d'un entier par les formes quadratiques ternaires, indéfinies*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 166(1918), 925–930, 167(1918), 49–55.

G. Humbert: *Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 167(1918), 181–186.

G. Humbert: *Œuvres. Publiées par les soins de P. Humbert et de G. Julia*, Gauthier-Villars, Paris, 1929, 10+556 stran.

čísla c požadujeme, aby polára bodu (ξ_1, ξ_2, ξ_3) procházela pevně zvoleným základním oborem ležícím uvnitř kuželosečky.

Druhou Kořínkovou prací z oblasti teorie kvadratických forem je delší článek *Les méthodes de Dirichlet et les formes quadratiques à n variables du type* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2$ [K2]. Zabýval se v ní kvadratickými formami, které lze reálnou substitucí převést na výše zmíněný tvar. Cílem práce je výpočet tzv. *míry forem* daného rodu.

Jedním z cílů aritmetické teorie kvadratických forem bylo určení počtu tříd forem dané vlastnosti. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)[3] nalezl analytickou metodu, pomocí níž se mu podařilo určit explicitní vzorce pro počet tříd binárních kvadratických forem daného diskriminantu. Pro formy n proměnných, kde $n \geq 3$, však není možno počet tříd forem daného diskriminantu Dirichletovou metodou přímo určit.

Jak již bylo řečeno, pro každou kvadratickou formu f existují tzv. základní obory vzhledem ke grupě automorfií Γ formy f. Každému základnímu oboru V formy f přiřadil V. Kořínek jeho *objem* definovaný integrálem

$$\int_{(V)} \frac{\sqrt{|D|}\,d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{|f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1)|^{\frac{n}{2}}},$$

kde D je diskriminant formy f.

Takto definovaný objem je invariantem třídy forem; můžeme tedy hovořit o objemu třídy. Objemem rodu forem pak rozumíme součet objemů jednotlivých tříd daného rodu.

I v této práci V. Kořínek navázal na G. Humberta, a sice na jeho článek uveřejněný roku 1918.[4] G. Humbert stanovil objem třídy forem pro ternární formy, V. Kořínek pak ve své práci rozšířil Humbertovy výsledky na kvadratické formy n proměnných výše zmíněného typu. Kvůli příliš komplikovaným a rozsáhlým zápisům prováděl svá odvození nejprve pro $n = 4$ a výsledky pak rozšířil pro obecné n.

Kořínkova práce *Počet tříd ternárních kvadratických forem positivních daného diskriminantu* [K3] je věnována určení počtu tříd pozitivně definitních[5] ternárních kvadratických forem daného diskriminantu; publikace [K4] je francouzskou verzí práce [K3]. V. Kořínek zde navazuje mimo jiné na Dirichletovy výsledky uveřejněné v letech 1839 až 1840.[6] P. G. L. Dirichlet zde publikoval

[3] K.-R. Biermann: *P. G. Lejeune Dirichlet 1859–1959*, Monatsbericht der Königlichen-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1(1959), 320–323.

[4] G. Humbert: *Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies* – viz výše.

[5] V tehdejší terminologii „positivních".

[6] P. G. L. Dirichlet: *Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 19(1839), 324–369, 21(1840), 1–12, 134–155.
L. Kronecker, L. Fuchs, G. L. Dirichlet (ed.): *G. Lejeune Dirichlet's Werke I, II*, G. Reimer, Berlin, 1889, 1897; Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1969, 14+644, 4+422 stran.

metodu týkající se počtu tříd pozitivně definitních kvadratických binárních forem; jeho metoda však neurčuje přímo počet tříd, ale tzv. *míru* tříd. V tomto čísle není každá třída počítána za jednu, ale za $\frac{1}{\tau}$, kde τ je počet automorfií dané třídy. Pro binární formy však Dirichletova metoda skutečně stanovuje počet tříd, protože téměř pro všechny třídy je $\tau = 2$. Pro ternární formy je problém složitější, protože τ zde nabývá hodnot 1, 2, 4, 6, 8, 12 a 24.

Jako první se určením počtu tříd pozitivních ternárních kvadratických forem zabýval Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852).[7] Ve své práci uvedl vzorec pro počet tříd forem daného diskriminantu D, kde D je liché číslo, které není dělitelné čtvercem, a pro počet tříd forem diskriminantu $2D$. Později uveřejnil ještě formuli pro počet tříd primitivních forem hlavního rodu, jejichž diskriminant je liché prvočíslo.[8] G. Eisenstein publikoval své vzorce bez důkazů; uvedl pouze hlavní myšlenku metody, kterou k nim dospěl. Vzorec pro počet tříd forem hlavního rodu, jejichž diskriminant je liché prvočíslo, dokázal německý matematik Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837–1920)[9] ve své knize *Zahlentheorie*.[10]

Cílem práce Vladimíra Kořínka bylo odvození vzorce pro počet tříd pozitivně definitních ternárních kvadratických forem daného diskriminantu. Uvažoval formy tvaru

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy \ .$$

Použil stejnou metodu, jakou postupoval ve výše zmíněných případech G. Eisenstein. Její základní myšlenka je tato:

Buď $M(D)$ míra tříd pozitivně definitních ternárních kvadratických forem daného diskriminantu D. Dále označme počet těchto tříd symbolem $H(D)$ a počet tříd, které mají τ automorfií, symbolem $H_\tau(D)$. Z definice míry vyplývá rovnice

---

[7] K.-R. Biermann: *Gotthold Eisenstein: Die wichtigsten Daten seines Lebens und Wirkens*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 214(1964), 19–30.
H. Warnecke: *Gotthold Eisenstein (1823–1852) – ein mathematisches und hochschulpädagogisches Talent aus Berlin*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Reihe Mathematik, Naturwissenschaften, 37(2)(1988), 187–193.
G. Eisenstein: *Mathematische Werke I, II*, Chelsea Publ. Comp., New York, 1975, 2. vyd. 1989.
G. Eisenstein: *Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuer Forsuchungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht, auf ihre tabellarische Berechnung*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 41(1851), 141–190, *Anhang zu der „Tabelle ...“ im vorigen Hefte*, 227–242.

[8] G. Eisenstein: *Über die Vergleichung von solchen ternären quadratischen Formen, welche verschiedene Determinanten haben*, Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlichen-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1852, 350–389.

[9] K. Hensel: *Paul Bachmann und sein Lebenswerk*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36(1927), 31–73.
W. Lorey: *Aus der mathematischen Vergangenheit Münsters. IV: Paul Bachmann und Rudolf Sturm. 1875–1892*, Semester-Ber. math. Sem. Münster 8(1936), 70–76.

[10] Viz IV. Teil, 1923, str. 378.

$$H(D) = M(D) + \frac{1}{2}H_2(D) + \frac{3}{4}H_4(D) + \frac{5}{6}H_6(D) +$$
$$+ \frac{7}{8}H_8(D) + \frac{11}{12}H_{12}(D) + \frac{23}{24}H_{24}(D) .$$

Vzhledem k tomu, že vzorce pro míru tříd byly známy[11], bylo pro určení počtu tříd třeba stanovit čísla $H_2(D)$, $H_4(D)$, ... , $H_{24}(D)$. Tyto hodnoty V. Kořínek určil a na jejich základě pak stanovil vzorec pro počet tříd.

Jako základní větu pro stanovení počtu ternárních pozitivně definitních forem uvádí Vladimír Kořínek větu o ekvivalenci forem s formami dvou typů, kterou vyslovil G. Eisenstein[12] a dokázal P. Bachmann[13].

Základní věta. *Každá ternární kvadratická forma positivní, která má více než jednu automorfii, jest ekvivalentní aspoň jedné z forem tvaru*

$$f = ax^2 + \phi(y,z), \qquad g = 2ax^2 + 2axy + \phi(y,z) ,$$

kdež ϕ jest binární positivní forma

$$\phi = by^2 + 2dyz + cz^2 = (b,d,c).^{14}$$

Výsledky Kořínkovy práce lze shrnout takto (viz [K3], str. 34–35.):

Počet tříd pozitivně definitních ternárních kvadratických forem, primitivních i neprimitivních, vlastních i nevlastních, daného diskriminantu D, kde D je číslo liché nebo dvojnásobek lichého čísla, je dán vzorcem

$$H(D) = \frac{1}{24}\sum_{a^2} (2na - a^2) + \frac{1}{24}\sum_{a^2} \left[\lambda + 4\left(\frac{Da}{3}\right)\right] +$$
$$\frac{1}{4}\sum_{\delta} \left[h(2^\beta\delta) + h(2^{\beta+1}\delta)\right] ,$$

kde se v prvních dvou součtech sčítá přes všechny kladné rozklady $D = a^2 n$, ve třetím součtu přes všechny liché dělitele δ čísla D (včetně jednotky). Jako $h(\delta)$ je označen počet tříd pozitivně definitních binárních kvadratických forem, primitivních i neprimitivních, vlastních i nevlastních, diskriminantu $-\delta$. Přitom jsou α a β mocniny, v nichž se vyskytují čísla 3 a 2 v čísle D a $\left(\frac{Da}{3}\right)$ značí Legendre-Jacobiho symbol, hodnoty λ jsou určeny následujícími výrazy:

pro $\alpha = 0$ je $\qquad \lambda = 7,$

pro $\alpha > 0$ je

$$\lambda = \frac{12[\frac{\alpha+1}{2}] + 3[\frac{\alpha}{2}] - 5}{[\frac{\alpha}{2}] + 1} .$$

[11] G. Humbert: *Sur la mesure des classes de formes quadratiques, ternaires et positives, de déterminant donné*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 168(1919), 917–923, 969–975.

[12] G. Eisenstein: *Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen* ... – viz výše.

[13] IV. Teil, 1923, str. 378.

[14] [K3], str. 2.

V následující dvojici prací *Počet tříd ternárních kvadratických forem positivních daného řádu* [K5] a [K6], kde [K6] je francouzskou verzí [K5], V. Kořínek navázal na svou předchozí práci [K3]. Ukázal, že metody použité v článku [K3] pro výpočet počtu tříd pozitivně definitních ternárních kvadratických forem daného diskriminantu lze použít i pro výpočet počtu tříd daného řádu $[\Omega, \Delta]$ a odvodil vzorce pro Ω, Δ liché. Výsledky Kořínkových úvah jsou v závěru článku shrnuty v následující větě (její komplikované znění ukazuje technický charakter výsledků z této oblasti teorie čísel).

Hlavní věta. *Počet tříd ternárních primitivních forem positivních řádu* $[\Omega, \Delta]$, Ω *i* Δ *liché, jest dán vzorcem*

$$H(\Omega, \Delta) = \frac{1}{24}\Omega\Delta(2-\eta)\prod_r\left(1-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\lambda}{24}+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\Omega_1\Delta_2}\left\{h(\Omega_1\Delta_2)+h'(\Omega_1\Delta_2)+h(2\Omega_1\Delta_2)\right\},$$

kdež $\prod_r$ *se vztahuje na všechna různá prvočísla* r *obsažená v největší společné míře* $M(\Omega, \Delta) = \Theta$,

$\sum_{\Omega_1\Delta_2}$ *na všechny rozklady* $\Omega = \Omega_1\Omega_2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2$ *ve dva celistvé faktory takové, že*

$$M(\Omega_1, \Omega_2) = 1, \qquad M(\Delta_1, \Delta_2) = 1, \qquad M(\Omega_2, \Delta_1) = 1 .$$

Dále jest

$$\eta = \tfrac{1}{\bar\Omega\bar\Delta},\ \textit{je-li } \bar\Omega\bar\Delta \textit{ nesoudělno s } \Theta,$$

$$= 0,\ \textit{je-li } \bar\Omega\bar\Delta \textit{ soudělno s } \Theta,$$

při čemž značí $\bar\Omega$ *číslo* Ω *dělené největším čtvercem v něm obsaženým a podobně* $\bar\Delta$. *Číslo* λ *má tyto hodnoty*

$\lambda = 7 + 4\left(\frac{\Omega\Delta}{3}\right)$	*pro* $\Theta = 1$, $\Omega\Delta$ *dělitelno nejvýše* 3^1,
$= 3$	*pro* $\Theta = 1$, $\Omega\Delta$ *dělitelno alespoň* 9,
$= 12 - 4\left(\frac{\Omega_0\Delta_0}{3}\right)$	*pro* $\Theta = 3$,
$= 0$	*pro ostatní případy.*

Ω_0, Δ_0 *jsou dána rovnicemi* $\Omega = 3\Omega_0$, $\Delta = 3\Delta_0$. $\left(\frac{\Omega\Delta}{3}\right)$, $\left(\frac{\Omega_0\Delta_0}{3}\right)$ *značí symboly Legendreovy, které třeba položiti rovny nule, je-li* $\Omega\Delta$ *neb* $\Omega_0\Delta_0$ *dělitelno* 3.[15]

Předposlední prací této skupiny je práce *Důkaz jedné věty Eisensteinovy* [K7]. Jedná se o tuto větu:

[15] [K5], str. 9–10.

Eisensteinova věta. *Každá ternární kvadratická forma definitní o reálných a celistvých koeficientech, která má více než dvě automorfie, jest ekvivalentní aspoň jedné z těchto dvou forem:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = a_{11}x_1^2 + \phi(x_2, x_3) ,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2a_{12}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 =$$
$$= 2a_{12}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \phi(x_2, x_3) .$$ [16]

Vladimír Kořínek použil tuto větu ve své práci [K3] týkající se určení počtu tříd pozitivně definitních ternárních kvadratických forem. G. Eisenstein ji uveřejnil bez důkazu[17], důkaz pak publikoval P. Bachmann ve své monografii *Zahlentheorie*[18]. Bachmannův důkaz vychází z pomocné věty, která říká, že každá definitní ternární kvadratická forma, která má více než dvě automorfie, má aspoň jednu automorfii periody 2 různou od triviální automorfie. Důkaz této pomocné věty je však v Bachmannově knize chybný. V. Kořínek proto dokázal Eisensteinovu větu jinou metodou, která tuto pomocnou větu nepotřebuje; jeho důkaz je založen na tzv. Sellingově redukci ternárních forem.[19]

Zajímavá zmínka týkající se Kořínkovy práce [K7] je v úvaze *Reflections of a Mathematician* slavného číselného teoretika L. J. Mordella (1888–1972)[20], který byl někdy nazýván „králem diofantických rovnic“:

Occasionally a mathematician benefits by his ignorance of previous work. He may work upon a problem which has been solved and apparently disposed of, and find a new and more complete point of view which leads to important results that might otherwise have been missed. A Czech mathematician, Dr. Kořínek, proved again in 1926 Eisenstein's formula, given without proof in 1851, for the class-number of definite ternary quadratic forms, and was quite unaware of the previous demonstrations by myself in 1916 and by W. A. Markoff in 1894. I was anticipated by Markoff, but his work was published in an inaccessible Russian journal which I have never seen and which can have been read by very few people. As a matter of interest, I might state that the fundamental idea in my proof occurred to me in thinking about the subject when walking along Oxford Street in London in May 1916.[21]

Poslední Kořínkovou prací této skupiny je článek *Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen* [K8]. Problematika, kterou se V. Kořínek v této

---

[16] [K7], str. 23.

[17] G. Eisenstein: *Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen* ... – viz výše.

[18] IV. Teil, 1923, str. 358–364.

[19] Edouard Selling (1834–1920).

E. Selling: *Ueber die binären und ternären quadratischen Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 77(1873), 143–229.

E. Selling: *Des formes quadratiques binaires et ternaires*, Journal de mathematiques pures et appliquées 3(1877), 21–60, 153–206.

[20] H. Davenport: *L. J. Mordell*, Acta Arithmetica 9(1964), 3–12; na stranách 13–22 je Mordellův seznam publikací (pokračuje v 23(1973), 413–416).

[21] L. J. Mordell: *Reflections of a Mathematician*, Montreal, Quebec, The Canadian Mathematical Congress, Secretariat, Chemistry Bldg., McGill University. VII, 1959, 50 stran; citát ze str. 35.

publikaci zabýval, je odlišná od ostatních prací této skupiny. Navázal zde zejména na řadu prací Heinricha Karla Theodora Brandta (1886–1954)[22], který rozvinul teorii kompozice kvaternárních kvadratických forem s celočíselnými koeficienty.

Práce [K8] má pět paragrafů. V prvním shrnuje autor hlavní výsledky prací Brandtových a ve druhém uvádí své nejdůležitější výsledky. Ve zbývajících třech paragrafech nejprve dokazuje pomocné věty a pak výsledky druhého paragrafu.

Kompozici libovolně zvolených tříd kvaternárních kvadratických forem obecně nelze provádět; podle H. Brandta je kompozice možná pouze pro ty formy, které patří do určitého řádu (tzv. K-řádu) o indexu setrvačnosti 0 nebo 2. Vladimír Kořínek nazval dvě třídy jednoho K-řádu *svázané kompozicí*, pokud existuje konečná posloupnost tříd, která první třídou začíná a druhou třídou končí a v níž každá třída může být komponována s třídou následující. Tato relace mezi třídami forem je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Maximální možnou množinu tříd, ve které jsou každé dvě třídy navzájem svázané kompozicí, nazývá V. Kořínek *komplexem*. Ukazuje, že všechny hlavní třídy jednoho komplexu patří do téhož rodu (tzv. *hlavní rod*). Každý rod, jehož hodnost vyhovuje určitým uvedeným podmínkám, je v tomto smyslu hlavním rodem; všechny hlavní třídy hlavního rodu tvoří komplex. Komplex se pak skládá ze všech tříd počtu rodů, jejichž charaktery jsou jednoduchou relací spojené s charaktery hlavních rodů a tím jsou určeny. V. Kořínek ukázal, že počet komplexů v daném K-řádu A je roven počtu rodů určitého řádu kvaternárních kvadratických forem, který s K-řádem A jednoduchým způsobem souvisí.

2. Teorie algeber

Další skupinu Kořínkových publikací tvoří práce věnované teorii algeber; jedná se o články [K9] až [K12], v nichž se, jak již bylo řečeno, výrazně odrazil Kořínkův studijní pobyt u Emila Artina[23] v Hamburku.

---

[22] M. Eichler: *Heinrich Brandt* †, Mathematische Nachrichten 13(1955), 321–326.

H. Brandt: *Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 143(1913), 106–127.

H. Brandt: *Über ein Problem von A. Hurwitz quaternäre quadratische Formen betreffend*, Mathematische Annalen 88(1923), 211–214.

H. Brandt: *Bilineare Transformation quadratischer Formen*, Mathematische Zeitschrift 17 (1923), 153–160.

H. Brandt: *Bilineare Transformation quaternärer quadratischer Formen*, Mathematische Zeitschrift 20(1924), 223–230.

H. Brandt: *Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen*, Mathematische Annalen 91(1924), 300–315.

H. Brandt: *Die Hauptklassen in der Kompositionstheorie der quaternären quadratischen Formen*, Mathematiscne Annalen 94(1925), 166–175.

H. Brandt: *Über die Komponierbarkeit quaternärer quadratischer Formen*, Mathematische Annalen 94(1925), 179–197.

H. Brandt: *Über das assoziative Gesetz bei der Komposition der quaternären quadratischen Formen*, Mathematische Annalen 96(1926), 353–359.

[23] H. Zassenhaus: *Emil Artin, his life and his work*, Notre Dame Journal of Formal Logic 5(1964), 1–9.

Nejrozsáhlejší z nich (46 stran) je práce *Kvadratická tělesa v kvaternionových okruzích* [K9], kterou V. Kořínek předložil jako svoji práci habilitační. Navázal na výsledky Emila Artina[24], který měl v této oblasti na něho přímý vliv, na práce Heinricha Brandta[25], Leonarda Eugena Dicksona (1874–1954)[26], Helmuta Hasseho (1898–1979)[27], Käte Heyové (1904–1990)[28], Emmy Noetherové (1882–1935)[29] a Andrease Speisera (1885–1970)[30].

C. Chevalley: *Emil Artin [1898–1962]*, Bulletin de la Société mathématique de France 92 (1964), 1–10.

H. Cartan: *Emil Artin*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 28(1965), 1–5.

R. Brauer: *Emil Artin*, Bulletin of the American Mathematical Society 73(1967), 27–43.

[24] E. Artin: *Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Wedderburn*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5(1927), 245–250.

E. Artin: *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5(1927), 251–260.

E. Artin: *Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5(1927), 261–289.

[25] H. Brandt: *Idealtheorie in Quaternionenalgebren*, Mathematische Annalen 99 (1928), 1–29.

H. Brandt: *Primidealzerlegung in einer Dedekindschen Algebra*, Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft 110(1929), II, 117–119.

H. Brandt: *Zur Idealtheorie Dedekindscher Algebren*, Commentarii Mathematici Helvetici 2(1930), 13–17.

[26] A. A. Albert: *Leonard Eugene Dickson. 1874–1954*, Bulletin of the American Mathematical Society 61(1955), 331–345.

D. D. Fenster: *Leonard Eugene Dickson and his work in the arithmetics of algebras*, Archive for the History of Exact Sciences 52(1998), 119–159.

L. E. Dickson: *Algebren und ihre Zahlentheorie. Mit einem Kapitel über Idealtheorie von Andreas Speiser*, Orell Füssli, Zürich, Leipzig, 1927, 308 stran, angl. *Algebras and their Arithmetics*, University of Chicago Press, Chicago, 1923, G. E. Stechert & Co., New York, 1938, Dover, New York, 1960, 12+241 stran.

A. A. Albert (ed.): *The collected mathematical papers of Leonard Eugene Dickson*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1975, 680+766+580+636+644 stran.

[27] H. Brueckner, H. Mueller: *Helmut Hasse (25. 8. 1898 – 26. 12. 1979)*, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 11(1982), 5–7.

H.-W. Leopoldt: *Obituary. Helmut Hasse (August 25, 1898 – December 26, 1979)*, Journal of Number Theory 14(1982), 118–120.

H.-W. Leopoldt: *Zum wissenschaftlichen Werk von Helmut Hasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 262/263(1973), 1–17.

G. Frei: *Helmut Hasse (1898–1979)*, Expositiones mathematicae 3(1985), 55–69.

H. Hasse: *Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 152(1923), 129–148.

[28] K. Hey: *Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen*, Hamburger Dissertation, 1929, 48 stran.

F. Lorenz: *Käte Hey und der Hauptsatz der Algebrentheorie*, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 23(2004), 75–92.

[29] Viz A. Dick: *Emmy Noether, 1882–1935*, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1981, 193 stran (původně in Elemente der Mathematik, Beiheft No. 13, 1970).

H. Weyl: *Emmy Noether*, Scripta mathematica 3(1935), 201–220.

E. Noether: *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift 30 (1929), 641–692.

[30] J. O. Fleckenstein, B. L. van der Waerden: *Zum Gedenken an Andreas Speiser*, Elemente der Mathematik 26(1971), 97–102.

V. Kořínek se zde zabýval okruhem (algebrou) Q kvaternionů nad tělesem R racionálních čísel. V úvodu nejprve připomněl definici okruhu kvaternionů:

Lze jej definovati jakožto souhrn elementů tvaru

$$\alpha = x_0\varepsilon_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 \ ,$$

kdež x_0, x_1, x_2, x_3 jsou libovolná čísla z R. Je-li

$$\beta = y_0\varepsilon_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_3$$

druhé číslo tohoto okruhu, pak sčítání a odčítání jest definováno rovnicí

$$\alpha \pm \beta = (x_0 \pm y_0)\varepsilon_0 + (x_1 \pm y_1)\varepsilon_1 + (x_2 \pm y_2)\varepsilon_2 + (x_3 \pm y_3)\varepsilon_3 \ .$$

Násobení jest definováno multiplikačními vzorci pro basi ε_0, ε_1, ε_2, ε_3:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^2 = 1, \quad \varepsilon_1^2 = -t_2t_3, \quad \varepsilon_2^2 = -t_3t_1, \quad \varepsilon_3^2 = -t_1t_2 \ ,$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_i = \varepsilon_i\varepsilon_0 = \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,3 \ ,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = -\varepsilon_2\varepsilon_1 = t_3\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3 = -\varepsilon_3\varepsilon_2 = t_1\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1 = -\varepsilon_1\varepsilon_3 = t_2\varepsilon_2 \ .$$

Zde jsou t_1, t_2, t_3 celá racionální čísla bez čtvercových dělitelů a po dvou navzájem nesoudělná. Násobení jest zřejmě nekomutativní. Rovnost dvou elementů $\alpha = \beta$ z Q jest definována rovnicemi $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.[31]

Takto definovaný okruh kvaternionů je buď těleso nebo okruh matic druhého řádu nad R (pro $t_1 = -1, t_2 = t_3 = 1$); okruh kvaternionů je speciálním případem jednoduchého okruhu hyperkomplexních čísel. Mají-li čísla t_1, t_2, t_3 stejná (různá) znaménka, nazývá se okruh Q *definitní* (*indefinitní*).

Vladimír Kořínek se omezil na kvaternionové okruhy Q, jejichž centrem je těleso racionálních čísel R. Každý prvek ξ takového okruhu, který není prvkem centra (tedy není racionálním číslem), splňuje kvadratickou rovnici

$$\xi^2 - s(\xi)\cdot\xi + n(\xi) = 0 \ ,$$

kde $s(\xi)$ nazýváme stopou a $n(\xi)$ normou prvku ξ; obě tato čísla jsou racionální a jsou prvkem ξ jednoznačně určena. Pokud je $n(\xi) \neq 0$ (tedy ξ není dělitelem nuly) a je-li polynom na levé straně výše zmíněné rovnice ireducibilní nad R, pak vznikne adjunkcí prvku ξ k tělesu R kvadratické těleso $R(\xi)$, jehož všechny prvky leží v Q (takový prvek ξ se nazývá *prvek 2. stupně*). Každý prvek z $R(\xi)$,

J. J. Burckhardt: *Andreas Speiser (10. 6. 1885 – 12. 10. 1970)*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 115(1970), 471–474.

M. Eichler: *Andreas Speiser, 1885–1970*, Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, wiss. Teil 150(1970), 325–327.

A. Speiser: *Allgemeine Zahlentheorie*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 71(1926), 8–48. Článek je přetištěn jako poslední kapitola Dicksonovy knihy *Algebren und ihre Zahlentheorie* – viz výše.

[31] [K9], str. 3.

který není racionálním číslem, komutuje s každým jiným prvkem tohoto tělesa, ale již s žádným jiným prvkem okruhu Q. Těleso $R(\xi)$ tedy neleží v žádném jiném komutativním tělese, které by celé leželo v Q, a je tedy maximálním komutativním podtělesem v Q.

Nejdůležitější větu, z níž Kořínkova práce vychází, dokázal Emil Artin ve svém článku *Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Wedderburn*. V. Kořínek ji uvádí v „kvaternionovém" tvaru:

Věta. *Budiž α nedělitel nuly z Q ale ne z R, který splňuje ireducibilní rovnici (2)* [32] *t. j. element 2. stupně z Q. Všechny a jen ty elementy z Q jsou kořeny rovnice (2), které jsou tvaru*

$$\xi\alpha\xi^{-1} ,$$

kdež ξ probíhá všechny nedělitele nuly z Q. [33]

Práce [K9] je věnována kvadratickým tělesům, která leží v Q. Ve druhém paragrafu své práce proto V. Kořínek uvádí přehled aritmetiky okruhů hyperkomplexních čísel, zejména výsledky E. Artina a H. Brandta.

Celým prvkem kvaternionového okruhu Q se rozumí prvek, jehož minimální polynom má celočíselné koeficienty (a vedoucí koeficient 1). *Řád* okruhu Q je definován jako množina I celých prvků, pro kterou platí:

(i) $\forall\alpha,\beta\in I \qquad \alpha\pm\beta,\ \alpha\beta,\ \beta\alpha\in I$

(ii) $\forall\alpha\in Q \qquad \exists m\in\mathbb{Z}, m\neq 0 \quad m\alpha\in I$

(iii) Existují čtyři nad R lineárně nezávislé prvky $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\in I$ takové, že každý prvek $\alpha\in I$ lze vyjádřit v tvaru $\alpha = x_0\omega_0+x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3$, kde $x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}$.

V každém kvaternionovém okruhu Q je nekonečně mnoho řádů, každý z nich obsahuje $\mathbb{Z}$. *Diskriminantem* řádu I se nazývá determinant D matice utvořené ze stop $s(\omega_i\omega_k)$, $i,k=0,1,2,3$, tj. $D=\det\big(s(\omega_i\omega_k)\big)$; diskriminat nezávisí na volbě báze $\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. Zřejmě je $D\in\mathbb{Z}$.

Maximálním řádem okruhu Q se rozumí řád, který není obsažen v jiném řádu okruhu Q. Je-li I maximální řád a prvek $\xi\in Q\setminus R$ není dělitelem nuly, potom je $\xi^{-1}I\xi$ opět maximální řád; jsou izomorfní a říkáme, že jsou *stejného typu*. Množina všech maximálních řádů okruhu Q se rozpadá na podmnožiny maximálních řádů stejného typu. Zatímco maximálních řádů je v Q nekonečně mnoho, typů je jen konečně mnoho. Diskriminanty všech maximálních řádů okruhu Q jsou stejné, jejich společná hodnota se nazývá diskriminantem okruhu Q.

Pravým ideálem maximálního řádu I je podmnožina $\mathfrak{A}$ okruhu Q, pro kterou platí:

(i) $\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{A} \qquad \alpha-\beta\in\mathfrak{A}$

(ii) $\forall\alpha\in\mathfrak{A} \qquad \forall\lambda\in I \quad \alpha\lambda\in\mathfrak{A}$

(iii) $\exists m\in\mathbb{Z}, m\neq 0 \qquad \forall\alpha\in\mathfrak{A} \quad m\alpha$ je celý prvek v I

(iv) $\exists a\in\mathbb{Z}, a\neq 0 \qquad a\in\mathfrak{A}$

---

[32] Výše zmíněná rovnice $\xi^2 - s(\xi)\cdot\xi + n(\xi) = 0$.

[33] [K9], str. 5.

Obdobně se definuje *levý* a *oboustranný ideál*.

Ve třetím paragrafu o kvadratických tělesech v kvaternionových okruzích pak V. Kořínek mimo jiné zjišťuje, kdy k danému abstraktnímu kvadratickému tělesu $\overline{k}$ existuje v okruhu Q izomorfní těleso k. Určením vlastností kvaternionových ideálů se zabývá čtvrtý paragraf.

V pátém paragrafu pak V. Kořínek vyšetřuje počet všech kvadratických těles z Q, která jsou izomorfní s určitým abstraktním kvadratickým tělesem $\overline{k}$. Na základě výše zmíněné Artinovy věty dokazuje, že jich je nekonečně mnoho.

Dále je možno zvolit nějaký maximální řád I okruhu Q a uvažovat ta kvadratická tělesa izomorfní s daným tělesem $\overline{k}$, jejichž maximální řády leží v I. I těch může být nekonečně mnoho (např. tehdy, je-li Q indefinitní). Sdružíme-li však tato tělesa do skupin vytvořených z jednoho z nich pomocí automorfismů řádu I, je těchto skupin již jen konečně mnoho. Na závěr tohoto paragrafu pak autor vyšetřuje počet všech skupin ve všech maximálních řádech vybraných po jednom z každého typu a uvádí jejich počet do souvislosti s počtem tříd ideálů tělesa $\overline{k}$.

V šestém paragrafu se V. Kořínek zabývá definitními kvaternionovými tělesy; určuje počet kvadratických těles jedné skupiny, který je konečný. Na závěr aplikuje předchozí výsledky na těleso Hamiltonových kvaternionů nad tělesem racionálních čísel R jako centrem (případ $t_1 = t_2 = t_3 = 1$). Výsledky pro Hamiltonovy kvaterniony byly v době publikování Kořínkovy práce [K9] již známy, publikoval je B. A. Venkov (1900–1962)[34]; protože však své výsledky odvodil bez použití teorie ideálů v nekomutativních okruzích, byl jeho postup velmi složitý.

Uveďme na závěr slova zakončující první paragraf práce [K9]:

Tato práce zabývá se problémem, který jest částí obecnějšího problému: provésti podobná vyšetřování pro maximální komutativní tělesa v libovolném jednoduchém okruhu hyperkomplexních čísel. Touto otázkou hodlám se zabývati v práci pozdější. Řešil jsem podrobně tento speciální případ z těchto dvou důvodů. Předně jeho řešení ukazuje cestu pro řešení problému obecného. Čtenář obeznalý s aritmetikou hyperkomplexních okruhů shledá, že mnohé důkazy platí i obecně pro jednoduché okruhy hyperkomplexních čísel. Za druhé jiná práce výše zmíněného matematika B. Venkova: O čisle klassov binarnych kvadratyčnych form otricatelnych opredelitelej. Izv. Ak. Nauk SSSR. 1928, str. 375–392, str. 455–480, ukazuje důležitost vztahů mezi kvadratickými tělesy a kvaternionovými okruhy pro aritmetické odvození formulí pro počet tříd ideálů kvadratických těles. Z výsledků této mé práce plynou dále též zajímavé vztahy mezi ternárními kvadratickými formami a kvaternionovými okruhy. Avšak i tyto věci nechávám pro samostatné pojednání.[35]

---

[34] A. V. Malyšev, D. K. Faddeev: *Boris Alekseevič Venkov*, Uspechi matematičeskich nauk 16(1961), č. 4(100), 235–240.
B. A. Venkov: *Ob arifmetike kvaternionov*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, serija matematičeskaja, 1922, 205–220, 221–246, 1929, 489–504, 535–562, 607–622.

[35] [K9], str. 7.

Tou „pozdější prací", v níž se Vladimír Kořínek chystal vyšetřovat maximální komutativní tělesa v libovolném jednoduchém okruhu hyperkomplexních čísel, je práce *Maximale kommutative Körper in einfachen Systemen von hyperkomplexen Zahlen* [K10]. Odkazoval se zde na druhý díl monografie *Moderne Algebra* od B. L. van der Waerdena (1903–1996)[36] a na výsledky R. D. Brauera (1901–1977)[37], E. Artina, E. Noetherové, H. Brandta, H. Hasseho a A. Speisera.[38]

Buď $\mathfrak{S}$ jednoduchá algebra dimenze n^2 nad svým centrem Z, kde Z je algebraické těleso konečného stupně nad tělesem racionálních čísel R. Algebra $\mathfrak{S}$ obsahuje komutativní nadtělesa K tělesa Z, která jsou n-tého stupně nad Z. Mějme nyní pevně zvolené maximální komutativní těleso K.

V. Kořínek zkoumal množinu všech podtěles algebry $\mathfrak{S}$, která jsou izomorfní s K. Ukázal, že je nekonečná, a uvedl její souvislost s multiplikativní grupou nedělitelů nuly z $\mathfrak{S}$. Nekonečná je obecně i množina těles izomorfních s K, jejichž řády jsou obsaženy v pevně zvoleném maximálním řádu J algebry $\mathfrak{S}$. Pokud vytvoříme skupiny těles tak, že do jedné skupiny zahrneme spolu s tělesem K všechna tělesa, která z něj vzniknou automorfismy odpovídajícího řádu J, dostaneme konečný počet skupin. Dále V. Kořínek určil počet těles ve skupině; ukázal také souvislost počtu skupin s počtem tříd ideálů oboru integrity celých čísel tělesa K.[39]

Zbývající dvě práce této skupiny jsou mnohem kratší a také méně významné. Článek *Poznámka k aritmetice hyperkomplexních čísel* [K11], jak V. Kořínek píše,

> ... *neobsahuje žádné nové výsledky. Jejím cílem jest zjednodušení důkazů teorie jednostranných ideálů v polojednoduchých systémech hyperkomplexních*

---

[36] G. Frei: *Zum Gedenken an Bartel Leendert van der Waerden*, Elemente der Mathematik 53(1998), 133–138.
Y. Dold-Samplonius: *In memoriam: Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996)*, Historia Mathematica 24(1997), 125–130.
Ch. J. Scriba: *Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996)*, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 15(1996), 13–18.

[37] J. A. Green: *Richard Dagobert Brauer*, Bulletin of the London Mathematical Society 10(1978), 317–342.
W. Feit: *Richard D. Brauer*, Bulletin of the American Mathematical Society 1(1979), 1–20.
H. Rohrbach: *Richard Brauer zum Gedächtnis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 83(1981), 125–134.

[38] R. Brauer: *Über Systeme hyperkomplexer Zahlen*, Mathematische Zeitschrift 30(1929), 79–107.
E. Artin: *Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Wedderburn* – viz výše.
E. Noether: *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie* – viz výše.
H. Brandt: *Zur Idealtheorie Dedekindscher Algebren* – viz výše.
H. Hasse: *Über p-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme*, Mathematische Annalen 104(1931), 495–534.
A. Speiser: *Allgemeine Zahlentheorie* – viz výše.

[39] V osobních poznámkách Vladimíra Kořínka je zmíněno (Archív AV ČR, fond V. Kořínek), proč zvolil za svoji habilitační práci právě publikaci [K9] a ne [K10], která obsahuje obecnější výsledky: práce [K9] byla zvolena za habilitační práci proto, že je psána česky, kdežto práce [K10] je psána německy.

čísel $\mathfrak{S}$, kterou podal Emil Artin ...[40]

Nechť $\mathfrak{S}$ je polojednoduchá algebra dimenze n nad tělesem racionálních čísel R a $\mathfrak{A}$ levý ideál v nějakém maximálním řádu I_1 z $\mathfrak{S}$.

V důkazu věty říkající, že inverzní ideál k inverznímu ideálu $\mathfrak{A}^{-1}$ je ideál $\mathfrak{A}$ sám, použil E. Artin pojmu *diferenta* a větu o normě součinu dvou ideálů. V. Kořínek pokládal použití pojmů diferenty a normy za umělé a důkaz věty o normě součinu dvou ideálů za velmi složitý. Ve své práci [K11] ukázal, že při budování teorie jednostranných ideálů není nutno použít ani pojem diferenty, ani zmíněnou větu o normě součinu ideálů. Jeho postup je následující:

Stejným způsobem jako E. Artin nejprve dokázal pro levý ideál $\mathfrak{A}$ vztah

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = I_1 .$$

Dále dokázal, že levý ideál $\mathfrak{A}$ v I_1 je pravým ideálem v jistém řádu I_2. Teprve pak dokázal rovnost

$$(\mathfrak{A}^{-1})^{-1} = \mathfrak{A} .$$

Tento vztah vyplynul z hlavní myšlenky práce, totiž z rovnice $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = I_2$, kterou zde také odvodil.

Posledním a zároveň nejkratším článkem této skupiny prací je *Définition de la norme d'un idéal dans une algèbre simple* [K12]; jedná se o stručný výtah (2 strany) z přednášky na 2. sjezdu matematiků zemí slovanských (září 1934). Vladimír Kořínek zde podal novou definici *absolutně ireducibilní* normy ideálu $\mathfrak{A}$ jednoduché racionální algebry A s centrem K, a to úvahami čistě aritmetickými pomocí $\mathfrak{p}$-adického rozšíření $K_\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ struktur K, A a $\mathfrak{A}$, kde $\mathfrak{p}$ je prvoideál v K. I v práci [K12] se V. Kořínek odvolává na výsledky E. Artina, H. Brandta a H. Hasseho.[41]

Kořínkovy práce z teorie algeber měly řadu ohlasů ve světové matematické literatuře, byly psány v době, kdy se tato disciplína poměrně rychle rozvíjela. V dnešní době jsou již následným vývojem teorie algeber překonané, ve své době však přispěly k jejímu rozvoji. Kořínkovy výsledky se objevily např. v monografii M. Deuringa (1907–1984)[42] *Algebren*, v knize A. A. Alberta (1905–

---

[40] [K11], str. 1. Odkaz na E. Artina se týká jeho práce *Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5(1927), 261–289.

[41] E. Artin: *Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen* – viz výše.
H. Brandt: *Idealtheorie in Quaternionenalgebren* – viz výše.
H. Hasse: *Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper ...* – viz výše.

[42] M. Kneser: *Max Deuring 9. 12. 1907 – 20. 12. 1984*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 89(1987), 135–143.
P. Roquette: *Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 91(1989), 109–125.
M. Eichler: *Das wissenschaftliche Werk von Max Deuring*, Acta Arithmetica 47(1986), 187–192.

1972)[43] *Structure of algebras* a v monografii N. Jacobsona (1910–1999)[44] *The Theory of Rings*; citovány jsou zde práce [K9], [K10] a [K11]. V přehledném článku M. Eichlera *Neuere Ergebnisse der Theorie der einfachen Algebren*[45] je citována práce [K10].

3. Teorie grup

Po svých příspěvcích k teorii algeber napsal Vladimír Kořínek několik článků týkajících se teorie grup. Jedná se o práce [K13] až [K16] a [K18]; publikovány byly v letech 1937 až 1940. Nejvýznamnější z nich je práce *Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes* [K13]. V. Kořínek v ní navázal zejména na výsledky Hanse Fittinga (1906–1938)[46] a Alexandra Gennadieviče Kuroše (1908–1971)[47]; vycházel však rovněž z prací Reinholda Baera (1902–1979)[48], Ernsta Paula Heinze Prüfera (1896–1934)[49], Roberta Ericha Remaka

---

[43] D. Zelinsky: *A. A. Albert*, American Mathematical Monthly 80(1973), 661–665.
A. A. Albert: *Collected mathematical papers*, AMS, Providence RI, 1993, 743+938 stran.

[44] *Nathan Jacobson (1910–1999)*, Bulletin of the London Mathematical Society 33(2001), 623–630.
G. Benkart, I. Kaplansky, K. McCrimmon, D. J. Saltman, G. B. Seligman: *Nathan Jacobson (1910–1999)*, Notices of the American Mathematical Society 47(2000), 1061–1071.

[45] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 47(1937), 198–220.

[46] H. Zassenhaus: *Zum Gedenken an Hans Fitting*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 49(1939), 93–96.
H. Fitting: *Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen*, Mathematische Annalen 107(1932), 514–542.
H. Fitting: *Berichtigung zu der Arbeit von Hans Fitting: Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen*, Mathematische Annalen 109(1934), 616.
H. Fitting: *Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren*, Mathematische Zeitschrift 39(1934), 16–30.
H. Fitting: *Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe*, Mathematische Zeitschrift 41(1936), 380–395.

[47] P. S. Aleksandrov, V. M. Gluškov: *A. G. Kuroš*, Uspechi matematičeskich nauk 13 (1958), č. 1(79), 217–224.
P. S. Aleksandrov, B. I. Plotkin, L. A. Skornjakov: *A. G. Kuroš*, Uspechi matematičeskich nauk 23(1968), č. 2(140), 219–228.
P. S. Aleksandrov, T. M. Baranovič, O. N. Golovin, B. I. Plotkin: *A. G. Kuroš*, Uspechi matematičeskich nauk 27(1972), č. 1(163), 211–226.
O. N. Golovin: *Chronologija žizni A. G. Kuroša*, Trudy Moskovskogo matematičeskogo obščestva 29(1973), 5–17.
A. G. Kuroš: *Zur Zerlegung unendlicher Gruppen*, Mathematische Annalen 106(1932), 107–113.

[48] K. W. Gruenberg: *Reinhold Baer*, Bulletin of the London Mathematical Society 13 (1981), 339–361.
R. Baer: *The decomposition of enumerable, primary, abelian groups into direct summands*, Quarterly Journal of Mathematics 6(1935), 217–221.
R. Baer: *The decomposition of abelian groups into direct summands*, Quarterly Journal of Mathematics 6(1935), 222–232.

[49] H. Behnke, G. Köthe: *Heinz Prüfer*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 45(1935), 32–40.
H. Prüfer: *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Mathematische Zeitschrift 17(1923), 35–61.

(1888–1942)[50] a Otto Jul'eviče Šmidta (1891–1956)[51].

Jedním z cílů teorie grup bylo hledání co možná nejširší třídy grup, pro které existuje izomorfismus dvou libovolných ireducibilních direktních rozkladů, nebo obecněji, pro které existují izomorfní zjemnění libovolných direktních rozkladů. Větu, která říká, že každé dva direktní rozklady konečné grupy mají izomorfní zjemnění, dokázal již v roce 1911 R. Remak. Problémem bylo zobecnit tuto větu na nekonečné grupy. V roce 1929 dokázal O. Ju. Šmidt odpovídající větu pro grupy s hlavní řadou.[52] Tato věta, nazývaná Šmidtova, někdy také Remakova-Šmidtova nebo Remakova-Krullova-Šmidtova[53] se stala pramenem mnoha dalších výzkumů.[54] Její nejrůznější zobecnění nalezneme v pracích mnoha mate-

---

[50] U. C. Merzbach: *Robert Remak and the estimation of units and regulators*, in S. S. Demidov (ed.): *Amphora. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*, Birkhäuser, Basel, 1992, 481–522.

M. Pinl: *Kollegen in einer dunklen Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 71(1969), 167–228; o Remakovi na str. 190–193.

R. Remak: *Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 139(1911), 293–308.

[51] A. I. Kostrikin: *Otto Jul'evič Šmidt*, Vestnik Moskovskogo Universiteta 1992, č. 3, 90–92.

A. G. Kuroš: *Otto Jul'evič Šmidt*, Uspechi matematičeskich nauk 11(1956), č. 6(72), 227–233.

O. J. Schmidt: *Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette*, Mathematische Zeitschrift 29(1929), 34–41.

O. Ju. Šmidt: *Izbrannye trudy. Matematika*, AN SSSR, Moskva, 1959.

[52] O. Ju. Šmidt nejprve podal jiné důkazy Remakova výsledku z roku 1911.

O. J. Schmidt: *Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, Izvestija Kievskogo universiteta 1912, 1–6.

O. J. Schmidt: *Sur les produits directes*, Bulletin de la Société mathématique de France 41(1913), 161–164.

[53] Wolfgang Adolf Ludwig Helmuth Krull (1899–1971) dokázal Remakovu-Šmidtovu větu o něco později než O. Ju. Šmidt pro Abelovy operátorové grupy.

H. Schöneborn: *In memoriam Wolfgang Krull, Verzeichnis der Veröffentlichungen von Wolfgang Krull* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 82(1980), 51–62, 77–80.

W. Krull: *Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelschen Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen*, Sitzungsberichte Heidelberg Akademie der Wissenschaften, Math.-natur. Kl., 1932, 2. Abth., 13–38.

[54] Uveďme např. následující práce:

F. Kiokemeister: *A note on the Schmidt-Remak theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society 53(1947), 957–958.

G. Azumaya: *On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem*, Japanese Journal of Mathematics 19(1948), 525–547; *Correction and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem*, Nagoya Mathematical Journal 1(1950), 117–124.

U. S. Kahlon: *Problem of Krull-Schmidt-Remak-Azumaya-Matlis*, The Journal of the Indian mathematical Society 35 (1971), 255–261.

H. Kanbara: *Note on Krull-Remak-Schmidt-Azumaya's theorem*, Osaka Journal of Mathematics 9(1972), 409–413.

R. Göbel: *Wie weit sind Moduln vom Satz von Krull-Remak-Schmidt entfernt? Eine Analyse am Beispiel fast-freier abelscher Gruppen und ihre Konsequenzen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 88(1986), 11–49.

C. M. Ringel: *Krull-Remak-Schmidt fails for Artinian modules over local rings*, Algebras and Representation Theory 4(2001), 77–86.

matiků. Jedním z nich je i V. Kořínek.

V době, kdy Vladimír Kořínek svou práci o rozkladu grupy na direktní součiny podgrup publikoval, byly známy tyto výsledky (patří do dlouhé řady prací plynoucích ze zobecnění Remakovy-Šmidtovy věty):

— A. G. Kuroš (1932):[55] *Mějme grupu G. Buď každý klesající normální řetězec podgrup (tj. řetězec, v němž každá podgrupa je normální podgrupou v předcházející grupě) grupy G konečný. Pak jsou každé dva direktní ireducibilní rozklady grupy G centrálně izomorfní.*[56]

— H. Fitting (1932, 1934, 1936):[57] *Mějme grupu G. Buď každý klesající i rostoucí řetězec normálních podgrup v grupě G konečný (tj. G má konečnou hlavní řadu). Pak jsou každé dva ireducibilní direktní rozklady grupy G centrálně izomorfní.*

Na tyto dvě věty Vladimír Kořínek bezprostředně navázal. Hlavním přínosem jeho práce [K13] je následující výsledek:

— V. Kořínek (1937): *Buď G grupa, v jejímž centru jsou klesající řetězce podgrup konečné. Mějme dva libovolné rozklady grupy G na direktní součin konečného počtu podgrup. Pak lze tyto součiny tak zjemnit, že direktní faktory prvního zjemnění je možné vzájemně jednoznačně zobrazit na direktní faktory druhého zjemnění, přičemž odpovídající faktory jsou centrálně izomorfní.*

Toto tvrzení platí, jak je v práci ukázáno, i pro grupy s oborem operátorů, pokud vezmeme v úvahu pouze operátorově izomorfní direktní rozklady. Podmínka konečnosti řetězců podgrup je však požadována bez ohledu na daný obor operátorů.

Jak je vidět, Vladimír Kořínek jako první ukázal, že pro existenci centrálně izomorfních zjemnění není nutné předpokládat nic o řetězcích normálních podgrup (Fitting) či o normálních řetězcích grupy (Kuroš), ale stačí předpoklad o řetězcích podgrup centra grupy.

Dvoudílný článek Øysteina Oreho (1899–1968)[58] z roku 1938 je rozsáhlou, spíše přehledovou prací, v níž je Kořínkova publikace [K13] citována. Roku 1939 se na ni odkazuje Ch. Hopkins.[59]

---

[55] A. G. Kuroš: *Zur Zerlegung unendlicher Gruppen* – viz výše.

[56] Dvě podgrupy A a B grupy G nazveme *centrálně izomorfní*, pokud existuje automorfismus φ grupy G, který zobrazuje podgrupu A na podgrupu B a pro každé $a \in A$ leží prvek $a^{-1}\varphi(a)$ v centru grupy G. Dva direktní rozklady nazveme centrálně izomorfní, pokud mezi podgrupami těchto dvou rozkladů existuje takové vzájemně jednoznačné přiřazení, že odpovídající si podgrupy jsou centrálně izomorfní.

[57] H. Fitting: *Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen* ... – viz výše.

[58] Ø. Ore: *Structures and Group theory. I, II*, Duke Mathematical Journal 3(1937), 149–174, 4(1938), 247–269.
Viz též Ø. Ore: *On the application of structure theory of groups*, Bulletin of the American Mathematical Society 44(1938), 801–806; i zde je práce [K13] citována.

[59] Ch. Hopkins: *An extension of a theorem of Remak*, Annals of Mathematics 40(1939), 636–638.

V roce 1939 ukázal O. N. Golovin[60], že Kořínkova věta platí i pro nekonečné direktní rozklady grupy, v jejímž centru jsou klesající řetězce podgrup konečné.

Výsledky i postupy Vladimíra Kořínka použil roku 1947 Reinhold Baer[61] ve své práci obsahující poměrně rozsáhlou teorii direktních rozkladů operátorových lup[62]. Několikrát se o Kořínkových výsledcích zmiňuje v úvodu své práce.

E. N. Mocul'skij využil roku 1962 výsledky Vladimíra Kořínka v teorii svazů. Ve své práci[63] týkající se rozkladu jednotkového prvku v modulárních svazech dokázal následující tvrzení:

Mějme dva direktní rozklady jednotkového prvku $1 = \dot{\sum} a_i = \dot{\sum} b_j$.[64] Buď z centrum těchto rozkladů.[65] Nechť v množině $\{x|x \leq z\}$ je splněna podmínka klesajících řetězců a nechť daný svaz vyhovuje jakémusi „předpokladu štěpení“. Potom dvojice direktních rozkladů má direktně podobná zjemnění.[66]

Dalším rozvojem teorie grup byla Kořínkova práce překonána. Připomeňme dvě její významná zobecnění:

— A. G. Kuroš (1946): *Mějme grupu G, jejíž každá podgrupa centra, na kterou se homomorfně zobrazuje sama grupa G, vyhovuje podmínce konečnosti klesajících řetězců podgrup. Pak pro libovolné dva direktní rozklady grupy G existují centrálně izomorfní zjemnění.*[67]

— P. Crawley, B. Johnsson (1964): *Mějme grupu G, která má takový direktní rozklad, že centrum každého direktního činitele je spočetné a redukovaná část tohoto centra je periodická a má primární komponenty s omezenými řády prvků. Pak každé dva direktní rozklady grupy G mají centrálně izomorfní zjemnění.*[68]

Poznamenejme, že se v práci [K13] Vladimír Kořínek dopustil malé nepřesnosti v důkazu jedné z pomocných vět; upozornil ho na ni A. G. Kuroš. Toto nedopatření, které však nemělo vliv na hlavní výsledky práce, V. Kořínek opravil v poznámce [K15] – zesílil předpoklady této pomocné věty.

---

[60] P. S. Aleksandrov, L. A. Kalužnin, A. I. Kostrikin, A. L. Šmelkin: *Oleg Nikolaevič Golovin*, Uspechi matematičeskich nauk 31(1976), č. 4(190), 283–287.
O. N. Golovin: *Množiteli bez centrov v prjamych razloženijach grupp*, Matematičeskij sbornik 6(48)(1939), 423–426.

[61] R. Baer: *Direct decompositions*, Transactions of the American Mathematical Society 62(1947), 62–98.

[62] Lupou nazveme grupoid s neutrálním prvkem, v němž lze krátit i dělit.

[63] E. N. Mocul'skij: *Prjamyje razloženija v strukturach*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, serija matematičeskaja, 26(1962), 161–210.

[64] Tečka nad znakem součtu značí, že se jedná o direktní rozklad.

[65] Centrem rozkladů nazveme prvek $\prod_{i,j}(\dot{\sum}_{k\neq i} a_k + \dot{\sum}_{l\neq j} b_l)$.

[66] Řekneme, že dva rozklady jsou direktně podobné, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami $\{a_i\}$ a $\{b_j\}$ takové, že pro každou dvojici odpovídajících si prvků a_i, b_j existuje prvek c_{ij} takový, že $a_i \dot{+} c_{ij} = b_j \dot{+} c_{ij} = 1$.

[67] A. G. Kuroš: *Izomorfizmy prjamych rozloženij*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, serija matematičeskaja, 10(1946), 47–72. Volný překlad.

[68] P. Crawley, B. Johnsson: *Refinements for infinite direct decomposition of algebraic systems*, Pacific Journal of Mathematics 14(1964), 797–855. Volný překlad.

Z knižních publikací, v nichž je citována Kořínkova práce [K13] (resp. ještě [K15]) připomeňme tyto monografie: *Gruppentheorie* od W. Spechta (1907–1985)[69], *Lattice Theory* od G. Birkhoffa (1911–1996)[70] , *The Theory of Rings* od N. Jacobsona, *Fondamenti di teoria dei gruppi* od G. Zappy (nar. 1915)[71] a především *Teorija grupp* od A. G. Kuroše, kde je tzv. Kořínkova věta několikrát zmiňována.

Krátký článek *La décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes* [K14] je stručným záznamem referátu, který Vladimír Kořínek přednesl na Mezinárodním kongresu matematiků v Oslo roku 1936. Kromě výsledků publikovaných v práci [K13] (která však vyšla až roku 1937) obsahuje také partii týkající se existence společného rozšíření dvou rozkladů grupy. Toto téma však V. Kořínek do své práce [K13] nezařadil, protože v červnu 1936 byla publikována Fittingova práce, která se touto problematikou zabývala (jde o poslední z výše uvedených Fittingových publikací); její výsledky ovšem V. Kořínek v době, kdy připravoval svůj referát pro Mezinárodní kongres matematiků, neznal.

Ve zbývajících dvou pracích této skupiny se Vladimír Kořínek zabýval *charakteristicky jednoduchými* grupami, tj. takovými grupami, které kromě sebe a jednotkové grupy nemají žádné jiné charakteristické podgrupy.[72]

Práci nazvanou *Les groupes qui ne contiennent pas de sousgroupes caractéristiques propres* [K16] věnoval V. Kořínek svému učiteli Karlu Petrovi u příležitosti jeho šedesátých narozenin. Navázal zde na výsledky Kenjiro Shody (1902–1977)[73] a A. G. Kuroše[74]. Hlavní výsledek Kořínkovy práce je vyjádřen v následující větě:

Abelovská grupa je charakteristicky jednoduchá tehdy a jen tehdy, pokud je direktním součinem konečného nebo nekonečného počtu cyklických grup řádu p, kde p je pevně zvolené prvočíslo, nebo je direktním součinem konečného nebo nekonečného počtu grup, které jsou izomorfní aditivní grupě racionálních čísel.[75]

---

[69] H. Heineken, G. Schmeißer: *Wilhelm Specht in memoriam*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 92(1990), 153–168.

[70] S. Mac Lane: *Garrett Birkhoff (1911–1996) and the survey of modern algebra*, Notices of the American Mathematical Society 44(1997), 1438–1439.
R. S. Varga: *In memoriam Garrett Birkhoff*, Journal Approximation Theory 95(1998), 1–4.

[71] G. Patrizio: *Intervista a Guido Zappa*, Bolletino della Unione matematica Italiana VIII-A(2005), 241–260.
M. Curzio: *Guido Zappa e la teoria dei gruppi*, *Pubblicationi matematiche di Guido Zappa* Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, II. ser., N. 19, 1988, 19–34, 193–199.

[72] *Charakteristickou* podgrupou grupy G nazveme každou podgrupu H, která je invariantní vůči všem automorfismům grupy G, tj. každý automorfismus grupy G zobrazuje prvky podgrupy H opět do podgrupy H.

[73] H. Nagao: *Kenjiro Shoda (1902–1977)*, Osaka Journal of Mathematics 15(1978), 1–5.
K. Shoda: *Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe*, Journal of the Faculty of Science of the Imperial University Tokyo 2(1930), 25–50.

[74] A. G. Kuroš: *Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe*, Matematičeskij sbornik 1(43)(1936), 345–350.

[75] [K16], str. 18, volný překlad.

Vladimíru Kořínkovi se tedy podařilo nalézt všechny Abelovy charakteristicky jednoduché grupy. V souvislosti s tímto svým výsledkem provedl řadu dalších vyšetřování charakteristicky jednoduchých grup. Ocitujme z recenze Kořínkovy práce [K16]:

... z výsledků autora v této oblasti zdůrazněme zejména následující:

Buď G neabelovská grupa, která má ireducibilní direktní faktor G_0. Grupa G je charakteristicky jednoduchá tehdy a jen tehdy, pokud je direktním součinem grup, které jsou všechny izomorfní s G_0 a jsou charakteristicky jednoduché.[76]

Další věty Kořínkovy práce [K16] se zabývají některými vlastnostmi normálních podgrup, případně charakteristických podgrup, za předpokladu existence minimální normální podgrupy.

Poslední Kořínkovou prací věnovanou teorii grup je práce *Bemerkung über charakteristisch einfache Gruppen* [K18], která je dodatkem k jeho předchozí práci [K16]; podává důkazy následujících výsledků:

Buď G grupa, která má alespoň jeden direktní rozklad tvaru

$$G = \prod_{0 \leq \sigma < \phi} G_\sigma \tag{1}$$

s následujícími vlastnostmi:

1. Pro každé dva direktní faktory G_α, G_β rozkladu (1) *existuje netriviální direktní faktor H_α grupy G_α a netriviální direktní faktor H_β grupy G_β, které jsou izomorfní.*

2. Všechny direktní faktory G_σ $(0 \leq \sigma < \phi)$ rozkladu (1) *jsou charakteristicky jednoduché.*

Pak je grupa G charakteristicky jednoduchá.[77]

Tato věta je zobecněním jedné z vět dokázaných v předchozí Kořínkově práci [K16]. Po určení postačujících podmínek pro to, aby byla grupa charakteristicky jednoduchá, se V. Kořínek snažil stanovit i podmínku nutnou:

Buď G charakteristicky jednoduchá grupa. Pak má každý její direktní rozklad v direktní součin první vlastnost z předchozí věty.[78]

Jak se V. Kořínek v práci zmiňuje, nepodařilo se mu zjistit, zda i druhá podmínka je nutná nebo zda je třeba ji nahradit nějakou jinou podmínkou.

Kořínkovy práce [K16] a [K18] jsou citovány v Kurošově knize *Teorija grupp* a v Robinsonově dvoudílné monografii *Finiteness conditions and generalized soluble groups, Part 2*. Poznamenejme ještě, že v úvodu své knihy *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes* děkuje H.-L. Wussing (nar. 1927) V. Kořínkovi za pomoc.

---

[76] Viz Zentralblatt für Mathematik 19(1939), str. 398; autorem recenze je H. H. W. Magnus (1907–1990).

[77] [K18], str. 1–2, volný překlad.

[78] [K18], str. 2, volný překlad.

4. Teorie svazů

Za druhé světové války přesunul Vladimír Kořínek svůj odborný zájem z teorie grup na teorii svazů; sem spadají jeho články [K19] až [K23]. Práce [K22] a [K23] však již neobsahují nové výsledky, jde o komentované přehledy výsledků předchozích článků. Stěžejními Kořínkovými pracemi z teorie svazů jsou publikace [K19] a [K20] (resp. [K21]). Tyto práce měly světový ohlas.

Článek *Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden* [K19] byl první Kořínkovou prací z teorie svazů a zároveň první publikací českého autora, která byla věnována výhradně svazům. Připomeňme nejprve zdroje, z nichž V. Kořínek vycházel.

Za velmi důležitou práci z teorie svazů označil první z níže uvedených publikací Øysteina Oreho[79] a na zbývající se několikrát odvolával, dále citoval články, jejichž autory byli Gottfried Maria Hugo Köthe (1905–1989) a Hans Hermes (1912–2003).[80] Další práce, které připomněl, jsou články A. G. Kuroše[81] a A. I. Uzkova[82]. Stěžejní byla pro V. Kořínka poslední z výše jmenovaných prací; ve svém článku [K19] Uzkovovy výsledky podstatně zjednodušil.

Tématem Kořínkovy práce [K19] je zkoumání Schreierovy věty[83] a Zassenhausovy metody zjemnění řetězců ve svazech[84]. Přibližme nejprve některé vý-

---

[79] Ø. Ore: *On the Foundation of Abstract Algebra. I, II*, Annals of Mathematics 36(1935), 406–437, 37(1936), 265–292.

Ø. Ore: *On the Theorem of Jordan-Hölder*, Transactions of the American Mathematical Society 41(1937), 266–275.

Ø. Ore: *Structures and Group Theory. I, II* – viz výše.

Ø. Ore: *Chains in Partially Ordered Sets*, Bulletin of the American Mathematical Society 49(1943), 558–566.

[80] J. Weidmann: *Gottfried Köthe 1905–1989*, in W. Schwarz (ed.): *On the history of Frankfurt mathematics*, Frankfurt am Main, 2005, 135–149.

Obituary: Professor Dr. Hans Hermes, 1912–2003, Archive for Mathematical Logic 43(2004), 425.

G. Köthe: *Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 47(1937), 125–144.

H. Hermes, G. Köthe: *Theorie der Verbände*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I. Algebra und Zahlentheorie, 1. Teil, 5. Heft, Art.-Nr. 13, 1939.

[81] A. G. Kuroš: *Eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes*, Mathematische Annalen 111(1935), 13–18.

[82] A. I. Uzkov: *O teoreme Jordan'a-Hölder'a*, Matematičeskij sbornik 4(46)(1938), 31–43.

[83] Otto Schreier (1901–1929).

K. Menger: *Otto Schreier*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37(1930), 1–6.

O. Schreier: *Über den Jordan-Hölderschen Satz*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universität Hamburg 6(1928), 300–302.

[84] Hans Julius Zassenhaus (1912–1991).

W. Plesken: *Hans Zassenhaus 1912–1991*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 96(1994), 1–20.

M. Pohst: *In memoriam: Hans Zassenhaus (1912–1991)*, Journal of Number Theory 47 (1994), 1–19.

Bibliography of Hans Zassenhaus, Journal of Symbolic Computation 4(1987), 129–135.

H. Zassenhaus: *Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universität Hamburg 10(1934), 106–108.

sledky a pojmy. Schreierova věta je jednou ze základních vět teorie grup, která říká, že každé dvě normální řady libovolné grupy mají izomorfní zjemnění. Vyplývá z ní starší klasický výsledek, věta Jordanova-Hölderova[85], která říká, že každé dvě kompoziční řady téže grupy jsou izomorfní.[86]

Mějme svaz S a v něm řetězce

(1) $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_r$,

(2) $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_s$.

Zassenhausovými řetězci řetězce (1) vzhledem k řetězci (2) nazýváme následujících r řetězců:[87]

$$a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_0) \geq a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_1) \geq \cdots \geq a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_s), \qquad i = 1, 2, \ldots, r\ .$$

Vždy platí, že

$$a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_s) \geq a_i \geq a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_0)\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, r-1\ .$$

Konečný prvek jednoho řetězce tedy obsahuje počáteční prvek řetězce následujícího. Všech r Zassenhausových řetězců tedy můžeme spojit do řetězce jednoho. Pokud je současně $a_0 = b_0$ a $a_r = b_s$, pak platí

$$a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_s) = a_i = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, r-1\ ,$$

a tedy konečný prvek jednoho řetězce je zároveň počátečním prvkem následujícího řetězce. Spojený řetězec nazveme *Zassenhausovým zjemněním* řetězce (1) vzhledem k řetězci (2) a použitý postup *Zassenhausovou metodou.*

Schreierovu větu ve svazech dokázal pro dva libovolné řetězce již Ø. Ore, který zavedl při zkoumání její platnosti v nemodulárních svazech[88] pojem *normálního prvku* ve svazu jako analogii pojmu normální podgrupy v grupě. Nepodařilo se mu však dokázat, zda vlastnost normality zůstane zachována i ve zjemněném řetězci.

Odlišný přístup k problému normality zaujal A. I. Uzkov; každému prvku c svazu S přiřadil určitou podmnožinu N_c svazu S, jejíž prvky nazýval *normální v prvku c*. Předpokládal, že pro každé dva prvky svazu S je průnik $N_a \cap N_b$

---

[85] Camille Marie Ennemond Jordan (1838–1922).
É. Bertin, É. Piccard: *Nachruf auf Camille Jordan*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 174 (1922), 209–214.
C. Jordan: *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870; další vyd. 1957; J. Gabay, Paris, 1989, 16+669 stran.
C. Jordan: *Commentaire sur Galois*, Mathematische Annalen 1(1869), 141–160.
Œuvres de Camille Jordan, I–IV, Gauthier-Villars, Paris, 1961, 1961, 1962, 1964.
Ludwig Otto Hölder (1859–1937).
B. L. van der Waerden: *Nachruf auf Otto Hölder*, Mathematische Annalen 116(1938), 157–165.
O. Hölder: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Berichte Leipzig 53(1901), 1–64.
O. Hölder: *Zurückführung einer beliebigen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Mathematische Annalen 34(1889), 26–56.

[86] Kompoziční řadou nazveme každou normální řadu, která nemá žádné vlastní zjemnění.

[87] V. Kořínek užívá jiné označení: $[ab] = a \wedge b$, $(ab) = a \vee b$.

[88] Řekneme, že svaz S je *modulární*, resp. *Dedekindův*, když pro každé tři prvky $a, b, c \in S$ splňující podmínku $a \geq b$ platí rovnost $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.

neprázdný. Pak zjišťoval, jaké vlastnosti musí takovéto přiřazení mít, aby Zassenhausova zjemnění dvou normálních řetězců byla opět normálními řetězci a aby platila Schreierova věta s Zassenhausovými zjemněními.

Vladimír Kořínek nedefinoval normalitu pomocí podmnožin jako A. I. Uzkov, ale uvažoval ve svazu S binární relaci N, která má pouze tuto vlastnost: pokud je aNb, pak je $a \geq b$. Jestliže je aNb, pak říkáme, že prvek b je *normální* v prvku a.

Řetězec $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$, kde $a_i N a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, r-1$, nazval V. Kořínek *normálním řetězcem.* Uzkovovy výsledky pak prezentoval ve své terminologii a podal četná zjednodušení jeho důkazů.

Dále zavedl pojem jednoduché podobnosti kvocientů zdola a shora:

Mějme prvky a, b svazu S, pro něž $a \geq b$. Podsvaz všech prvků $x \in S$, pro které je $a \geq x \geq b$, nazveme *kvocientem* a označíme a/b. Obsahuje-li kvocient a/b pouze prvky a, b, pak se nazývá *prvokvocient.* Řekneme, že dva kvocienty a/b a c/d jsou *zdola jednoduše podobné*, pokud existuje takový kvocient x/y, že současně platí

$$a = b \vee x, \quad y = b \wedge x, \quad c = d \vee x, \quad y = d \wedge x\,.$$

Analogicky definoval V. Kořínek pojem *shora jednoduché podobnosti.*

Pojem jednoduché podobnosti kvocientů zavedl již dříve Ø. Ore, jednalo se však o podobnost obecnou. Rozlišení jednoduché podobnosti na dva případy – jednoduchou podobnost zdola a shora – zavedl až Vladimír Kořínek.

Mějme tedy ve svazu dva normální řetězce a sestrojme Zassenhausovy řetězce příslušející k původním řetězcům. Vladimír Kořínek zjišťoval, jaké podmínky musí (kromě podmínky uvedené v definici normality) relace N splňovat, aby byly tyto Zassenhausovy řetězce také normální a aby dvojice kvocientů utvořených z Zassenhausových řetězců byly zdola jednoduše podobné. Předpokládal, že relace N ve svazu S má tuto vlastnost:

(3) Pro libovolné dva prvky $a, b \in S$ existuje alespoň jeden prvek v, pro který je $b \geq v$ a aNv.

Za tohoto předpokladu hledal podmínky pro relaci N, za nichž by zobrazení mezi dvěma zdola jednoduše podobnými kvocienty byl svazový izomorfismus.

Na tuto Kořínkovu práci bezprostředně navázal A. Ch. Livšic[89]; ukázal, že předpoklad, který V. Kořínek kladl na relaci N, není pro platnost Jordanovy-Hölderovy věty nutný a určil nutné a postačující podmínky pro relaci normality bez jakýchkoli počátečních omezení. Hlavním výsledkem jeho práce je věta, která velmi úzce souvisí s výsledky Vladimíra Kořínka; platí-li podmínka (3), je Livšicova věta ekvivalentní výsledku V. Kořínka.

Mějme svaz S. Zassenhausovy řetězce každých dvou normálních řetězců tohoto svazu jsou normální a dvojice odpovídajích si kvocientů těchto řetězců

[89] A. Ch. Livšic: *O teoreme Žordana-Gel'dera v strukturach*, Matematičeskij sbornik 24(66) (1949), 227–235; citována je zde práce [K19] – A. Ch. Livšic využívá i lemmata z Kořínkovy práce [K19].

jsou izomorfní tehdy a jen tehdy, pokud relace normality vyhovuje následujícím podmínkám. Pro každé čtyři prvky $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ platí:

(1) $x_1 N x_2$ a $x_1 \geq y_1 N y_2$ implikuje $(x_2 \vee y_1) N (x_2 \vee y_2)$,

(2) $x_1 N x_2$ a $y_1 N y_2$ implikuje $(x_1 \wedge y_1) N ((x_1 \wedge y_2) \vee (x_2 \wedge y_1))$,

(3) $x_1 N x_2$ a $y_1 N y_2$ implikuje: každý prvek y, pro něž $x_1 \wedge y_1 \geq y \geq (x_1 \wedge y_2) \vee (x_2 \wedge y_1)$, je β-dedekindovský[90] vzhledem k $x_1 \wedge y_1$ a x_2,

(4) $x_1 N x_2$ a $y_1 N y_2$ implikuje: každý prvek x, pro něž $x_2 \vee (x_1 \wedge y_1) \geq x \geq x_2 \vee (x_1 \wedge y_2)$, je γ-dedekindovský[91] vzhledem k x_2 a $x_1 \wedge y_1$.

Na Kořínkovu práci navázal rumunský matematik Dan Barbilian (1895–1961).[92] Práci [K19] citují např. tyto monografie: *Teorija grupp* od A. G. Kuroše (2. vydání), *Lattice Theory* od G. Birkhoffa (2. vydání), *Algebra I* od L. Rédeiho (1900–1980) a *Einführung in die Verbandstheorie* od G. Szásze (1884–1952).

Další původní vědeckou práci publikoval V. Kořínek až roku 1949, tj. po osmileté přestávce. Jedná se o práci [K20], přesněji řečeno o dvojici prací *Svazy, v nichž platí obecně věta Jordan-Hölderova* [K20] a *Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true* [K21], které obsahují stejné výsledky, ale nejsou zcela totožné; anglická verze je oproti české stručnější.[93] Protože rozdíly nejsou podstatné, budeme dále hovořit jen o publikaci [K20].

V této práci se V. Kořínek zabývá svazy s konečnými řetězci. V takovém svazu S mezi každými dvěma prvky $a, b \in S$, $a > b$, existují maximální řetězce konečné délky. Cílem práce je popsat všechny svazy, v nichž platí Jordanova-Hölderova věta s dolní nebo horní jednoduchou podobností kvocientů. To znamená, že mezi každými dvěma prvky a a b mají všechny maximální řetězce stejnou délku a kvocienty jednoho řetězce lze vzájemně jednoznačně přiřadit ke kvocientům druhého řetězce tak, aby odpovídající kvocienty byly zdola (resp. shora) jednoduše podobné.

---

[90] Prvek a je β-dedekindovský vzhledem k b a c, pokud $a \leq b$ a $b \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$.

[91] Prvek a je γ-dedekindovský vzhledem k b a c, pokud $a \geq b$ a $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.

[92] D. Barbilian: *Normalités localement ou intégralement involutives* (franc. překlad názvu), Acad. Repub. Pop. Române Stud. Cerc. Mat. 4(1953), 29–67.
Viz též M. Benado: *Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golovin II*, Mathematische Nachrichten 16(1957), 137–194;
M. Benado: *Sur une interprétation topologique de la notion de normalité unitaire*, Bulletin des Sciences Mathématiques 81(1957), 87–112 – obě tyto Benadovy práce citují Kořínkův článek [K19].
Kořínkovu práci [K19] cituje roku 1963 též Václav Havel.
V. Havel: *On semichained refinements of chains in equivalence lattice*, Czechoslovak Mathematical Journal 13(88)(1963), 533–538.

[93] Například v úvodním paragrafu věnovaném zejména definicím a značení je v české verzi oproti anglické navíc definován svaz, podsvaz, modulární a distributivní svaz atd., V. Kořínek se zde věnuje i terminologickým otázkám teorie svazů. Důkazy některých vět jsou v anglické verzi stručnější, v české jsou vyslovována i duální tvrzení k některým významným dokazovaným větám (například k tzv. „hlavní větě“ obsahující nejdůležitější výsledek práce).

K sepsání této práce byl V. Kořínek inspirován studiem Birkhoffovy knihy *Lattice Theory*. Domníval se, že není zcela jasně patrný význam tzv. dolní a horní Birkhoffovy podmínky[94], a právě na základě vyšetřování této problematiky vznikl článek [K20]. Kromě výše zmíněné Birkhoffovy monografie vycházel V. Kořínek z prací Ø. Oreho[95], z práce H. Hermese a G. Köthebo[96] a z vlastního článku [K19].

Vladimír Kořínek dal Birkhoffovy podmínky do souvislosti s jednoduchou podobností kvocientů,[97] a tím i s Jordanovou-Hölderovou větou. Pracoval s pojmy, které rozvinul v předchozí práci, tedy se shora a zdola jednoduše podobnými kvocienty. Birkhoffovy podmínky[98] nahradil horní a dolní podmínkou prvokvocientů,[99] které jsou v případě svazů s konečnými řetězci s Birkhoffovými podmínkami ekvivalentní, jak v jedné z vět této práce V. Kořínek dokázal.

Hlavním výsledkem Kořínkovy práce [K20] je důkaz tvrzení, že ve svazu s konečnými řetězci je tvrzení věty Jordanovy-Hölderovy s dolní (horní) jednoduchou podobností kvocientů ekvivalentní dolní (horní) podmínce prvokvocientů. V. Kořínek označuje tento výsledek jako *Hlavní větu* (*Main Theorem*), duální výsledek jako *Duální větu k hlavní větě*:

Mějme svaz S s konečnými řetězci. Ve svazu S platí věta Jordan-Hölderova s dolní (horní) jednoduchou podobností kvocientů tehdy a jen tehdy, platí-li ve svazu S dolní (horní) podmínka prvokvocientů.[100]

Dalším významným výsledkem práce [K20] je následující věta o jednoznačnosti (*Unicity Theorem*):

Mějme svaz S s konečnými řetězci, v němž platí dolní (horní) podmínka prvokvocientů. Budiž $a > b$ a mezi a, b mějme dva maximální řetězce

$$(1) \qquad a = a_0 > a_1 > \cdots > a_r = b \ ,$$

$$(2) \qquad a = b_0 > b_1 > \cdots > b_s = b \ ,$$

(kde je $r = s$). Pak lze jen jedním způsobem přiřadit kvocienty řetězce (1) *ke kvocientům řetězce* (2) *tak, aby sobě odpovídající kvocienty byly si zdola (shora) jednoduše podobné. Je-li některý kvocient a_i/a_{i+1} zdola (shora) jednoduše podobný několika kvocientům b_j/b_{j+1}, pak je přiřazen kvocientu b_j/b_{j+1} s největším (nejmenším) indexem j.*[101]

---

[94] V knize *Lattice Theory* nejsou tyto podmínky nazývány Birkhoffovy, ale *covering conditions*. Název *Birkhoffovy podmínky* zavedl Ø. Ore.

[95] Ø. Ore: *On the Foundation of Abstract Algebra. I, II* – viz výše.

Ø. Ore: *Chains in Partially Ordered Sets* – viz výše.

[96] H. Hermes, G. Köthe: *Theorie der Verbände* – viz výše.

[97] Obecnou jednoduchou podobnost kvocientů G. Birkhoff ve své knize vůbec nezavádí, uvádí pouze určitý speciální případ horní jednoduché podobnosti.

[98] Říkáme, že svaz S splňuje *dolní podmínku Birkhoffovu*, když platí toto: budiž a horním sousedem prvků b, c, $b \neq c$, pak prvek $d = b \wedge c$ je dolním sousedem prvků b, c. Tuto podmínku lze vyslovit také takto: budiž $a = b \vee c$, $d = b \wedge c$ a nechť a/b a a/c jsou prvokvocienty, pak rovněž b/d a c/d jsou prvokvocienty. Viz [K20], str. 15.

[99] Říkáme, že S splňuje *dolní podmínku prvokvocientů*, když platí toto: Budiž a/b prvokvocient a nechť $a = b \vee c$, $d = b \wedge c$, pak c/d je též prvokvocient. Viz [K20], str. 15.

[100] Viz [K20], str. 22–23, resp. [K21], str. 317. Formulace věty je mírně upravena.

[101] Viz [K20], str. 25, 26–27, resp. [K21], str. 320. Formulace věty je mírně upravena.

I tato Kořínkova práce měla ohlas. Reagovali na ni především Kořínkovi žáci Václav Vilhelm[102], Ludvík Janoš[103], Čestmír Vitner[104] a rumunský matematik Mihail Benado[105].

Václav Vilhelm zobecnil Kořínkovu práci oslabením podmínky konečnosti řetězců. Na Kořínkovy výsledky se odvolával i ve své další práci[106], v níž analyzoval Birkhoffovy podmínky ve svazech s konečnými řetězci.

Práce Ludvíka Janoše z roku 1953 je věnována zejména problematice Zassenhausových řetězců v modulárních svazech. Václav Havel citoval Kořínkovu práci [K20] roku 1955.[107]

Pokračovatele Vladimíra Kořínka nalezneme v této oblasti i mezi zahraničními matematiky; zmiňme například Waltera Felschera (1931–2000)[108], který Kořínkovy výsledky rozšířil na částečně uspořádané množiny.

K teorii svazů patří ještě dvě Kořínkovy práce: *Le théorème de Jordan Hölder dans les treillis* [K22] a *Le théorème de Jordan-Hölder et son rôle dans la théorie des groupes et dans la théorie des structures* [K23]. Tyto dvě nepříliš rozsáhlé práce nepřinášejí nové výsledky, ale pouze přehled výsledků dřívějších.

O Kořínkových pracích z teorii svazů a o výsledcích jeho pokračovatelů se můžeme podrobně seznámit v doktorské dizertační práci Š. Bilové.[109]

---

[102] K. Drábek: *Docent Václav Vilhelm šedesátníkem*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 31(1986), 59.
V. Vilhelm: *Teorema Žordana-Gel'dera v strukturach bez uslovija konečnosti cepej*, Čechoslovackij matematičeskij žurnal 4(79)(1954), 29–49. Je zde citována Kořínkova práce [K21].

[103] L. Janoš: *Svojstva uplotnenija Cassenchauza*, Čechoslovackij matematičeskij žurnal 3(78)(1953), 159–180. Je zde citována Kořínkova práce [K21] a jeho nepublikované *Rozhovory o theorii grup a oborech příbuzných* z let 1948/49 a 1949/50.

[104] Z. Nádeník, V. Vilhelm: *Šedesát let doc. RNDr. Čestmíra Vitnera, CSc.*, Časopis pro pěstování matematiky 110(1985), 442–445.
K. Drábek: *Šedesát let docenta Čestmíra Vitnera*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 31(1968), 59–60.
Č. Vitner: *Uslovija semimodularnosti v strukturach*, Čechoslovackij matematičeskij žurnal 3(78)(1953), 265–282. Je zde citována Kořínkova práce [K20] a jeho nepublikované *Rozhovory o theorii grup a oborech příbuzných* z let 1948/49 a 1949/50.

[105] M. Benado: *Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. I, II*, Czechoslovak Mathematical Journal 4(79)(1954), 105–129, 5(80)(1955), 308–343; cituje Kořínkovy práce [K19] a [K21].

[106] V. Vilhelm: *Dvojstvennoe sebe jadro uslovij Birkgofa v strukturach s konečnymi cepjami*, Čechoslovackij matematičeskij žurnal 5(80)(1955), 439–449. Je zde citována Kořínkova práce [K21].

[107] V. Havel: *Rozklady prvků ve svazech splňujících podmínku pro klesající řetězce*, Časopis pro pěstování matematiky 80(1955), 1–16.

[108] W. Felscher: *Jordan-Hölder-Sätze und modular geordenete Mengen*, Mathematische Zeitschrift 75(1960/1961), 83–114.
Viz též E. George: *Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 180(1939), 110–120.

[109] Š. Bilová: *Lattice Theory in Czech and Slovak Mathematics until 1963*, Ph.D. Thesis, Brno, 2004, 135 stran; redukovaná verze je publikována pod stejným názvem v 25. svazku edice Dějiny matematiky *Mathematics throughout the Ages II*, Praha, 2004, 185–346.

5. Frattiniovy podgrupy

Poslední skupina Kořínkových prací je tvořena jen dvěma publikacemi; věnovány jsou problematice Frattiniovy podgrupy. Italský matematik Giovanni Frattini (1852–1925)[110], který se věnoval algebře, geometrii a teorii čísel, ji zavedl roku 1885.[111]

Frattiniovou podgrupou (též Φ-podgrupou) grupy G nazýváme průnik všech maximálních vlastních podgrup grupy G, pokud grupa G takové podgrupy má. Neexistuje-li v grupě G žádná maximální vlastní podgrupa, řekneme, že G je sama svou Frattiniovou podgrupou. Klasickým výsledkem je to, že Frattiniova podgrupa je rovna množině tzv. *negenerátorů*, tj. prvků, které mohou být vyškrtnuty z každé množiny generátorů grupy G, aniž by se generování narušilo.

Práce *Die Frattiniuntergruppe eines direkten Produktes von Gruppen* [K24] je výtahem z přednášky, kterou V. Kořínek přednesl v květnu roku 1959 v Berlíně v rámci týdne přátelství berlínské Humboldtovy univerzity a pražské Karlovy univerzity. Na této přednášce prezentoval své výsledky, které následně uveřejnil s Vlastimilem Dlabem[112] v práci [K25], v níž jsou však prezentovány i výsledky V. Dlaba.[113] Budeme se tedy věnovat nejprve práci [K25] a o článku [K24] se zmíníme v závěru.

Společná práce *The Frattini subgroup of a direct product of groups* [K25] V. Kořínka a V. Dlaba je věnována studiu podmínek, za nichž je Frattiniova podgrupa direktního součinu grup rovna direktnímu součinu jejich Frattiniových podgrup. Autoři navázali na práce W. Gasschütze[114], A. G. Kuroše a S. N. Černikova (1912–1987)[115], G. A. Millera (1863–1951)[116] a V. Dlaba[117]

---

[110] P. Teofilato: *Giovanni Frattini*, Atti Pontificia Accad. 79(1926), 114–116.
M. Emaldi: *Giovanni Frattini 1852–1925*, Irish Mathematical Society Bulletin 23(1989), 57–61.
M. Emaldi, G. Zacher: *Giovanni Frattini (1852–1925), matematico*, Advances in group theory 2002, 191–207.

[111] G. Frattini: *Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, ser. 4, 1(1885), 281–285, 455–457.

[112] L. Procházka: *Šedesátiny profesora Vlastimila Dlaba*, Mathematica Bohemica 117 (1992), 429–435 (viz též Czech. Math. J. 43(1993), 187–192).

[113] Práce [K25] vyšla až v následujícím roce, tj. v roce 1960, předložena však byla již v září 1959, tedy v podstatě ve stejné době jako [K24].

[114] W. Gasschütz: *Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen*, Mathematische Zeitschrift 58(1953), 160–170.

[115] A. I. Mal'cev, V. S. Čarin: *Sergej Nikolaevič Černikov (k pjatidesjatiju so dnja roždenija)*, Uspechi matematičeskich nauk 17(1962), č. 5(107), 177–181.
I. I. Eremin, D. I. Zajcev, M. I. Kargapolov, V. S. Čarin: *Sergej Nikolaevič Černikov (k šestidesjatiju so dnja roždenija)*, Uspechi matematičeskich nauk 28(1973), č. 1(169), 259–263.
A. G. Kuroš, S. N. Černikov: *Razrešimye i nil'potentnye gruppy*, Uspechi matematičeskich nauk 2(1947), č. 3(9), 18–59.

[116] G. A. Miller: *The ϕ-subgroup of a group*, Transactions of the American Mathematical Society 16(1915), 20–26.

[117] V. Dlab: *The Frattini subgroups of abelian groups*, Czechoslovak Mathematical Journal 10(1960), 1–16.
V. Dlab: *Poznámka k jednomu problému týkajícímu se Frattiniho podgrup*, Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 87–90 – v této práci je citován článek [K25].

G. A. Miller ve své práci řešil uvedený problém pro konečné grupy, V. Dlab pro Abelovy grupy a pro grupy s konečným počtem generátorů. Zkoumané téma vzešlo z Kořínkova algebraického semináře.

V práci [K25] je výše zmíněný problém zkoumán v obecném případě. Autoři dokázali větu, která podává nutné a postačující podmínky pro to, aby Frattiniovou podgrupou direktního součinu grup byl direktní součin jejich Frattiniových podgrup:[118]

Mějme grupu G, buď

$$G = \prod_{\varrho \in P}^{\times} G_\varrho \,. \tag{1}$$

Rovnost

$$\Phi(G) = \prod_{\varrho \in P}^{\times} \Phi(G_\varrho) \tag{2}$$

pro Frattiniovu podgrupu $\Phi(G)$ grupy G neplatí tehdy a jen tehdy, pokud v direktním rozkladu grupy G existují dva direktní faktory $G_{\sigma_1}, G_{\sigma_2}$ s dvěma maximálními normálními podgrupami N_{σ_1}, N_{σ_2} takovými, že

$$G_{\sigma_1}/N_{\sigma_1} \cong G_{\sigma_2}/N_{\sigma_2}$$

a

$$\Phi(G_{\sigma_1}) \not\subset N_{\sigma_1} \,.$$

Z této věty jsou pak odvozeny poměrně jednoduché podmínky pro platnost implikace (1) $\Rightarrow$ (2); jde však pouze o podmínky postačující. Z nich dále vyplývá, že uvedená implikace platí pro všechny řešitelné grupy, pro všechny grupy, v jejichž direktním rozkladu (1) má každý faktor konečný systém generátorů, a pro všechny grupy, pro které má Frattiniova podgrupa každého direktního faktoru konečný systém generátorů. Rovněž je ukázáno, že výrok

Pro každý direktní rozklad (1) *libovolné grupy G platí* (2)

je ekvivalentní s výrokem

Neexistuje jednoduchá grupa bez maximálních podgrup.

Problém, zda jsou tyto výroky pravdivé, je však velmi obtížný; v práci [K25] řešen není.

Připomeňme na závěr čtyři věty z práce [K25], které Vladimír Kořínek prezentoval již v článku [K24], tedy ve své přednášce na Humboldtově univerzitě:

1. *Tvrzení, že pro každou grupu G a pro každý její direktní rozklad* (1) *platí rovnost* (2)*, je ekvivalentní následujícímu tvrzení: Neexistuje žádná jednoduchá grupa bez maximálních podgrup.*

---

[118] [K25], str. 354. Volný překlad. V článku [K25], str. 351, je uvedeno, že jde o výsledek V. Dlaba.

2. *Buď G grupa a buď* (1) *její určitý direktní rozklad. Pokud neexistují žádné dva direktní faktory G_σ, G_τ, $\sigma, \tau \in P$, které mohou být homomorfně zobrazeny na tutéž jednoduchou grupu bez maximálních podgrup, pak pro podgrupu $\Phi(G)$ platí* (2).

3. *Pokud v každém rozkladu*

$$G = G_1 \times G_2$$

grupy G na dva direktní faktory nemohou být tyto faktory G_1, G_2 homomorfně zobrazeny na tutéž jednoduchou grupu bez maximálních podgrup, pak pro každý direktní rozklad (1) *grupy G platí* (2).

4. *Buď G řešitelná grupa, specielně tudíž nilpotentní nebo Abelova grupa. Potom pro každý direktní rozklad* (1) *této grupy platí* (2).[119]

Práci [K25] cituje např. E. Schenkman (*Group Theory*), A. G. Kuroš (*Teorija grupp*), D. J. S. Robinson (*Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*) a J. D. Dixon (*Problems in Group Theory*). Navázal na ni např. J. B. Riles.[120]

LITERATURA

[A] Albert A. A., *Structure of Algebras*, AMS, New York, 1939, 7+210 stran.

[Ba] Bachmann P. G. H., *Zahlentheorie IV. Die Arithmetik der quadratischen Formen*, Teubner, Leipzig, 1898, 16+668 stran; 2. vyd. 1923, 22+537 stran.

[B] Birkhoff G., *Lattice Theory*, AMS, New York, 1940, 2. vyd. AMS, New York, 1948, 13+283 stran; 3. vyd. AMS, Providence, 1967, 6+418 stran, dotisk 1973; rusky *Teorija struktur*, Moskva, 1952, 407 stran; *Teorija rešetok*, Nauka, Moskva, 1984, 564 stran.

[BM] Birkhoff G., MacLane S., *Algebra*, Alfa, Vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1973, 662 stran, 2. vyd. 1974.

[De] Deuring M., *Algebren*, Chelsea Publishing Comp., New York, 1948, 143 stran; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1935, 8+143 stran; 2. vyd. 1968.

[D] Dixon J. D., *Problems in Group Theory*, Blaisdell Publishing Comp., Waltham, Toronto, London, 1967, 15+176 stran; další vyd. Dover, New York, 1973.

[E] Eichler M., *Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952, 220 stran.

[H] Hermes H., *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

---

[119] Všechny čtyři věty viz článek [K24], str. 697. Volný překlad. Tyto čtyři věty zformuloval a dokázal V. Kořínek (viz [K25], str. 351).

[120] J. B. Riles: *The near Frattini subgroups of infinite groups*, Journal of Algebra 12(1969), 155–171.
J. B. Riles: *The near Frattini subgroups of direct products of groups*, Journal of the London Mathematical Society, 2nd ser., 8(1974), 239–244.

[Ja1] Jacobson N., *The Theory of Rings*, AMS, New York, 1943, 6+150 stran; AMS, Providence 1948; rusky *Teorija kolec*, Moskva, 1947, 287 stran.

[Ja2] Jacobson N., *Structure of Rings*, AMS, Providence, 1956, 7+263 stran; 1964, 1968, 11+299 stran; rusky: *Stroenie kolec*, Moskva, 1961, 392 stran.

[J] Jones B. W., *The Arithmetic Theory of Quadratic Forms*, John Wiley & Sons, New York, 1950, 207 stran.

[K1] Kuroš A. G., *Teorija grupp*, Moskva, Leningrad, 1944, 2. vyd. GITTL, Moskva, 1953, 467 stran; 3. vyd. Nauka, Moskva, 1967, 648 stran; 4. vyd. 1970; německy: *Gruppentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1953, 12+418 stran; 2. vyd. 1955; *Gruppentheorie I, II*, Akademie-Verlag, Berlin, 1970, 1972, 22+360, 14+358 stran; anglicky: *The Theory of Groups I, II*, Chelsea Publishing Comp., New York, 1955, 1956, 272+308 stran; 2. vyd. 1960; maďarsky: Budapest 1955, rumunsky: Bukurešť 1959, japonsky: Tokyo 1960, 1961.

[K2] Kuroš A. G., *Kapitoly z obecné algebry*, Academia, Praha, 1968, 310 stran; 2. vyd. 1977, 310 stran (přeložil L. Koubek a J. Blažek).

[P] Procházka L. a kol., *Algebra*, Academia, Praha, 1990, 560 stran.

[Re] Rédei L., *Algebra I.*, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1959, 15+797 stran; maďarsky: Akadémiai Kiadó, Budapest 1954.

[Ro] Robinson D. J. S., *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups I, II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, 14+210, 12+254 stran.

[Sc] Schenkman E., *Group Theory*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London, 1965, 14+289 stran.

[Sch] Schwarz Š., *Akademik Vladimír Kořínek šesdesiatnikom*, Časopis pro pěstování matematiky **84** (1959), 222–235, článek je též otištěn (bez Kořínkova seznamu publikací) v knize K. Nemoga, B. Riečan (ed.): *Matematika v b mol*, VEDA, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1999, str. 37–40.

[SW] Specht W., *Gruppentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956, 7+457 stran.

[SA] Speiser A., *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1923, 8+194 stran; 2. vyd. 1927, 9+251 stran; 3. vyd. 1937, 10+262; 4. vyd. Birhäuser-Verlag, Basel, Stuttgart 1956, 11+271 stran; 5. vyd. Birhäuser-Verlag, Basel, Boston, Stuttgart 1980, 11+271 stran.

[Sz] Szász G., *Einführung in die Verbandstheorie*, Akadémiai Kiadó, Verlag der Ungarischen Akad. der Wissenschaften, Budapest, 1962, 253 stran; angl. *Introduction to Lattice Theory*, Acad. Press, New York, London, 1963, 229 stran; franc. *Théorie des Treillis*, Budapest, 1971, 9+227 stran; maďarský originál: Akadémiai Kiadó, 1959, 225 stran.

[W] Wussing H., *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB – Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969, 258 stran.

[Zap] Zappa G., *Fondamenti di teoria dei gruppi I, II*, Edizioni Cremonese, Roma, 1965, 1970, 20+291, 21+411 stran.

[Zas] Zassenhaus H., *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Teubner, Leipzig, 1937, 6+151 stran; 2. vyd. 1949.

* * * *

[G] Gottwald S., Ilgauds H.-J., Schlote K.-H. (Ed.), *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1990, 504 stran.