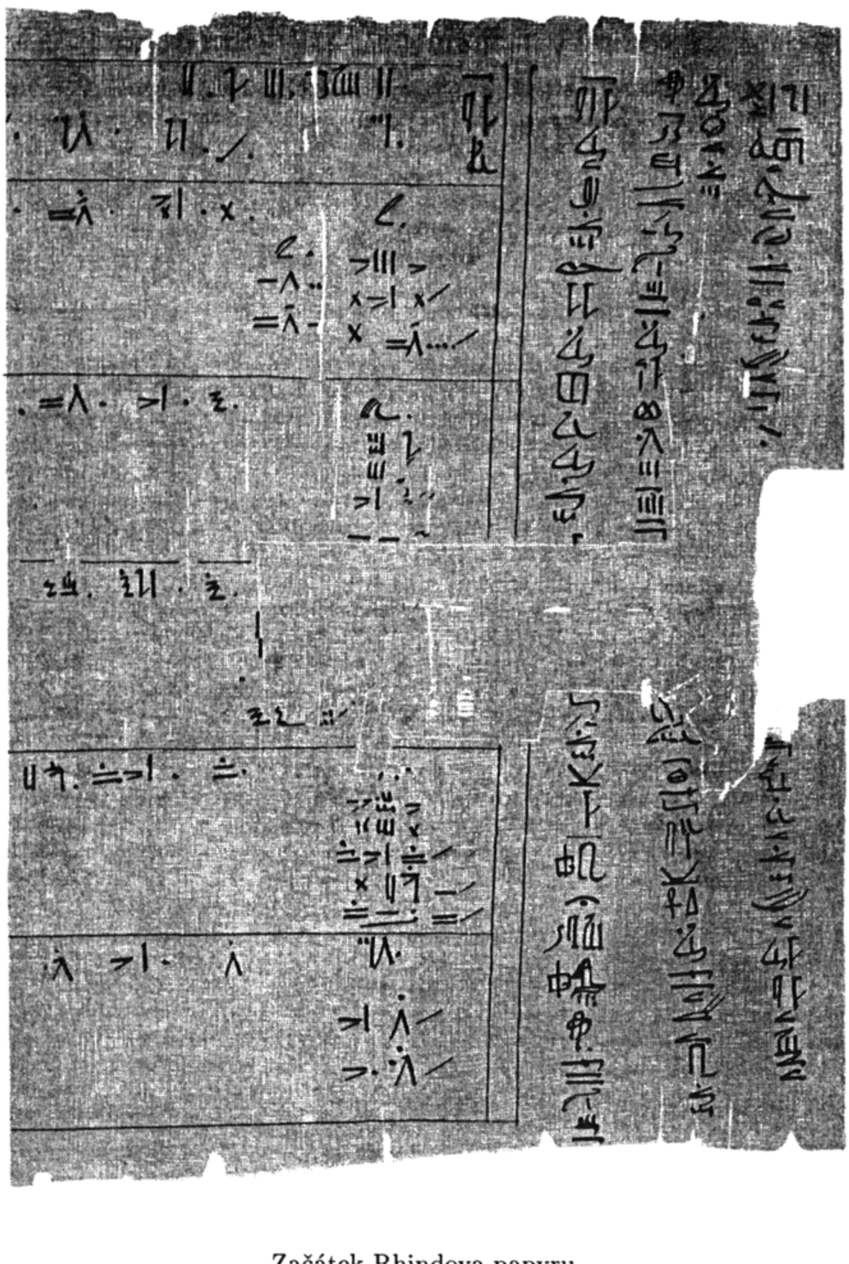


Začátek Rhindova papyru

Začátek výpočtů pro proniknutí do věcí, pro poznání všeho toho, co je zastřené, [...], *všeho skrytého. Věru, tento svitek z 33. roku 4. měsíce doby záplav,* [z doby krále Horního] *a Dolního Egypta Auserrea obdařeného životem, je kopií staré knihy sepsané v době* [krále Horního a Dolního Egypta Nimaatrea]; *písař Ahmose to byl, kdo opsal tento soupis.*

MATEMATIKA VE STARÉM EGYPTĚ

PRAMENY.

V tomto odstavci uvedeme přehled nejdůležitějších egyptských matematických textů. V úvahu vezmeme pouze ty texty, které jsou starší než matematika antická.

Poznamenejme, že existence samostatných matematických textů svědčí o tom, že již v době XII. dynastie (asi 1994 až 1797 př. Kr.) byla ve starém Egyptě matematika konstituována jako samostatná disciplína zahrnující počítání s přirozenými čísly a zlomky, hledání neznámého množství, výpočty obsahů rovinných útvarů a objemů těles, výpočty velikostí úhlů, délek apod.

1. **Rhindův papyrus** (též **Ahmosův** nebo **Londýnský papyrus**).

Rhindův papyrus byl nalezen spolu s dalšími texty v egyptských Thébách v polovině 19. století, roku 1858 ho koupil v Luxoru právník a egyptolog Alexander Henry Rhind (1833–1863), skotský znalec starožitností. Dnes je Rhindův papyrus uložen v Britském muzeu v Londýně (British Museum).

Tento papyrus byl při výrobě slepen ze čtrnácti listů. Po nalezení byl rozříznut na dvě části (319 × 33 cm a 206 × 33 cm, v Britském muzeu jsou označeny BM 10057, BM 10058) a jejich okraje byly ulámány. Tyto zlomky byly v letech 1862 a 1863 zakoupeny E. Smithem a roku 1909 se s jeho sbírkou dostaly do majetku Historické společnosti v New Yorku. Roku 1922 byly nalezeny v *Egyptian Collection of the New Yok Historical Society* a identifikovány jako součást Rhindova papyru. Nyní jsou uloženy v Brooklynském muzeu (Museum of Fine Arts).

Rhindův papyrus opsal v 33. roce vlády krále Apopiho (XV. dynastie, kolem r. 1560 př. Kr.) písař Ahmose z materiálu pocházejícího z doby vlády Amenemheta III. (asi 1853 až 1809). Byl pečlivě uchováván ještě v době XVIII. dynastie (asi 1543 až 1292).

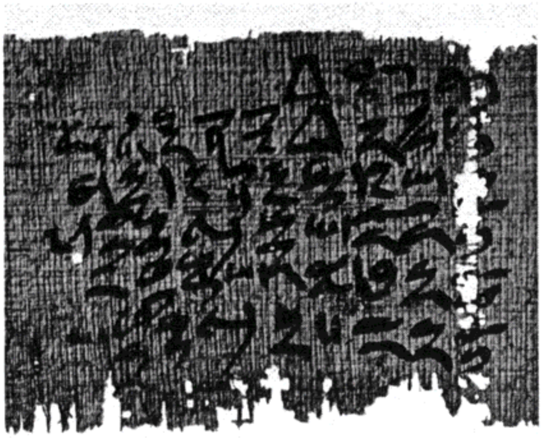
Jde o sbírku 87 úloh označovaných **R1** až **R87** s návody a řešeními, navíc obsahuje tzv. tabulku $2/n$; je to nejrozsáhlejší a nejvýznamnější matematický text ze starého Egypta.

Rhindův papyrus byl poprvé publikován a komentován roku 1877 A. Eisenlohrem [E]. Řada článků, v kterých byly Eisenlohrův překlad a komentáře diskutovány, vedla k dalším překladům a komentářům, které po dlouholetém studiu publikovali anglický egyptolog T. E. Peet [P][1] roku 1923 a o několik let později A. B. Chace, L. S. Bull a H. P. Manning [Ch]. Nedávno Rhindův papyrus znovu vydali G. Robins a Ch. Shute [RS].[2]

---

[1] Peet komentoval Rhindův papyrus z hlediska filologického i matematického, navíc zařadil na původní místa i malé zlomky, které byly nalezeny v New Yorku.

[2] Ruský překlad Rhindova papyru je v knize [Bob].



Malá část Moskevského papyru

(příklad **M14**)

2. Moskevský papyrus (též **Goleniščevův papyrus**).

Tento papyrus získal roku 1893 egyptolog V. S. Goleniščev (1856–1947) a roku 1912 ho věnoval Puškinově muzeu krásných umění v Moskvě. Jde o palimpsest, tj. o papyrus, který byl po odstranění původního textu použit znovu; původní text je znatelný, ale není čitelný. Nový text je opisem staršího textu z XII. dynastie, opsán byl patrně v době XIII. dynastie (asi 1797 až 1634).

Moskevský papyrus původně měřil přibližně 544×8 cm, slepen byl z jedenácti listů; dnes sestává z jedné velké části a devíti malých zlomků. Obsahuje 25 příkladů označovaných **M1** až **M25**,[3] které nejsou tématicky uspořádány; snad šlo o jakousi učební pomůcku či test znalostí. Je to druhý nejvýznamnější matematický text pocházející ze starého Egypta.

Roku 1917 začal tento papyrus studovat akademik B. A. Turaev (1868–1920), který hieratický text přepsal do hieroglyfů. Po jeho smrti pokračoval v práci egyptolog V. V. Struve (1889–1965), který roku 1930 Moskevský papyrus [S] vydal.

3. Káhúnské papyry.

Káhúnské matematické papyry nalezl roku 1889 W. M. F. Petrie (1853–1942) v Káhúnu. Jde o pět zlomků (značené jsou IV.2, IV.3, XLV.1, LV.3, LV.4), patrně jsou to palimpsesty. Dva největší měří přibližně 41 × 14 cm a 43 × 13 cm, pocházejí z doby XII. dynastie. Jsou uloženy v Britském muzeu v Londýně. Obsahují část tzv. tabulky $2/n$, hieratické zápisy velkých čísel a několik matematických úloh; jednotlivé odstavce budeme značit **K1**, **K2**, **K2'**, **K3**, **K4**, **K5** a **K6**. Viz [Gr].

4. Dřevěné tabulky.

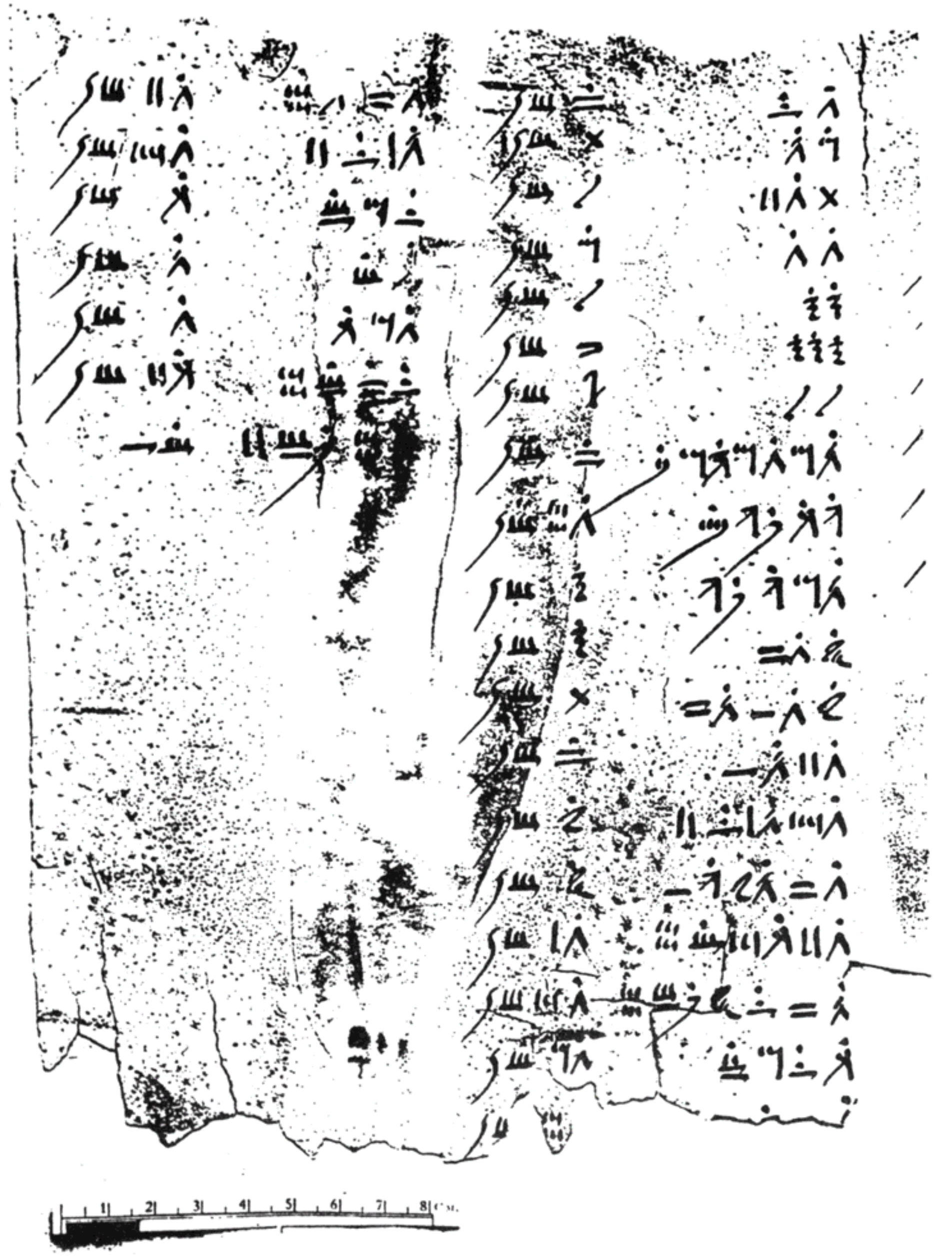
Dvě dřevěné tabulky pokryté štukem byly nalezeny patrně v Achmímu, dnes jsou uloženy v Káhirském egyptologickém muzeu (Cairo Museum, tabulky č. 25 367, 25 368). Pocházejí z doby XII. dynastie. Měří přibližně 47 × 26 cm, popsány jsou hieratickým písmem, obsahují nějaké seznamy osob, jakýsi dopis a výpočty dílů objemové jednotky *hekat* (měřice); výsledky jsou uvedeny v menších jednotkách. Viz [D1], [D2] a [Pe1].

5. Kožený svitek.

Kožený svitek byl nalezen údajně spolu s Rhindovým papyrem, zakoupen byl roku 1864, dnes je uložen v Britském muzeu (BM 10 250). Pochází z doby XV. dynastie (asi 1634 až 1526). Rozvinut byl vzhledem k velmi špatnému stavu až roku 1927. Měří přibližně 44 × 26 cm, obsahuje tabulku 26 součtů kmenných zlomků ve čtyřech sloupcích (ve třetím a čtvrtém je totéž, co v prvním a druhém). Je značně poškozen; zápisy však bylo možno dobře rekonstruovat, neboť byly uvedeny dvakrát. Viz [Gl].

---

[3] Z prvního a druhého se dochovalo jen několik slov, některé další příklady se opakují.



Kožený svitek

(třetí a čtvrtý sloupec)

6. Berlínský papyrus.

Berlínský papyrus byl nalezen patrně v Thébách zhruba současně s Rhindovým papyrem. Dnes je uložen v Berlínském muzeu (papyrus 6 619). Pochází nejspíš z doby XII. dynastie. Sestává ze dvou větších kusů (větší měří přibližně $14,5 \times 14,2$ cm) a několika zlomků, popsán je oboustranně. Obsahuje řešené úlohy **B1** až **B4**, patrně jde o část jakési sbírky příkladů. Viz [S1] a [S2].

O matematických poznatcích starých Egypťanů svědčí i texty, které nejsou přímo matematické.

Americký archeolog George Andrew Reisner (1867–1942) získal roku 1904 čtyři svitky z doby Senusreta I. (asi 1971 až 1926, XII. dynastie), na kterých jsou zachyceny některé praktické aplikace matematiky (konstrukce lodí, obchod apod.). Uloženy jsou v Bostonském muzeu (Boston Museum of Fine Arts).

Papyrus označovaný jako Anastasi I byl zakoupen roku 1839, původním majitelem byl Giovanni Anastasi, arménský obchodník usedlý v Alexandrii a švédský konzul, který obchodoval se starožitnostmi. Jeho sbírky jsou nyní v Britském muzeu, Leydenském muzeu a v Louvru. Papyrus měří přibližně 21×8 cm, je uložen v Britském muzeu (BM 10 247), datován je do XIX. dynastie (asi 1292 až 1186).

Jde o dopis úředníka Horiho písaři Amenemopovi, kterému Hori zadává tři úkoly **A1**, **A2** a **A3**. Nejde v klasickém slova smyslu o matematické úlohy, spíše o jakési „projekty", ke kterým je třeba nejprve stanovit „vstupní hodnoty" (**A1** – viz ukázka).

O matematických znalostech starých Egypťanů svědčí i mnohé projevy egyptské civilizace. Projektování pyramid, chrámů a dalších staveb, rozpisy prací a přísunu materiálu, zásobování pracovníků potravinami a veškerá organizace společnosti, to vše kladlo nemalé počtářské nároky na tehdejší inteligenci.

V následujícím textu podrobně pojednáme o *matematických dovednostech starých Egypťanů*; naše současné znalosti tohoto tématu jsou do značné míry postaveny na studiu výše uvedených textů. Snad bychom měli přesněji mluvit o *výuce matematiky ve starém Egyptě*, neboť vycházíme z materiálů, z nichž některé jsou patrně učebním textem, jiné soupisem příkladů, další snad nějakými elaboráty tehdejších studentů. Navíc je třeba poznamenat, že se jich bohužel dochovalo žalostně málo, takže je obtížné soudit, zda tyto texty výuku matematiky ve starém Egyptě reprezentují.

Co by si asi mysleli naši vzdálení potomci o dnešních matematických znalostech, kdyby měli k disposici pouze školní sešit některého výborného žáka z maturitního ročníku, např. na průmyslové škole strojní, ve kterém by byla zachycena výuka algebry, a školní sešit nějakého propadajícího žáka z pátého ročníku základní školy zachycující výuku geometrie, a navíc by nebylo známo, jakého charakteru tyto dva dokumenty jsou? Naši potomci by patrně usoudili, že algebra byla na podstatně vyšší úrovni než geometrie, a snad by spekulovali o existenci nějaké „vyšší matematiky".

Berlínský papyrus

(dvě větší části z obou stran)

ARITMETIKA.

Zápis čísel.

Se znaky představujícími přirozená čísla se ve starém Egyptě setkáváme již v Archaické době, jejich podoba se však tehdy teprve utvářela.[4] Raná forma egyptských číselných znaků (asi 3150 až 2930) je zachycena na následujícím obrázku:

V době I. dynastie se již objevil znak pro tisíc, ve Staré říši znak pro milion (v Nové říši však vymizel). Již v Archaické době a ve Staré říši byla běžně zaznamenávána poměrně velká čísla. Uveďme dva příklady.

Král Chasechem (II. dynastie) zanechal zprávu o potlačení velkého povstání v Dolním Egyptě, při němž prý bylo zabito 48 205 (nebo snad 47 209) vzbouřenců a zajato 120 000 obyvatel.

Na reliéfech v Sahureově zádušním chrámu (V. dynastie) je zobrazen Sahure ve vítězných bitvách.[5] Na jednom je výčet válečné kořisti získané v Lybii: 123 440 kusů dobytka, 223 400 oslů, 232 413 kusů lovné zvěře, 243 688 ovcí, celkem 822 941 kusů.

Ve starém Egyptě byla od nepaměti užívána nepoziční desítková soustava. Jednotky, desítky, stovky, tisíce, desetitisíce, statisíce a miliony byly označovány následujícími hieroglyfy:

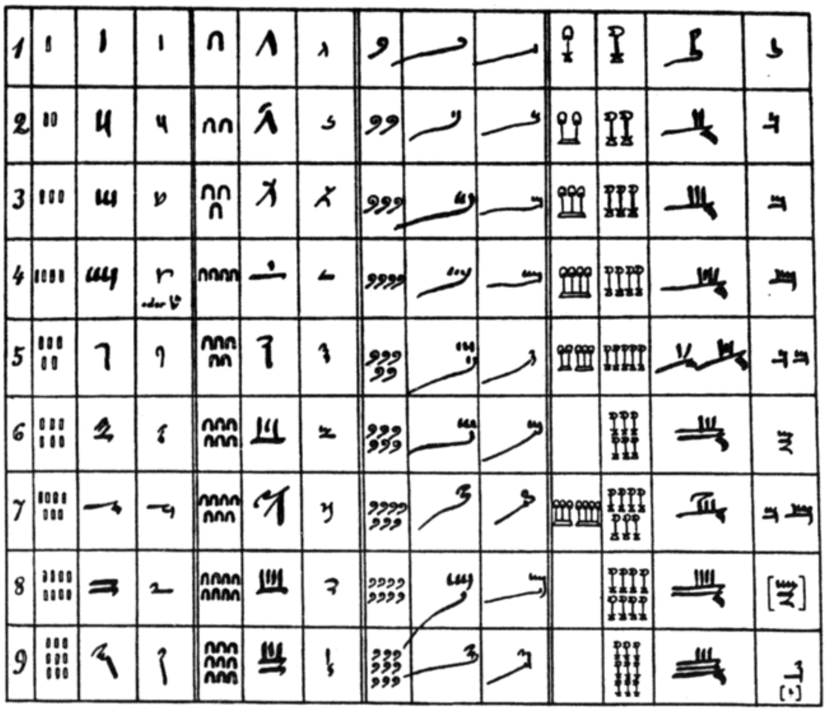
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

[4] O číslech a jejich slovním označení viz [Se1] až [Se5].

[5] Tyto vápencové desky jsou dnes v Berlínském muzeu.

Tyto symboly patrně představovaly měřicí hůl, kraví pouta, měřicí provazec, květ lotosu, ukazovák, pulce, klečící postavu (snad bůh vzduchu a prostoru). Přirozená čísla byla zaznamenávána prostým nahromaděním potřebných znaků. Např. čísla 2 465 a 2 123 013 byla zapsána takto:[6]

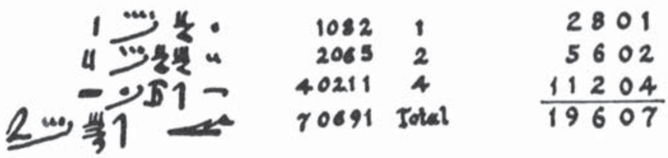
Zápisy egyptských čísel přehledně zachycuje následující tabulka. Ve čtyřech sloupcích oddělených dvojitými čarami jsou zachyceny jednotky, desítky, stovky a tisíce v hieroglyfické, hieratické a démotické podobě, u tisíců navíc ve starší a mladší hieroglyfické verzi.

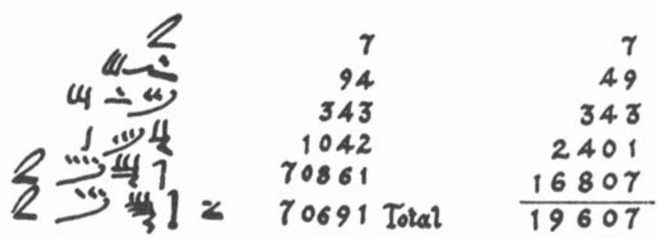


[6] Poznamenejme, že čísla (stejně jako text) byla někdy zapisována zprava doleva, někdy zleva doprava.

Sčítání a odčítání.

Sčítání dvou nebo více přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě nedělalo problémy. Postačovalo jen „shrnout" znaky obou čísel dohromady a případně deset jednotek daného řádu nahradit jednou jednotkou řádu vyššího. Při odčítání se postupovalo obdobně, někdy bylo třeba nahradit jednotku vyššího řádu deseti jednotkami řádu nižšího. Dva příklady součtu několika čísel v hieratické podobě ukazuje následující obrázek (jde o součty z příkladu **R79** – prostřední sloupec je tzv. *transliterace*, pravý sloupec překlad, tj. přepis do dnešní podoby).





Násobení a dělení.

Součin dvou přirozených čísel počítali staří Egypťané poměrně osobitou metodou. Jednoho z činitelů postupně zdvojnásobovali a jeho vhodné násobky, které někdy označovali šikmými čárkami, potom sečetli. Výpočet součinů dvou přirozených čísel v dochovaných egyptských matematických textech nacházíme zřídka, většinou je uveden jen výsledek. Uvedený postup je však velmi často zachycen při násobení zlomků a smíšených čísel (viz dále).

Egyptskou metodu násobení využívající zdvojnásobování nyní ukážeme na dvou příkladech, vypočteme součiny $11 \cdot 17 = 187$ a $9 \cdot 21 = 189$.

\	1	17	\	1	21
\	2	34		2	42
	4	68		4	84
\	8	136	\	8	168
	celkem	187		celkem	189

Číslo 187, tj. jedenáctinásobek čísla 17, jsme dostali jako součet čísla 17, jeho dvojnásobku 34 a osminásobku 136. Číslo 189, tj. devítinásobek čísla 21, jsme dostali jako součet čísla 21 a jeho osminásobku 168:

$$11 \cdot 17 = (8+2+1) \cdot 17 = 136+34+17 = 187\,, \quad 9 \cdot 21 = (8+1) \cdot 21 = 168+21 = 189$$

Při násobení větším číslem Egypťané používali kromě zdvojnásobování rovněž zdesateronásobení, někdy využili i pětinásobku apod., záleželo na obratnosti písaře. Např. výpočet $23 \cdot 74 = 1\,702$ mohl být zaznamenán asi takto:

\	1	74
	10	740
\	20	1 480
\	2	148
	celkem	1 702

Číslo 1 702 jsme získali jako součet čísla 74, jeho dvojnásobku 148 a dvacetinásobku 1 480:

$$23 \cdot 74 = (20 + 2 + 1) \cdot 74 = 1\,480 + 148 + 74 = 1\,702$$

Úplně stejně Egypťané počítali druhé mocniny. Např. v úloze **R48** je vypočtena druhá mocnina osmi a devíti, v úloze **K2'** druhá mocnina šestnácti:

	1	8
	2	16
	4	32
\	8	64

\	1	9
	2	18
	4	36
\	8	72
	celkem	81

\	1	16
\	10	160
\	5	80
	celkem	256

V prvním příkladu není třeba sčítat; ve druhém a třetím se výsledek získá sečtením dvou, resp. tří sčítanců.

Dělení prováděli Egypťané stejně jako násobení: dělitele postupně zdvojnásobovali, dokud z jeho vhodných násobků nesložili dělence; někdy při výpočtu použili i desateronásobek nebo pětinásobek dělitele apod.

V příkladu **R69** je zachyceno dělení čísla 1 120 číslem 80:

	1	80
\	10	800
	2	160
\	4	320
	celkem	1 120

Číslo 1 120 je součtem desetinásobku a čtyřnásobku čísla 80, proto z uvedeného schématu dostáváme výsledek: $1\,120 : 80 = 14$.

Celkový součet byl někdy pod výpočtem uveden, velmi často však chyběl. Mnohdy se objevil až jako vstupní hodnota v dalším výpočtu. Ze samotného výpočtu se nepozná, zda šlo o násobení nebo dělení; to je nutné zjistit z kontextu.

Se zápisem dělení přirozených čísel, které je „beze zbytku", se setkáváme v egyptských matematických památkách zřídka, často je však zachyceno dělení se zbytkem, dělení smíšenými čísly, součty zlomků apod. (viz dále).

Uvedená metoda násobení a dělení je postavena na dobrém pochopení přímé úměrnosti; při násobení i dělení je tato lineární závislost zachycena dvěma sloupci čísel – viz výše uvedené příklady. V takovýchto početních postupech můžeme shledávat myšlenku pozdější trojčlenky.

Násobení i dělení je založeno na stejném principu; je vidět, že násobení a dělení jsou inverzními operacemi. Komutativita násobení při tomto početním algoritmu není zjevná.

Poznamenejme, že egyptské algoritmy pro násobení a dělení využívají skutečnosti, že se každé přirozené číslo dá vyjádřit jako součet vhodných mocnin čísla 2, tj. využívají vyjádření jednoho z činitelů v dvojkové soustavě.[7] Teoretické zdůvodnění tohoto poznatku a znalost dvojkové soustavy však u Egypťanů nepředpokládáme.

Zlomky a smíšená čísla.

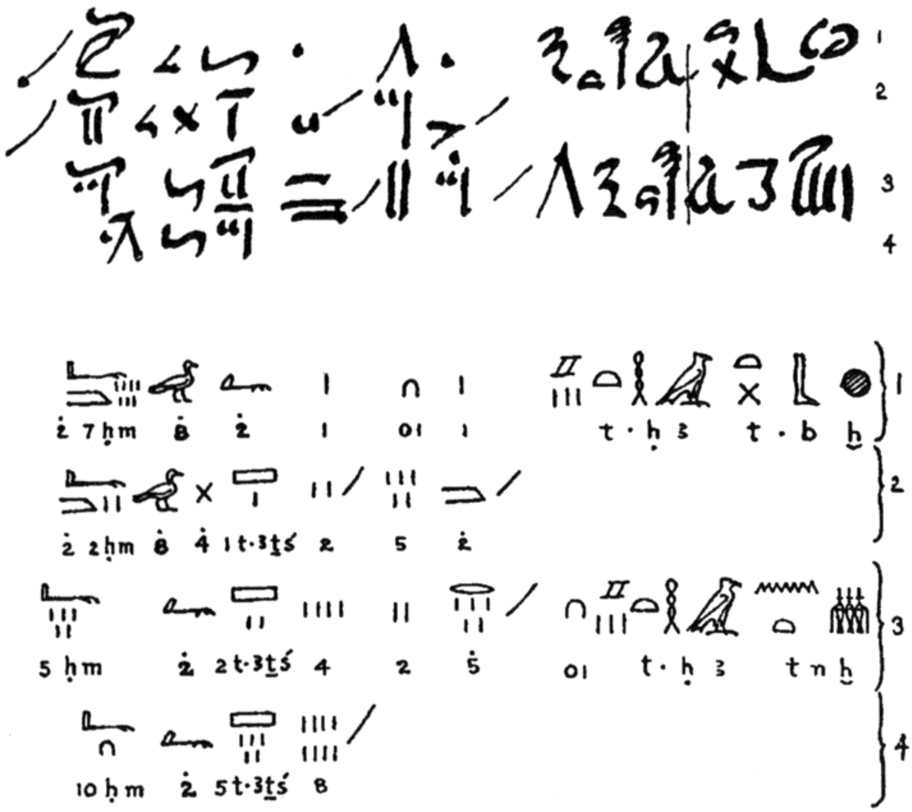
Nejstaršími zlomky, které se v Egyptě objevily, byly patrně jedna polovina a jedna čtvrtina. Jejich vznik byl zřejmě inspirován procesem půlení. Kromě nich byly již v době Staré říše užívány zlomky $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$ a $\frac{5}{6}$; existovaly pro ně zvláštní symboly. Označení zlomků $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ z doby Staré říše vidíme na následujícím obrázku.

V době Střední říše, ale asi již podstatně dříve, začaly být v Egyptě užívány pouze kmenné zlomky, tj. zlomky s čitatelem 1, ke kterým ještě přistoupil zlomek $\frac{2}{3}$. Kladná racionální čísla byla v Egyptě zapisována výhradně jako součty přirozeného čísla, navzájem různých kmenných zlomků a případně zlomku $\frac{2}{3}$. Hieroglyfické zápisy kmenných zlomků byly odvozeny z hieroglyfického značení čísel přirozených; nad číslem, které představovalo jmenovatele kmenného zlomku, byl zakreslen znak úst (viz výše uvedená označení zlomků). V hieratickém zápisu byl znak úst nahrazen výraznou tečkou.

Se smíšenými čísly se počítalo podobně jako s čísly přirozenými. Při násobení a dělení se využívalo kromě zdvojnásobování (a jiných násobků) i půlení a dělení na více částí.

---

[7] Ve výše uvedených příkladech je $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$ a $9 = 2^3 + 2^0$; jsou však využity i rozklady $23 = 2 \cdot 10 + 2 + 1$, $16 = 10 + 5 + 1$ a $14 = 10 + 2^2$.



Příklad **R54**

(hieratický text, hieroglyfický přepis a transliterace)

Součin smíšeného a přirozeného čísla je vypočten např. v příkladu **R53**, jde o součin $2\,\frac{1}{4} \cdot 7 = 15\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{cll} & 1 & 7 \\ \backslash & 2 & 14 \\ & \frac{1}{2} & 3\,\frac{1}{2} \\ \backslash & \frac{1}{4} & 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} \\ & \text{celkem} & 15\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} \end{array}$$

Na následujících příkladech ukážeme, jak ve starém Egyptě dělili přirozená čísla pomocí půlení a tvoření jiných kmenných zlomků.

V příkladu **R24** je číslo 19 vyděleno osmi jen pomocí půlení, $19 : 8 = 2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, v příkladu **R39** je číslo 50 vyděleno šesti, $50 : 6 = 8\,\frac{1}{3}$; při výpočtu zde byla počítána jedna třetina:

$$\begin{array}{cll} & 1 & 8 \\ \backslash & 2 & 16 \\ & \frac{1}{2} & 4 \\ \backslash & \frac{1}{4} & 2 \\ \backslash & \frac{1}{8} & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cll} & 1 & 6 \\ & 2 & 12 \\ & 4 & 24 \\ \backslash & 8 & 48 \\ \backslash & \frac{1}{3} & 2 \end{array}$$

V úlohách **R54** a **R55** je při dělení $7 : 10 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}$ a $3 : 5 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{10}$ kromě půlení užito i utvoření jedné pětiny a jedné desetiny:

$$\begin{array}{cll} & 1 & 10 \\ \backslash & \frac{1}{2} & 5 \\ \backslash & \frac{1}{5} & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cll} & 1 & 5 \\ \backslash & \frac{1}{2} & 2\,\frac{1}{2} \\ \backslash & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Stejným způsobem bylo možno dělit i smíšeným číslem. V příkladu **R58** je vypočten podíl $70 : 93\,\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, v příkladu **R69** podíl $80 : 3\,\frac{1}{2} = 22\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{21}$:

$$\begin{array}{cll} & 1 & 93\,\frac{1}{3} \\ \backslash & \frac{1}{2} & 46\,\frac{2}{3} \\ \backslash & \frac{1}{4} & 23\,\frac{1}{3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cll} & 1 & 3\,\frac{1}{2} \\ & 10 & 35 \\ \backslash & 20 & 70 \\ \backslash & 2 & 7 \\ \backslash & \frac{2}{3} & 2\,\frac{1}{3} \\ \backslash & \frac{1}{21} & \frac{1}{6} \\ \backslash & \frac{1}{7} & \frac{1}{2} \end{array}$$

S dělením přirozeného čísla smíšeným číslem se setkáváme i na jiných místech Rhindova papyru; v příkladu **R34** je vypočten podíl $10 : 1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, v příkladu **R33** podíl $37 : 1\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{7}$ atd.

Poznamenejme ještě, že speciální systém zlomků, tzv. *části Horova oka*, byl používán při dělení objemové jednotky *hekat* (měřice), která sloužila pro měření množství zrna (viz dále).

Dřevěný egyptský loket
(kolem r. 1200 př. Kr., Louvre)

Jednotky.

Původní egyptskou délkovou mírou byl tzv. *krátký loket*, který měřil asi 45 cm; měl 6 dlaní o 4 prstech, tj. celkem 24 prstů. Později byla k tomuto loktu přidána sedmá, tzv. „královská“ dlaň, a tak vznikl *královský loket*, *meh nisut* nebo jen *meh*. Jeho délka ve starších dobách kolísala v rozmezí asi 52 až 53 cm, později měřil až 54 cm. Měl 7 dlaní (*šesep*) a 28 prstů (*džeba*); později, za Ptolemaiovců, však měl opět 6 dlaní po 4 prstech.

Královský loket byl určen pro měření související se stanovováním naturálních dávek panovníkovi, v královských loktech byly vyměřovány nejrůznější stavby, např. pyramidy.

Několik egyptských loktů z různých materiálů (dřevo, vápenec, břidlice, mastek, bronz) je uloženo v různých světových muzeích; jejich délky nejsou zcela stejné. I z pečlivých proměření řady egyptských staveb bylo zjištěno, že délky používaných loktů nebyly totožné. Protože jsou však egyptské stavby vybudovány velice přesně, je zřejmé, že při jedné konkrétní stavbě byly vždy užívány naprosto stejné lokty.

Poznamenejme ještě, že při stavbách pyramid byla většinou délka základní hrany násobkem deseti královských loktů;[8] výjimkou je Snofruova médúmská pyramida, jejíž hrana měří 275 loktů.

V Egyptě byla jako jednotka délky používána i míra *chet*, která měla sto loktů.

Základní plošnou mírou byl jednotka *secat-johet* (krátce *secat*, koptsky *setjohe*, řecky *arura*), která byla rovna 10 000 čtverečních královských loktů. Šlo tedy o obsah čtverce, jehož stranou bylo sto královských loktů neboli *chet*; tato jednotka měla asi 2 756,25 čtverečních metrů. Jednotka *secat-johet* sestávala ze sta jednotek *meh-ta* (tzv. *loket země*); uvádí se, že jednotka *meh-ta* byla reprezentována obdélníkem se stranami 100 loktů (tj. *chet*) a 1 loket (tj. *meh*). Ve Staré a Střední říši byly též užívány polovina, čtvrtina a osmina jednotky *secat-johet*.

Základem dutých měr byla jednotka *hekat* (někdy se do češtiny překládá jako *měřice*), která měla asi 4,8 litru; velmi často byly užívány tzv. *Horovy zlomky* této jednotky, tj. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ a $\frac{1}{64}$, které byly v teorii i praxi výhodné při půlení i zdvojování.

Jednotka *hekat* se rovněž dělila na 10 *hinů* a jeden *hin* na 32 *ro*; je tedy $\frac{1}{64}$ jednotky *hekat* rovna pěti *ro*.

Kromě jednotky *hekat* byly užívány i dvojnásobné, čtyřnásobné a stonásobné jednotky (*2-hekat*, *4-hekat* a *100-hekat*). Užívána byla i jednotka *char* (někdy se do češtiny překládá jako *pytel*), která obsahovala 20 jednotek *hekat*; jednotka *char* byla rovna dvěma třetinám královského lokte krychlového, tj. do lokte krychlového se vešlo půl druhé míry *char*.

---

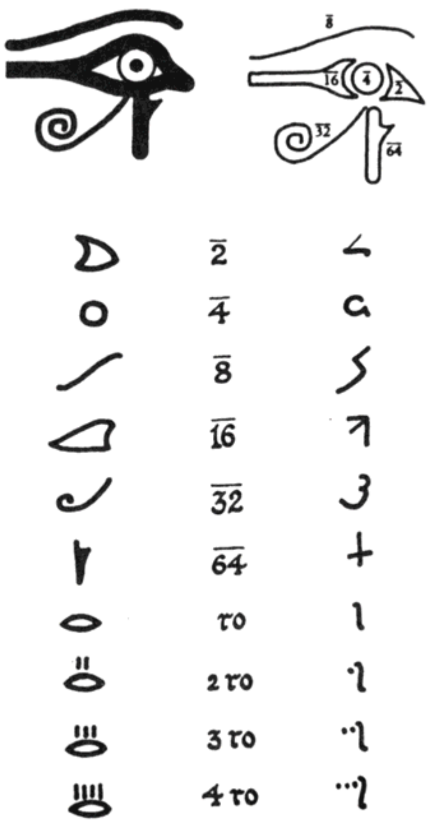
[8] Snofruova jižní – 360 loktů, Chufuova – 440, Rachefova – 410, Rachefovy manželky – 40, Menkaureova – 200, Sahureova – 150, Sahureovy manželky – 30, Niuserreova – 150, Neferirkareova – 200.

Hodnota zboží byla udávána vahou stříbra; jeden *šena*, který měl asi 91 gramů, se dělil na 12 *kit*. Později byl ke stejnému účelu užíván jeden *deben* mědi, který se dělil na 10 *kit*.

O egyptských mírách viz např. [Le9] a [Re3].

Horovy zlomky.

Již v době Staré říše byl v Egyptě při dělení objemové jednotky *hekat* určené pro měření zrna užíván systém zlomků známý jako *části Horova oka* (viz [Mö], [Jun] a [Ne6]). Jde o zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ a $\frac{1}{64}$. Symboly, kterými jsou tyto zlomky označeny, jsou odvozeny ze schematického znázornění oka boha Hora; jejich hieratické znaky byly užívány již v době VI. dynastie. Rozdělením jednotky *hekat* na 320 dílů vznikla menší jednotka *ro*. Následující obrázky ukazují Horovo oko, jeho části a znaky pro příslušné zlomky jednotky *hekat*.[9]



Horovo oko a jeho části, zlomky jednotky *hekat*

[9] Kmenné zlomky bývají někdy dnešní symbolikou zapisovány bez čitatele, tj. pouze jmenovatel s pruhem nebo tečkou.

Na dřevěných tabulkách uložených v Káhirském muzeu je řada výpočtů, ve kterých písař dělil jednotku *hekat* na tři, sedm, deset, jedenáct a třináct dílů. Písař se tyto výpočty na dřevěných tabulkách patrně učil, bez porozumění opisoval předchozí výpočty i s chybami; uvedené zápisy jasně dokumentují bezmyšlenkovité biflování.

Dělení jednotky *hekat* sedmi je na tabulkách uvedeno čtyřikrát, dělení deseti jednou, dělení jedenácti čtyřikrát, dělení třinácti třikrát, dělení třemi dvakrát. Některé výpočty však nejsou úplné.

Připomeňme, že jednotka *hekat* je rovna 320 *ro*; Horovy zlomky této jednotky se tedy v jednotkách *ro* vyjádří následujícími vztahy, které egyptští písaři jistě znali nazpaměť.

$$\begin{array}{rcr}
1 \ \textit{hekat} & = & 320 \ \textit{ro} \\
\frac{1}{2} \ \textit{hekat} & = & 160 \ \textit{ro} \\
\frac{1}{4} \ \textit{hekat} & = & 80 \ \textit{ro} \\
\frac{1}{8} \ \textit{hekat} & = & 40 \ \textit{ro} \\
\frac{1}{16} \ \textit{hekat} & = & 20 \ \textit{ro} \\
\frac{1}{32} \ \textit{hekat} & = & 10 \ \textit{ro} \\
\frac{1}{64} \ \textit{hekat} & = & 5 \ \textit{ro}
\end{array}$$

Zápis, ve kterém je na dřevěných tabulkách jednotka *hekat* dělena na 11 dílů, vypadá (po odstranění chyb a doplnění symbolů vyznačujících sčítané hodnoty) takto:

$$\begin{array}{lrrl}
\backslash & 1 & 11 & \\
 & 10 & 110 & \\
\backslash & 20 & 220 & \\
 & 2 & 22 & \\
 & 4 & 44 & \\
\backslash & 8 & 88 & \\
\backslash & \frac{1}{11} & 1 & \\
 & & & \\
\backslash & 1 & \frac{1}{16}\,\frac{1}{64} & 4\frac{1}{11} \\
\backslash & 2 & \frac{1}{8}\,\frac{1}{32}\,\frac{1}{64} & 3\frac{1}{6}\,\frac{1}{66} \\
 & 4 & \frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{32}\,\frac{1}{64} & 1\frac{1}{3}\,\frac{1}{33} \\
\backslash & 8 & \frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{32} & 2\frac{2}{3}\,\frac{1}{22}\,\frac{1}{66}
\end{array}$$

V první části výpočtu (prvních sedm řádků) je 320 vyděleno jedenácti: $320 : 11 = 29\frac{1}{11}$. Jednotku *hekat* vyjádřenou jako 320 *ro* tedy písař vydělil jedenácti, výsledek $29\frac{1}{11}$ *ro* pak převedl zpaměti na Horovy zlomky jednotky *hekat*. Vyšlo $\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$ *hekat* a $4\frac{1}{11}$ *ro*.

Na osmém až jedenáctém řádku výše uvedeného výpočtu je provedena zkouška, tj. výsledek uvedený na osmém řádku je (postupným zdvojnásobováním[10]) vynásoben jedenácti. Součet uvedených zlomků jednotky *hekat* a smí-

[10] Počtář zde použil dva vztahy z tzv. tabulky $2/n$; $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ a $\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$ – viz dále.

šených čísel jednotky *ro* (na osmém, devátém a jedenáctém řádku), který je roven celé jednotce *hekat*, byl patrně proveden zpaměti, neboť na tabulkách zaznamenán není.

Dělení jednotky *hekat* sedmi, deseti a třinácti je provedeno obdobně. Odlišně je však jednotka *hekat* dělena na tři části. Zápis tohoto výpočtu vypadá (po odstranění chyb a doplnění symbolů vyznačujících sčítané hodnoty) takto:

\	1	$\frac{1}{3}$
	2	$\frac{2}{3}$
\	4	$1\,\frac{1}{3}$

	$\frac{1}{64}$		$1\,\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{32}$		$3\,\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$1\,\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$3\,\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$	$1\,\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{32}$	$3\,\frac{1}{3}$
\	1	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$	$1\,\frac{2}{3}$
\	2	$\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{32}$	$3\,\frac{1}{3}$

Na prvních třech řádcích je vypočtena jedna třetina z 5 *ro*, tj. z $\frac{1}{64}$ jednotky *hekat*: $5 \cdot \frac{1}{3} = 1\,\frac{2}{3}$. Na následujících sedmi řádcích je tento výsledek postupným zdvojnásobováním vynásoben číslem 64. Výsledek $\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$ *hekat* $1\,\frac{2}{3}$ *ro* je uveden na předposledním řádku. Předposlední a poslední řádek slouží k provedení zkoušky: získaný výsledek je vynásoben třemi – součet hodnot, které na těchto dvou řádcích stojí, dává celou jednotku *hekat*. Místo dělení $320 : 3$ je zde provedeno dělení $5 : 3$ a výsledek je potom vynásoben číslem 64.

Všechny výpočty uvedené na dřevěných tabulkách spočívají, jak je z výše uvedených dvou příkladů zjevné, na přímé úměrnosti. Poznamenejme ještě, že při dělení jednotky *hekat* na n částí pro $n = 7, 10, 11, 13$ se vychází z úměry $1 : n$, při dělení na tři části z úměry $1 : \frac{1}{3}$.

Dělení jednotky *hekat* na 2, 4, 8, 16, 32 a 64 dílů dává jeden z Horových zlomků. První obtížnější případ je dělení jednotky *hekat* třemi, které je na tabulkách uvedeno. Dělení pěti je velmi jednoduché, vychází

$$64\ ro = \tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}\ hekat\ 4\ ro.$$

Výsledek dělení jednotky *hekat* šesti se snadno získá rozpůlením výsledku dělení této jednotky třemi, vychází

$$53\,\tfrac{1}{3}\ ro = \tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{32}\ hekat\ 3\,\tfrac{1}{3}\ ro.$$

Dělení sedmi je na tabulkách provedeno, vychází

$$45\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{7}\,\tfrac{1}{14}\ ro = \tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{64}\ hekat\ \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{7}\,\tfrac{1}{14}\ ro.$$

Dělení devíti na tabulkách provedeno není, výsledek je

$$35\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{18}\ ro = \tfrac{1}{16}\,\tfrac{1}{32}\,\tfrac{1}{64}\ hekat\ \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{18}\ ro.$$

Dělení deseti je snadné, na tabulkách je provedeno, vychází

$$32\ ro = \tfrac{1}{16}\ \tfrac{1}{32}\ hekat\ 2\ ro.$$

Dělení jedenácti je výše ukázáno.

Dělení dvanácti se snadno získá rozpůlením výsledku dělení jednotky *hekat* šesti, vychází

$$26\,\tfrac{2}{3}\ ro = \tfrac{1}{16}\ \tfrac{1}{64}\ hekat\ 1\,\tfrac{2}{3}\ ro.$$

Dělení třinácti je na tabulkách provedeno, vychází

$$24\,\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{13}\ \tfrac{1}{26}\ ro = \tfrac{1}{16}\ hekat\ 4\,\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{13}\ \tfrac{1}{26}\ ro.$$

Je tedy vidět, že příklady uvedené na tabulkách reprezentují ty nejdůležitější případy dělení jednotky *hekat* malými přirozenými čísly (snad kromě dělení devíti).

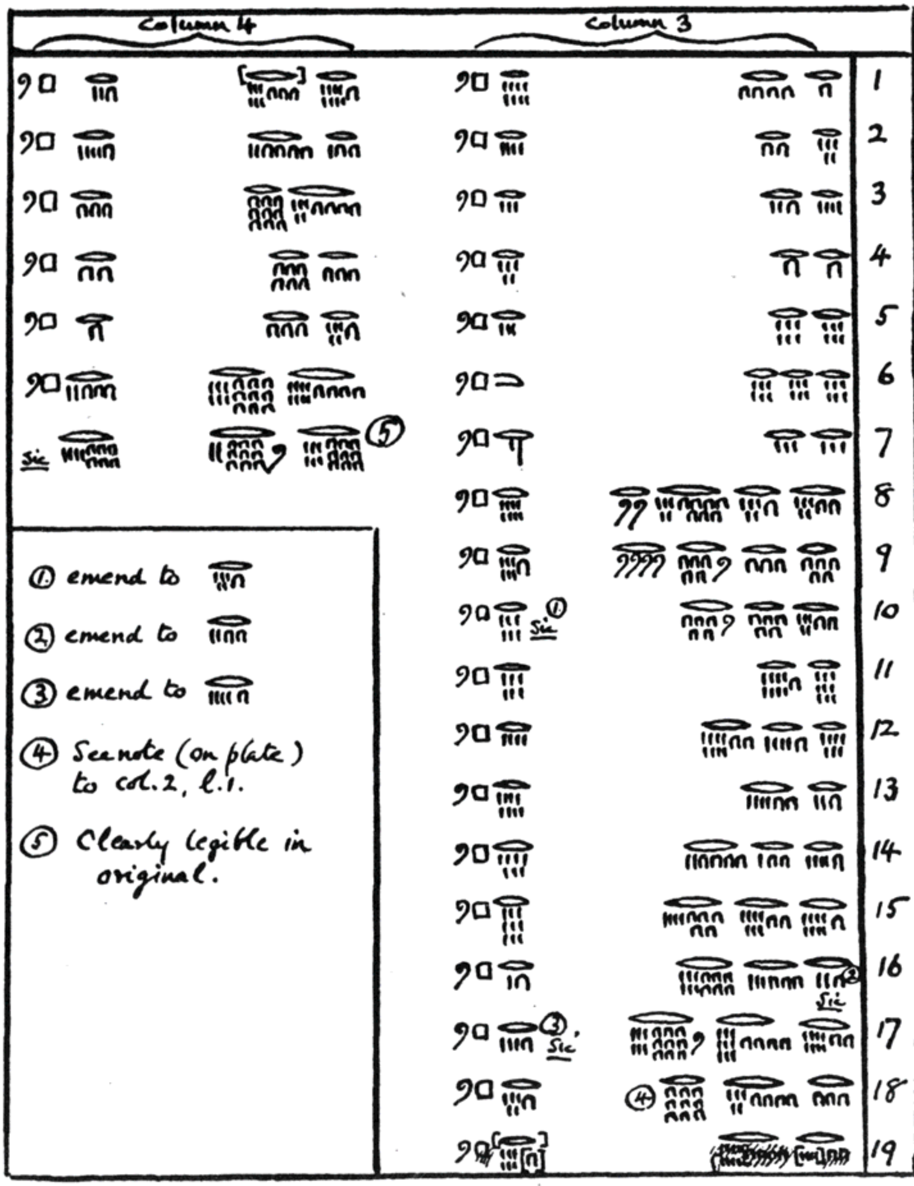
Převody částí jednotky *hekat* se objevují i v Rhindově papyru. V příkladu **R47** jsou uvedeny hodnoty $\frac{1}{10}$ až $\frac{1}{100}$ z množství 25 *4-hekat* v jednotkách *hekat* a *ro*. Některé z těchto výsledků je možno snadno vypočítat z hlavy, jiné jsou obtížnější. Uveďme jejich přehled. Cílem příkladu bylo patrně procvičení převodů jednotek a počítání se zlomky.

$\frac{1}{10}$	10	
$\frac{1}{20}$	5	
$\frac{1}{30}$	$3\,\frac{1}{4}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{64}$	$1\,\frac{2}{3}$
$\frac{1}{40}$	$2\,\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{50}$	2	
$\frac{1}{60}$	$1\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{32}$	$3\,\frac{1}{3}$
$\frac{1}{70}$	$1\,\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}$	$2\,\frac{1}{14}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{42}$
$\frac{1}{80}$	$1\,\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{90}$	$1\,\frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{18}$
$\frac{1}{100}$	1	

V příkladu **R35** je hodnota $\frac{1}{10}\ \frac{1}{5}$ *hekat* převedena na 96 *ro*, tj. na $\frac{1}{4}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}$ *hekat* a 1 *ro*. V příkladu **R38** (viz ukázka) je výsledek $\frac{1}{6}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{22}\ \frac{1}{66}$ *hekat* vyjádřen i v tvaru $\frac{1}{4}\ \frac{1}{16}$ *hekat* a $1\,\frac{2}{3}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{22}\ \frac{1}{66}$ *ro*.

V příkladech **R80** a **R81** jsou části jednotky *hekat* uvedeny v jednotkách *hin*, např.

$$\begin{array}{llcll}
\frac{1}{2} & hekat & = & 5 & hin \\
\frac{1}{4} & hekat & = & 2\,\frac{1}{2} & hin \\
\frac{1}{8} & hekat & = & 1\,\frac{1}{4} & hin \\
\frac{1}{16} & hekat & = & \frac{1}{2}\ \frac{1}{8} & hin \\
\frac{1}{32} & hekat & = & \frac{1}{4}\ \frac{1}{16} & hin \\
\frac{1}{64} & hekat & = & \frac{1}{8}\ \frac{1}{32} & hin \\
\frac{2}{3} & hekat & = & 6\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{16} & hin\ 3\,\frac{1}{3}\ ro \\
\frac{1}{5} & hekat & = & 2 & hin
\end{array}$$



Hieroglyfický přepis třetího a čtvrtého sloupce Koženého svitku

(viz obrázek otištěný na počátku této kapitoly)

Početní problémy.

Jak již bylo řečeno, kladná racionální čísla vyjadřovali Egypťané výhradně jako součty přirozeného čísla, navzájem různých kmenných zlomků a případně zlomku $\frac{2}{3}$; tyto zlomky přitom řadili podle velikosti. Při počítání s takto vyjádřenými čísly však naráželi na obtíže.

Při výpočtech bylo třeba znát řadu identit, které udávají součty kmenných zlomků nebo tyto součty zjednodušují. Některé z těchto identit se písaři zřejmě naučili nazpaměť v písařských školách, další se naučili v praxi; schopností využívat většího množství takovýchto identit se vyznačovali lepší počtáři.

Na Koženém svitku nacházíme 26 jednoduchých i složitějších identit (viz obrázek vlevo). Zapsány jsou zde dvakrát za sebou, vždy se stejnými chybami; tyto zápisy usvědčují písaře z bezduchého opisování a biflování. K jednoduchým vztahům patří např. rovnosti

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

k obtížnějším následující dvě rovnosti, které spolu úzce souvisejí:

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{1}{200}=\frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{50}+\frac{1}{30}+\frac{1}{150}+\frac{1}{400}=\frac{1}{16}.$$

Deset vztahů Koženého svitku odpovídá vzorci

$$\frac{1}{3k}+\frac{1}{6k}=\frac{1}{2k}$$

(pro $k = 5, 10, 15, 4, 8, 16, 32, 3, 6, 7$), čtyři vztahy identitě

$$\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{6k}=\frac{1}{k}$$

(pro $k = 7, 9, 11, 15$), která snadno vyplývá z identity předchozí. Rovnosti

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{8}$$

odpovídají vzorci

$$\frac{1}{5k}+\frac{1}{20k}=\frac{1}{4k}.$$

Na Koženém svitku jsou ještě uvedeny rovnosti

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{150}=\frac{1}{15}, \qquad \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}$$

a chybou poznamenaný vztah

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{1}{196}=\frac{1}{13},$$

který snad měl být správně uveden v tvaru

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{1}{98}+\frac{1}{196}=\frac{1}{14}.$$

Jednoduchými identitami, se kterými se museli egyptští počtáři často setkávat, byly například následující tři jednoduché rovnosti, které na koženém svitku zachyceny nejsou:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

Při sčítání kmenných zlomků byl rovněž ve starém Egyptě uplatňován postup, který připomíná převod na společného jmenovatele (viz dále).

V řadě situací bylo třeba kmenné zlomky zdvojnásobovat, tj. zlomek $\frac{2}{n}$ vyjádřit jako součet různých kmenných zlomků. Pokud bylo číslo n sudé, počtář je vydělil dvěma. Pokud bylo n liché, použil rozklad zlomku $\frac{2}{n}$, který znal zpaměti, nebo nahlédl do tabulky, ve které byly tyto rozklady uvedeny; takováto tabulka je zachycena na Rhindově a na Káhúnském papyru. Vzhledem k tomu, že rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ na součet různých kmenných zlomků není jednoznačný,[11] sloužila takováto tabulka i jako všeobecně uznávaná konvence, které bylo rozumné se držet. Pokud by jednotliví písaři a počtáři užívali při výpočtech různé rozklady, bylo by mnohdy obtížné výsledky porovnávat.

Tabulka 2/n.

Na jednom z Káhúnských papyrů (IV.2, **K1**) má záznam rozkladů zlomků $\frac{2}{n}$ na kmenné zlomky skutečně formu jakési tabulky. V deseti řádcích jsou uvedena čísla týkající se zlomků $\frac{2}{n}$ pro lichá $n = 3, \dots, 21$; před začátkem prvního řádku je navíc uvedeno číslo 2, kterým se zlomek $\frac{1}{n}$ násobí. Např. pro hodnotu 13 jsou v jednom řádku vedle sebe čísla

$$13 \qquad \frac{1}{8} \qquad 1\frac{1}{2}\frac{1}{8} \qquad \frac{1}{52} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{104} \qquad \frac{1}{8}.$$

Smysl těchto čísel je možno vyjádřit vztahy

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}, \qquad 2=1\frac{1}{2}\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Vynásobíme-li první rovnost třinácti, získáme druhou, vydělíme-li třinácti druhou rovnost, získáme první. Rozkladu zlomku $\frac{2}{13}$ na tři kmenné zlomky tedy odpovídá rozklad čísla 2 na součet smíšeného čísla a dvou kmenných zlomků, přičemž příslušné smíšené číslo je třináctinásobkem vhodného kmenného zlomku, konkrétně jedné osminy.

[11] Např. $\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=\frac{1}{21}+\frac{1}{105}=\frac{1}{18}+\frac{1}{630}$. Zlomky $\frac{2}{n}$ lze jako součet kmenných zlomků vyjádřit nekonečně mnoha způsoby.

$\frac{2}{3}$	2			
$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$1\frac{2}{3}\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		
$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$1\frac{1}{3}\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$1\frac{2}{3}\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$		
$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$1\frac{1}{6}\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$1\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\frac{1}{6}$		

První část tzv. tabulky $2/n$

$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$1\frac{2}{3}\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$	$1\frac{1}{42}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$1\frac{2}{3}\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	
$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$	$1\frac{2}{3}\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		
$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{12}\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	
$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{40}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		

Druhá část tzv. tabulky $2/n$

$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$	$1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$	$1\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{20}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{75} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150}$	$1\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$	$1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$	$1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162}$	$1\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$	$1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$	$1\,\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{87} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174}$	$1\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$	$1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$	$1\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{10}$	$\frac{2}{3}\,\frac{1}{30}$		
$\frac{2}{93} = \frac{1}{62} + \frac{1}{186}$	$1\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$	$1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$	$1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$	$1\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Třetí část tzv. tabulky $2/n$

Rhindův papyrus věnuje rozkladu zlomků $\frac{2}{n}$ na kmenné zlomky velkou pozornost. Nalézáme zde obdobné údaje jako na výše zmíněném Káhúnském zlomku, ale pro lichá $n = 3, \ldots, 101$. Navíc jsou zde zachyceny výpočty, které uvedené rozklady na kmenné zlomky prověřují (viz ukázky).

V následujících bodech se budeme snažit postihnout zákonitosti, které lze v tabulce $2/n$ nalézt.

1. Pro čísla n, která jsou dělitelná třemi, je rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ proveden bez výjimky podle vzorce

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{2 \cdot \frac{n}{3}} + \frac{1}{2n},$$

který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Všechny kmenné zlomky, které v těchto rozkladech vystupují, mají sudé jmenovatele, což je výhodné pro další výpočty (zdvojnásobování je jednoduché).

Jak už bylo řečeno, podle tohoto vzorce jsou provedeny rozklady zlomku $\frac{2}{n}$ pro $n = 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93$ a 99.

V příkladu **R61** (viz ukázka) je výše uvedený rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ popsán; je zde totiž uveden návod, jak vypočítat dvě třetiny ze zlomku s lichým jmenovatelem k. V naší symbolice je možno tento návod vyjádřit vzorcem

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} = \frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}.$$

Zdá se nepochybné, že byl tento návod objeven jako zobecnění rovnosti

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

2. Pro čísla n, která jsou dělitelná pěti, je možno rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ provést podle vzorce

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{3 \cdot \frac{n}{5}} + \frac{1}{3n},$$

který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

Všechny kmenné zlomky těchto rozkladů mají liché jmenovatele, což není příliš výhodné pro další výpočty.

Podle tohoto vzorce jsou provedeny rozklady zlomku $\frac{2}{n}$ pro $n = 5, 25, 65$ a 85; pro čísla 15, 45 a 75, která jsou dělitelná třemi, je použit předchozí rozklad, který je výhodnější (sudost jmenovatelů), pro čísla 35, 55 a 95 jsou však uvedeny jiné rozklady (viz dále).

Poznamenejme, že výše uvedený vzorec je možno zapsat i v tvaru

$$\frac{2}{5k} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{15k};$$

odpovídající rozklady mohly být odvozeny z jednoduchého vztahu

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

3. Pro čísla n, která jsou dělitelná sedmi, je možno rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ provést podle vzorce

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{4 \cdot \frac{n}{7}} + \frac{1}{4n},$$

který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Všechny kmenné zlomky figurující v těchto rozkladech mají sudé jmenovatele.

Podle tohoto vzorce jsou provedeny rozklady zlomku $\frac{2}{n}$ pro $n = 7$, 49, 77; pro čísla 21, 63, která jsou dělitelná třemi, byl použit první rozklad, pro čísla 35 a 91 jsou však uvedeny jiné rozklady.

4. Pro čísla n, která jsou dělitelná jedenácti, je možno rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ provést podle vzorce

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{6 \cdot \frac{n}{11}} + \frac{1}{6n},$$

který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

Všechny kmenné zlomky těchto rozkladů mají sudé jmenovatele.

Podle tohoto vzorce jsou provedeny rozklady zlomku $\frac{2}{n}$ pro $n = 11$ a 55; pro čísla 33, 77, 99 (násobky tří, resp. sedmi) již byly použity předchozí rozklady.

5. Pro čísla n, která jsou dělitelná třinácti, sedmnácti, resp. devatenácti, je možno rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ provést podle vzorců

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{7 \cdot \frac{n}{13}} + \frac{1}{7n}, \qquad \frac{2}{n} = \frac{1}{9 \cdot \frac{n}{17}} + \frac{1}{9n}, \qquad \frac{2}{n} = \frac{1}{10 \cdot \frac{n}{19}} + \frac{1}{10n},$$

které odpovídají následujícím rozkladům čísla 2:

$$2 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{28} + \frac{1}{7}, \qquad 2 = 1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18} + \frac{1}{9}, \qquad 2 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{15} + \frac{1}{10}.$$

Podle těchto vzorců však není proveden žádný rozklad.

6. Pro čísla n, která jsou dělitelná třiadvaceti, je možno rozklad zlomku $\frac{2}{n}$ provést podle vzorce

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{12 \cdot \frac{n}{23}} + \frac{1}{12n},$$

který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

Všechny kmenné zlomky mají sudé jmenovatele.

Podle tohoto vzorce je proveden rozklad zlomku $\frac{2}{23}$; pro číslo 69, které je dělitelné třemi, byl použit první rozklad.

7. Předchozí rozklady zlomku $\frac{2}{n}$ jsou speciálními případy vzorce

$$\frac{2}{k \cdot l} = \frac{1}{\frac{k+1}{2} \cdot l} + \frac{1}{\frac{k+1}{2} \cdot k \cdot l},$$

který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\,\tfrac{k-1}{k+1} + \frac{1}{\frac{k+1}{2}}$$

Poznamenejme, že je možno zapsat obdobné vzorce pro čísla n dělitelná devíti, patnácti a jednadvaceti; tato čísla jsou však dělitelná třemi, a je proto použit první rozklad.

Výjimkami z předchozích pravidel jsou následující čísla:

— Číslo $35 = 5 \cdot 7$. Zlomek $\frac{2}{35}$ není rozložen ani podle pravidla pro násobky pěti, ani podle pravidla pro násobky sedmi; podle těchto pravidel je

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{21} + \frac{1}{105}, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{2}{35} = \frac{1}{20} + \frac{1}{140}.$$

Uveden je výrazně lepší rozklad

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42},$$

ve kterém jsou jmenovatelé poměrně malá sudá čísla a který odpovídá následujícímu rozkladu čísla 2:

$$2 = 1\,\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$$

— Číslo $55 = 5 \cdot 11$. Zlomek $\frac{2}{55}$ není rozložen podle pravidla pro násobky pěti, ale až podle pravidla pro násobky jedenácti. Podle prvního vzorce je

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{33} + \frac{1}{165},$$

zatímco podle druhého

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}\,.$$

Výhodou druhého rozkladu jsou sudá čísla ve jmenovatelích, proto byla asi tomuto rozkladu dána přednost.

— Číslo $91 = 7 \cdot 13$. Zlomek $\frac{2}{91}$ není rozložen ani podle pravidla pro sedminásobky ani podle výše uvedeného pravidla pro násobky 13. Podle těchto pravidel je

$$\frac{2}{91} = \frac{1}{52} + \frac{1}{364}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{2}{91} = \frac{1}{49} + \frac{1}{637}\,.$$

Uveden je výrazně lepší rozklad

$$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}\,,$$

ve kterém figurují jako jmenovatelé sudá nepříliš velká čísla.

— Výše uvedené rozklady čísel 35 a 91 odpovídají následujícímu vzorci:

$$\frac{2}{k \cdot l} = \frac{1}{k \cdot \frac{k+l}{2}} + \frac{1}{l \cdot \frac{k+l}{2}}$$

Podle tohoto vzorce bychom dostali i poměrně slušné rozklady

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{40} + \frac{1}{88}\,, \qquad \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{228}\,,$$

které se však liší od rozkladů uvedených v tabulce $2/n$.[12]

— Pro číslo 19 a jeho násobek $95 = 5 \cdot 19$ je použit rozklad

$$\frac{2}{19k} = \frac{1}{12k} + \frac{1}{76k} + \frac{1}{114k}\,,$$

tj.

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}\,, \qquad \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}\,.$$

Zlomek $\frac{2}{95}$ není rozložen ani podle pravidla pro násobky pěti, ani podle pravidla pro násobky devatenácti. Podle těchto pravidel je

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{57} + \frac{1}{285}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{2}{95} = \frac{1}{50} + \frac{1}{950}\,.$$

Poslední rozklad má sice sudé jmenovatele, ale číslo 950 je již dost velké.

— Pro prvočísla 13, 17, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101 jsou uvedeny zvláštní rozklady. Pro prvočísla 19, 23, která zde chybí, jsou příslušné vzorce výše uvedeny. Poznamenejme ještě, že rozklad zlomku $\frac{2}{101}$ se výrazně odlišuje od ostatních; není zde rozložen dvojnásobek kmenného zlomku, ale kmenný zlomek.

[12] V rozkladu zlomku $\frac{2}{95}$ však souhlasí první člen.

Začátek tabulky 2/n – dělení třemi, pěti a sedmi

(hieratický zápis, hieroglyfický přepis, transliterace)

Zákonitosti, které jsme se snažili v předchozích odstavcích ukázat, však rozhodně nelze chápat jako recepty, podle kterých staří Egypťané rozklady zlomku $\frac{2}{n}$ tvořili. Dá se předpokládat, že v řadě případů byl z několika experimentálně nalezených rozkladů zlomku $\frac{2}{n}$ vybrán ten, který se zdál pro další výpočty nejvhodnější.

Problematikou tabulky $2/n$ se zabývala řada historiků matematiky. Práce řešící otázku, jak Egypťané nalezli rozklady zlomků $\frac{2}{n}$ na součet kmenných zlomků a jak se na tyto rozklady dívali, se objevují v odborných časopisech i v současnosti. Publikovány jsou však i práce diskutující obtížné matematické otázky inspirované problematikou egyptských zlomků. Poznamenejme, že se rozklady zlomků na kmenné zlomky podrobně zabýval už Leonardo Pisánský (Fibonacci) ve 13. století (viz např. [Lun]). Pro podrobnější informace můžeme čtenáře odkázat na následující monografie a časopisecké práce: [BHP], [BS], [Bru], [Gil], [Gi1], [Gi3], [Gi5], [Gi7], [Gi8], [Ja], [Kn], [Ne1], [Ne2], [Ne7], [Pe1], [Ra3], [Ree], [Ris], [Vet2], [Vo2] a [Wae3].

Ukažme ještě na dvou příkladech, jak jsou na Rhindově papyru vzorce z tabulky $2/n$ ověřovány zkouškou.

Při prověření vzorce

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

(viz ukázka) je nejprve vypočtena $\frac{1}{4}$ z čísla 7:

1	7
$\frac{1}{2}$	$3\ \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$

1	7
2	14
4	28

Tedy $\frac{1}{4} \cdot 7 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, do čísla 2 zbývá $\frac{1}{4}$, tj.

$$2 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,.$$

Vydělením tohoto vztahu číslem 7 získáme výše uvedený vzorec; smíšené číslo vydělíme číslem 7 snadno, neboť bylo konstruováno jako sedminásobek jedné čtvrtiny, výpočet čtyřnásobku čísla 7 je ve výše uvedeném schematu zachycen.

Při prověření vzorce

$$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$$

(viz ukázka) je nejprve vypočtena $\frac{1}{24}$ z čísla 41:

1	41
$\frac{2}{3}$	$27\ \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$13\ \frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}$	$6\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}$
$\frac{1}{12}$	$3\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{12}$
$\frac{1}{24}$	$1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{24}$

1	41
2	82
4	164
6	246
8	328

Tedy $\frac{1}{24} \cdot 41 = 1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{24}$, do čísla 2 zbývá $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$, tj.

$$2 = 1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\,.$$

Vydělením tohoto vztahu číslem 41 získáme výše uvedený vzorec; smíšené číslo vydělíme číslem 41 snadno, neboť bylo konstruováno jako násobek tohoto čísla, výpočet šestinásobku a osminásobku čísla 41 je ve výše uvedeném schematu zachycen.

Z takovýchto „zkoušek" však patrně nelze rekonstruovat původní úvahy počtářů, kteří tabulku $2/n$ sestavili. Není totiž jasné, jaký zlomek je třeba z daného čísla vypočítat, víme jen, že má vyjít číslo menší než 2. Navíc i doplňky tohoto výsledku do čísla 2 lze pomocí kmenných zlomků zapsat „rozumným způsobem" často více způsoby.

Počítání s pomocí tabulky 2/n.

Hodnoty uvedené v tabulce $2/n$ užívali egyptští počtáři poměrně často při veškerých výpočtech.[13] Jakmile bylo třeba zdvojnásobit kmenný zlomek s lichým jmenovatelem, přišla ke slovu tabulka $2/n$. Na několika příkladech nyní užití této tabulky ukážeme.

V příkladu **R1** je při zkoušce násobena jedna desetina deseti.

	1	$\frac{1}{10}$
\	2	$\frac{1}{5}$
	4	$\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$
\	8	$\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{30}$

Při zdvojnásobování jedné pětiny a jedné patnáctiny jsou užity vzorce

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\,, \qquad \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\,.$$

Navíc je třeba při závěrečném sčítání vypočítat (nebo použít identitu)

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 1\,.$$

V příkladu **R10** je jako jedna polovina z hodnoty $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ brán podle tabulky $2/n$ zlomek $\frac{1}{7}$.

I při dělení přirozených čísel bylo často zapotřebí zdvojnásobovat kmenné zlomky. Např. výpočet $28 : 5 = 5\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{15}$ vypadá asi takto:

---

[13] V příkladech, které byly výše uvedeny, jsme se snažili vyhnout situacím, ve kterých by bylo nutné tabulku $2/n$ použít.

\	1	5
	2	10
\	4	20
\	$\frac{1}{5}$	1
\	$\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$	2

Když počtář zjistil, že dělence nesloží z celočíselných násobků dělitele, přešel ke vhodné menší jednotce, jedné pětině, a tu ještě musel zdvojnásobit.

V příkladu **R30** je uveden výpočet $10 : \frac{2}{3}\,\frac{1}{10} = 13\,\frac{1}{23}$, ve kterém je opět třeba zdvojnásobovat kmenné zlomky s lichým jmenovatelem.

\	1	$\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}$
	2	$1\frac{1}{3}\,\frac{1}{5}$
\	4	$3\frac{1}{15}$
\	8	$6\frac{1}{10}\,\frac{1}{30}$
\	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{30}$

Nyní

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{10} + 3\,\frac{1}{15} + 6\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{30} + \frac{1}{30} = 10\,.$$

Než egyptský počtář napsal poslední řádek, tj. když vynásobil číslo $\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}$ třinácti, vypočetl, že mu do deseti chybí jedna třicetina, a uvědomil si, že třicetinu získá vydělením čísla $\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}$ číslem 23. Z tohoto příkladu můžeme oprávněně soudit, že ve starém Egyptě počtáři uměli se zlomky dobře pracovat.

V příkladu **R42** je bezchybně umocněno číslo $8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$; i zde došlo ke zdvojnásobení kmenného zlomku s lichým jmenovatelem.

	1	$8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$
	2	$17\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{9}$
	4	$35\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{18}$
\	8	$71\,\frac{1}{9}$
\	$\frac{2}{3}$	$5\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}\,\frac{1}{27}$
	$\frac{1}{3}$	$2\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{36}\,\frac{1}{54}$
\	$\frac{1}{6}$	$1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{72}\,\frac{1}{108}$
\	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{27}\,\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$

Celkem $79\,\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$

Jako výsledek je uvedeno číslo $79\,\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$; výsledek je správný, jeho vhodnějším vyjádření je však $79\,\frac{1}{81}$. Můžeme obdivovat, jak egyptský počtář vypočetl na pátém řádku dvě třetiny čísla $8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$, jak na osmém řádku vydělil předchozí číslo třemi a jak nakonec čtyři smíšená čísla sečetl. Zdá se, že pomocné výpočty prováděl stranou.

Procvičování práce se zlomky.

V příkladech **R1** až **R6** (viz ukázka) je třeba rozdělit jeden, dva, šest, sedm, osm, resp. devět chlebů deseti mužům. Po zadání příkladu je uveden výsledek a provedena zkouška (násobením výsledku deseti), vlastní výpočet chybí. Naší symbolikou je možno tyto úlohy zapsat takto:

R1: $1 : 10 = \frac{1}{10}$

R2: $2 : 10 = \frac{1}{5}$

R3: $6 : 10 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{10}$

R4: $7 : 10 = \frac{2}{3}\ \frac{1}{30}$

R5: $8 : 10 = \frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$

R6: $9 : 10 = \frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{30}$

Smyslem těchto příkladů bylo patrně procvičování násobení, dělení a práce se zlomky, zejména některých vztahů z tabulky $2/n$ ($\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$) a některých identit, jako je např.

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\,, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\,, \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}\,.$$

Poznamenejme, že se zde při násobení užívá pouze zdvojování.

V příkladu **R39** je třeba rozdělit 100 chlebů mezi 10 mužů, ale tak, aby jich 50 bylo rozděleno mezi 6 mužů a 50 mezi 4 muže. Zde je opravdu dělení provedeno,

$$50 : 4 = 12\,\frac{1}{2}\,, \qquad 50 : 6 = 8\,\frac{1}{3}\,;$$

jako výsledek této úlohy je uveden výčet množství, která dostanou jednotliví muži (čtyřikrát $12\,\frac{1}{2}$ a šestkrát $8\,\frac{1}{3}$), a vypočten rozdíl $12\,\frac{1}{2} - 8\,\frac{1}{3} = 4\,\frac{1}{6}$.

V příkladu **R65** se 100 chlebů dělí mezi 10 mužů tak, aby tři z nich měli dvojnásobné množství. Podle uvedeného návodu je třeba vydělit 100 číslem 13, výsledek je $7\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{39}$. Vlastní dělení zde zapsáno není, opět je však uveden výčet množství, která dostanou jednotliví muži (sedmkrát $7\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{39}$ a třikrát $15\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{26}\,\frac{1}{78}$).[14]

Příklady **R7** až **R20** tvoří další ucelený soubor úloh. První z nich je nadepsána slovy *Metoda doplňování*, jejichž smysl však není jasný; zdá se, že cílem těchto příkladů je procvičování práce se zlomky. Po opravení chyb, které

[14] Při zdvojení bylo třeba použít vztah $\frac{2}{39} = \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$ z tabulky $2/n$.

vznikly patrně při přepisu, je možno tyto příklady dnešní symbolikou zapsat ve tvaru:

R7: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)=\frac{1}{2}$

R8: $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

R9: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right)=1$

R10: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)=\frac{1}{2}$

R11: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$

R12: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{14}=\frac{1}{8}$

R13: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{112}\right)=\frac{1}{8}$

R14: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{28}=\frac{1}{16}$

R15: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{224}\right)=\frac{1}{16}$

R16: $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}=1$

R17: $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

R18: $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

R19: $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

R20: $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$

První dva příklady **R7** a **R8** (viz ukázky) mají charakter vzorových příkladů k následujícím dvanácti příkladům. Při násobení se využívá distributivního zákona, výsledný součet je vypočten pomocí převodu zlomků na společného jmenovatele.

V příkladu **R7** je třeba vypočítat součet

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}\,.$$

Tyto zlomky jsou převedeny na společného jmenovatele 28; vypsáni jsou však jen příslušní čitatelé. Je tedy vypočten součet

$$7+3\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=14\,,$$

takže součet výše uvedených zlomků je $\frac{1}{2}$. Podle tohoto příkladu jsou dále řešeny příklady **R9** až **R15**. Poznamenejme, že mezi příklady **R11** a **R12** měl být asi uveden příklad

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)=\frac{1}{4}\,,$$

pak by byl sled těchto příkladů ještě důslednější.[15]

V příkladu **R8** je třeba vypočítat součet

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\,.$$

Tyto zlomky jsou převedeny na společného jmenovatele 18, vypsáni jsou však jen příslušní čitatelé. Je tedy vypočten součet

$$4\frac{1}{2}+3+1\frac{1}{2}=9\,,$$

tj. součet výše uvedených zlomků je $\frac{1}{2}$. Podle tohoto příkladu jsou dále řešeny příklady **R16** až **R20**. Povšimněme si, že výsledek těchto příkladů je předem zjevný, neboť součet čísel v první závorce je 2. Příklady **R16** až **R20** tvoří jeden celek.

V celém souboru příkladů je zvláštní, že se zlomky převádějí na společného jmenovatele 28 nebo 18.

V příkladech **R21** až **R23** je procvičováno odčítání zlomků. V naší symbolice tyto příklady můžeme vyjádřit následujícími rovnostmi:

R21: $1-\frac{2}{3}\,\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{15}$

R22: $1-\frac{2}{3}\,\frac{1}{30}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{10}$

R23: $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{30}\,\frac{1}{45}=\frac{1}{9}\,\frac{1}{40}$

První z těchto příkladů, příklad **R21** (viz ukázka), je uvozen formulací: *Řekne se ti: co doplní* $\frac{2}{3}\,\frac{1}{15}$ *do* 1 *?* Uvedené řešení odpovídá převedení zlomků $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{15}$ na společného jmenovatele 15; jsou však uvedeny pouze čitatelé zlomků, tj. 10 a 1. Zbytek $4=15-10-1$ je potom vydělen číslem 15, vychází $\frac{1}{5}\,\frac{1}{15}$, což je výsledek. Uvedena je i odpověď: *Tedy* $\frac{1}{5}\,\frac{1}{15}$ *se k tomu přičtou.* Při zkoušce je převedením na společného jmenovatele prověřeno, že součet zlomků $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$ a $\frac{1}{15}$ je roven 1.

Příklad **R22** je obdobný. Příklad **R23** je komplikovanější, část výpočtu chybí, zlomky se zde převádějí na společného jmenovatele 45, tj. někteří čitatelé jsou opět smíšená čísla.

---

[15] Povšimněme si, jak je utvořen v příkladech **R9** až **R15** druhý činitel! Druhá závorka v **R10** je polovinou druhé závorky v **R9**, totéž platí pro **R15** a **R13**, ve stejném vztahu jsou příklady **R14** a **R12**, resp. **R12** a **R11**, resp. **R11** a **R10**, kde je ovšem třeba přihlédnout ke vztahu $\frac{2}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$ z tabulky $2/n$.

POSLOUPNOSTI.

Aritmetická posloupnost.

V Rhindově papyru jsou dvě úlohy, ve kterých se pracuje s aritmetickou posloupností o pěti, resp. deseti členech, v Káhúnských zlomcích nalézáme aritmetickou posloupnost o deseti členech.

V příkladu **R40** (viz ukázka) je třeba rozdělit 100 chlebů mezi 5 mužů tak, aby byla *jedna sedmina ze tří horních pro dva muže dole.*

Z formulace úlohy nelze pochopit, že má jít o aritmetickou posloupnost, to vyplývá až z prezentovaného řešení. Ze známého součtu známého počtu členů aritmetické posloupnosti a doplňující podmínky je tato posloupnost vypočtena.

Úloha je řešena metodou *chybného předpokladu.* Zdá se, že řešení vyplývá z představy aritmetické posloupnosti tvaru

$$1\,, \qquad 1+d\,, \qquad 1+2d\,, \qquad 1+3d\,, \qquad 1+4d\,;$$

chybným předpokladem je to, že prvním členem této posloupnosti je číslo 1. Podmínku, která je na tuto posloupnost kladena, vyjádříme vztahem

$$1+(1+d)=\frac{1}{7}\cdot\big[(1+2d)+(1+3d)+(1+4d)\big]\,,$$

ze kterého snadno vypočteme, že $d = 5\,\frac{1}{2}$.[16] Jde tedy o posloupnost

$$1\,, \qquad 6\frac{1}{2}\,, \qquad 12\,, \qquad 17\frac{1}{2}\,, \qquad 23\,,$$

jejíž součet je 60. Číslo 60 musíme vynásobit číslem $1\,\frac{2}{3}$, abychom získali požadovaný součet 100. Číslem $1\,\frac{2}{3}$ tedy musíme vynásobit i členy výše uvedené posloupnosti. Hledanou aritmetickou posloupností je tedy posloupnost

$$1\frac{2}{3}\,, \qquad 10\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,, \qquad 20\,, \qquad 29\frac{1}{6}\,, \qquad 38\frac{1}{3}\,,$$

jejíž diferencí je $9\,\frac{1}{6}$ (tento výsledek však na papyru není uveden).

V úloze **R64** je třeba 10 měřic ječmene rozdělit mezi 10 mužů tak, aby získaná množství tvořila aritmetickou posloupnost s diferencí $\frac{1}{8}$.

Tato úloha je nadepsána *Metoda počítání s rozdílem peru*, což charakterizuje aritmetickou posloupnost; v samotném textu je uvedeno, že *rozdíl peru každého muže vůči jeho druhovi je* $\frac{1}{8}$ měřice; tímto *rozdílem peru* je právě diference aritmetické posloupnosti.

[16] Tento mezivýsledek je na papyru uveden, neznáme však cestu, kterou k němu egyptský počtář došel.

Řešení úlohy je doprovázeno stručným textem, který dovoluje rekonstruovat metodu řešení. Řešení vychází z představy aritmetické posloupnosti

$$a-9d,\ a-7d,\ a-5d,\ a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d,\ a+5d,\ a+7d,\ a+9d,$$

kde a je tzv. *hlavní část*, tj. aritmetický průměr všech členů této posloupnosti, a $2d$ je diference. Vzhledem k tomu, že součtem všech členů posloupnosti je $10a$, což má být rovno 10, je $a = 1$. Zřejmě je $d = \frac{1}{16}$. Největším členem posloupnosti je tedy

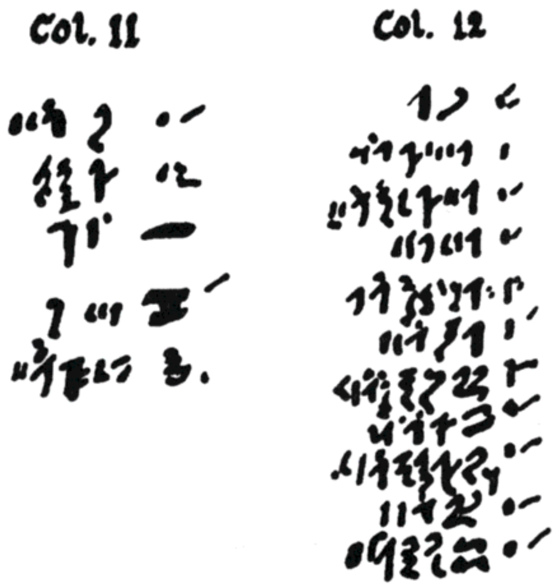
$$a + 9d = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,.$$

Postupným odčítáním diference $2d$ od tohoto největšího členu pak získáme další členy posloupnosti:

$$1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,,\quad 1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,,\quad 1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,,\quad 1\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,,\quad 1\,\frac{1}{16}\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,,\quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,,\quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,,\quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,,\quad \frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,.$$

Povšimněme si, že je úloha konstruována tak, aby vycházely jen Horovy zlomky.



Příklad **K2**

(11. a 12. sloupec Káhúnského papyru IV.3)

Na jednom z Káhúnských papyrů nacházíme bez jakéhokoli slovního doprovodu sloupec deseti čísel, která tvoří aritmetickou posloupnost. Jde o „příklad" **K2** (viz ukázka). Odshora dolů jsou zapsána tato čísla:

$$13\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 12\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 12\,\frac{1}{12}\,, \qquad 11\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 10\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}\,,$$

$$9\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 7\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 7\,\frac{1}{12}\,, \qquad 6\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,.$$

Ve vedlejším sloupci je devíti vynásobena polovina diference, tj. číslo $\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$:

$$9\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=3\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}$$

Uvědomme si, že *hlavní částí* této aritmetické posloupnosti (viz příklad **R64**) je číslo 10; největším členem této posloupnosti je tedy

$$10+9\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=10+3\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}=13\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{12}\,.$$

Ve smyslu příkladu **R64** se tedy zdá zjevné, jak je příklad konstruován.

Nad sloupcem deseti členů této aritmetické posloupnosti je zapsáno ještě číslo 110, jehož význam není jasný. Snad zde došlo k chybě při výpočtu nebo při opisu, součtem této aritmetické posloupnosti je totiž číslo 100. Není vyloučeno, že řešitel přičetl k součtu této posloupnosti ještě hlavní část 10. Je zajímavé, že číslo 110 je součtem dvanácti členů této posloupnosti, uvažujeme-li ještě členy

$$5\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}\,, \qquad 4\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,.$$

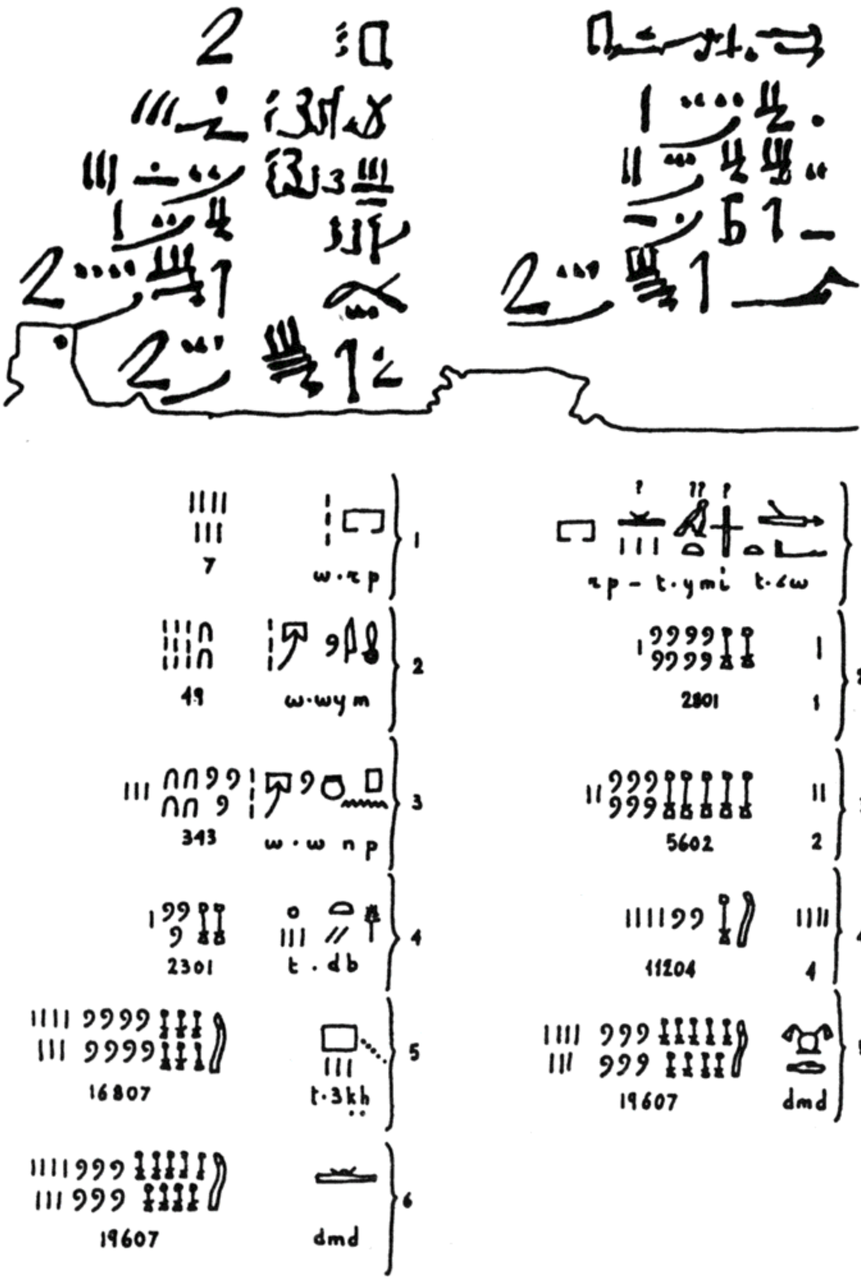
Rovněž je zajímavé, že všechny členy uvažované aritmetické posloupnosti jsou lichými násobky poloviny diference, tj. čísla $\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$.

Poznamenejme ještě, že ani u jednoho z výše uvedených příkladů nemáme sebemenší náznak toho, že by byl součet aritmetické posloupnosti zjišťován jinak než přímým sčítáním. Zdá se, že cílem těchto úloh bylo členy aritmetické posloupnosti vypsat stejným způsobem, jako byla vypsána nestejná množství chlebů v příkladech **R39** a **R65**.

Geometrická posloupnost.

Úloha **R79** (viz ukázka), ve které nacházíme pětičlennou geometrickou posloupnost s kvocientem 7 a její součet, je klasickou úlohou rekreační matematiky. Uvozena je slovem *Majetek*, smysl textu snad lze interpretovat asi takto.

Je 7 domů, 49 koček, 343 myší, 2 401 klasů pšenice a 16 807 měřic. Všeho dohromady je 19 607.



Příklad **R79**

(hieratický zápis, hieroglyfický přepis, transliterace)

V úloze je tedy vypočten součet geometrické posloupnosti

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 + 49 + 343 + 2\,401 + 16\,807 = 19\,607 .$$

Protože je po straně vypočten součin $7 \cdot 2\,801 = 19\,607$, zdá se, že cesta k výsledku vedla přes následující posloupnost součtů:

$$\begin{aligned} s_1 &= 7 \cdot 1 = 7 , \\ s_2 &= 7 \cdot (1 + 7) = 56 , \\ s_3 &= 7 \cdot (1 + 7 + 7^2) = 7 \cdot (1 + 56) = 399 , \\ s_4 &= 7 \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 7 \cdot (1 + 399) = 2\,800 , \\ s_5 &= 7 \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7 \cdot (1 + 2\,800) = 19\,607 . \end{aligned}$$

Nemáme doklad o tom, že by Egypťané postupovali v duchu vzorce

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Po dosazení by totiž bylo

$$s_5 = 7 \cdot \frac{16\,807 - 1}{7 - 1} = 7 \cdot \frac{16\,806}{6} = 7 \cdot 2\,801 = 19\,607 ,$$

ale výpočet $16\,806 : 6 = 2\,801$ nikde uveden není.

Poznamenejme, že podobné úlohy (dokonce se stejným kvocientem) nacházíme během celé kulturní historie lidstva. Např. u Leonarda Pisánského (Fibonacci) nacházíme obdobný příklad i řešení v jeho slavném díle *Liber abaci* z roku 1202 (resp. 1228); sčítá se zde však šest členů geometrické posloupnosti:

Sedm stařen míří do Říma, každá má sedm mulů, na každém je sedm pytlů, v každém pytli sedm chlebů, u každého chleba sedm nožů a každý nůž je v sedmi pochvách. Kolik je všeho dohromady?

Ve starých ruských rukopisech se objevuje úloha, která vede na součet sedmi členů geometrické posloupnosti:

Jde sedm bab, každá má sedm holí, na každé je sedm suků, na každém suku sedm měšců, v každém měšci sedm pirohů, v každém pirohu sedm vrabců, každý vrabec má sedm žaludků. Všeho dohromady je

$$7 + 49 + 343 + 2\,401 + 16\,807 + 117\,649 + 823\,543 = 960\,799 .$$

A známá anglická dětská říkanka (the familiar Mother Goose rhyme) zní:

As I was going to Saint Ives, I met a man with seven wives; every wife had seven sacks, every sack had seven cats, every cat had seven kits. kits, cats, sacks, and wives, how many were going to Saint Ives?

ALGEBRA.

V egyptských matematických textech nalézáme úlohy, které je možno řešit lineárními rovnicemi. Jsou to příklady na vypočtení neznámého množství, které je zadáno nějakou podmínkou. V těchto úlohách můžeme spatřovat počátky algebry.[17] Úlohy tohoto typu jsou většinou formulovány abstraktně, tj. postrádají jakýkoli praktický kontext. Vzhledem k tomu, že egyptským termínem pro neznámé množství je slovo *acha*, hovoří se často o úlohách typu *acha*.

O algebraických postupech egyptských písařů viz např. [Bor], [Rod].

Úlohy vedoucí na lineární rovnice.

Úlohy, které vedou na lineární rovnice, nalézáme zejména v Rhindově a Moskevském papyru. Jsou řešeny metodou chybného předpokladu i přímým dělením.

Úlohy **R24**, **R25**, **R26** a **R27** se týkají neznámého množství, ke kterému je přidána jeho část vyjádřená kmenným zlomkem; jsou to úlohy typu

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot x = b\,.$$

V naší symbolice můžeme tyto úlohy zapsat následujícími rovnicemi (v závorkách jsou uvedeny výsledky):

R24: $x+\frac{1}{7}x = 19$ $\quad (x = 16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8})$

R25: $x+\frac{1}{2}x = 16$ $\quad (x = 10\,\frac{2}{3})$

R26: $x+\frac{1}{4}x = 15$ $\quad (x = 12)$

R27: $x+\frac{1}{5}x = 21$ $\quad (x = 17\,\frac{1}{2})$

Příklad **R26**, který obsahuje „metodický návod“ k této skupině příkladů, je řešen nejpodrobněji. Prezentována je zde *metoda chybného předpokladu.*

Řešitel předpokládá, že neznámá x je rovna čtyřem (neboť ze čtyř se snadno vypočte jedna čtvrtina), tj. klade $x_0 = 4$.

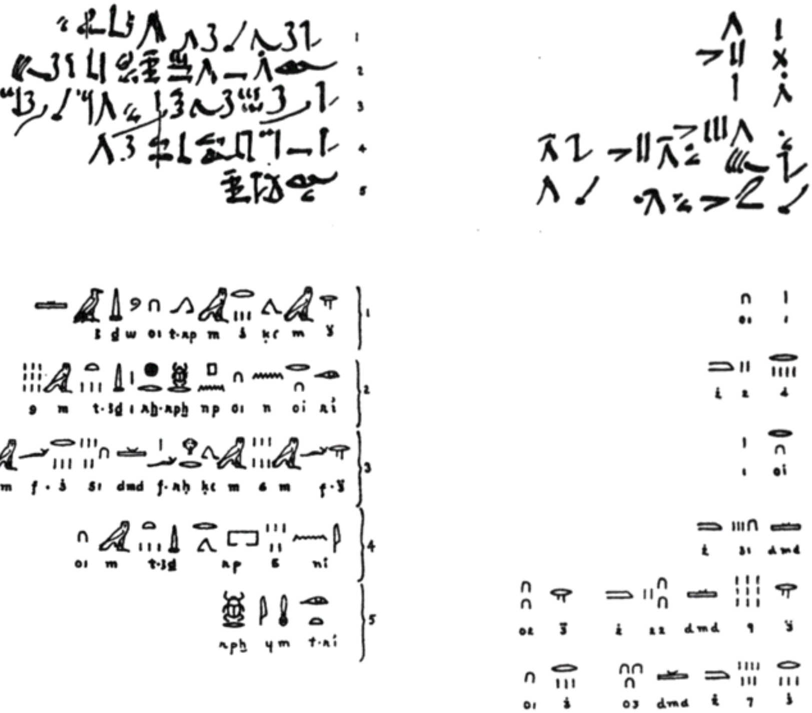
Nyní je $x_0+\frac{1}{4}x_0 = 5$, má však vyjít 15. Neznámá x musí být tedy třikrát větší než x_0, tj. $x = 3x_0 = 12$.

Podle obtížnosti by tyto příklady měly být seřazeny v pořadí **R26**, **R27**, **R25**, **R24** (viz ukázka). Všechny jsou vypočteny stejným způsobem, u všech je provedena zkouška.

Na následujícím obrázku jsou příklady R28 a R29.

---

[17] Připomeňme, že až do 19. století našeho letopočtu byla algebra chápána jako nauka o řešení rovnic.



Příklad **R28** je obtížnější, vede na rovnici

R28: $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10 \qquad (x = 9)$

Část popisu řešení tohoto příkladu patrně chybí. Zdá se však, že písař postupoval tak, jako by s pomocí naší symboliky upravil levou stranu a došel k jednoduchému vztahu

$$\frac{10}{9} \cdot x = 10 \,,$$

pak odečetl jednu desetinu levé i pravé strany a získal výsledek 9. Naznačuje to uvedený návod: *Vypočti* $\frac{1}{10}$ *z těch* 10, *vyjde* 1, *zbytek je* 9. Písař nakonec prověřil správnost výsledku zkouškou.

Příklad **R30** (viz ukázka) odpovídá následující rovnici:

R30: $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right) \cdot x = 10 \qquad (x = 13\,\frac{1}{23})$

Úloha je řešena přímým dělením, jak o tom svědčí formulace ***počítej s*** $\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}$ ***až najdeš*** 10. Číslo 10 je tedy vyděleno číslem $\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}$, a tak je vypočteno neznámé množství. Dělení není jednoduché, neboť se dělí součtem dvou kmenných zlomků,[18] potom je provedena zkouška.

[18] Tento výpočet již byl popsán v odstavci o počítání s pomocí tabulky $2/n$.

Další čtyři příklady Rhindova papyru jsou rovněž řešeny přímým dělením.

R31: $x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot x = 33$ $\left(x = 14\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{56}\,\frac{1}{97}\,\frac{1}{194}\,\frac{1}{388}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776}\right)$

R32: $x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot x = 2$ $\left(x = 1\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{114}\,\frac{1}{228}\right)$

R33: $x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot x = 37$ $\left(x = 16\,\frac{1}{56}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776}\right)$

R34: $x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot x = 10$ $\left(x = 5\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{14}\right)$

Vzhledem k tomu, že se zde přirozené číslo dělí součty zlomků, jsou výpočty komplikované. Nejjednodušší je příklad **R34** (při zkoušce je však třeba převést šest zlomků na společného jmenovatele 56), nejkomplikovanější je příklad **R31** (viz ukázka). Zatímco u příkladů **R32**, **R33**, **R34** je provedena zkouška, u příkladu **R31** zkouška chybí.

I další čtyři příklady Rhindova papyru jsou řešeny přímým dělením. Zatímco předchozí příklady se týkaly jakéhosi neznámého množství *acha*, v příkladech **R35** až **R38** (viz ukázka) jde o neznámá množství obilí. Tyto příklady byly navíc určeny k procvičování převodů jednotek.

R35: $3x + \frac{1}{3}x = 1$ $\left(x = \frac{1}{5}\,\frac{1}{10}\right)$

R36: $3x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \cdot x = 1$ $\left(x = \frac{1}{4}\,\frac{1}{53}\,\frac{1}{106}\,\frac{1}{212}\right)$

R37: $3x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot x = 1$ $\left(x = \frac{1}{4}\,\frac{1}{32}\right)$

R38: $3x + \frac{1}{7}x = 1$ $\left(x = \frac{1}{6}\,\frac{1}{11}\,\frac{1}{22}\,\frac{1}{66}\right)$

V Moskevském papyru nacházíme jen dvě úlohy typu *acha*; jde o **M19** (viz ukázka) a **M25**, přičemž úloha **M19** je podobná úloze **R34**. Obě jsou nadepsány *Metoda výpočtu množství* a končí odpovědí *Hle,* 4 (resp. 3) *je to, o čem se hovoří. Nalezl jsi správně.* Jsou velmi jednoduché, navíc obsahují podrobný slovní popis postupu řešení.

M19: $1\,\frac{1}{2} \cdot x + 4 = 10$ $(x = 4)$

M25: $2x + x = 9$ $(x = 3)$

V Káhúnských papyrech je jen jedna úloha tohoto typu. Jde o příklad **K4** (viz ukázka), který je sice značně poškozený, ale poměrně dobře rekonstruovatelný.

K4: $x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot x = 5$ $(x = 20)$

Uvedený výpočet odpovídá těmto operacím:

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\,, \qquad 1 : \frac{1}{4} = 4\,, \qquad 5 \cdot 4 = 20\,.$$

Úlohy vedoucí na jednoduché kvadratické rovnice.

Na Berlínském papyru je velmi zajímavá úloha, která obsahuje neznámou ve druhé mocnině. Jde o těžce poškozený příklad **B1** (viz ukázka), ve kterém je pravděpodobně řešena úloha vedoucí na následující soustavu rovnic:

B1: $x^2 + y^2 = 100\ ,\quad y = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot x \qquad (x = 8\ ,\ y = 6)$

Výpočet, který je zde uveden, odpovídá následujícímu sledu operací:

$$1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\ , \qquad \sqrt{1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}} = 1\,\frac{1}{4}\ , \qquad \sqrt{100} = 10\ ,$$

$$10 : 1\,\frac{1}{4} = 8\ , \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot 8 = 6\ .$$

Uvedené výpočty odpovídají úpravám, které bychom použili my:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \cdot x^2 = 100\ , \qquad \left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2\right] \cdot x^2 = 100\ ,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) \cdot x^2 = 100\ , \qquad 1\,\frac{1}{4} \cdot x = 10\ ,$$

$$x = 10 : 1\,\frac{1}{4} = 8\ , \qquad y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot 8 = 6\ .$$

Někdy se uvádí, že i zde byla použita metoda chybného předpokladu; počtář snad vyšel z chybného předpokladu $x_0 = 1$ a $y_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ a po zjištění poměru $10 : 1\,\frac{1}{4} = 8$ vypočetl $x = 8x_0$ a $y = 8y_0$.

Na Káhúnském zlomku LV.4 se zachovala nepříliš srozumitelná úloha **K5**, ve které se rovněž neznámá objevuje ve druhé mocnině.

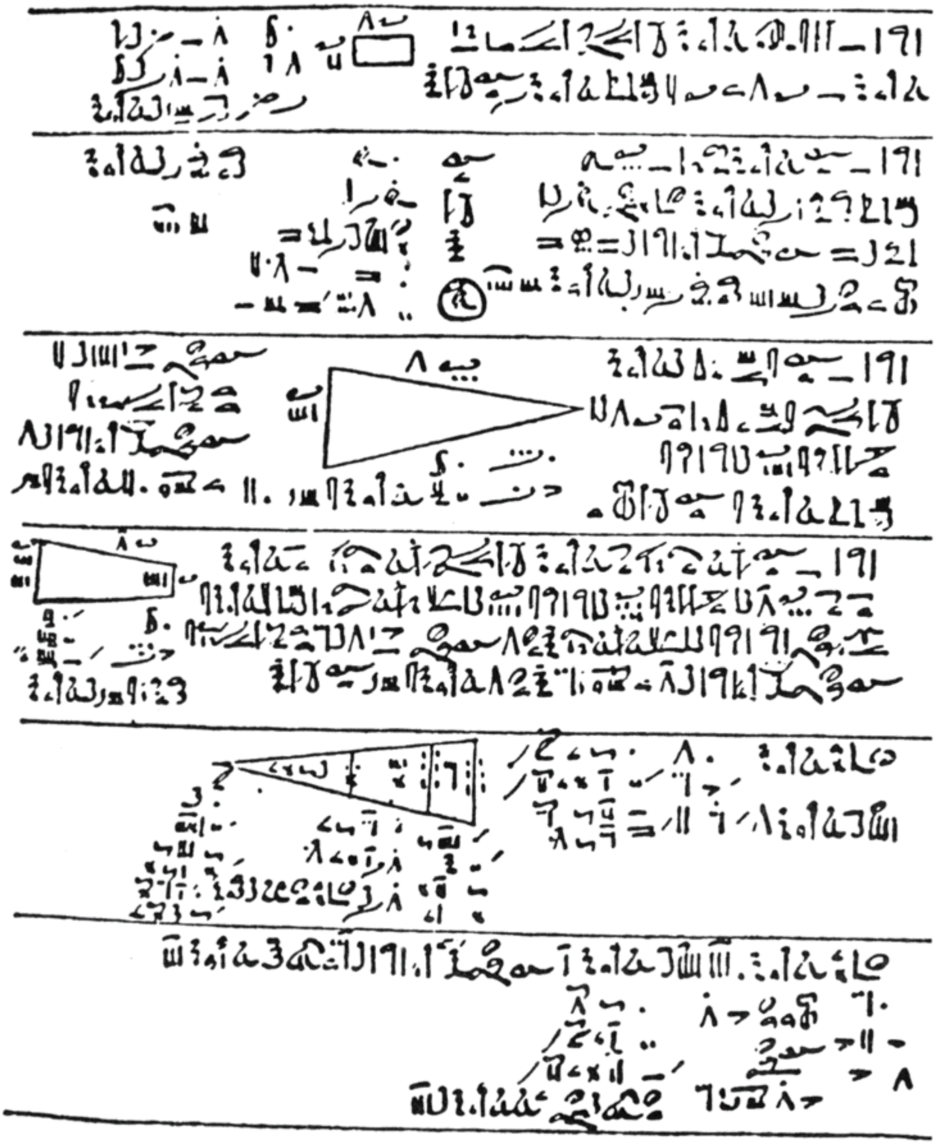
K5: $10x \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot x = 120 \qquad (x = 4)$

Sled výpočtů je tento:

$$120 : 10 = 12\ , \qquad 1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1\,\frac{1}{3}\ ,$$

$$12 \cdot 1\,\frac{1}{3} = 16\ , \qquad \sqrt{16} = 4\ .$$

Oba výše uvedené příklady, ve kterých se odmocňuje, vedou na kvadratické rovnice, ve kterých chybí lineární člen. V dochovaných egyptských matematických textech se nesetkáváme s žádnou úlohou, která by vedla na úplnou kvadratickou rovnici.



Část Rhindova papyru

(příklady R49, R50, R51, R52 (chybí část textu vlevo), R53 a R54, R55)

GEOMETRIE.

V dochovaných egyptských matematických textech nalézáme úlohy následujících typů:

- úlohy na výpočet obsahu obdélníka, trojúhelníka, lichoběžníka a kruhu,
- úlohy, ve kterých jsou z daného obsahu trojúhelníka, resp. obdélníka a z daného poměru jejich rozměrů tyto rozměry vypočteny,
- úlohy na výpočet objemů kvádru, válce a komolého jehlanu,
- úlohy, ve kterých je z daného objemu a známé podstavy kvádru počítána jeho výška,
- úlohy na výpočet velikosti úhlu, který svírá základna a stěna jehlanu,
- úlohy, ve kterých je ze znalosti tohoto úhlu a velikosti základny počítána výška jehlanu,
- nepříliš srozumitelná úloha, ve které je patrně počítán povrch poloviny pláště válce.

Geometrii jsou v Rhindově papyru věnovány úlohy **R41** až **R60**. Poznamenejme, že úlohy **R47**, **R54** a **R55** mají geometrický kontext, ale geometrie se vlastně netýkají, a úloha **R53** je těžko interpretovatelná.

V Moskevském papyru jsou geometrickými úlohami **M4**, **M6**, **M7**, **M10**, **M14**, **M17** a **M18**.

V Káhunských papyrech jsou dvě geometrické úlohy, a to **K2'** a **K5**.

V následujících odstavcích se budeme věnovat jednotlivým geometrickým tématům, která se v egyptských matematických textech vyskytují.

Obdélník, čtyřúhelník.

Obsah obdélníka počítali Egypťané jako součin délek jeho stran. Je pravděpodobné, že obdobným způsobem počítali i obsah obecného čtyřúhelníka, který se od obdélníka „příliš nelišil".

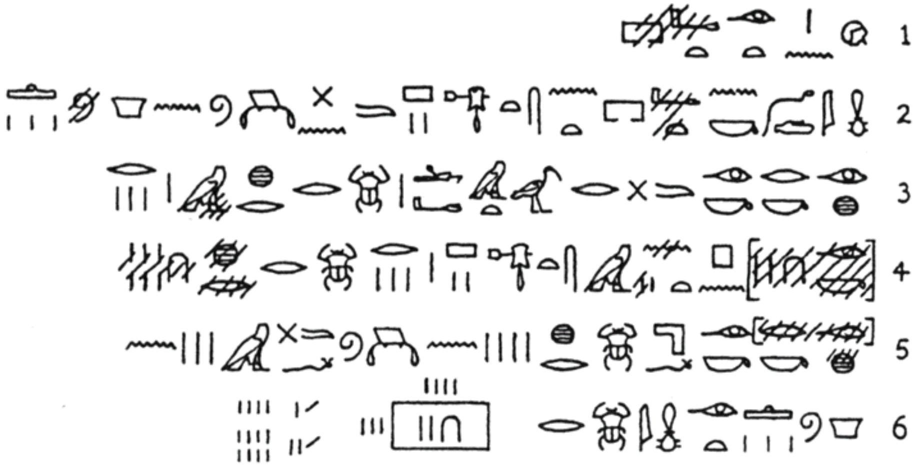
V příkladu **R49** nadepsaném *Metoda výpočtu* [obsahu] *plochy* je prezentován postup pro výpočet obsahu čtyřúhelníkového (nebo spíše obdélníkového) pole o rozměrech 1 000 a 100 loktů. Připojen je obrázek, na kterém je znázorněn patrně obdélník. Ve výpočtu, který následuje, jsou délky jeho stran vynásobeny.

Příklad je mírně komplikován převodem jednotek. V textu i na obrázku jsou rozměry pole zadány v jednotkách *chet* (sto loktů), výpočet je však proveden v loktech, i když to není nikde uvedeno.[1] Výsledek je 100 000 čtverečních loktů.

Poznamenejme, že v příkladu **R48** je vypočten obsah čtverce o straně 9; obsah čtverce byl patrně v tomto příkladu porovnáván s obsahem vepsaného kruhu (viz dále).

---

[1] Písař Ahmose se při přepisu patrně dopustil chyby; v zadání úlohy a na připojeném obrázku je jako druhý rozměr uvedeno 2 *chet*, zatímco v následujícím výpočtu figuruje 100 loktů.



Hieroglyfický přepis příkladu **M6**

Hieroglyfický přepis příkladu **M7**

Úlohy **R49** a **M6** jsou doprovázeny následujícími obrázky obdélníků:

Příklad **M6** (viz ukázka) je nazván *Metoda výpočtu pravoúhelníka*. Zadán je obdélník o obsahu 12, u kterého $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ *z délky přísluší šířce*. Řešení tohoto příkladu je na papyru popsáno slovy; v naší symbolice tento postup vyjádříme výpočty

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{3}\,, \qquad 1\frac{1}{3}\cdot 12 = 16\,, \qquad \sqrt{16} = 4\,, \qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 4 = 3\,,$$

které odpovídají těmto úpravám:

$$12 = a\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot a\,, \qquad a^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot 12 = 1\frac{1}{3}\cdot 12 = 16\,,$$

$$a = 4\,, \qquad b = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 4 = 3\,.$$

Jedna strana obdélníka má tedy délku 4, druhá 3.

V příkladu **M18** je rovněž počítán obsah obdélníka; jde o výpočet obsahu pruhu látky. Úloha je mírně komplikována převody jednotek,[2] výpočet je navíc značně zmatený. Není jasné, zda k nesrovnalostem došlo již při výpočtu nebo při následném přepisu.

Poznamenejme, že přibližnou hodnotu S obsahu obecného čtyřúhelníka počítali Egypťané podle vzorce

$$S = \frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}\,,$$

tj. vynásobili aritmetické průměry protilehlých stran. Na stěnách Horova chrámu v Edfu z 2. stol. př. Kr. jsou takto počítány obsahy většího počtu čtyřúhelníků.

Trojúhelník.

Výpočty obsahu trojúhelníka, se kterými se v egyptských textech setkáváme, odpovídají našemu známému vzorci, podle kterého se polovina základny násobí výškou. Nemůžeme si však být zcela jisti tím, zda údaj, který v egyptských textech chápeme jako výšku, není ve skutečnosti délkou jedné ze stran

[2] **Délka pruhu látky je 5 loktů a 5 dlaní, šířka 2 dlaně.**

trojúhelníka (rameno, odvěsna). Vzhledem k malému množství příkladů, které máme k disposici, je těžké vyslovovat jakákoli kategorická tvrzení.

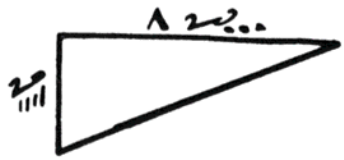
Příklad **R51** nadepsaný *Metoda výpočtu* [obsahu] *trojúhelníkové plochy* je věnován výpočtu obsahu trojúhelníka, jehož základna má délku 400 a výška 1 000 loktů. Na připojeném obrázku i v textu jsou rozměry trojúhelníka zadány v jednotkách *chet*; s těmito jednotkami operuje i slovní popis řešení:

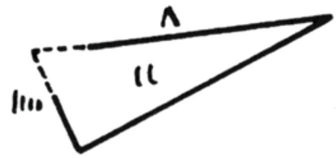
Vypočti $\frac{1}{2}$ *ze* 4, *je to* 2, *pro udání jeho obdélníka. Počítej s* 10 *dvakrát, to je* [obsah] *jeho plochy.*

Zdá se tedy pravděpodobné, že trojúhelník byl při výpočtu „převeden“ na tzv. „rovnoplochý“ obdélník, jehož strany jsou tvořeny polovinou základny a výškou daného trojúhelníka.

I tento příklad je mírně komplikován převody jednotek, neboť po výše uvedeném slovním popisu následuje numerický výpočet v loktech, který je navíc mírně zmatený.

Příklad **M4** (viz ukázka) je téměř stejný (numericky i doprovodným textem) jako příklad **R51**, chybí však převody jednotek.[3] I zde nalézáme ve slovním popisu řešení formulaci naznačující, že Egypťané uvažovali při výpočtu obsahu trojúhelníka rovnoplochý obdélník. Obrázky doprovázející úlohy **R51** a **M4** naznačují, že mohlo jít o pravoúhlé trojúhelníky.





Příklad **M7** je nadepsán *Metoda výpočtu trojúhelníka*. Zadán je trojúhelník o obsahu 20 *s poměrem stran* $2\frac{1}{2}$, úkolem je nalézt délku základny a výšky (nebo odvěsen). Řešení je popsáno takto:

Zdvojnásob [obsah] *plochy, vyjde* 40. *Počítej* [s tím] $2\frac{1}{2}$-krát, *vyjde* 100. *Vypočti* [z toho] *odmocninu, vyjde* 10. *Proveď* $1 : 2\frac{1}{2}$, *to, co vyjde, je* $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$. *Vypočti to z* 10, *vyjde* 4. *Je to* 10 *na délku,* 4 *na šířku.*[4]

V naší symbolice odpovídá výpočet těmto úpravám:

$$20 = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{1}{2\frac{1}{2}} \cdot z\,, \qquad z^2 = 2 \cdot 20 \cdot 2\frac{1}{2} = 100\,,$$

$$z = 10\,, \qquad v = \frac{1}{2\frac{1}{2}} \cdot 10 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \cdot 10 = 4\,.$$

[3] V příkladu **M4** nejsou vůbec žádné jednotky uvedeny.

[4] Zde se objevují termíny *délka* a *šířka*, které snad můžeme interpretovat jako *základna* a *výška*, nebo snad *odvěsny*.

Matematický obsah příkladu **M17** je stejný jako příkladu **M7**. Zadán je opět trojúhelník o obsahu 20, otázka je formulována takto:

Udáš-li jeho délku, udej $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$*, to bude na šířku.*[5]

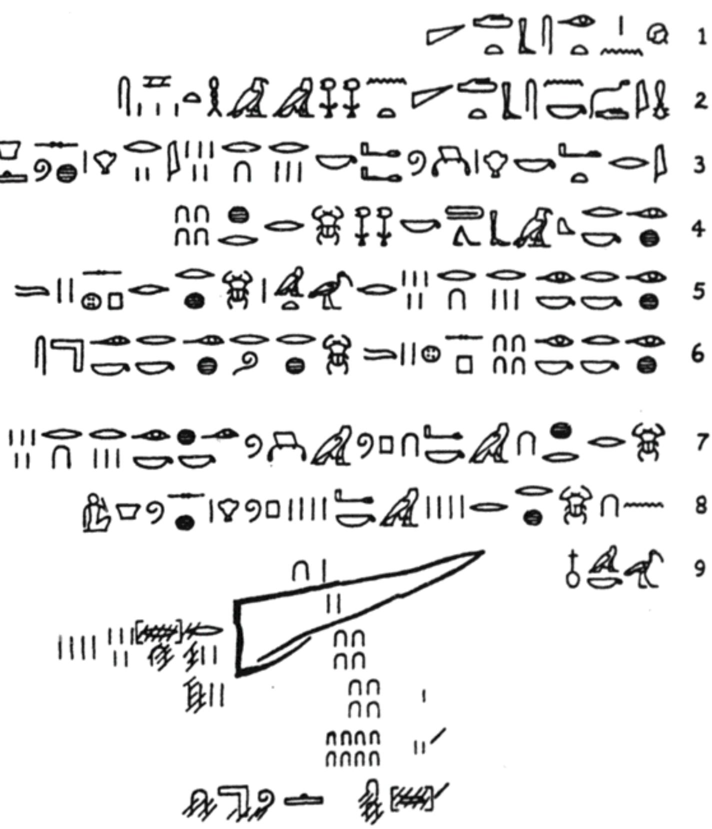
Slovní popis řešení odpovídá následujícímu výpočtu:

$$20 = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \cdot z\ , \qquad z^2 = 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{15}} = 40 \cdot 2\,\frac{1}{2} = 100\ ,$$

$$z = 10\ , \qquad v = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \cdot 10 = 4\ .$$

Od příkladu **M7** se tedy příklad **M17** liší jen v detailu.

Poznamenejme, že v příkladech **R51**, **M4**, **M7** a **M17** jde o trojúhelníky určené rozměry 4 a 10. Obsahy většího počtu trojúhelníků jsou počítány na stěnách Horova chrámu v Edfu (2. stol. př. Kr.).



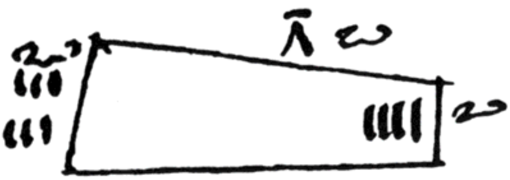
Hieroglyfický přepis příkladu **M17**

[5] Opět se zde objevují termíny *délka* a *šířka*.

Lichoběžník.

Obsah lichoběžníka počítali Egypťané obdobným způsobem jako obsah trojúhelníka; i zde se objevuje „rovnoplochý“ obdélník.

V příkladu **R52** (viz ukázka) nadepsaném *Metoda výpočtu lichoběžníkového pole* je prezentován postup výpočtu obsahu lichoběžníka. Zadán je lichoběžník se základnami délek 600 a 400 a výškou 2 000 loktů. Na připojeném obrázku je znázorněn patrně rovnoramenný lichoběžník, jeho rozměry jsou zde udány včetně jednotek.[6] Lichoběžník je znázorněn následujícím obrázkem.



Sečti dolní a horní základnu, vyjde 10. *Vypočti* $\frac{1}{2}$ *z* 10, *je to* 5, *pro udání jeho obdélníka. Počítej s* 20 5-*krát, vyjde* 100, *to je* [obsah] *jeho plochy.*

Při následujícím numerickém výpočtu jsou jednotky *chet* převedeny na lokty; žádné jednotky však v příkladu **R52** nejsou zmíněny.

Kruh.

Egyptský výpočet obsahu S kruhu o průměru d odpovídá v naší symbolice vzorci

$$S = \left(d - \frac{1}{9} \cdot d\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2 .$$

Slovní popis tohoto postupu je podán v příkladu **R50** (viz ukázka) nadepsaném *Metoda výpočtu* [obsahu] *kruhové plochy.* Počítán je obsah kruhu o průměru 9, na malém obrázku je číslo 9 vepsáno uvnitř kruhu.

Metoda výpočtu [obsahu] *kruhové plochy* [o průměru] 9 *chet. Jaký je obsah plochy? Odečti* $\frac{1}{9}$ *z toho, je to* 1, *zbytek je* 8. *Počítej s* 8 8-*krát, vyjde* 64. *Toto je obsah v ploše:* 64 *secat-johet.*

Poznamenejme, že obsah kruhu je vypočten i v příkladech **R41**, **R42**, **R43** a **K2’**, v nichž je počítán objem kruhové obilnice (válce). V příkladech **R41**, **R50** a **K2’** jsou kruhy znázorněny následujícími obrázky.

[6] Na obrázku i v slovním popisu jsou údaje v jednotkách *chet* (6, 4, 20).

Srovnáme-li náš vzorec pro výpočet obsahu kruhu o průměru d se vzorcem odpovídajícím egyptskému výpočtu, dojdeme k rovnosti

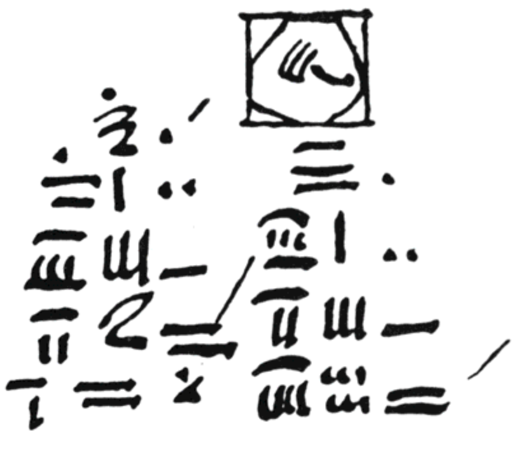
$$\frac{1}{4}\pi \cdot d^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2$$

a získáme „egyptskou hodnotu" čísla π:

$$\frac{256}{81} \doteq 3{,}1605$$

Egypťané tedy úspěšně nahradili obsah kruhu obsahem čtverce; jeho stranu nebylo těžké získat, stačilo odebrat od průměru kruhu jeho devítinu.

V příkladu **R48**, který neobsahuje žádný text, je patrně porovnáván obsah kruhu o průměru 9 a obsah čtverce o straně 9.[7] Naznačují to uvedené výpočty mocnin, $8^2 = 64$ a $9^2 = 81$, ke kterým je připojen obrázek, na němž je snad čtverec s vepsaným kruhem a uvnitř zapsaným číslem 9; čtverec je nakreslen celkem přesně, znázornění kruhu je však značně problematické, spíše jde o osmiúhelník. Zajímavé je, že jsou zde ke všem číselným údajům připojeny plošné jednotky *secat-johet.*



Příklad **R48**

Mnoho historiků matematiky diskutovalo otázku, jak Egypťané došli k uvedené metodě výpočtu obsahu kruhu. Několik zajímavých teorií nyní načrtneme.

K danému kruhu uvažujme opsaný čtverec, který rozdělíme na devět stejných menších čtverců; ty, které leží v rozích původního čtverce, rozdělíme ještě úhlopříčkami a odřízneme tak čtyři rohové trojúhelníky. Obsah uvažovaného kruhu nyní aproximujeme obsahem nepravidelného osmiúhelníka, který vznikl (viz následující obrázek). Tato aproximace nahrazuje obsah kruhu obsahem sedmi devítin opsaného čtverce.

[7] Není však vyloučeno, že se tento výpočet váže k předchozímu nepříliš jasnému příkladu **R47**.

Protože je $\frac{7}{9} = \frac{63}{81}$, byl by obsah kruhu o průměru d vyjádřen vztahem

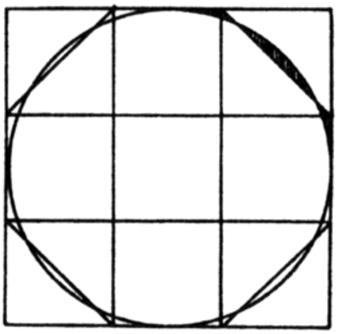
$$S = \frac{63}{81} \cdot d^2 \ ,$$

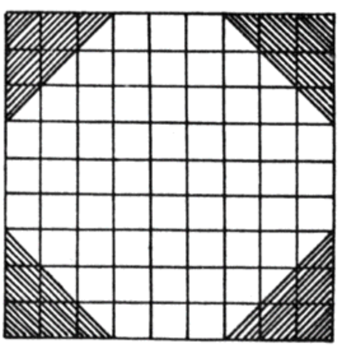
což se od výše uvedeného vzorce

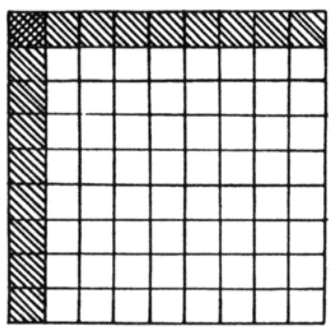
$$S = \frac{64}{81} \cdot d^2$$

příliš neliší. Není vyloučeno, že byla hodnota $\frac{7}{9} = \frac{63}{81}$ zaměněna za hodnotu $\frac{64}{81}$, kterou lze snadno odmocnit. Navíc je tuto hodnotu možno vyjádřit jako dvojmoc čísla $1 - \frac{1}{9}$, které se jednoduše vyjádří pomocí kmenných zlomků.

Egypťané však mohli postupovat geometricky. Mohli opsaný čtverec rozdělit na 9×9 malých čtverečků a s jejich pomocí odebrat obsah čtyř odříznutých trojúhelníků, který je roven obsahu osmnácti čtverečků. Pokud z opsaného čtverce odebrali jednu vodorovnou a jednu svislou řadu malých čtverečků, neodebrali sice 18, ale jen 17 čtverečků; získali však opět čtverec – jeho strana je rovna osmi devítinám průměru uvažované kružnice.





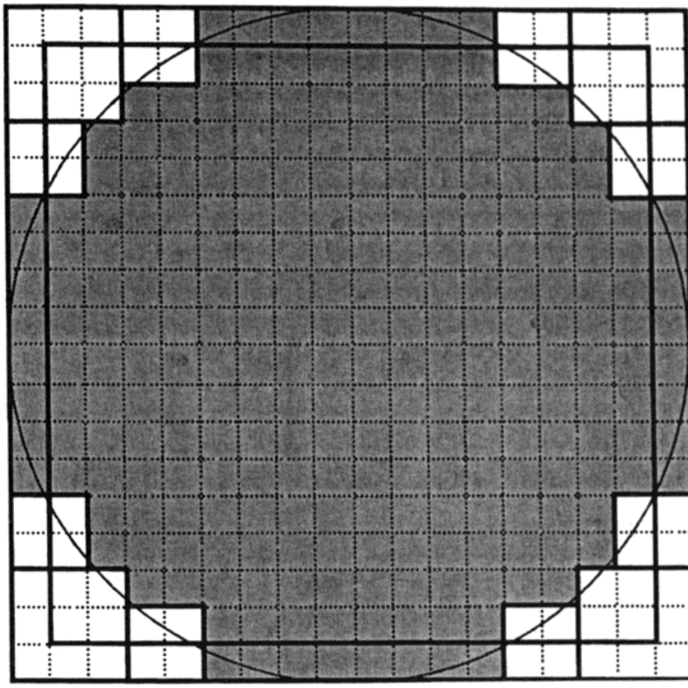


Aproximace obsahu kruhu obsahem nepravidelného osmiúhelníka

Aproximace obsahu kruhu s průměrem d obsahem čtverce se stranou $\frac{8}{9}d$

Podle jiné teorie došli Egypťané k výše uvedené metodě výpočtu obsahu kruhu takto.

Opět uvažujme k danému kruhu o průměru d opsaný čtverec. Rozdělme ho tentokrát na 18×18 stejných čtverečků. V každém rohu opsaného čtverce odeberme čtverec obsahující 3×3 čtverečky a dva sousední čtverce obsahující 2×2 čtverečky; obsah kruhu nyní aproximujme obsahem útvaru, který vznikl (viz následující obrázek).



Aproximace obsahu kruhu s průměrem d obsahem čtverce se stranou $\frac{16}{18}d$

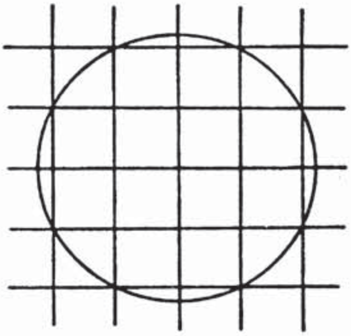
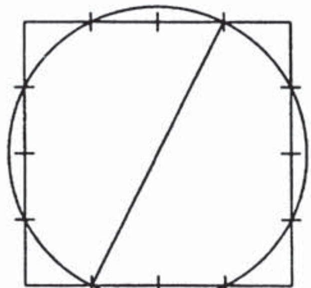
Odebrali jsme tedy $4 \cdot (9 + 2 \cdot 4) = 68$ čtverečků a obsah kruhu jsme odhadli $18^2 - 68 = 256 = 16^2$ čtverečky, tj. čtvercem o straně

$$\frac{16}{18} \cdot d = \frac{8}{9} \cdot d = (d - \frac{1}{9} \cdot d) .$$

Poznamenejme, že není třeba čtverečky přepočítávat; ty, které „v rozích“ čtverce 16×16 „chybí“, po jeho stranách „přebývají“.

Vzhledem k tomu, že Egypťané s oblibou užívali čtvercovou síť při projektování různých staveb, soch, reliéfů, malířské výzdoby apod., není vyloučené, že ji využili i při hledání obsahu kruhu.

Další možné vysvětlení egyptské metody výpočtu obsahu kruhu je takovéto. Uvažujme kružnici o průměru d a čtverec s týmž středem, jehož strany jsou děleny průsečíky s kružnicí v poměru 1 : 2 : 1. Zdá se, že obsahy obou útvarů jsou přibližně stejné. Změříme-li stranu a uvažovaného čtverce, zjistíme, že je přibližně $a = \frac{8}{9}d$.[8]

K výše uvedenému obrázku a úvaze mohli Egypťané dospět s pomocí čtvercové sítě. Pokud do takovéto sítě narýsovali kružnici tak, jak je to znázorněno na obrázku, mohli usoudit, že obsah narýsovaného kruhu je přibližně roven obsahu čtverce, který sestává ze šestnácti čtverečků. Jestliže strany malých čtverečků měří 2 jednotky, měří strana uvažovaného čtverce 8 jednotek; změříme-li nyní průměr kruhu, zjistíme že měří přibližně 9 jednotek.

Není vyloučeno, že postup pro výpočet obsahu kruhu byl získán (nebo alespoň prověřen) při praktických měřeních objemu kruhových sýpek. Vydělíme-li objem sýpky její výškou, získáme obsah podstavy; přitom výška i objem sýpky se snadno změří.

Na závěr poznamenejme, že aproximace obsahu S kruhu o poloměru d vzorcem

$$S = \left(d - \frac{1}{n} \cdot d\right)^2$$

je nejlepší pro $n = 9$ a že aproximace vzorcem

$$S = \frac{7}{9} \cdot d^2 ,$$

která odpovídá výše uvedené aproximaci obsahu kruhu obsahem nepravidelného osmiúhelníka, je horší.[9]

Egyptskému výpočtu obsahu kruhu jsou věnovány např. práce [En], [Ger]. Viz též [BH], str. 21, [Vo3], str. 122–124, [J], I. díl, str. 31–32, [GeH], str. 55–58, atd.

---

[8] Podle Pýthagorovy věty vypočteme, že je $a = \frac{2}{\sqrt{5}}d = \frac{8}{\sqrt{80}}d$, což se nepříliš liší od hodnoty $a = \frac{8}{9}d = \frac{8}{\sqrt{81}}d$.

[9] Odpovídající hodnotou čísla π by bylo číslo $3,\overline{1}$.

Krychle a kvádr.

V několika příkladech, které v dochovaných egyptských textech nacházíme, je počítán objem *čtverhranných obilnic* tvaru krychle. Lze však předpokládat, že podle těchto příkladů byl egyptský počtář schopen počítat i objem kvádru.

V příkladu **R44** nadepsaném *Metoda výpočtu čtverhranné obilnice* (viz ukázka) je prezentován výpočet objemu kvádru o rozměrech 10, 10 a 10 loktů (tj. krychle). Všechny tři rozměry jsou vynásobeny, vyjde 1 000 loktů krychlových. Vzápětí jsou lokty krychlové převedeny na pytle (*char*); připočte se jedna polovina, neboť loket krychlový je jeden a půl pytle. Nakonec je ještě vypočten objem obilnice ve dvacetinásobných jednotkách (snad vozík?), vychází 75.

Zajímavá je zkouška. Nejprve je výsledek 75 vynásoben dvaceti, vychází 1 500. Dále je z objemu 1 500 (v pytlích) vypočtena jedna desetina, z toho opět jedna desetina a teprve potom dvě třetiny, vychází 10; objem vyjádřený v pytlích je tedy vydělen délkami dvou stran obilnice a koeficientem $\frac{3}{2}$; vychází délka třetí strany. Snad připadal tento postup Egypťanům numericky výhodnější.

V následujícím příkladu **R45** je naopak ze známého objemu čtverhranné obilnice počítán jeden její rozměr. Zajímavé je, že jde o obilnici z předchozího příkladu; zbylé její rozměry nejsou udány, mají se patrně vyrozumět z kontextu. Objem 75 je vynásoben dvaceti, tím je získán objem v pytlích: 1 500. Toto číslo je postupně násobeno jednou desetinou, znovu jednou desetinou a dvěma třetinami, stejně, jako ve zkoušce v minulém příkladu. Jde tedy o obilnici o rozměrech 10, 10 a 10 loktů.

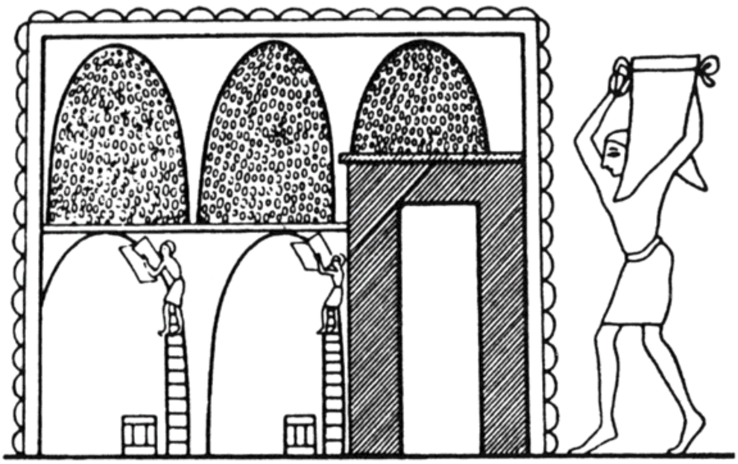
Příklad **R46** je velmi podobný příkladu **R45**; ze známého objemu 25 je počítán třetí rozměr obilnice. Opět se předpokládá, že dva její rozměry jsou 10 a 10 loktů, nikde to však není uvedeno. Jako třetí rozměr vychází $3\,\frac{1}{3}$.

Ve všech třech příkladech jde o stejnou obilnici; její základna má rozměry 10×10 loktů a třetí rozměr (výška) vlastně určuje množství zrna, které obilnice obsahuje.

Je pravděpodobné, že další úlohou, ve které se vyskytuje objem kvádru, je příklad **K5**. Jeho zadání se nezachovalo, slovní popis řešení však odpovídá výpočtu rozměrů obdélníkové základny kvádru, jehož objem je 120 krychlových loktů, výška 10 loktů a poměr délek stran základny $1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$.

Válec.

V příkladech **R41** a **R42** je prezentován výpočet objemu válců. Formulace úloh je však opět praktická; nehovoří se o válcích, ale o *kruhových obilnicích*, výsledný objem je udán jednak v krychlových jednotkách (loktech), jednak v dutých měrách (pytlích a ještě navíc ve dvacetinásobných jednotkách).



Plnění sýpek obilím v době Nové říše

Objem válce je počítán standardním způsobem, obsah základny je vynásoben výškou, přičemž obsah kruhové základny je vypočten jako v úloze **R50**.

V příkladu **R41**, který je nadepsán *Metoda výpočtu kruhové obilnice*, je počítán objem válce o průměru 9 a výšce 10 loktů. Nejprve je vypočten obsah základny, ten je pak vynásoben výškou. Další výpočet je věnován převodu jednotek; vypočtený objem 640 loktů krychlových je převeden na 960 pytlů a pak na dvacetinásobné jednotky; vychází 48.

V následujícím příkladu **R42** je vypočten objem kruhové obilnice o průměru základny 10 a výšce 10. Příklad je numericky náročnější: je třeba vypočítat

$$\left(10-\frac{1}{9}\cdot 10\right)^2\cdot 10=\left(8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}\right)^2\cdot 10=\left(79\,\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}\right)\cdot 10=790\,\frac{1}{18}\,\frac{1}{27}\,\frac{1}{54}\,\frac{1}{81}\,.$$

Na poslední zlomek $\frac{1}{81}$ písař zapomněl, na výsledku se to však neprojevilo, neboť při převodu na menší jednotky (pytle) zanedbal všechny kmenné zlomky a získal hodnotu $790 \cdot \frac{3}{2} = 1\,185$.[10] Po dalším převodu na dvacetinásobné jednotky vyšlo $59\,\frac{1}{4}$.[11]

[10] Zajímavé je, že písař nezjednodušil výpočet; je totiž $\frac{1}{108} + \frac{1}{324} = \frac{1}{81}$.

[11] Pokud by písař nezapomněl jeden z kmenných zlomků a nezanedbal je, vyšlo by $59\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{108}$.

Na jednom z Káhunských papyrů je v příkladu **K2'** jakýsi výpočet, který lze s velkou dávkou jistoty interpretovat jako výpočet objemu kruhové obilnice (v pytlích); její průměr je 12 a výška 8 loktů. Příklad bohužel neobsahuje žádný text, připojený obrázek však výše uvedený názor podporuje.[12] V příkladu je uveden jen sled výpočtů, který můžeme v naší symbolice zapsat takto:

$$12 \cdot \frac{4}{3} = 16 , \qquad 16^2 = 256 , \qquad 256 \cdot 5\,\frac{1}{3} = 1365\,\frac{1}{3} .$$

Naznačená metoda je zajímavá, neboť přepočet z krychlových loktů na pytle, který byl v předchozích příkladech proveden až v závěru, je zde včleněn do výpočtu objemu. Egyptskou metodu výpočtu objemu kruhové obilnice v pytlích, která je prezentována ve dvou výše uvedených příkladech Rhindova papyru, se dá totiž snadno modifikovat takto:[13]

$$\left(12 \cdot \frac{8}{9}\right)^2 \cdot 8 \cdot \frac{3}{2} = \left(12 \cdot \frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8$$

Dalším příkladem na výpočet objemu kruhové obilnice je úloha **R43**. Jde o výpočet objemu válce o průměru 9 a výšce 6. Příklad je patrně zapsán chybně a rovněž výpočet je poznamenán chybami. Zdá se, že se počtář pokoušel použít metodu z příkladu **K2'**, ale chybně ji propojil s metodou užitou v příkladech **R41** a **R42**.

Jehlan.

V několika příkladech Rhindova papyru se pracuje se sklonem rovin. Buď je třeba vypočítat sklon stěny pyramidy, nebo je naopak zapotřebí ze zadaného sklonu a velikosti základny pyramidy vypočítat její výšku. Poznamenejme, že se tyto příklady týkají pyramid a nikoli abstraktních jehlanů, jak je zřejmé z připojených obrázků, např. obrázek z příkladu **R56** vypadá takto:

Podstavnou hranu pyramidy (jehlanu) nazývali Egypťané *wecha-cebet* a výšku *per-em-wes*; hledaný sklon byl označován jako *seked*.

[12] Naznačen je zde kruh se dvěma rozměry (12 a 8), uvnitř je vepsáno číslo $1\,365\,\frac{1}{3}$. Viz obrázek v paragrafu Kruh.

[13] Úvahy o tomto příkladu viz [Bo2] a [S3].

V příkladu **R56** (viz ukázka) nadepsaném *Metoda počítání pyramidy* je úkolem vypočítat sklon stěny pyramidy, která má čtvercovou základnu o straně 360 a výšku 250 loktů. Připojen je stručný návod, podle kterého je třeba polovinu strany základny vydělit výškou. Vypočte se tak vodorovná vzdálenost, při které „výška stěny naroste“ o jednu jednotku, tj. o jeden loket:

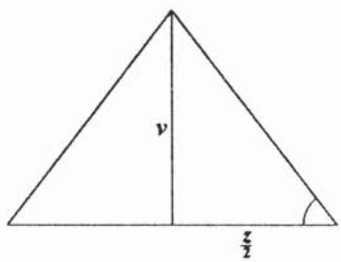
$$180 : 250 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{50}$$

Tato hodnota je vlastně kotangentou úhlu, který svírá stěna pyramidy s vodorovnou rovinou; shledávat v těchto příkladech počátky trigonometrie je však značně odvážné.

V následujícím výpočtu je ještě výsledek převeden na dlaně, tj. je vynásoben sedmi, neboť jeden loket je roven sedmi dlaním:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}\right)\cdot 7 = 5\,\frac{1}{25}$$

O jeden loket tedy „narůstá výška“ stěny pyramidy na vodorovné vzdálenosti $5\,\frac{1}{25}$ dlaně.



Označíme-li velikost základny, resp. výšky (v loktech) z, resp. v, je *seked s* (v dlaních) dán vzorcem

$$s = \frac{7z}{2v}\,.$$

Velmi podobný je příklad **R58**, ve kterém je počítán sklon stěny pyramidy se čtvercovou základnou o straně 140 a výškou $93\,\frac{1}{3}$ lokte:

$$70 : 93\,\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$$

Potom je opět sklon přepočítán na menší jednotky:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 7 = 5\,\frac{1}{4}$$

Zde je výsledek vyjádřen v dlaních a prstech: sklon je pět dlaní a jeden prst.[14]

[14] Připomeňme, že jedna dlaň je rovna čtyřem prstům.

V příkladu **R59**, ve kterém bylo (patrně při opisu) zkomoleno zadání, je počítán sklon stěny pyramidy se čtvercovou základnou o straně 12 a výšce 8 loktů. Vychází 5 dlaní a 1 prst, stejně jako v příkladu **R58**; průřezy oběma pyramidami jsou totiž podobné trojúhelníky (využit je zde nejznámější pravoúhlý trojúhelník o stranách 3, 4, 5).[15]

Pyramidy z příkladů **R58** a **R59** jsou využity ještě jednou v příkladech **R57** a **R59B**.

V příkladu **R57** je úkolem vypočítat výšku pyramidy, jejíž základna má stranu 140 loktů a jejíž stěny mají sklon pět dlaní a jeden prst. Slovní popis výpočtu odpovídá vzorci

$$v = \frac{7z}{2s} \ .$$

Příklad označovaný jako **R59B**, ve kterém jsou opět drobná nedopatření, vede ke zjištění výšky pyramidy se stranou základny 12 loktů a sklonem pět dlaní a jeden prst.

Posledním příkladem, ve kterém je v Rhindově papyru počítán sklon rovin, je příklad **R60**. Opět jde o jehlan, který však je – ve srovnání s předchozími případy pyramid – úzký a vysoký; snad jde o jakýsi pilíř. Strana jeho základny má délku 15, výška je 30 loktů. Sklon je však v tomto příkladu vypočten jinak: výška je vydělena polovinou základny, tj. sklon je vypočten podle vzorce

$$s = \frac{2v}{z} \ ;$$

je tedy vlastně vypočtena tangenta úhlu, který svírá stěna s vodorovnou rovinou. Výsledek je 4.

Je možné, že je výpočet chybný. Není však vyloučeno, že výpočet sklonu nebyl jednoznačně stanoven; při praktických aktivitách se mohli řemeslníci řídit nejprve typem stavby a údaj o sklonu mohl být až dodatečnou informací, jejíž význam snadno dešifrovali.

Bylo by zajímavé znát, jak Egypťané pyramidy projektovali. Zejména by bylo dobré vědět, které veličiny byly dávány jako výchozí požadavek na plánovanou stavbu. Snad to byly údaje o velikosti podstavné hrany a výšky, ze kterých se vypočetl sklon. Ten však, kvůli stabilitě pyramidy, nemohl být příliš veliký. Příklady **R57** a **R59B** naznačují, že Egypťané mohli za výchozí veličiny brát délku podstavné hrany a sklon a z nich vypočítat výšku pyramidy. Je pravděpodobné, že byly takovéto výpočty s různými vstupními hodnotami provedeny několikrát, než byl schválen definitivní projekt stavby.

Quido Vetter publikoval ve svém článku [Vet3] údaje o naměřených sklonech některých pyramid a mastab, upravil je podle předpokládané hodnoty *seked* a uvedl tuto hodnotu i v poměru malých přirozených čísel.[16] Např. u tří

---

[15] Je totiž $6 : 8 = 70 : 93\frac{1}{3} = 3 : 4$.

[16] Vetter vycházel z prací [Pet3] a [Kl]. Poznamenejme, že pyramidy mívají sklon 50° až 55°.

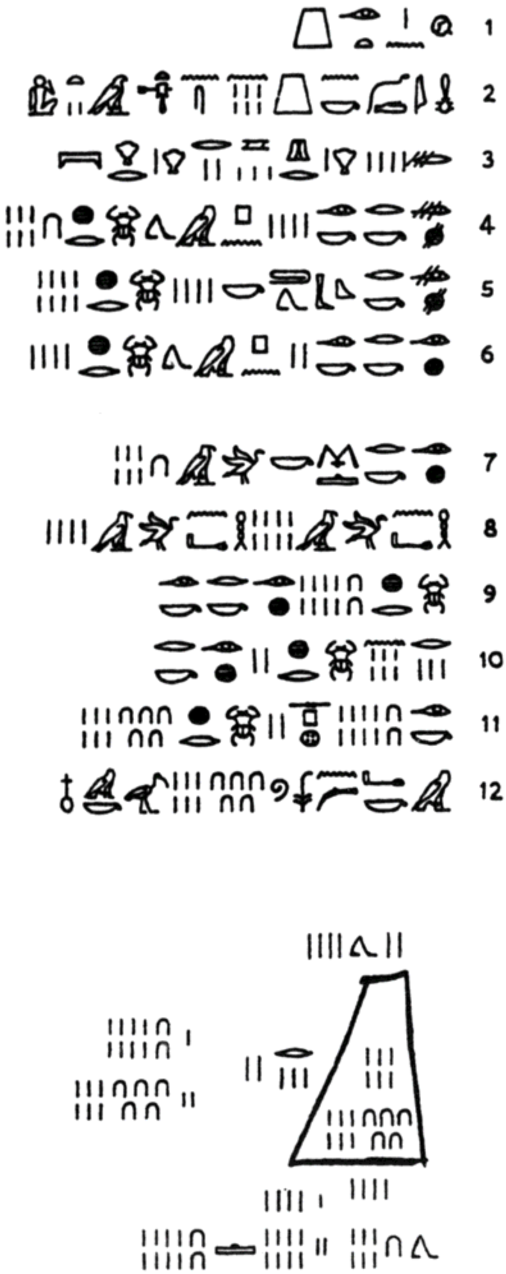
největších pyramid v Gíze došel k poměrům 14 : 11, 4 : 3 a 5 : 4, které odpovídají hodnotám *seked* 5 dlaní a 2 prsty, 5 dlaní a 1 prst, 5 dlaní a $2\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$ prstu. Uvedl i čtyři mastaby, jejichž sklon je určen poměrem 4 : 1, čemuž odpovídá hodnota *seked* 1 dlaň a 3 prsty.

Otázkou je, zda musela být číselná hodnota *seked* vyjádřena nějak rozumně. Je možné, že pro danou stavbu stanovili Egypťané velikost sklonu nějakým trojúhelníkem, který sloužil jako stavební pomůcka při tesání obkladových kamenů, při jejich kladení na místo apod.; v tom případě by mohlo být číselné vyjádření sklonu komplikované.

Otázkami sklonu stěn pyramid se zabývali L. Borchardt [Bo1], F. Calice [Ca] a další. V následující tabulce jsou uvedeny zajímavé údaje o několika pyramidách; uvedena je délka podstavné hrany a výška v metrech a sklon stěny ve stupních.

Pyramida	Dynastie	Hrana	Výška	Sklon
Snofruova (Lomená)	IV.	189,4	104,7	
— spodní část		189,4	47	55°
— vrchní část		123,6	57,7	43°
Snofruova (Červená)	IV.	220	104	44°
Chufuova	IV.	230,4	146,5	52°
— satelitní G Ia		46,3	29	52°
— satelitní G Ib		48,1		52°
— satelitní G Ic		46,1		53°
Radžedefova	IV.	106		60°
— kultovní		60		
Rachefova	IV.	215,3	143,5	53°
— kultovní		20,9		53°
Menkaureova	IV.	108,4	66,5	51°
— satelitní G IIIa		44	28,4	52°
— satelitní G IIIb		31,2		
— satelitní G IIIc		31,2		
Veserkafova	V.	73,3	49	53°
— kultovní		20,1	15	53°
— královnina		26,2	17	52°

Sahureova	V.	78, 1	49, 6	50°
— kultovní		15, 7	11, 6	56°
Neferirkareova	V.			
— 1. etapa		72	52	76°
— 2. etapa		104	73, 5	55°
Niuserreova	V.	78, 8	50, 1	52°
— kultovní		15, 5	10, 5	
Džedkareova	V.	78, 5	52	52°
— kultovní		15, 5	16	65°
Venisova	V.	57, 8	43	56°
Tetiho	VI.	78, 5	52, 5	53°
— kultovní		15, 7	15, 7	63°
Iputy I.	VI.	21	21	63°
Pepiho I.	VI.	78	52	53°
Pepiho II.	VI.	78, 8	52, 5	53°
— kultovní		15, 8		63°
Neitina	VI.	23, 5	21, 5	61°
Amenemheta I.	XII.	84	59	54°
Senusreta I.	XII.	105	61, 3	49°
Senusreta II.	XII.	107	48	43°
Senusreta III.	XII.	105	61, 3	56°
Amenemheta III.	XII.			
— v Dahšúru		105	75	55°
— v Hawáře		102	58	50°
Chendžerova	XIII./XIV.	52, 5	37, 4	55°



Příklad **M14**

(hieroglyfický přepis)

Komolý jehlan.

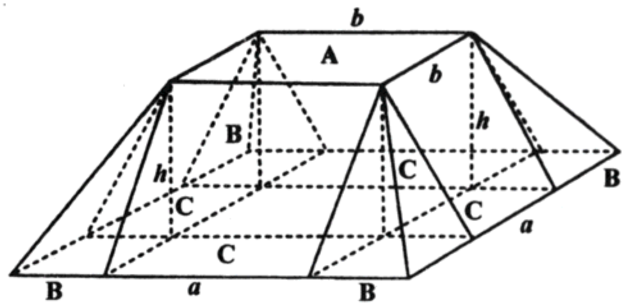
V egyptských textech se nezachoval žádný příklad na výpočet objemu jehlanu (pyramidy), v Moskevském papyru je však zajímavý příklad na výpočet objemu komolého jehlanu (komolé pyramidy).

Příklad **M14** (viz ukázka) nadepsaný *Metoda výpočtu komolé pyramidy*[17] popisuje výpočet objemu komolého jehlanu se čtvercovými základnami. Dolní, resp. horní základna má stranu o délce 4, resp. 2, výška jehlanu je 6. Slovní popis řešení této úlohy je možno naší symbolikou vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2 \right) .$$

Řada historiků matematiky se snažila vysvětlit, jak mohli Egypťané ke zcela správnému způsobu výpočtu objemu komolého jehlanu dospět.[18] Zdá se totiž velmi pravděpodobné, že byla tato metoda odvozena teoreticky.

Pravidelný kolmý komolý jehlan se stranami a, b dolní a horní základny a výškou h, je možno rozdělit na devět částí (viz obrázek):



— jeden hranol výšky h se čtvercovou základnou o straně b (těleso **A**),

— čtyři jehlany výšky h se čtvercovými základnami o straně $\frac{a-b}{2}$, které mají dvě sousední stěny kolmé navzájem a kolmé i k základně (čtyři tělesa **B**),

— čtyři poloviny kvádru výšky h se základnou o stranách b a $\frac{a-b}{2}$ (čtyři tělesa **C**).[19]

---

[17] Místo termínu pro komolý jehlan či pyramidu je zde obrázek.

[18] Obdobnou otázku, jak staří Číňané došli k metodě výpočtu objemu komolého jehlanu s obdélníkovými podstavami, řeší A. I. Raiková v článku *O vyčislenii nekotorych ob'emov v drevnekitajskom traktate „Matematika v devjati knigach“*, Istoriko-matematičeskie issledovanija 14(1961), 467–472. Ruský překlad tohoto starého traktátu je s úvodem, poznámkami a komentářem (E. I. Berezkina) publikován v periodiku Istoriko matematičeskie issledovanija 10(1957), 423–584. Německý překlad viz K. Vogel: *Neun Bücher arithmetischer Technik*, Vieweg, Braunschweig, 1968, anglický překlad viz S. Kangshen, J. Crossley, A. Lun: *The Nine Chapters on the Mathematical Art. Companion and Commentary*, Oxford University Press, Oxford, 1999.

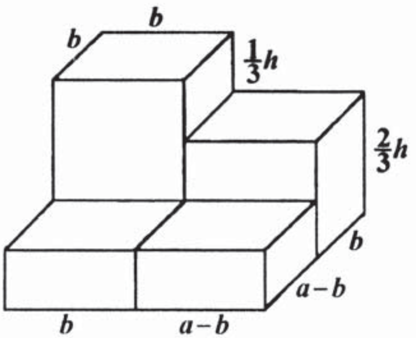
[19] Jinými slovy: jde o čtyři hranoly výšky b s pravoúhlou trojúhelníkovou základnou o odvěsnách h, $\frac{a-b}{2}$ (pohled „z boku“).

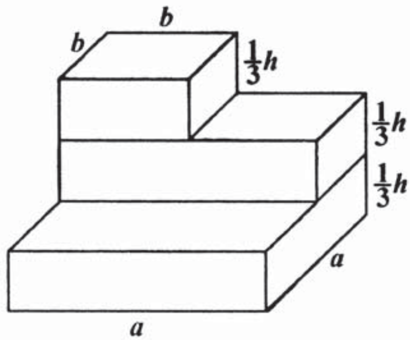
Sečteme-li objemy těchto devíti těles, dostaneme po jednoduchých úpravách

$$V = b^2 \cdot h + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot h + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot b \cdot h = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Musíme si však uvědomit, že nemáme žádné doklady o tom, že by Egypťané používali matematickou symboliku a prováděli algebraické úpravy. Proto je výše uvedené vysvětlení značně problematické. Někteří badatelé však provádění algebraických úprav připouštějí.

Můžeme však uvažovat „geometricky". Představme si hranol **A** o hranách b, b, h, hranol o hranách $a - b$, $a - b$, $\frac{h}{3}$, který má stejný objem jako čtyři jehlany **B**, a kvádr o hranách b, $a - b$, h, jehož objem je roven objemům čtyř těles **C**. Tento poslední kvádr rozdělíme na dva kvádry se stejnou základnou o hranách b, $a - b$ a třetí hranou $\frac{2h}{3}$, resp. $\frac{h}{3}$. Získali jsme dva hranoly a dva kvádry, jejichž základny vyplňují čtverec o straně a (viz následující obrázek vlevo).





Objem těchto čtyř těles nyní vypočteme „po vrstvách" (obrázek vpravo). Spodní vrstva má objem $\frac{h}{3} \cdot a^2$, prostřední $\frac{h}{3} \cdot ab$, vrchní $\frac{h}{3} \cdot b^2$. Výsledek tak získáváme bez algebraického aparátu.

Autor této stati se domnívá, že k metodě výpočtu objemu komolého jehlanu, která je prezentována v příkladu **M14**, mohli Egypťané dojít poměrně jednoduše.

Vyjdeme z předpokladu, že znali metodu pro výpočet objemu jehlanu, tj. věděli, že je třeba vypočítat jednu třetinu ze součinu obsahu podstavy a výšky.[20]

Objem výše uvažovaného komolého jehlanu nyní vypočteme takto. Uvažujme tři takovéto komolé jehlany; druhý i třetí si představme rozložený na výše uvedených devět těles typu **A**, **B** a **C**.

[20] Tento poznatek mohl být zjištěn nejprve ve speciálním případě (rozdělení krychle na tři nebo šest shodných jehlanů), zobecněn a případně prakticky prověřen odměřením objemu vody, zrna, resp. písku ve vhodném modelu.

- K prvnímu komolému jehlanu přidáme čtyři tělesa **C** odebraná od druhého jehlanu a osm jehlanů **B** odebraných od druhého a třetího jehlanu. Součet těchto objemů je roven objemu hranolu s podstavnou hranou a a výškou h, tj. a^2h. Využili jsme přitom předpokladu, že objem tří shodných jehlanů je roven objemu hranolu o stejné základně a stejné výšce.
- Z druhého komolého jehlanu zbude hranol s podstavnou hranou b a výškou h, který má objem b^2h.
- Těleso, které zbude z třetího komolého jehlanu po odebrání čtyř jehlanů **B**, přeskládáme; dvě tělesa **C** přemístíme zjevným způsobem a získáme kvádr o rozměrech a, b a h, který má objem abh.

Tato tři tělesa mají dohromady objem

$$h \cdot \left(a^2 + ab + b^2 \right) ;$$

objem jednoho uvažovaného komolého jehlanu je proto

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2 \right) .$$

Někteří badatelé soudí, že metoda výpočtu objemu komolého jehlanu není tak obecná, jak se zdá. V příkladu **M14** je totiž strana menší základny polovinou strany větší základny (tj. $2b = a$) a výška celého jehlanu je dvojnásobkem výšky jehlanu komolého.

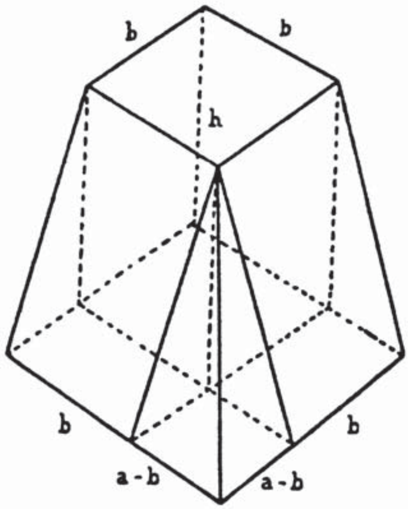
Objem celého jehlanu ($\frac{1}{3} \cdot 2h \cdot a^2$) je proto roven osminásobku objemu menšího, odříznutého jehlanu a objem komolého jehlanu je tedy roven sedminásobku objemu menšího jehlanu. Odtud

$$V = 7 \cdot \frac{h}{3} \cdot b^2 = \frac{h}{3} \cdot \left(4b^2 + 2b^2 + b^2 \right) = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2 \right) .$$

Není vyloučené, že Egypťané vyšli ze speciálních případů, kdy $2b = a$, $3b = a$, $4b = a$ atd., a výsledek pak neúplnou indukcí zobecnili. Tento názor však předpokládá určité algebraické schopnosti starých Egypťanů.

Vzhledem k obrázku, který je v příkladu **M14** uveden, mohlo jít i o komolý jehlan, jehož dvě stěny jsou kolmé navzájem i k podstavě. I v tomto případě je možno obdobnými postupy zjistit jeho objem.

Takovýto komolý jehlan můžeme rozdělit na hranol se čtvercovou podstavou se stranou b, dvě poloviny kvádru s obdélníkovou základnou se stranami $a - b$, b a jehlan se čtvercovou základnou o straně $a - b$, jehož dvě stěny jsou kolmé k podstavě i navzájem (viz následující obrázek).



Objem tohoto tělesa je tedy

$$V = b^2 \cdot h + (a-b) \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot \left(a-b\right)^2 \cdot h =$$

$$= \frac{h}{3} \cdot \left(3ab + (a-b)^2\right) = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right) .$$

Opět jsme však prováděli algebraické úpravy. Pokud bychom počítali objem takovýchto tří shodných jehlanů rozložených výše uvedeným způsobem na dvanáct menších těles, došli bychom k výsledku stejně jako v případě kolmého komolého jehlanu.

Provokativními otázkami zůstává, zda Egypťané při stanovení metody pro výpočet objemu komolého jehlanu již znali způsob výpočtu objemu normálního jehlanu a zda opravdu nemohli v nějaké formě používat algebraické úpravy.

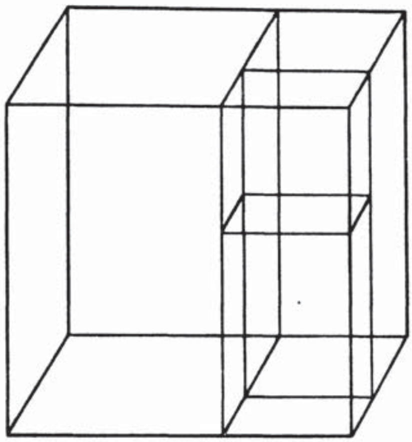
Na závěr uveďme jednu možnou cestu k metodě výpočtu objemu komolého jehlanu, která není postavena na znalosti výpočtu objemu normálního jehlanu.

Nejprve si představme, že z větší krychle s hranou a odebereme menší krychli s hranou b v jednom z rohů větší krychle (viz následující obrázek).

Vzniklé těleso lze rozložit na tři menší tělesa, jejichž objemy jsou $a^2 \cdot (a-b)$, $b^2 \cdot (a-b)$, $ab \cdot (a-b)$;[21] celkový objem je tedy

$$V = a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) .$$

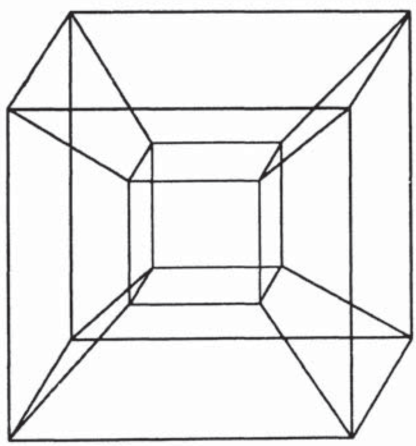
[21] Poznamenejme, že na školách bývala stavebnice, která rozklad krychle a následující vzorec modelovala.



Nyní přesuňme menší krychli do středu větší krychle (viz následující obrázek). Vzniklé těleso sestává z šesti shodných kolmých pravidelných komolých jehlanů. Objem každého z nich je proto

$$V = \frac{1}{6} \cdot (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot (a^2 + ab + b^2) \ .$$

Přitom $h = \frac{a-b}{2}$ je výškou každého ze šesti komolých jehlanů.



Úvahami o výpočtu objemu komolého jehlanu ve starém Egyptě se zabývala řada egyptologů a historiků matematiky, např. B. Gunn a E. T. Peet [GP], K. Vogel [Vo1], O. Neugebauer [Ne3], W. R. Thomas [Th], B. L. van der Waerden [Wae1], N. Ja. Vilenkin [Vi], E. Bortolotti [Bor], R. J. Gillings [Gi1], [Gi2] a další.

Příklad **M10**

(hieroglyfický přepis)

Povrch válce nebo koule.

Velmi zajímavou úlohou, jejíž interpretace je velmi problematická, je příklad **M10** (viz ukázka). Zdá se jisté, že jde o výpočet obsahu nějaké plochy, není však jasné, o jaký objekt se jedná. Útvar, jehož obsah je počítán, je označen jako ***koš*** nebo ***košík***, tento výklad však není jednoznačný; číselný údaj s tímto útvarem spjatý je $4\frac{1}{2}$. Slovní postup uvedeného výpočtu je možno dnešní symbolikou zapsat takto:

$$P = \left(9 - \frac{1}{9}\cdot 9\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot 4\frac{1}{2} = 32\,.$$

Tento sled matematických operací lze interpretovat jako výpočet obsahu poloviny pláště válce o průměru $4\frac{1}{2}$ a výšce $4\frac{1}{2}$. Označíme-li průměr a výšku válce písmeny d a v a uvědomíme-li si vztah $S = \frac{o}{2}\cdot\frac{d}{2}$ obvodu o a obsahu S kruhové základny, potom je povrch poloviny pláště válce možno vyjádřit jako

$$P = \frac{o}{2}\cdot v = \frac{2S}{d}\cdot v = \frac{2\cdot(d - \frac{1}{9}\cdot d)^2}{d}\cdot v = \left(2d - \frac{1}{9}\cdot 2d\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot v\,,$$

což po dosazení $d = v = 4\frac{1}{2}$ odpovídá uvedenému početnímu postupu. Toto vysvětlení, které podal T. E. Peet, se zdá nejpravděpodobnější; musíme však předpokládat, že Egypťané znali vztah mezi obvodem a obsahem kruhu.

Příklad **M10** by bylo možno interpretovat i jako výpočet čtvrtiny pláště válce o průměru 9 a výšce $4\frac{1}{2}$.

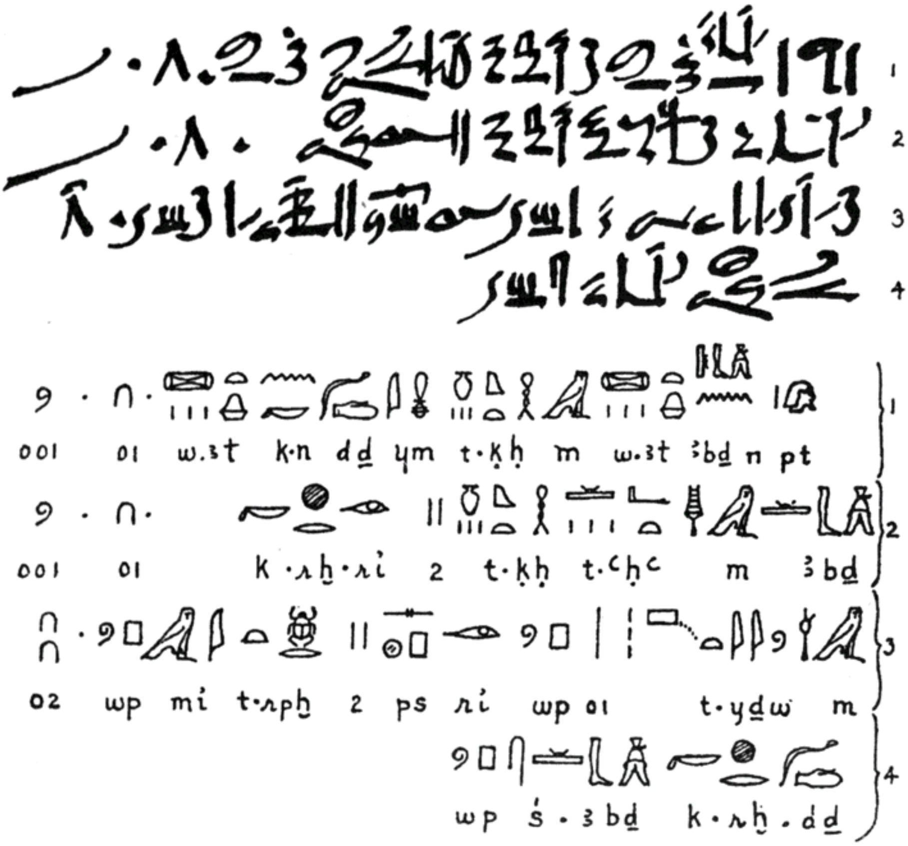
V. V. Struve se domníval, že příklad **M10** obsahuje výpočet povrchu polokoule o průměru $x = 4\frac{1}{2}$. Tato interpretace se nejeví příliš pravděpodobná, neboť by stačilo obsah kruhu o stejném průměru vynásobit dvěma; prezentovaný výpočet je však zbytečně složitý.

O. Neugebauer interpretoval příklad **M10** jako přibližný výpočet povrchu kupolovité sýpky, která se v Egyptě často vyskytovala a byla i zobrazována.

Příklad **M10** by bylo možno interpretovat i jako výpočet obsahu polokruhu. Proti tomu však mluví jak úvodní pasáž příkladu, tak zbytečně komplikovaný výpočet.

Autorovi těchto řádků se jeví málo pravděpodobné, že by Egypťané počítali povrch koule či kupolovitého útvaru. Praktické užití těchto výpočtů je problematické a teoretické odvození přesného návodu pro výpočet povrchu koule (byť s nepřesnou konstantou „π“) a návodu pro výpočet přibližné hodnoty povrchu kupole se dá těžko předpokládat. Plášť válce je naproti tomu rozvinutelný do roviny a zjištění obsahu mohlo mít i praktické užití.

Interpretace příkladu **M10** je o to těžší, že se v zachovaných egyptských matematických textech nikde nesetkáváme s výpočtem obvodu kruhu. Příklad **M10** je diskutován např. v pracích [Ne3], [Pe2] a [S3].



Příklad **R78**

(hieratický zápis, hieroglyfický přepis, transliterace)

OSTATNÍ ÚLOHY.

V této části práce se budeme zabývat příklady, které řeší praktické problémy a nespadají přímo do aritmetiky, algebry či geometrie, ačkoliv poznatky těchto disciplín využívají. Spadají sem zejména úlohy o chlebu a pivu; navíc je sem zařazeno několik dalších úloh.

Úlohy o chlebu a pivu.

Poměrně zajímavým souborem egyptských početních problémů jsou úlohy, které se zabývají různými přepočty chlebů a piva.

Nejstarší doklady o výrobě piva v Egyptě pocházejí z doby I. a II. dynastie. Podle některých zpráv dostával při stavbě pyramid každý dělník na den tři až čtyři chleby, česnek, cibuli a dva džbány piva; chléb, pivo a zelenina byly tehdy základními potravinami. Pivo bylo v Egyptě důležitým artiklem, chlebem a pivem byli placeni úředníci i vojáci, plné a zapečetěné pivní džbány mohli směňovat za jiné výrobky. Pivo bylo vyváženo, bylo součástí obětních darů, využívalo se v lékařství atd.

Z doby V. dynastie se dochovalo větší množství pivních džbánů vyrobených z nilské hlíny; jejich výška byla 25 až 35 cm, objem 1,5 až 2,6 litru. Hlavní surovinou pro výrobu piva byl ječmen.

Zrna nejlepšího ječmene se drtila na mlýnských kamenech, přidána byla pšeničná mouka. Vzniklé těsto se rozředilo na kaši, protlačilo sítem a plnilo do forem uspořádaných do pyramidy, v níž byl rozdělán oheň. Upečené pivní chleby se rozdrtily a nasypaly do kádě a zalily vodou. Tekutina se přelila do džbánů a nechala zkvasit. Pivní chleby se však mohly rovněž uschovat jako trvanlivé zboží a použít k výrobě piva kdykoli. Vykvašené pivo se pak přelévalo do džbánů se zahroceným a jílem vymazaným dnem, uzavřených hliněnými závěry (jíl v nádobě způsoboval lepší pročištění nápoje). K dochucení a zvýšení podílu alkoholu sloužila kvašená šťáva z datlí nebo med.[22]

V příkladech o chlebu a pivu se objevuje výraz *pesu*, který vyjadřuje kvalitu chleba, resp. piva. Numericky je hodnota *pesu* dána jako počet bochníků chleba, resp. džbánů piva, které je možno vyrobit z jedné měřice zrna. Čím větší je tedy *pesu*, tím méně kvalitní (nebo menší) je bochník chleba a tím slabší je pivo. Převrácená hodnota *pesu* vyjadřuje zlomek měřice potřebný pro výrobu jednoho chleba, resp. džbánu piva.[23] Vztah celkového počtu bochníků, resp. džbánů, použitého množství zrna a „kvality výrobku", tj. *pesu*, je tedy možno vyjádřit takto:

$$\text{celkový počet bochníků chleba} = \text{počet měřic obilí} \cdot \textit{pesu} \text{ chleba} \qquad (1)$$

$$\text{celkový počet džbánů piva} = \text{koeficient} \cdot \text{počet měřic obilí} \cdot \textit{pesu} \text{ piva} \qquad (2)$$

---

[22] P. Sokol: *Zrození piva. Přední východ, Egypt a raně středověké kláštery v západní Evropě*, Dějiny a současnost 24(2002), č. 6, 1–6.

[23] Bohužel však neznáme ani velikost „standardního" chleba, ani velikost „standardního" džbánu, pokud se vůbec o nějaké standardizaci dá mluvit.

Problémem je to, že při některých výpočtech, které se týkají piva, byly užívány převodní koeficienty, které patrně souvisely s druhem zrna, kvalitou sladu apod.; použití těchto koeficientů někdy bývá v zadání příkladů navozeno, jejich hodnoty však vysvětleny nejsou.

V Moskevském papyru je problematice chleba a piva věnováno deset příkladů, z nichž však jsou příklady **M5** a **M8** téměř shodné a rovněž tak příklady **M9** a **M13**.

V příkladech **M5** a **M8** (viz ukázka) je třeba vypočítat počet džbánů piva o *pesu* 4, které odpovídají 100 chlebům o *pesu* 20. Dodatečným údajem je zde „$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ sladu pro datle“.
Z jedné měřice obilí se podle zadání upeče dvacet chlebů; sto chlebů se tedy upeče z pěti měřic (viz (1)). Z postupu řešení tohoto příkladu zjišťujeme, že uvedený údaj „$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ sladu pro datle“ odpovídá koeficientu $\frac{1}{2}$, který je třeba použít. Vypočtených pět měřic se tedy vynásobí jednou polovinou a vynásobí čtyřmi (viz (2)); vychází 10 džbánů piva.

V příkladech **M9** a **M13** je úkolem převést 16 měřic hornoegyptského ječmene na 100 chlebů o *pesu* 20 a na pivo o *pesu* 2, 4, 6; z popsaného řešení vyplývá, že budou vyrobena stejná množství těchto tří druhů piva, i když to ze zadání příkladu vůbec není zřejmé. Navíc je opět připojena poznámka „$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ sladu pro datle“, která ukazuje na použití koeficientu $\frac{1}{2}$.
Nejprve je vypočteno, stejně jako v příkladu **M5**, že na 100 chlebů o *pesu* 20 je třeba 5 měřic ječmene (viz (1)), tj. na výrobu piva zbude 11 měřic ječmene. Označíme-li písmenem x počet džbánů jednotlivých druhů piva o *pesu* 2, 4, 6, získáme z výše uvedeného vztahu (2) rovnici[24]

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \cdot 11 \, .$$

Postup výpočtu starých Egypťanů v podstatě odpovídá řešení této rovnice; vyrobí se po šesti džbánech jednotlivých druhů piva.

V příkladu **M12** je třeba z 13 měřic ječmene vyrobit 18 džbánů piva, zjistit se má *pesu* vyrobeného piva. Připojena je informace, že je „sladu stejně jako datlí, $2\,\frac{1}{6}$“. Převrácená hodnota tohoto čísla, tj. $\frac{6}{13}$, je potřebným koeficientem, který figuruje ve výše uvedeném vztahu (2). Vyrobené pivo má 3 *pesu*.

Příklad **M15** je jednoduchý. Deset měřic ječmene je třeba převést na pivo o 2 *pesu*. Žádná informace o sladu zde uvedena není, snad proto v této úloze nefiguruje žádný koeficient.[25] Vychází tedy 20 džbánů.

Příklad **M16** je komplikovanější. Pro jeden džbán piva o *pesu* 2 je nejprve vypočtena spotřeba ječmene; je to $\frac{1}{2}$ měřice ječmene.[26] V příkladu jsou však uvedeny další informace; opět je uvedena formulace „$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ sladu pro datle“, hovoří se o jakémsi nahrazení pšenicí a uvedeno je zde číslo $2\,\frac{2}{3}$.

---

[24] Je totiž $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2$, $x = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 4$, $x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 6$, kde $a + b + c = 11$.

[25] Přesněji řečeno je koeficient ve vztahu (2) roven 1.

[26] Vychází se ze vztahu (2), kde je koeficient roven 1.

Při prvním přepočtu (koeficient $\frac{1}{2}$) se předchozí výsledek zdvojnásobí, vychází tedy jedna měřice ječmene. Při druhém přepočtu je výsledek vydělen číslem $2\,\frac{2}{3}$, vychází $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ měřice pšenice. Zdá se, že koeficient $2\,\frac{2}{3}$ udává vazbu mezi spotřebou ječmene a pšenice.

Stejný koeficient figuruje v souvislosti s jakýmsi nejasným přepočtem ječmene a pšenice i v příkladu **M20**. Tam však jde o chleba a nikoli o pivo, proto se využívá vztahu (1). Výpočet odpovídá rovnici

$$1\,000 = x \cdot 20 \cdot \frac{1}{2\frac{2}{3}}\,,$$

vychází $x = 133\,\frac{1}{3}$, tj. $133\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$ *hekat* $1\,\frac{2}{3}$ *ro*. Řešení tohoto příkladu je zmatené; v zadání je úkolem vypočítat množství ječmene, v odpovědi se však hovoří o pšenici. Písař byl asi v určitých rozpacích, neboť chybí závěrečná formulace *Nalezl jsi správně*.

Rovněž příklad **M22** (viz ukázka) je patrně defektní a proto není dokončen. Správně by snad mohl znít takto:

10 *měřic ječmene je třeba převést na* 100 *chlebů neznámého pesu a zbytek na* 5 *džbánů piva pesu 2;* $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ *sladu pro datle.*

Takovýto příklad odpovídá soustavě rovnic

$$100 = a \cdot p\,,$$

$$5 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2\,,$$

$$a + b = 10\,.$$

Vychází $a = 5$, $b = 5$, $p = 20$.

V příkladu **M24** je úkolem vyrobit z 15 měřic ječmene 100 chlebů a 10 džbánů piva, přičemž *pesu* piva má být jednou desetinou *pesu* chleba; opět je zde uvedena formulace „$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ sladu pro datle“. Řešení úlohy odpovídá řešení rovnice[27]

$$\frac{10}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}x} + \frac{100}{x} = 15\,.$$

Pesu chleba vychází 20, *pesu* piva vychází 2.[28]

Příklady o chlebu a pivu uvedené v Rhindově papyru jsou až na jednu výjimku podstatně jednodušší; nevyskytují se v nich totiž žádné koeficienty. Jde o příklady **R69** až **R78**.

V příkladech **R69** a **R70** je třeba z daného množství mouky a daného počtu chlebů vypočítat *pesu p*. Oba příklady jsou z teoretického hlediska jednoduché,

---

[27] Ze vztahů (1) a (2) vyplývají rovnice $100 = a \cdot x$, $10 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{x}{10}$, přitom $a + b = 15$.

[28] Příklad je poznamenán chybou; v zadání je požadováno 200 chlebů, v odpovědi je uvedeno jen 100 chlebů. Předpokládáme, že je chyba v zadání – tomu odpovídá výše uvedená interpretace.

druhý příklad je numericky náročnější. Oba příklady je možno stručně vyjádřit následujícími rovnicemi, které získáme dosazením do (1):

R69: $80 = 3\,\frac{1}{2} \cdot p \qquad (p = 22\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{21})$

R70: $100 = 7\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8} \cdot p \qquad (p = 12\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{42}\,\frac{1}{126})$

Řešení obou příkladů je provedeno poměrně podrobně. Celkové množství mouky zadané v jednotkách *hekat* je rovněž vyjádřeno v jednotkách *ro* a pak je vypočteno množství mouky potřebné k výrobě jednoho chleba, tj. vlastně převrácená hodnota k *pesu*. V příkladu **R69** vychází 14 *ro* (tj. $\frac{1}{32}$ měřice a 4 *ro*), v příkladu **R70** vychází $25\,\frac{1}{5}$ *ro* (tj. $\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$ měřice a $\frac{1}{5}$ *ro*); podrobně jsou provedeny zkoušky prověřující tyto výsledky.

V příkladech **R72**, **R73** a **R75** je nahrazováno známé množství chlebů dané kvality neznámým množstvím y chlebů jiné dané kvality. Nejprve je vypočteno množství x mouky potřebné pro výrobu známého množství chlebů a potom neznámá y. Příklad **R75** je numericky náročnější. Podobný charakter mají příklady **R77** a **R78**, ve kterých se nahrazuje pivo chlebem, resp. chleba pivem. Všechny tyto příklady je možno vyjádřit následujícími rovnicemi:

R72: $$\begin{aligned} 100 &= x \cdot 10 \\ y &= x \cdot 45 \qquad (x = 10\,,\ y = 450) \end{aligned}$$

R73: $$\begin{aligned} 100 &= x \cdot 10 \\ y &= x \cdot 15 \qquad (x = 10\,,\ y = 150) \end{aligned}$$

R75: $$\begin{aligned} 155 &= x \cdot 20 \\ y &= x \cdot 30 \qquad (x = 7\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,,\ y = 232\,\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

R77: $$\begin{aligned} 10 &= x \cdot 2 \\ y &= x \cdot 5 \qquad (x = 5\,,\ y = 25) \end{aligned}$$

R78: $$\begin{aligned} 100 &= x \cdot 10 \\ y &= \ x \cdot 2 \qquad (x = 10\,,\ y = 20) \end{aligned}$$

Příklady **R74** (viz ukázka) a **R76** jsou složitější a náročnější.

V prvním z nich je třeba dané množství chlebů známé kvality nahradit neznámými množstvími y_1, y_2 chlebů dvou různých kvalit 10 *pesu* a 20 *pesu*; mlčky se přitom předpokládá, že se pro tato dvě neznámá množství chlebů použije stejné množství mouky.

Ve druhém příkladu je třeba nahradit dané množství chlebů známé kvality neznámým množstvím chlebů dvou různých kvalit 20 a 30 *pesu*; v tomto případě se oproti příkladu **R74** předpokládá, že získáme stejná množství y obou druhů chleba. Oba příklady můžeme vyjádřit následujícími rovnicemi:

R74:

$$\begin{aligned} 1000 &= x \cdot 5 \\ y_1 &= \tfrac{x}{2} \cdot 10 \\ y_2 &= \tfrac{x}{2} \cdot 20 \qquad (x = 200\,,\ y_1 = 1000\,,\ y_2 = 2000) \end{aligned}$$

R76:

$$\begin{aligned} 1000 &= x \cdot 10 \\ y &= a \cdot 20 \\ y &= b \cdot 30 \\ a + b &= x \qquad (x = 100\,,\ y = 1\,200) \end{aligned}$$

Velmi zajímavý je příklad **R71**, ve kterém se hovoří o tom, že z jednoho džbánu piva byla odlita jedna čtvrtina a pro „zjemnění" nahrazena vodou. Vypočítat se má *pesu* zředěného piva. Podle uvedeného řešení odpovídá jednomu džbánu $\frac{1}{2}$ měřice sladu, po odebrání jedné čtvrtiny vyjde $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ měřice sladu. Převrácená hodnota tohoto čísla je $2\,\frac{2}{3}$ a to je *pesu* zředěného piva.

Zdá se, že ze zadání příkladu vypadla výchozí kvalita piva, tj. hodnota 2 *pesu*, a že množství sladu je převrácenou hodnotou *pesu*.

O úlohách, které se týkají chlebů a piva viz [Ni].

Úlohy praktické.

V příkladu **M3** je třeba vypočítat $\frac{1}{3}\,\frac{1}{5}$ délky dřevěného stěžně, který je 30 loktů dlouhý. Vychází 16. Jde tedy o výpočet

$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \cdot 30 = 16\ .$$

Od příkladů procvičujících práci se zlomky se tato úloha liší jen praktickou formulací.

Poměrně zajímavým příkladem je **M11**, jehož hrdinou je muž, který odnáší z pekárny chleba. Obvykle používá tzv. 5-košík. Má se vypočítat množství zbylé práce, použije-li tzv. 4-košík. Z připojeného výpočtu se zdá být jasné, že v tzv. 5-košíku je v pěti vrstvách po pěti chlebech, tj. celkem 25 chlebů; podobně je ve 4-košíku 16 chlebů. Vypočteme-li nyní poměr $25 : 16 = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}$ a odečteme-li od něho jedničku, získáme výsledek $\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}$; ten můžeme interpretovat z dnešního pohledu jako „zlomek práce, která zbývá", použijeme-li místo většího 5-košíku menší 4-košík.[29]

Příklad **M21**, který je nadepsán *Metoda výpočtu mísení obětního chleba*, patří k problematice směšovacího počtu. Uvedený výpočet je možno dnešní symbolikou vyjádřit rovnicí

$$\frac{1}{8} \cdot 20 + \frac{1}{16} \cdot 40 = x \cdot 60\ .$$

Zadání příkladu není příliš srozumitelné; teprve postup řešení, který je popsán sledem početních operací, objasňuje zadání. Zdá se, že se má vyrobit 60 chlebů

[29] Odneseme-li místo 25 chlebů jen 16, zbývá odnést 9 chlebů, tj. $\frac{9}{16} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{16}$ počtu již odnesených chlebů.

z 20 chlebů jedné kvality a 40 chlebů druhé kvality; přitom na každý chleba první, resp. druhé kvality se použije $\frac{1}{8}$, resp. $\frac{1}{16}$ měřice zrna (tj. *pesu* je 8, resp. 16). Je tedy vypočteno, kolik zrna je zapotřebí na jeden chleba výsledné kvality. Výsledek $\frac{1}{16}$ je v textu uveden chybně, má vyjít $\frac{1}{12}$ (tj. *pesu* 12).

Příklad **M23** (viz ukázka) je jednoduchou slovní úlohou na dělení; nadepsán je *Metoda počítání prací výrobce sandálů*:

... když řeže, je to 10 za den; když dokončuje, je to 5 za den. Když řeže i dokončuje, kolik udělá za den? Sečti dobu těch 10 *s těmi* 5, *vyjde celkem* 3. *Počítej s tím, až najdeš* 10, *vyjde* $3\,\frac{1}{3}$*-krát. Hle,* $3\,\frac{1}{3}$ *je to pro jeden den. Nalezl jsi správně.*

Švec tedy za první den vyřeže deset sandálů, druhý den jich pět sešije a třetí den znovu pět sešije. Za tři dny tedy dokončí deset sandálů, tj. za jeden den $3\,\frac{1}{3}$ sandále. Vidíme, že i ve starém Egyptě měly některé slovní úlohy do značné míry absurdní zadání i absurdní řešení.

V příkladech **R54** a **R55** je třeba oddělit obsah 7 *secat* z 10 polí, resp. 3 *secat* z 5 polí. Příklady mají geometrický podtext, jde však jen o procvičení dělení a převodů jednotek *secat* na stokrát menší jednotky *meh-ta*. Vypočte se

$$7\ secat : 10 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\ secat = \frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\ secat + 7\,\frac{1}{2}\ meh\text{-}ta\ ,$$

$$3\ secat\ : 5 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{10}\ secat = \frac{1}{2}\ secat + 10\ meh\text{-}ta\ .$$

U obou příkladů je provedena zkouška násobením.

V příkladu **R62** (viz ukázka) je pytel se zlatem, stříbrem a cínem prodáván za 84 mincí. Přitom cena debenu zlata, resp. debenu stříbra, resp. debenu cínu je 12 mincí, resp. 6 mincí, resp. 3 mince. Předpokládá se, ačkoliv to není v zadání uvedeno, že váhy zlata, stříbra a cínu jsou stejné. Úloha vede na rovnici

$$12x + 6x + 3x = 84\ .$$

Po vydělení $84 : 21 = 4$ jsou vypočteny ceny jednotlivých kovů ($12 \cdot 4 = 48$, $6 \cdot 4 = 24$, $3 \cdot 4 = 12$) a provedena zkouška.

V příkladu **R63** je třeba 700 chlebů rozdělit čtyřem mužům v poměru $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. Výpočet sestává z následujících úkonů:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\ , \qquad 1 : 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{14}\ , \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{14}\right) \cdot 700 = 400\ .$$

$$\frac{2}{3} \cdot 400 = 266\,\frac{2}{3}\ , \quad \frac{1}{2} \cdot 400 = 200\ , \quad \frac{1}{3} \cdot 400 = 133\,\frac{1}{3}\ , \quad \frac{1}{4} \cdot 400 = 100\ .$$

Nakonec je provedena zkouška, čtyři výsledné hodnoty jsou sečteny. Zajímavé je, že požadovaný poměr není uveden v tvaru $8 : 6 : 4 : 3$.

V příkladu **R66** je úkolem vypočítat denní příděl z 10 měřic tuku určených pro celý rok. Při výpočtu se 10 měřic (*hekat*) převede na menší jednotky *ro* a tato hodnota se vydělí počtem dnů v roce:

$$3\,200\ ro : 365 = 8\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{2\,190}\ ro = \frac{1}{64}\ hekat\ 3\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{2\,190}\ ro$$

V příkladu **R67** jde o sčítání dobytka. Muž přivedl 70 kusů dobytka, což je $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{3}$ celkového počtu svěřených býků. Řeší se tedy problém, který lze vyjádřit rovnicí

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x = 70\ .$$

Nejprve jsou $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{3}$ vyjádřeny v kmenných zlomcích, pak se vypočte převrácená hodnota a nakonec původní počet býků:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{18}\,, \qquad 1 : \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right) = 4\,\frac{1}{2}\,, \qquad 70\cdot 4\,\frac{1}{2} = 315\ .$$

V příkladu **R68** se dělí 100 měřic obilí mezi čtyři mužstva o 12, 8, 6 a 4 osobách. Daných 100 měřic se dělí třiceti, výsledek $3\,\frac{1}{3}$ měřice se dále vyjádří pomocí jednotek *ro*: vychází tedy $3\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}$ *hekat* $1\,\frac{2}{3}$ *ro*. Tato hodnota se pak násobí počtem osob jednotlivých mužstev:

$$12\cdot\left(3\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}\ hekat\ 1\,\frac{2}{3}\ ro\right) = 40\ hekat\ ,$$

$$8\cdot\left(3\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}\ hekat\ 1\,\frac{2}{3}\ ro\right) = 26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{32}\ hekat\ 3\,\frac{1}{3}\ ro\ ,$$

$$6\cdot\left(3\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}\ hekat\ 1\,\frac{2}{3}\ ro\right) = 20\ hekat\ ,$$

$$4\cdot\left(3\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}\ hekat\ 1\,\frac{2}{3}\ ro\right) = 13\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{64}\ hekat\ 1\,\frac{2}{3}\ ro\ .$$

Na závěr je provedena zkouška, součet čtyř výsledných hodnot dává 100.

Příklady **R82** až **R84** jsou věnovány výpočtům množství krmiva pro domácí zvířata.

V příkladu **R82** je uvedeno, že 10 hus spotřebuje denně $2\,\frac{1}{2}$ *hekat* krmiva, za 10 dnů tedy $\frac{1}{4}$ jednotky *100-hekat* a za 40 dnů tedy celou jednotku *100-hekat*.

Dále je uveden $1\,\frac{2}{3}$-násobek této hodnoty, který je vyjádřen ve třech druzích jednotek:

$$1\,\frac{1}{2}\ 100\text{-}hekat\ 16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{32}\ hekat\ 3\,\frac{1}{3}\,ro\ ;$$

má jít o množství špaldy, které je potřebné k vyprodukování *100-hekat* krmiva, polovina tohoto množství udává odpovídající množství pšenice. Jako potřebné množství zrna je uvedena hodnota

$$\left(1-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 100\text{-}hekat = \frac{14}{15}\cdot 100\text{-}hekat\ .$$

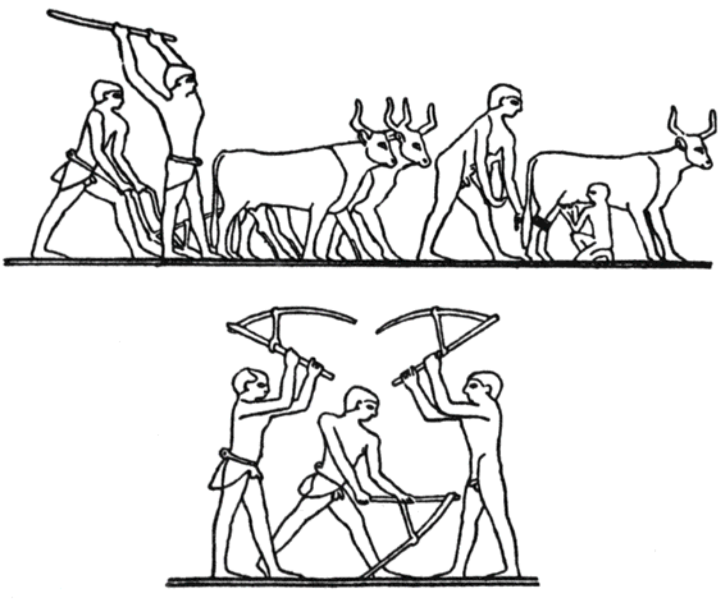
Význam přepočtů není jasný; zdá se, že koeficienty, které jsou zde použity, byly zjištěny při praktických činnostech. Příklad **R82B** je jednoduchou modifikací příkladu **R82**.

V příkladu **R83** je uvedena denní dávka krmiva pro čtyři husy ve výběhu (1 *hin*) a denní dávka pro jednu husu ($\frac{1}{4}$ *hinu* = $\frac{1}{64}$ *hekat* 3 *ro*). Dále je uvedena denní dávka krmiva pro jednu husu, která plave na rybníku ($\frac{1}{16}\,\frac{1}{32}$ *hekat* 3 *ro* = 1 *hin*), denní dávka pro 10 hus (1 *hekat*), desetidenní, resp. měsíční dávka pro 10 hus (10 *hekat*, resp. $\frac{1}{4}$ *100-hekat* a 5 *hekat*).

Dále jsou zde uvedeny denní dávky krmiva pro husu a jeřába ($\frac{1}{8}\,\frac{1}{32}$ *hekat* $3\,\frac{1}{3}$ *ro*) pro kachnu ($\frac{1}{32}\,\frac{1}{64}$ *hekat* 1 *ro*) pro husu ($\frac{1}{64}$ *hekat* 3 *ro*), pro holuba a křepelku (3 *ro*) atd.

Příklad **R84**, který se týká množství krmiva pro dobytek ve stáji, je nesrozumitelný a těžko interpretovatelný. Rovněž příklad **K6** nazvaný *Počítání produkce drůbeže* není srozumitelný. Poznamenejme ještě, že odstavce **R85**, **R86** a **R87** obsahují jen jakési účty a poznámky a s matematikou nemají mnoho společného.

Velmi zajímavé problémy související s matematikou jsou uvedeny na papyru Anastasi I. Jde o zadání tří problémů praktického charakteru, při jejichž řešení je patrně třeba nejprve stanovit některé vstupní hodnoty.



Orba, dojení a kypření půdy ve starém Egyptě

ČAS.

Matematické a astronomické poznatky prvních civilizací byly již v nejstarších dobách využívány v *chronologii*, nauce o měření času. Nejprve byla budována na poznatcích získaných sledováním zdánlivých pohybů nebeských těles na obloze, později byl její teoretický základ postaven na znalostech skutečných pohybů Země a Měsíce.

Hlavním úkolem chronologie bylo propojit délky dne, měsíce a roku v jeden jednotný a jednoduše konstruovaný celek, kterému se říká kalendář. Dalšími úkoly chronologie bylo rozpracovávání různých metod měření času, zavádění jednotek pro jeho měření atd.

Kalendář.

Nejvýraznější časovou jednotkou byl odpradávna den. Východy a západy Slunce, které „oddělují světlo a tmu", vymezují jednotlivé dny a noci. Rotace Země, která střídání dne a noci způsobuje, je periodickým dějem, který sice není absolutně rovnoměrný, ale může být s dostatečnou přesností za rovnoměrný považován. Proto se k odměřování času výborně hodí. Jedna otočka Země vztažená vůči hvězdám vymezuje tzv. *hvězdný* nebo *siderický den*, který trvá přibližně 23 hodin, 56 minut a 4 sekundy. Vzhledem k tomu, že naše Země ještě obíhá kolem Slunce, je jedna otočka Země vztažená ke Slunci, tj. jeden *sluneční den*, asi o 3 minuty a 56 sekund delší.[1] Skutečný pohyb Země kolem Slunce se nám jeví jako roční pohyb Slunce po ekliptice od západu k východu – za jeden den se Slunce posune o necelý stupeň. S tím bezprostředně souvisí roční proměna naší noční oblohy; např. večerní obloha na jaře je jiná než večerní obloha v létě, večerní obloha v létě je jiná než večerní obloha na podzim atd.

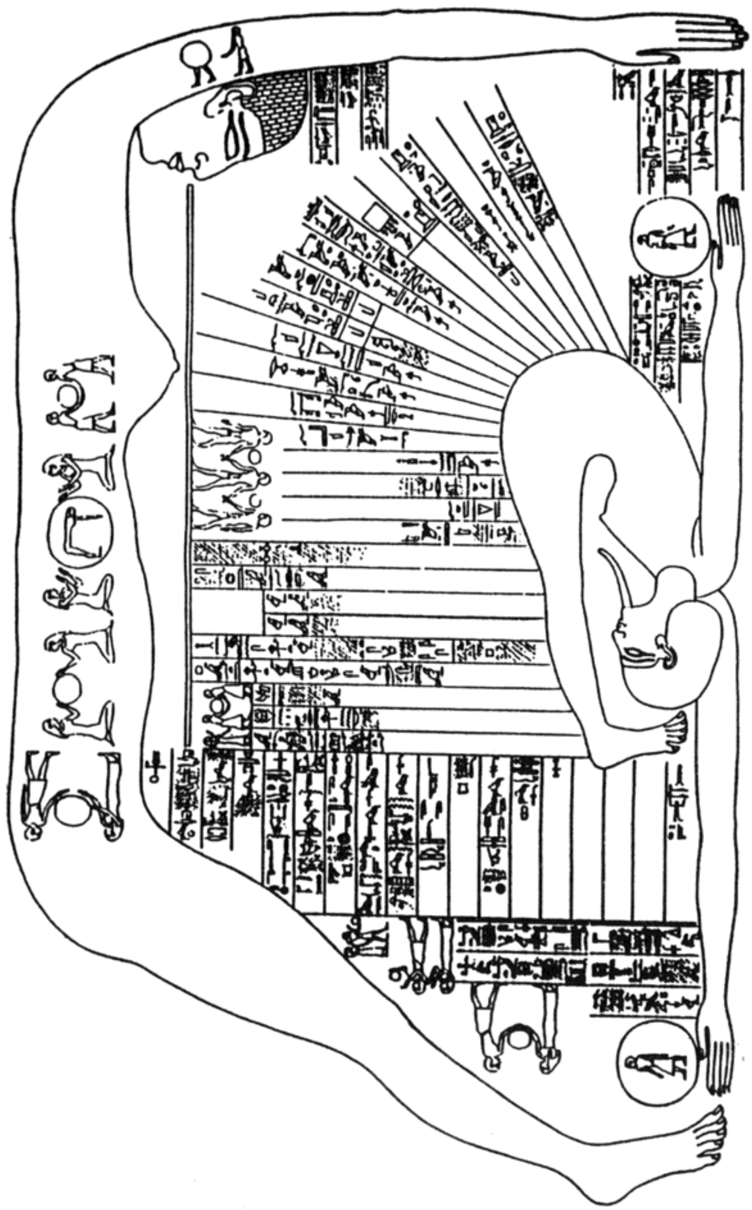
V pásu ekliptiky vymezili Egypťané 36 souhvězdí, tzv. dekanů. Tato souhvězdí, jak se ráno před východem Slunce objevovala nad obzorem, vymezovala rok. Každých deset dnů bylo ve znamení nějaké hvězdy nebo souhvězdí. Každý dekanus kulminoval deset dnů.

Poznamenejme ještě, že poměr světla a tmy není v jednotlivých dnech roku stejný, časové intervaly mezi východem a západem Slunce nejsou totiž během roku konstantní. Způsobeno je to sklonem zemské osy k rovině, ve které Země kolem Slunce obíhá; na obloze se tento fakt projevuje sklonem ekliptiky ke světovému rovníku. Na severní polokouli jsou nejdelší dny a nejkratší noci v období kolem 21. června (letní slunovrat) a nejkratší dny a nejdelší noci v období kolem 21. prosince (zimní slunovrat).

Větší počty dnů se stávaly základem delších, různými způsoby vytvářených časových období.

---

[1] Vzhledem k nepravidelnostem pohybů Země musely být zavedeny podstatně přesnější definice než jsou výše uvedená vymezení hvězdného a slunečního dne. Viz např. B. Hacar: *Úvod do obecné astronomie*, SPN, Praha, 1963, J. Kleczek, Z. Švestka: *Astronomický a astronautický slovník*, Orbis, Praha, 1963, V. Vanýsek: *Hvězdářský zeměpis. Astronomická geometrie*, Orbis, Praha, 1954.



Bohyně nebeské klenby Nut a bůh země Geb

Střídání fází Měsíce, které je rovněž výrazným a velmi snadno pozorovatelným jevem, se stalo základem nejstarších kalendářů, tzv. *měsíčních* nebo *lunárních*. Časový interval mezi dvěma po sobě jdoucími stejnými fázemi Měsíce se nazývá *synodický měsíc*; jeho přesná délka je 29,5306 dne, tj. 29 dní, 12 hodin, 44 minut, 2,7 sekundy. Tato hodnota však značně kolísá vlivem nerovnoměrnosti pohybu Měsíce; výše uvedená přesná hodnota synodického měsíce je dlouhodobým průměrem. Protože se fáze Měsíce opakují přibližně v intervalu $29\frac{1}{2}$ dne, byla v nejstarších kalendářích délka měsíce střídavě 29 a 30 dnů.[2]

Periodicita přírodních dějů je způsobena oběžným pohybem Země kolem Slunce. Během jednoho oběhu se na Zemi vystřídají roční období a proběhne celý cyklus přírodních dějů. Tato doba se nazývá rok. Přibližná délka roku je $365\frac{1}{4}$ dne. Kalendář postavený na délce roku se nazývá *sluneční* nebo *solární*.

Přesná délka roku, tj. období ve kterém se opakují přírodní děje, je však 365,2422 dne (zaokrouhleno na desetitisíciny), tj. 365 dnů, 5 hodin, 48 minut a 45,7 sekundy. Je to tzv. *tropický rok*, který je definován jako časový interval mezi dvěma po sobě jdoucími průchody Slunce *jarním bodem*.[3]

Obtíže při sestavování kalendáře jsou způsobeny tím, že ani synodický měsíc, ani tropický rok nejsou celými násobky dne a tropický rok není celým násobkem synodického měsíce. Proto je velkým problémem sestavení tzv. *lunisolárního* kalendáře, který by respektoval jak délku tropického roku (přírodní děje), tak délku synodického měsíce (fáze Měsíce).

Staří Egypťané užívali nejdříve *lunární* kalendář. Později, patrně jako první národ vůbec, zavedli *solární* kalendář, ve kterém měl rok 365 dnů. Sestával z 12 měsíců po třiceti dnech a dodatečných pěti svátečních (*epagomenálních*) dnů, které oddělovaly jednotlivé roky. Každý měsíc měl 3 (velké) týdny po 10 dnech (nebo 6 malých týdnů po 5 dnech). Jednotlivé měsíce byly pod ochranou některého egyptského boha, pět epagomenálních dnů bylo zasvěceno svátkům bohů Usira, Sutecha, Hora, Esety a Nebthety. Rok byl navíc rozdělen na tři období, která odpovídala přirozenému rytmu zemědělských prací v Egyptě. Začínal prvním dnem prvního měsíce doby záplav.

- *achet*, doba záplav; měsíce *thot, paofi, atyr, choiak*
- *peret*, doba vegetace; měsíce *tybi, mechir, famenat, farmuti*
- *šemu*, doba žní; měsíce *pachons, paini, epifi, mesore*

Vytvořený kalendář dával rytmus hospodářskému životu, zemědělským pracím, náboženským slavnostem, svátkům atd. Náboženská funkce kalendáře vedla k tomu, že se jím zabývali hlavně kněží.

Zavedení egyptského kalendáře bývá někdy přičítáno veleknězi Imhotepovi, vysoce vzdělanému významnému hodnostáři III. dynastie (asi 2 700 až 2 630), který byl patrně architektem první pyramidy, stupňovité pyramidy krále Džosera v Sakkáře.

---

[2] V dlouhodobém průměru je interval střídání fází Měsíce o necelou hodinu větší. Za 100 měsíců bude již rozdíl větší než 3 dny, za 360 měsíců to bude téměř přesně 11 dnů. Proto byl měsíční kalendář někdy upravován tak, že z 360 měsíců mělo 191 měsíců 30 dní a 169 měsíců 29 dní.

[3] Jarní bod je jedním ze dvou průsečíků ekliptiky a světového rovníku.

Řecký historik Hérodotos (asi 484 až 430), „otec dějepisu", ve svých *Dějinách* napsal:

Co se týče záležitostí lidských, uvedli všichni souhlasně, že Egypťané první z lidí objevili rok, který rozdělili podle ročních období na dvanáct dílů. Vyzkoumali prý to podle hvězd. Podle mého názoru si při tom vedou moudřeji nežli Řekové, neboť ti vkládají kvůli ročním obdobím každý třetí rok jeden měsíc, kdežto Egypťané zavedli dvanáct měsíců po třiceti dnech a každý rok zařazují pět dní mimo počet, takže jim koloběh ročních dob vychází vždy na stejnou dobu.[4]

Poznamenejme, že o době, ve které egyptský kalendář vznikl, se stále spekuluje. Někteří badatelé kladou jeho vznik až do pátého tisíciletí př. Kr., jiní na počátek tisíciletí třetího.

Podle některých historiků byla délka egyptského roku stanovena pomocí poměrně pravidelně se opakujících záplav; jejich příchod, následné rozvodnění Nilu, jeho pozdější návrat do koryta, setba, doba vegetace a sklizeň, to vše tvořilo přirozený cyklus, kterému bylo nutno se přizpůsobit a který bylo dobré znát.[5] Dlouholeté zaznamenávání intervalů mezi počátky záplav vedlo patrně ke stanovení délky roku na 365 dnů, odchylka od skutečné délky tropického roku nebyla po řadu let zpozorována, neboť záplavy nepřicházely zcela pravidelně.

Počátek záplavy, který byl nejdůležitějším okamžikem roku, náhodou souhlasil s tzv. *heliakickým východem* nejjasnější hvězdy Síria (řecky *Sothis*, egyptsky *Sopdet*).[6] Sírius se na ranní obloze poprvé objevoval vždy těsně před začátkem záplav, proto byl spjat se začátkem egyptského roku; v čele všech bohů roku stála bohyně *Sopdet*, „paní nového roku", která byla ztělesněním hvězdy Sírius. Pozorování heliakického východu Síria je tedy spjato se vznikem egyptského kalendáře;[7] někteří historikové soudí, že vznik egyptského solárního kalendáře je spjat spíše s heliakickým východem Síria než se záplavami.

Dlouhodobým pozorováním Egypťané zjistili, že délka jejich roku, tj. doba 365 dnů, je krátká; heliakický východ Síria se v egyptském kalendáři stále

---

[4] Hérodotos: *Dějiny aneb devět knih dějin nazvaných Músy*, Odeon, Praha, 1972, přeložil J. Šonka; II.4, str. 102.

[5] Nilské záplavy bývaly způsobovány jihozápadním monsunem ve východní Africe, tropickými lijáky a táním sněhu v horách Etiopie. Voda odnášela všechno, co bylo v cestě, hladina Nilu se zvedla o několik metrů a voda zaplavila celé údolí. Po čtyřech měsících voda opadla, zaplavené území bylo pokryto vrstvou úrodného bahna. Pak byly zahájeny zemědělské práce. Egyptské zemědělství bylo na každoročních záplavách bezpodmínečně závislé.

[6] Sírius je nejjasnější hvězdou oblohy, patří do souhvězdí Velkého psa (Canis Major), značí se tedy α CMa.
Znovu připomeňme, že důsledkem ročního pohybu Země kolem Slunce, vycházejí hvězdy každým dnem o necelé 4 minuty dříve než ve dni předešlém. Postupně se tak během roku obloha nad námi proměňuje. Heliakickým východem nějaké hvězdy rozumíme okamžik, kdy se tato hvězda poprvé ráno objeví nad východním obzorem, aby byla vzápětí přezářena vycházejícím Sluncem. V dalších dnech je lépe a déle pozorovatelná, neboť časový rozdíl východů této hvězdy a Slunce denně narůstá o zmíněné 4 minuty.

[7] O významu Síria a jeho heliakického východu svědčí např. i to, že kalendář jednoho z městských chrámů doby Thutmose I. (kolem r. 1450 př. Kr., XVIII. dynastie) vypočítává oběti, které je třeba každoročně přinášet bohům v den heliakického východu Síria.

opožďoval, opožďovaly se i záplavy. Počátek egyptského roku se tak během staletí postupně posouval přes všechna skutečná roční období, někdy se proto egyptskému roku říká *toulavý rok*. K odhadování počátků záplav sloužily i nadále heliakické východy Síria. Církev se držela tradičního egyptského kalendáře.

Tropický rok, podle kterého se „řídí příroda", je zhruba o jednu čtvrtinu dne delší. Egyptský kalendář se tedy předbíhal (a přírodní děje vůči kalendáři opožďovaly) za čtyři roky zhruba o jeden den, za osm let o dva dny atd. Počítáme-li s přesnější délkou tropického roku (365,2422 dne), zjistíme, že za 1508 roků tento rozdíl narostl na celý rok; tj. za 1508 tropických roků uplynulo 1509 egyptských roků. Roční období byla po 1509 egyptských rocích umístěna v egyptském kalendáři stejně jako před těmito roky.

Během staletí se však heliakický východ Síria za záplavami pomalu opožďoval. Velmi pomalý pohyb jarního bodu po ekliptice, který je projevem tzv. *precese*, dlouhoperiodického pohybu zemské osy, totiž způsobuje velmi pomalou proměnu oblohy, kterou lidé mohou sledovat v různých ročních obdobích. Za výše uvedené období 1509 let se heliakický východ Síria zpozdil o 21 dnů.

Roku 238 př. Kr. byl v Egyptě pod vlivem Eratosthena, řeckého matematika, geografa, chronologa a správce alexandrijské knihovny, navržen přestupný rok. Kanopským dekretem ho zavedl egyptský král Ptolemaios III.; bylo tedy dosaženo souhlasu kalendáře s přírodním cyklem, tj. s tropickým rokem. Každý čtvrtý rok byl nyní o jeden den delší, tj. měl 366 dnů. Reforma se však příliš neujala, teprve roku 46 př. Kr. ji na návrh alexandrijského astronoma Sosigena prosadil Gaius Julius Caesar (100–44) a reformoval tak římský kalendář. Roku 325 po Kr. byl tento kalendář na Nicejském koncilu přijat křesťanským světem a roku 525 dotvořen zavedením křesťanského letopočtu. Tento tzv. *juliánský kalendář* již vůbec nedbá pohybu Měsíce a jen ze setrvačnosti zachovává dělení roku na 12 měsíců. Juliánský kalendář je poměrně přesný, délka průměrného juliánského roku, tj. $365\frac{1}{4}$ dne, se od skutečné délky tropického roku liší přibližně o 11 minut a 13 sekund; k chybě jednoho dne dojde až po 129 letech. Juliánský kalendář se oproti přírodním dějům mírně opožďoval. Jeho oprava byla provedena až roku 1582 za papeže Řehoře XIII. Bylo vynecháno 10 dnů a upraveno pravidlo o přestupných letech: roky končící dvěma nulami jsou přestupné jen tehdy, jsou-li dělitelné čtyřmi sty (roky 1700, 1800 a 1900 přestupné nebyly, zatímco roky 1600 a 2000 ano). Tento tzv. *gregoriánský kalendář* je již velmi přesný.[8]

Poznamenejme ještě, že Egypťané nečíslovali roky tak jako my. Důležité události byly označovány rokem, měsícem a dnem vlády jednotlivých panovníků. V době Staré říše byly vztahovány ke sčítání dobytka, které bylo prováděno každým druhým rokem. Proto je obtížné události v Egyptě přesně datovat.

O kalendáři ve starém Egyptě je možno se více dozvědět např. v [Par1] a [Par2].

---

[8] Průměrná délka gregoriánského roku se liší od délky tropického roku jen o 24 sekund; chyba vzroste na jeden den až za 3600 let. Proto rok 4840 nebude přestupným.

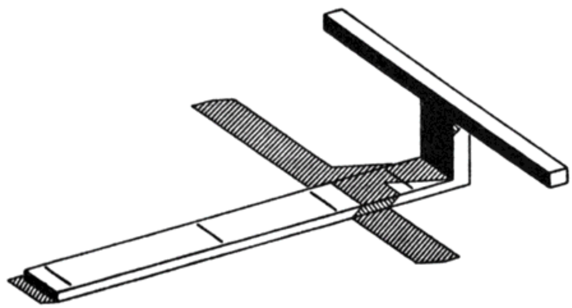
Měření času.

Východ a západ Slunce odděluje den a noc. V Egyptě se poměrně rychle rozednívá a rychle smráká, neboť Slunce po celý rok vychází a zapadá téměř kolmo k obzoru. Proto je v Egyptě přelom dne a noci rychlý a velmi výrazný.

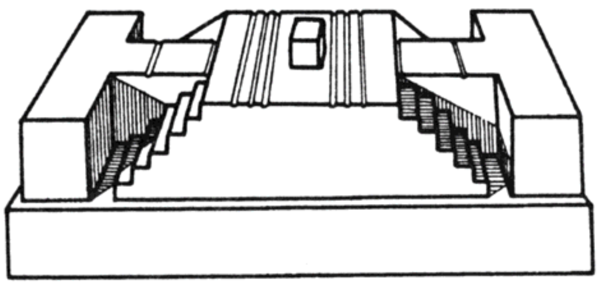
Den i noc byly v Egyptě děleny na dvanáct hodin. Protože však během roku nejsou dny a noci stejně dlouhé, délka hodin (denních i nočních) se měnila. V době letního slunovratu byly denní hodiny nejdelší a noční nejkratší, v době zimního slunovratu tomu bylo naopak.

K měření času byly užívány hodiny *sluneční, vodní* a *hvězdné.*

Sluneční hodiny (*secat*) byly ve dne hojně užívány, neboť v Egyptě je větší oblačnost vzácná. Jejich základem byla většinou nějaká forma tzv. *gnomonu*;[9] sledován byl směr nebo délka stínu, který vrhá.



Nejstarší zachované egyptské sluneční hodiny (viz obrázek) jsou z doby Thutmose III. (XVIII. dynastie) z první poloviny 15. století př. Kr. Jde o poměrně malý přístroj; jeho vodorovnou částí je jakési pravítko s časoměrnou stupnicí délky asi 30 cm, na niž vrhá stín kolmé rameno. Tento typ slunečních hodin měřil čas délkou stínu.



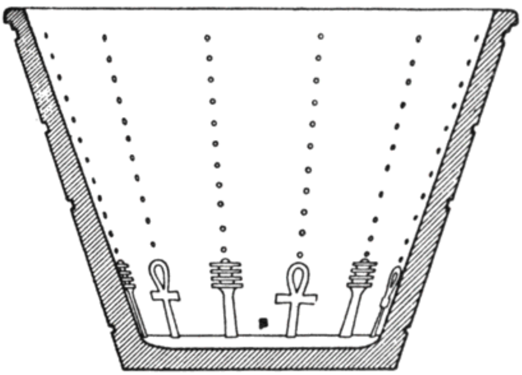
---

[9] Nejjednoduššími gnomony byly obelisky, sloupky nebo tyče, které vrhaly stín na vhodně sestrojené stupnice. Sluneční hodiny byly konstruovány nejrůznějšími způsoby, bývaly i umělecky zdobené. Pomocí gnomonů prováděli starověcí myslitelé různá měření, stanovili světové strany, délku roku, sklon ekliptiky k rovníku atd.

Jiným typem egyptských slunečních hodin byly tzv. stupňové nebo schodové hodiny (viz předchozí obrázek), které rovněž měřily čas pomocí délky stínu. Při východu Slunce byly všechny schody ve stínu, dopoledne, jak se výška Slunce nad obzorem zvětšovala, byly jednotlivé schody postupně osvětlovány. Odpoledne, jak Slunce klesalo, stín opět jednotlivé schody zasahoval, při západu Slunce byly ve stínu.

V Palestině byly v městě Gezer nalezeny přenosné egyptské vertikální sluneční hodiny z doby krále Merenptaha (XIX. dynastie, začátek 13. stol. př. Kr.). Jsou ze slonoviny, zdobeny jsou mytologickými reliéfy. Protože měřily čas pomocí směru stínu, byla podmínkou jejich řádného užívání správná orientace ke světovým stranám.

Egyptské vodní hodiny (*merchet*) byly buď *přítokové* nebo *odtokové*. Nejstarší zachované odtokové hodiny pocházejí z doby panování faraona Amenhotepa III. (XVIII. dynastie, přelom 15. a 14. století). Byly nalezeny roku 1940 v Amonově chrámu v Karnaku ve východních Thébách, nyní jsou uloženy v káhirském muzeu. Jde o kamennou nádobu, která má tvar dutého komolého kužele. Dno má průměr 23 cm, nádoba se nahoru rozšiřuje, její výška je 31 cm. U dna je výtokový otvor. Zevně je zdobena symboly hvězd a souhvězdí zvířetníku a dvanácti měsíců. Vnitřek nádoby je opatřen dvanácti stupnicemi; ve 12 sloupcích, které odpovídají jednotlivým měsícům, jsou značky vymezující dvanáct hodin.

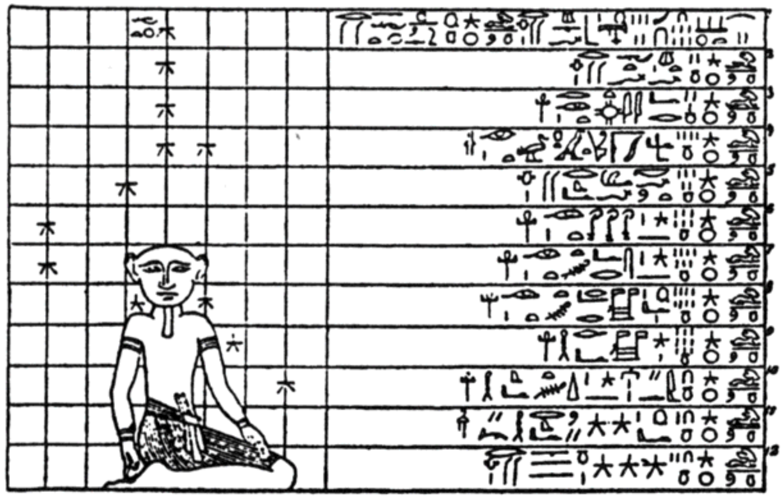


Přítokové hodiny byly složitější, nehodily se k přenášení. Většinou se jednalo o válcovitou nádobu, která byla na vnitřní straně opatřena dvanáctihodinovou stupnicí. Voda do těchto hodin pomalu přikapávala. Některé hodiny měly plovák; jakmile voda vystoupila do určité výše, byl otevřen spodní otvor odvádějící vodu.

Princip egyptských hvězdných hodin byl založen na rovnoměrném otočném pohybu oblohy, sledována byla kulminace některých hvězd.

Vzhledem k ročnímu oběhu Země kolem Slunce kulminují jednotlivé hvězdy každou noc přibližně o čtyři minuty dříve než v předchozí noci. Za 15 dnů tedy kulminují již o hodinu dříve, za měsíc o dvě hodiny dříve atd.

Egyptské hvězdné hodiny byly tvořeny 24 tabulkami se seznamy hvězd, které během noci postupně kulminují a svou kulminací jednotlivé hodiny vymezují. Pro každých 15 dnů v roce byla určena jedna takováto tabulka.[10] V každé je uvedeno dvanáct stálic; první kulminuje počátkem první hodiny noční, druhá počátkem druhé hodiny atd. Jednu tabulku hvězdných hodin vidíme na následujícím obrázku.

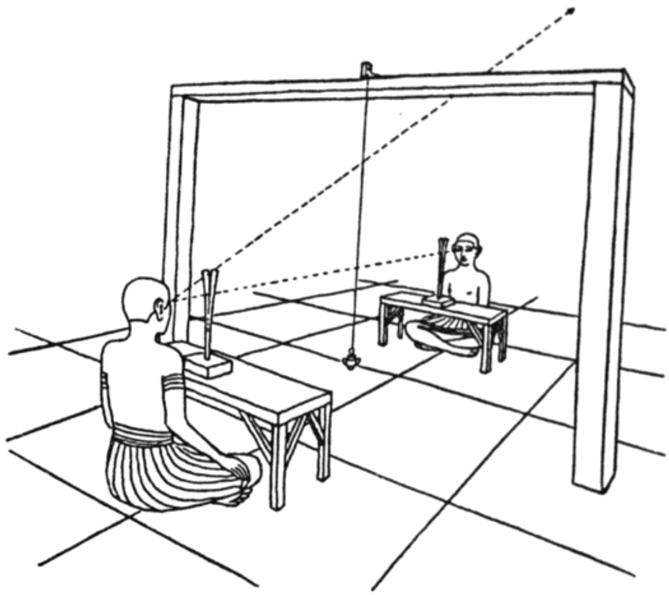


Vzhledem k tomu, že pro vymezení některých hodin neexistovala na obloze vhodná kulminující hvězda, byly v tabulkách uvedeny dostatečně jasné hvězdy, které byly „kulminaci blízké“; pro vzdálenost hvězdy od poledníku, tj. „od kulminace“, byly používány výrazy *nad pravým okem*, *nad pravým uchem*, *nad pravým ramenem* atd. Na tabulkách byl totiž uveden náčrtek lidské postavy a mezi svislými čarami byla naznačena poloha hvězdy v okamžiku, kdy začínala příslušná hodina. Čas měřili dva pozorovatelé sedící proti sobě v přesně vymezené vzdálenosti na místním poledníku. Jeden z nich sledoval pohybující se hvězdy nad sedící postavou druhého pozorovatele.

Hvězdné hodiny byly nalezeny v hrobkách faraonů Ramesse VI. a Ramesse IX. (XX. dynastie, asi 1188 až 1078) v Údolí králů.

Na následujícím obrázku je znázorněna situace, kdy dva egyptští pozorovatelé sledují kulminaci hvězd. Před každým stojí upravené žebro palmového listu, které je na horním konci vhodně proříznuto, aby vznikl jakýsi průzor. Tímto průzorem sledoval pozorovatel jednak provaz olovnice, jednak kulminující hvězdu. Na palmovém žebru s průzorem býval hieroglyfický nápis ukazující na užívání tohoto přístroje k měření hodin. Olovnice byla zavěšena na jakémsi pravítku, na kterém byl nápis *Já znám chod Slunce, Měsíce a hvězd v každé jejich poloze.*

[10] Platila pro první den uvedeného období, v dalších dnech bylo třeba provádět opravy. Rovněž pro posledních 5 dnů v roce bylo třeba provádět opravy.



Zavěšená záměrná nit (olovnice) spolu s průzorem tvořily *dioptr*, astronomický přístroj, který byl Egypťany nazýván *merchet*. Průhledítko bývalo umělecky zdobeno a opatřeno hieroglyfickým nápisem, který naznačoval použití přístroje k měření času.

O egyptském měření času, astronomických měřeních a přístrojích viz např. [Bo5], [Bo6], [Bo7], [Ho], [Le11], [Ly], [Po], [Slo] a [Ž3].

GEOMETRIE V PRAXI.

Zeměměřictví. Vytyčování staveb.

Každoroční záplavy vedly k výrazným změnám poměrně velkého pruhu zemědělské půdy podél Nilu; pozemky proto bylo nutno na tomto území vždy znovu vyměřit. Další rozsáhlá území se Egypťané naučili zavlažovat a zúrodňovat, proto projektovali zavlažovací kanály, zjišťovali výšku terénu apod. Vyměřování zemědělských pozemků a počítání jejich výměr bylo nutné i z dalších důvodů. Výše pozemkové daně totiž závisela na velikosti polí, daň byla odváděna v naturáliích. Rovněž bylo třeba vypočítat množství zrna potřebné k osetí pole známé výměry. Egypťané se proto museli naučit dobře vyměřovat, počítat výměry ploch, měřit objemy většího i menšího množství zrna, převádět měrné jednotky atd.

Zeměměřictví hrálo důležitou roli i ve stavitelství. Základními pomůckami byly měřický prut, měřický provazec a hůlka, kterou zeměměřiči kreslili přímo do písku nebo na desce pokryté pískem. Měřické provazce bývaly pomocí uzlů rozděleny na stejné úseky. Otroci je nosili a napínali, zjištěné rozměry zapisoval písař (viz obrázek).

Při stavbách bylo zapotřebí vytyčovat vodorovné roviny, konstruovat pravé úhly, stanovit svislice, načrtnout půdorysy staveb ve skutečných rozměrech atd. Před vlastním započetím stavby bylo nutné ji v základních rysech projektovat.

Vynikající schopnosti egyptských zeměměřičů se projevily při stavbách pyramid a chrámů. Jsou postaveny na vodorovné rovině, jejich stěny jsou obráceny ke světovým stranám,[11] půdorysy jsou téměř dokonalé čtverce či obdélníky. Přesnost orientace je fascinující, odchylky jsou většinou nepatrné.

Egyptologové se shodují v tom, že orientace pyramid má původ ve starých náboženských představách, kdy mrtvý král, přesněji jeho duch *ka*, vystupuje po smrti na oblohu mezi hvězdy a zaujímá místo nedaleko světového

[11] Výjimkou je několik malých pyramid z konce III. dynastie, které nebyly hrobkami.

severního pólu, kde se stává *neuhasínající hvězdou.*[12] Neuhasínajícími nebo nezanikajícími hvězdami byly již v době Staré říše míněny tzv. *cirkumpolární* hvězdy, tj. hvězdy blízké severnímu pólu, které nikdy nevycházejí a nezapadají. V Egyptě, který leží blízko k rovníku, je jich méně než u nás.[13] Opakem *neuhasínajících* hvězd byly hvězdy *neúnavné*, které zapadají a vycházejí; patřilo mezi ně pět planet a tzv. *dekanské hvězdy*, tj. hvězdy zvířetníkových souhvězdí.

Motivací pro orientování pyramid snad bylo to, aby králův duch měl nejkratší cestu na severní oblohu; pyramidy Staré říše mají ve shodě s těmito představami přístupovou chodbu orientovánu severo-jižně.

V následující tabulce jsou uvedeny odchylky v orientaci několika pyramid. Odchylkou rozumíme velikost úhlu, který svírá příslušná osa podstavy pyramidy se směrem severo-jižním, a to, zda je od směru k severu odchýlena k východu či k západu.[14] U Chufuovy pyramidy uvádíme odchylky její západní a východní hrany od směru k severu a navíc odchylky její severní a jižní hrany od směru k západu. Uvedené rozměry jsou v metrech.

Pyramida	**Dynastie**	**Hrana**	**Odchylka**
Džoserova	III.	125 × 115	3° k východu
Snofruova médumská	III.	146	24′25″ k západu
Snofruova jižní	IV.	185, 5	9′12″ k západu
Chufuova	IV.	230, 4	
— západní hrana			2′30″ k západu
— východní hrana			5′30″ k západu
— severní hrana			2′28″ k jihu
— jižní hrana			1′57″ k jihu
Rachefova	IV.	215, 3	5′26″ k západu
Menkaureova	IV.	108, 4	14′5″ k východu
Sahureova	V.	78, 1	1°45′ k západu
Neferirkareova	V.	104	30′ k východu
Niuserreova	V.	78, 8	téměř nulová

[12] Písemná svědectví o těchto představách jsou zaznamenána na stěnách podzemních komor v pyramidách králů VI. dynastie v tzv. *Textech pyramid*: ... *je umístěn Nútou* [bohyně nebe] *jako neuhasínající hvězda* ... (č. 782), *Ty, který jsi vyzdvižen mezi hvězdy neuhasínající, ty neuhasneš nikdy* ... (č. 878), *Vystupuje na nebe mezi hvězdy neuhasínající* ... (č. 940), ... *stává se hvězdou neuhasínající* ... (č. 1469).

[13] Na x-tém stupni severní šířky jsou cirkumpolárními hvězdami právě ty hvězdy, které jsou od severního světového pólu vzdáleny nejvýše x stupňů.

[14] Měřeny byly patrně odchylky východní a západní hrany pyramidy.

Čtvercový půdorys Chufuovy pyramidy je vytyčen velmi přesně. Průměrná odchylka čtyř úhlů podstavy od pravého úhlu je 1′48″, průměrná odchylka délek čtyř stran podstavy od jejich aritmetického průměru 230,364 m je jen 6 cm. Střední úhlová odchylka směrů těchto hran od světových směrů je asi 3′, což při délce hran je asi 20 cm. Výškové rozdíly dlažby po celém obvodu pyramidy v délce asi 920 m nepřekročily 12 mm od střední výškové úrovně; jihovýchodní roh pyramidy je asi o 2 cm výš než severovýchodní.[15]

František Lexa (1876–1960), zakladatel české egyptologie, se problematikou přesnosti vytyčení egyptských staveb podrobně zabýval.[16] O Chufuově pyramidě napsal:[17]

Základní plochou Chufevovy pyramidy měl býti čtverec o straně 440 egyptských královských loket; egyptský královský loket, jímž se měřilo při stavbě Chufevovy pyramidy, měl 52,36 cm; měřila tedy základní hrana této pyramidy 230,364 m a zastavená plocha měla 5 ha 30 a 46 m^2. *Připomínám věc, s organisačního hlediska zajímavou, že základní hrany všech pyramid, které dnes lze změřiti, měří plné desítky královských loket, kromě základní hrany Snofrevovy mejdúmské pyramidy, jejíž základní hrana měří 275 kr. l. Základní loket, podle kterého se zhotovovaly a kontrolovaly míry dělníků, byl asi nanesen na spodní vrstvě čelní plochy pyramidy poblíž jejího středu, jak to nacházíme u těch pyramid, jejichž základní loket se zachoval až na naše časy.*

Vzestupný úhel stěn měřili Egypťané kotangentou; u pyramidy Chufevovy $\cot g\, \alpha = \frac{\text{5 pěstí 2 prsty}}{\text{loktem}} \ldots$, *tedy* $\alpha = 51°50'36''$. *Měla tedy výška Chufevovy pyramidy 280 kr. l. = 146,59 m a její krychlový obsah měl 2 585 000 m*^{3}. *Odpočítá-li se krychlový obsah kamenného jádra pod středem pyramidy a vnitřních prázdných prostor, jejichž součet činí 64 000 m*^{3}, *dojdeme k výsledku, že na stavbu Chufevovy pyramidy se spotřebovalo 2 521 000 m*^{3} *stavebních hmot. …*

… Základní hrany měly míti 230,364 m délky; ve skutečnosti má severní hrana 230,253 m a jest odkloněna od západu o 0°2′28″, *východní hrana 230,391 m a jest odkloněna od severu o* 0°5′30″, *jižní hrana 230,454 m a jest odkloněna od západu o* 0°1′57″, *západní hrana 230,357 m a jest odkloněna od severu o* 0°2′30″, *takže rohové úhly měří: severozápadní* 89°59′58″, *severovýchodní* 90°3′2″, *jihovýchodní* 89°57′27″, *jihozápadní* 90°0′33″. *Je tedy největší délková chyba 11 cm na 230 m, úhlová* 5′ 3″; *je to tedy přesnost obdivuhodná. …*

Celá stavební plocha byla nejprve srovnána a pokryta nestejně silnými vápencovými deskami, aby se vyrovnal odklon podkladu od horizontální roviny. Při měření v r. 1925 bylo zjištěno, že lože severozápadního úhelního kamene leží 59,603 m, lože severovýchodního úhelného kamene leží 59,696 m, lože jihovýchodního úhelního kamene leží 59,370 m, lože jihozápadního úhelního kamene leží 59,849 m nad hladinou Středozemního moře u Alexandrie.

---

[15] Viz J. H. Cole: *Determination of the exact Size and Orientation of the Great Pyramide of Giza*, Ministry of Finance, Egypt, Government Press, Cairo, 1925. Viz též [Po].

[16] Lexa měl ke geometrii blízko, původně byl učitelem matematiky a fyziky.

[17] Poznamenejme, že o stavbě Chufuovy pyramidy píše už Hérodotos. Viz jeho *Dějiny …*, Odeon, Praha, 1972, II.124–126, str. 142–143.

Stavební plocha se tedy skláněla od jihozápadu k jihovýchodu o 47,9 cm. Povrch dlážděné desky je nejníže 60,405 m nad hladinou moře na severní straně blízko jejího východního konce mimo pyramidu, a nejvýše 60,426 m nad hladinou moře na jižní straně poblíže jejího východního konce. Byla tedy nerovnost půdy činící 47,9 cm vydlážděním snížena na 2,1 cm, což je jistě výkon pozoruhodný. ([Le6], str. 197–199)

Před vlastní stavbou byly jistě na papyrech narýsovány plány; je pravděpodobné, že byly vyhotoveny i modely.[18] Náčrty detailů staveb mohly být vypracovávány dodatečně až během stavby.

Pro chystanou stavbu pyramidy či chrámu byla nejprve vytyčena vodorovná rovina; ze sušených cihel byly vybudovány dlouhé úzké kanálky, které byly naplněny vodou a zaznamenána výše hladiny vody.[19] Celé staveniště bylo potom vyčištěno a většinou celé vydlážděno. Na takovéto vodorovné ploše byl narýsován půdorys stavby a teprve potom se začalo stavět. O těchto postupech svědčí např. výzkumy na ostrově Fílé, kde se půdorysy chrámů dochovaly vyryté do kamenné dlažby; celé stavby však byly později rozebrány na materiál.

Vytyčování půdorysů chrámů bylo náboženským ceremoniálem, slavnostním obřadem, o kterém nalézáme obrazová i textová svědectví na stěnách různých chrámů, např. v Karnaku, Dendeře, Abú Ghurábu u Abúsíru a v Edfu. Při obřadu, který se nazýval *zatloukání kolíků* nebo *napínání provazu*, se angažoval patrně sám král. Symbolicky se tohoto obřadu účastnila i bohyně Sešat.[20]

Na zmíněných vyobrazeních napíná král oblečený do nádherného slavnostního roucha měřící provazec spolu s bohyní Sešat. Oba drží dlouhé měřicí tyče spojené provazem a palice na zatloukání těchto tyčí do země. Z připojených textů navíc vyplývá, že orientace staveb byla prováděna astronomickými postupy, měřením podle hvězd.

Zčásti zachované vyobrazení obřadu zatloukání kolíků je již na stěně chrámu, který založil v polovině třetího tisíciletí př. Kr. v Abú Ghurábu faraon Niuserre (V. dynastie); není tam však připojen žádný nápis. Na pozdějších chrámech jsou však zmíněná vyobrazení doprovázena textem.

Nejzachovalejší text je v Dendeře na stěnách chrámu bohyně Hathory. Připojený obraz má rozměry $1,5 \times 3$ metry, kromě bohyně Sešat a zakladatele chrámu faraona Merirera je znázorněn ještě jeho syn a bohyně Hathor.

Žijící bůh, nádherný syn Thovtův, vychovaný vznešenou bohyní v chrámu, vládce země, napíná v radosti lano. S pohledem zaměřeným na bod „AK“[21] souhvězdí Býčí Kýty vytyčuje chrám vládkyně Dendery tak, jak se to provádívalo dříve. ([Po], str. 152–154)

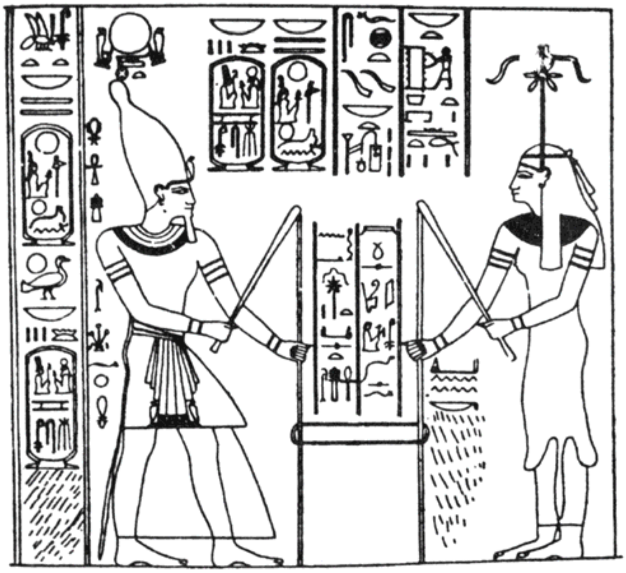
---

[18] V údolním chrámu Amenemheta III. (XII. dynastie) v Dahšúru byl nalezen vápencový model části blíže neurčené pyramidy, který pochází patrně z XIII. dynastie.

[19] Pozůstatky takovýchto kanálků byly objeveny v Abúsíru v nedokončené pyramidě Raneferefově (V. dynastie). Někteří badatelé soudí, že severní vítr, který je v Egyptě častý, způsobil při stanovování vodorovné roviny pro stavbu Chufuovy pyramidy v přípravném korytu zvýšení hladiny na jižní straně právě o ony 2 cm.

[20] Sešat, též Safchet nebo Sefech, byla bohyní vědy; často byla označována jako paní písma, písařů a stavitelů, vládkyně staveb a velitelka v domě knih.

[21] Výraz *er ak* se vyskytuje i v hvězdných tabulkách, znamená *uprostřed.*



Obřad zatloukání kolíků; chrám v Dendeře

Obřad zatloukání kolíků; chrám v Karnaku

Často bývá citován text z Horova chrámu v Edfu, který je tam vytesán na dvou místech (ve dvou modifikacích):

Uchopil jsem kolíky a rukojeť palice, držíme spolu s bohyní Safchet lano. Můj zrak sleduje chod hvězd; až můj pohled dojde k sedmihvězdí a naplní se mně stanovený oddíl čísla hodin, postavím kolíky do rohů božího domu. ([HŠ], str: 18)

Uchopil jsem dřevěný kolík a rukojeť kladiva, napínám provaz se Safchetou. Obracím svůj pohled na běh hvězd, nechávám své oko spočinout na souhvězdí „Býčí Nohy“. Úsek mého času zaujímá své místo na hodinách.[22] *Stanovím rohy tvého chrámu.*[23] ([Po], str. 154)

Z uvedených textů se zdá zřejmé, že severo-jižní směr a půdorysy chrámů (a patrně i pyramid) byly vytyčovány pomocí hvězd. Staří Egypťané věnovali hvězdám velkou pozornost, hvězdné nebe dobře znali, sestavovali z hvězd souhvězdí a znázorňovali je na stropních malbách chrámů a v hrobkách faraonů.[24]

Ve výše uvedených textech se dokonce objevuje jméno souhvězdí, které bylo při vytyčování sledováno. V jeho hieroglyfickém znázornění je obrázek hlavy býka s trupem a jednou zadní nohou. Souhvězdí *Býčí kýta* nebo *Býčí noha* bylo tvořeno patrně sedmi hvězdami tzv. Velkého vozu (část souhvězdí Velké medvědice, Ursa Major).

Severní světový pól se však mezi hvězdami pomalu posouvá; za necelých 26 000 let opíše mezi hvězdami kružnici. Je to důsledek velmi pomalého pohybu zemské osy, tzv. *precese*. Cirkumpolární hvězdy se tak během staletí a tisíciletí postupně obměňují.

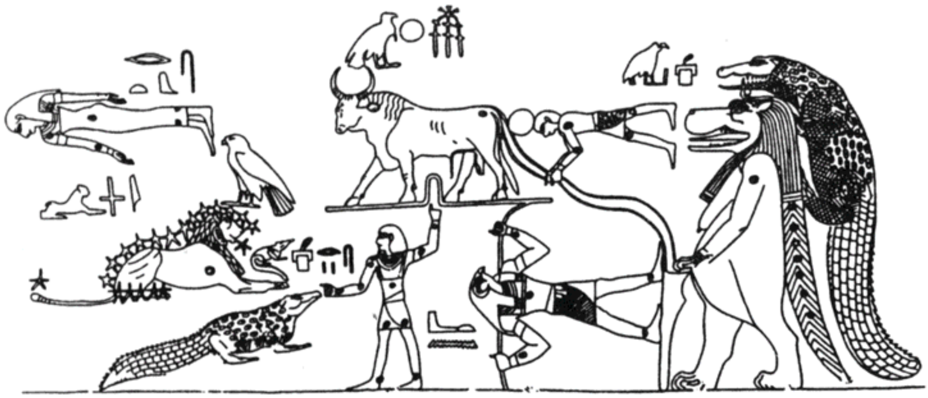
Počátkem třetího tisíciletí před Kristem, v době staveb prvních orientovaných pyramid, byly severnímu světovému pólu blízko Alioth a Mizar, dvě jasné hvězdy Velkého medvěda (ε a ζ UMa, dvě hvězdy oje Velkého vozu), velmi blízko pólu byla méně jasná hvězda Thuban ze souhvězdí Draka (α Dra). Během staletí se však pól od této hvězdy postupně vzdaloval, na přelomu druhého a prvního tisíciletí př. Kr. se přiblížil ke hvězdě Kochab (β UMi, jedno ze zadních kol Malého vozu), vzdálenost však byla poměrně velká, asi 7°. V dalších staletích se pól stále posouval směrem k Polárce (α UMi); nejblíže jí bude až začátkem druhé poloviny třetího tisíciletí našeho letopočtu.

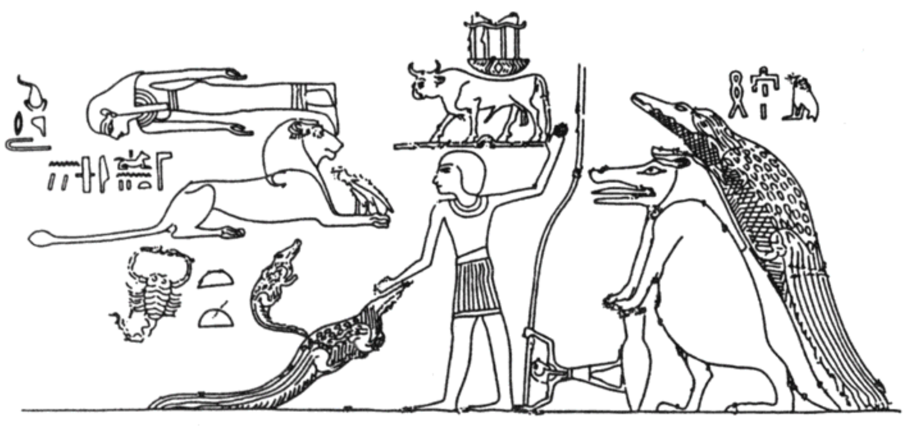
---

[22] Později byl překlad této věty opraven: ... *stoje tu jako časoměřič u svého měřického přístroje*, resp. ... *zastupuje časoměřiče u jeho měřického přístroje.*

[23] Oba texty jsou přeloženy i v knize [Chi], str. 181–182: *Chopil jsem se kolíku a rukojeti kladiva. Držel jsem měřičský provaz s bohyní Safekhabui. Pozoroval jsem pohyb hvězd. Mé oko bylo upřeno na Medvěda(?). Počítám čas a ověřuji hodinu a určuji rohy tvého chrámu ... . Obracím svou tvář k dráze hvězd. Můj zrak se nese k souhvězdí Medvěda(?). Tam stojí ukazatel času s hodinou. Určuji rohy tvého chrámu.*

[24] Egyptské znázornění souhvězdí hvězdné oblohy viz např. J. Chisholmová, A. Millardová: *Starověké civilizace. Školní encyklopedie*, Václav Svojtka & Co., Praha, 1998, z angl. přel. H. Kovaříková, L. Libovická, str. 65. Z doby Nové říše se zachovala nástropní malba hvězdné oblohy v Údolí králů v hrobce Sethiho I. (XIX. dynastie) a astronomický strop v předsíni Hathořina chrámu v Dendeře (až z doby Caligulovy), který hvězdnou oblohu zachycuje velmi podrobně. Zajímavý je též připojený soupis všech věcí, které stvořil bůh Ptah; začíná popisem hvězdné oblohy.





Astronomický strop z hrobky Sethiho I. (XIX. dynastie)
Astronomický strop z hrobky Ramesse VI. (XX. dynastie)

Při vytyčování přesného severo-jižního směru mohli Egypťané postupovat např. takto. Na vodorovné rovině vyznačili pevný bod S, ve kterém upevnili jednoduchý přístroj zvaný *baj*; byla to jakási vidlice s průzorem pro pozorování. V určité vzdálenosti vybudovali umělý kruhový horizont se středem S (např. zídka z cihel) nebo alespoň jeho severní část. Během noci sledoval pozorovatel průzorem přístroje *baj* hvězdy. Pro danou hvězdu, která byla nepříliš vzdálena od světového severního pólu, bylo třeba na umělém horizontu přesně zaznamenat místo A, kde tato hvězda pro pozorovatele nad umělý horizont „vyšla", a místo B kde „zapadla". Body A a B vyznačil na umělém horizontu pozorovatelův pomocník. Nyní stačilo určit střed C úsečky (nebo oblouku) AB; spojnice SC vymezila směr místního poledníku.

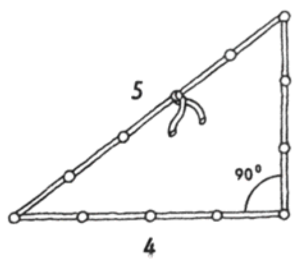
Je jasné, že takováto pozorování bylo možno bez problémů opakovat; i během jediné noci mohl pozorovatel sledovat několik hvězd a vymezení severo-jižního směru prověřovat či vylepšovat. Nelze asi souhlasit s astronomem B. Polákem, když říká:

Dá se celkem očekávat, že egyptští astronomové volili pro vytyčení směru poledníku hvězdu s nejpomalejším pohybem, která způsobí v určení směru nejmenší chybu. ([Po], str. 178)

Naopak byla asi sledována dostatečně jasná hvězda, která nebyla bezprostředně blízko pólu; její pohyb je rychlejší.

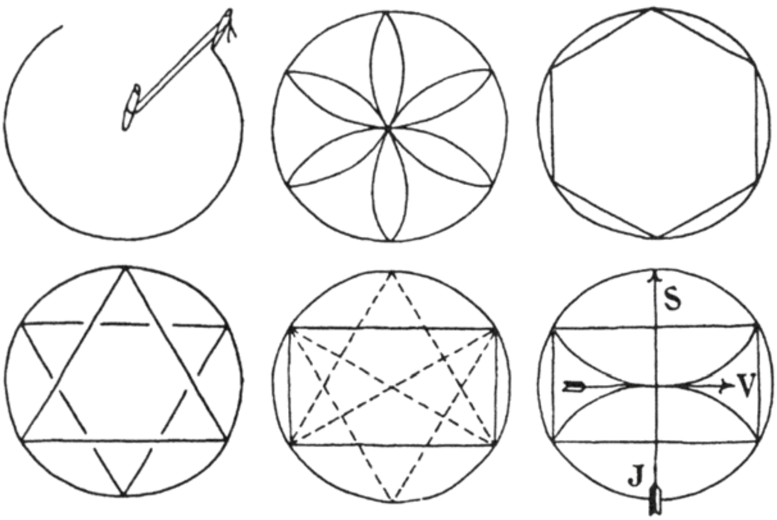
Je velmi pravděpodobné, že během slavnostního obřadu vlastní přesné vytyčování půdorysu pyramidy nebo chrámu prováděno nebylo. Pozornost účastníků byla totiž obrácena spíše k ceremoniím obřadu než k přesnosti měření. Skutečné vytýčení místního poledníku, „rohů chrámu" a dalších důležitých bodů bylo patrně pečlivými a důmyslnými postupy provedeno nezávisle na obřadu (dříve nebo později) a panovník snad jen předváděl zjednodušený postup vytýčení chrámu. Z těchto důvodů je možno se domnívat, že přesnosti orientace staveb mohlo být dosaženo i kombinací denního pozorování slunečního stínu (pomocí gnomonu) a nočního pozorování hvězd. Přesnosti orientace staveb mohlo být dosaženo vyhodnocením většího počtu měření.

Po přesném vytýčení severo-jižního směru, tj. po zakreslení místního poledníku, následovalo rozkreslení půdorysu stavby.



Často se uvádí, že pravý úhel vytyčovali staří Egypťané pomocí smyčky provazce rozdělené dvanácti uzly na dvanáct stejných dílů (*egyptská šňůra*); napnutím smyčky bylo možno vyznačit pravoúhlý trojúhelník s délkami stran v poměru 3 : 4 : 5 (nejznámější pýthagorejský trojúhelník). Někteří badatelé soudí, že takto vytvořený pravý úhel nemohl být příliš přesný.

Pravý úhel byl patrně vytyčován i jinak. Snad byla použita poměrně přesná klasická konstrukce šestiúhelníka, kterou je možno snadno provést pomocí dvou kolíků a provazu se dvěma očky. Uvědomme si, že dvě protilehlé dvojice sousedních vrcholů šestiúhelníka vymezují obdélník a spojnice zbývajících dvou vrcholů šestiúhelníka je kolmá na delší strany tohoto obdélníka (viz následující obrázek). Je velmi pravděpodobné, že staří Egypťané ovládali nejjednodušší principy geometrických konstrukcí; nebyl pro ně patrně problém sestrojit kružnici, rovnostranný trojúhelník, pravidelný šestiúhelník, čtverec, obdélník, osu úsečky, osu úhlu, kolmice, rovnoběžky apod.

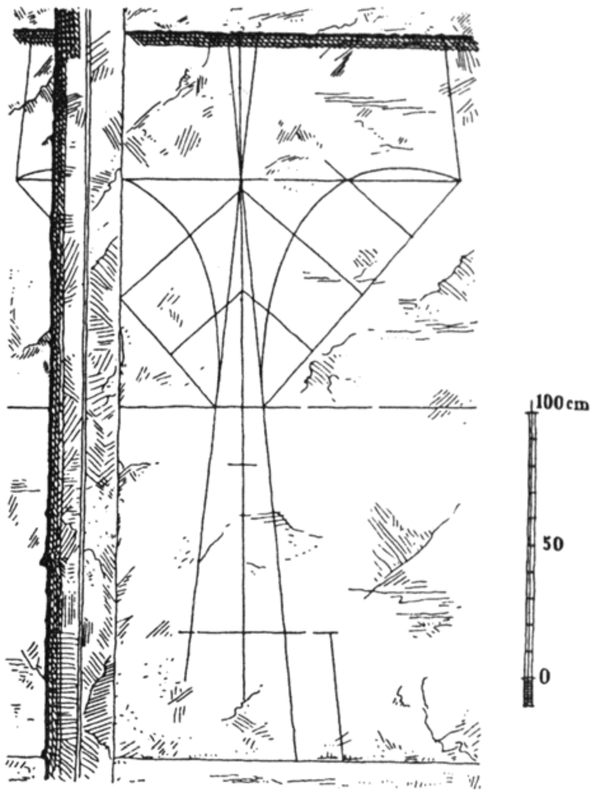


Při stavbě chrámu byl tedy na vodorovné ploše připravené pro stavbu vyznačen místní poledník. Z jednoho jeho bodu byla opsána kružnice a z jejích průsečíků s poledníkem byly stejným poloměrem opsány oblouky. Tím byly získány vrcholy obdélníkového půdorysu chrámu („rohy“ chrámu). Délky stran takto získaného obdélníka jsou v poměru $1 : \sqrt{3}$. Uvádí se, že tento poměr délek základního obdélníka je možno u řady egyptských chrámů nalézt.

Při vytyčování půdorysu pyramid byl patrně po vyznačení místního poledníku ještě narýsován kolmý směr východo-západní a vzniklé pravé úhly rozpůleny. Tak byly na základní kružnici vyznačeny vrcholy čtverce, který pyramidu vymezoval, tj. půdorys pyramidy.

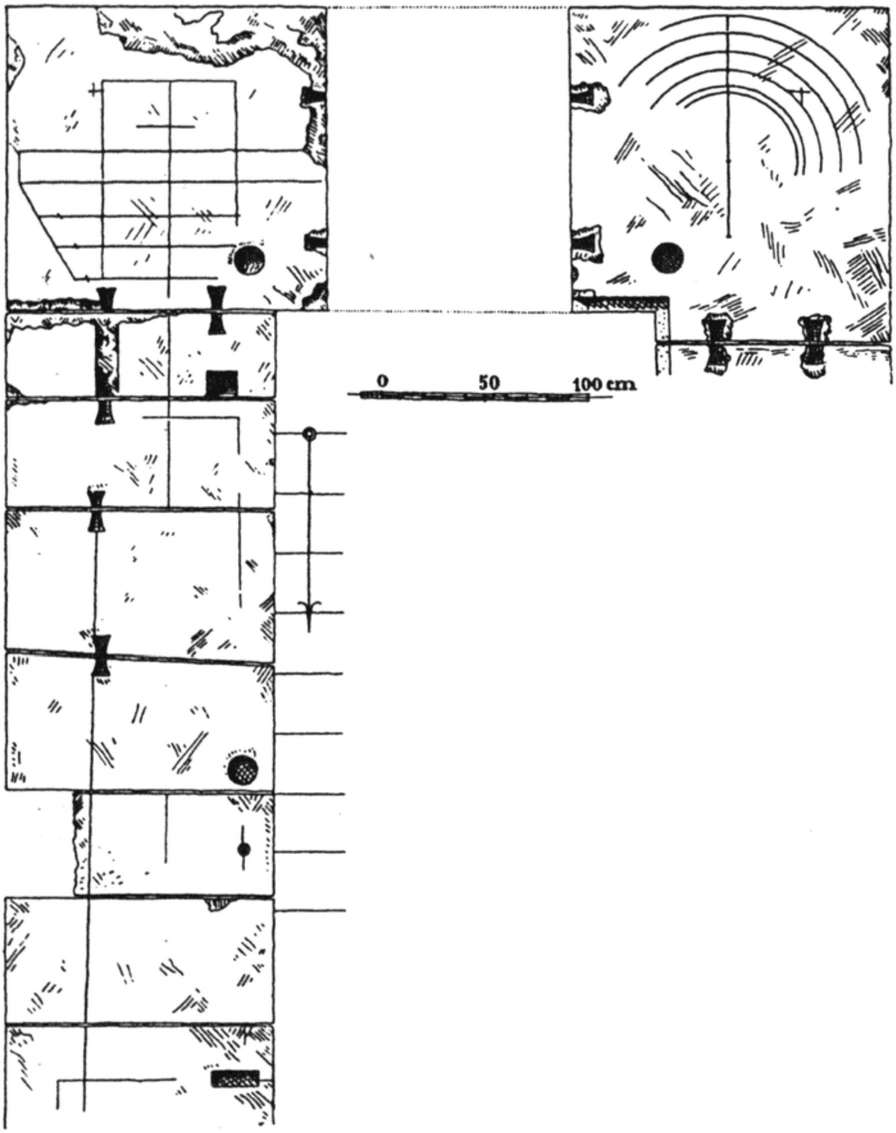
Zobrazování.

Kromě půdorysů rýsovali staří Egypťané v řadě situací nárysy i bokorysy. Např. v Edfu se dochoval nákres řezu římsy pylonu (vstupní chrámová věž) velký asi 2,5 metru (viz následující obrázek). Je sice až z Pozdní doby, ale uvedené postupy byly jistě užívány po dlouhá staletí.

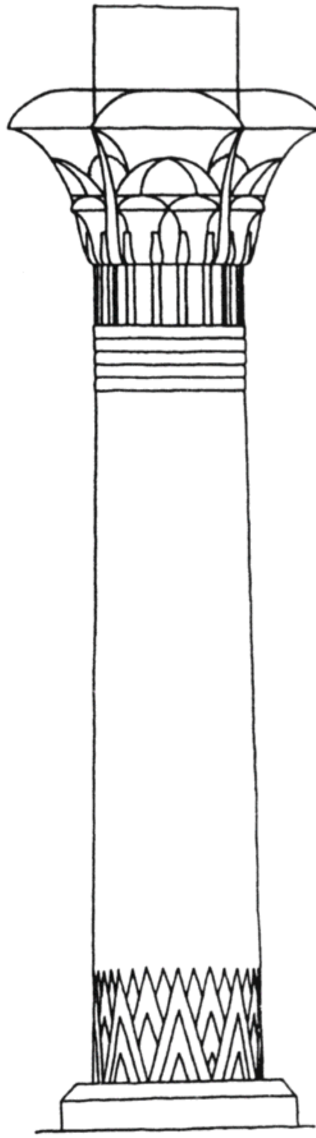


Že Egypťané znali půdorysy a nárysy, to máme doloženo nálezem prof. L. Borchardta. Na východním pylonu Isidina chrámu na ostrově Phile je řada ryh, as dva milimetry hlubokých a při západu slunce dobře viditelných. Částečně jsou poškozeny, ježto pylon sloužil dlouho jako vyhlídková věž. Po přesném vynesení těchto ryh do nákresu … shledal Borchardt, že je tu zachován nárys nebo osový řez sloupu a příslušný k němu půdorys ve skutečné velikosti. V nárysu je mimo to ještě stanoven přesný tvar hlavice ryskami, které protínají rovnoběžky, kolmé k ose sloupu. V obraze jsou zakresleny jednotlivé kameny, otvory ve tvaru dvojité rybiny pro hmoždinky, to jest pro kovové spojky, jimiž byly kdysi kameny mezi sebou spojeny. Dále jsou v obraze vyznačeny kruhové otvory pro tyče, na nichž bývaly zavěšovány plachty proti slunci, a konečně i rýha pro padací dveře, jimiž býval nad schody pylon uzavírán. Vznik tohoto rysu klade prof. Borchardt do let kolem 150 př. Kr. Mimo dobové určení podařilo se mu i v blízkém chrámu Hathořině najíti sloup …, který velikostí i tvarem zcela se shoduje s touto rytinou. Sloup jest přes pět metrů vysoký. Není bez zajímavosti, že se zvyk rýsovati části kružeb ve skutečné velikosti na podlahách choru vyskýtal i při gotických katedrálách.[25] (Viz následující dva obrázky.)

[25] [Ka], str. 10–12.



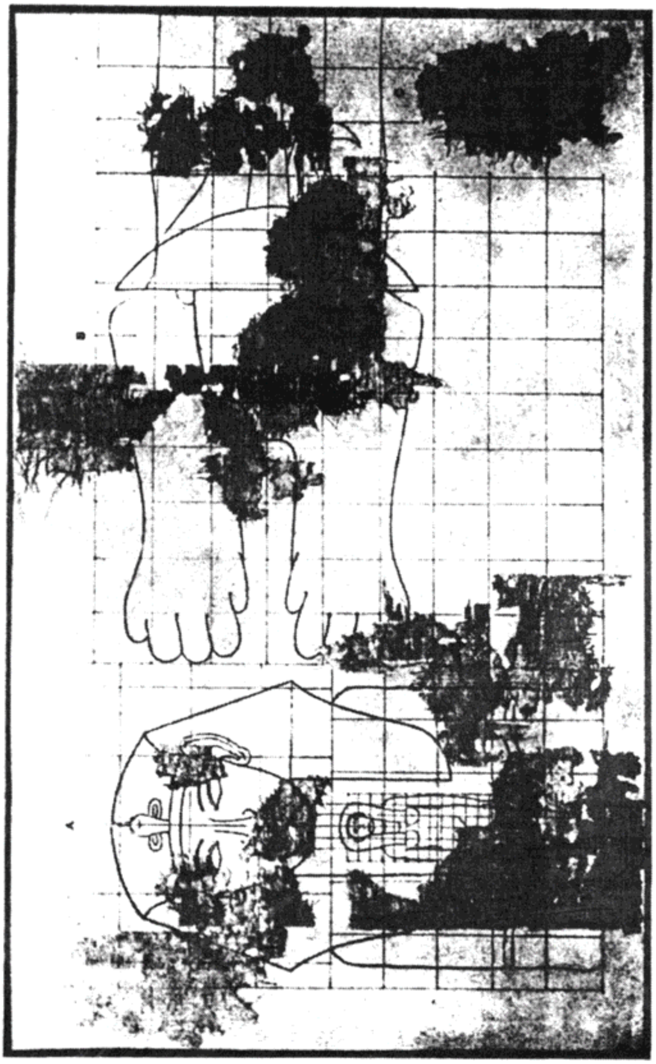
Půdorys a nárys sloupu z ostrova Fílé



Sloup z Hathořina chrámu na ostrově Fílé

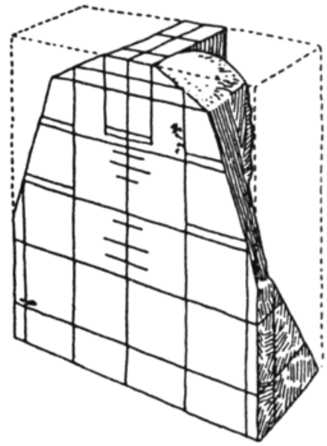
Pro rozkreslování rysů, zvětšování a zmenšování v daném měřítku byla v Egyptě s úspěchem užívána čtvercová síť. Půdorysy, nárysy i bokorysy byly často ve čtvercových sítích rozpracovávány.

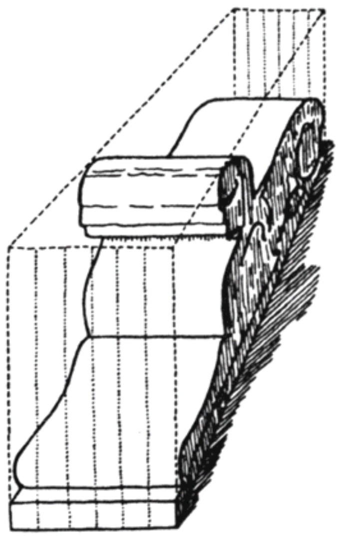
I tento způsob znali staří Egypťané, jak ukazuje papyrus ..., chovaný nyní v Berlíně. Na tomto značně poškozeném papyru shledal prof. L. Borchardt půdorys, nárys a stranorys sfingy, vesměs vypracované v přesných čtvercových sítích. Doba jeho vzniku klade se do doby řecko-římské (330 před Kr. – 390 po Kr.).[26] (Viz následující obrázek.)



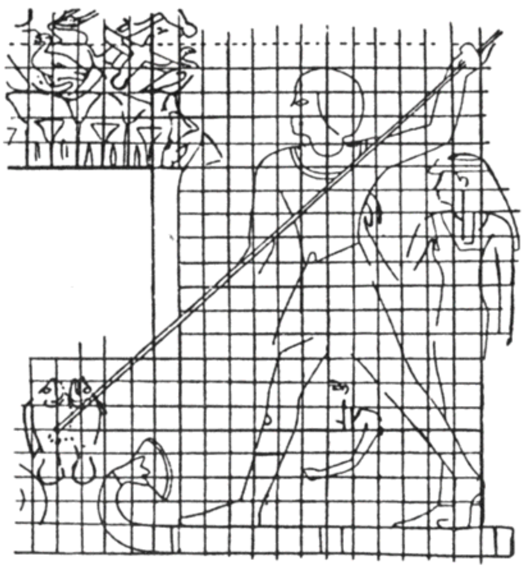
[26] [Ka], str. 12–14.

I při sochařských pracích byly půdorysy, nárysy a bokorysy úspěšně využívány. Na jednotlivé stěny kvádru byly pečlivě vyneseny půdorys, oba nárysy a bokorysy, přebytečný materiál byl postupně odsekáván. Teprve po hrubém odstranění tohoto materiálu začala skutečná umělecká práce, kdy byla socha postupně tvarována. O tom, že tyto postupy byly skutečně užívány, svědčí některé nedokončené sochy, např. královská hlava z Pozdní doby; postup prací je naznačen i na obrázcích kvádru, ze kterého byla tesána sfinga (viz následující obrázky).

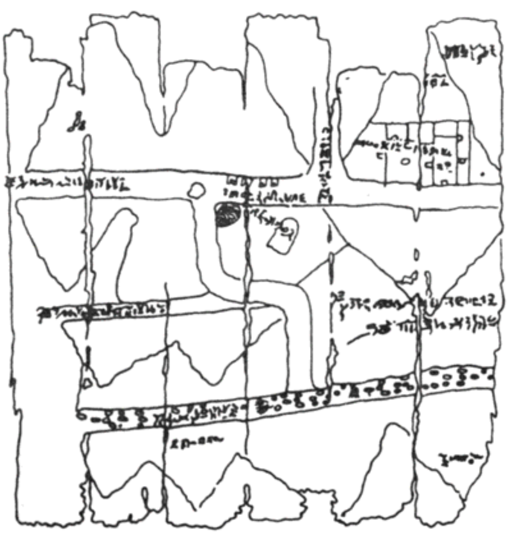




Jak již bylo uvedeno, Egypťané využívali při vytváření obrazové výzdoby chrámů a hrobek a při tvorbě reliéfů čtvercovou síť. Dokumentuje to např. nedokončená malba lovu ryb kopím na následujícím obrázku.[27]

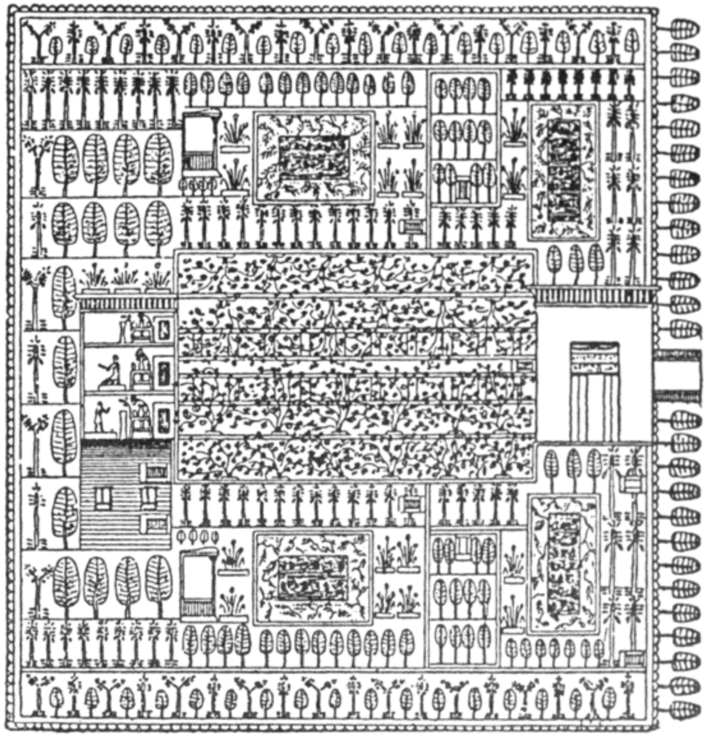


Egypťané kreslili i mapy a plány. Ze 13. století př. Kr. se dochovala barevná mapa horského údolí Wádí Hammámátu; jde patrně o nejstarší egyptskou mapu:

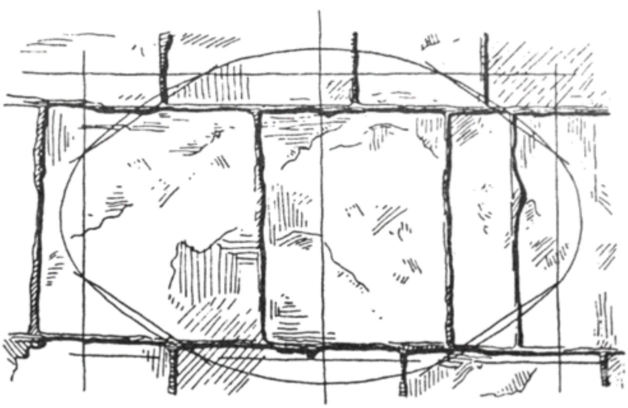


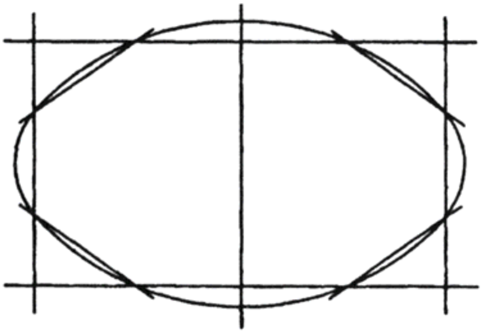
[27] Jde o jeden z návrhů nástěnných maleb ze Suemnutova hrobu z 15. stol. př. Kr.; viz [Ka], str. 58–59.

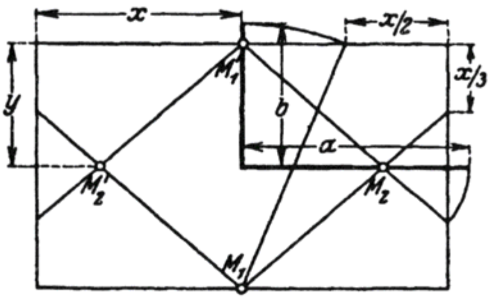
Velmi zajímavé je rovněž znázornění velké zahrady s domem a čtyřmi vodními nádržemi.



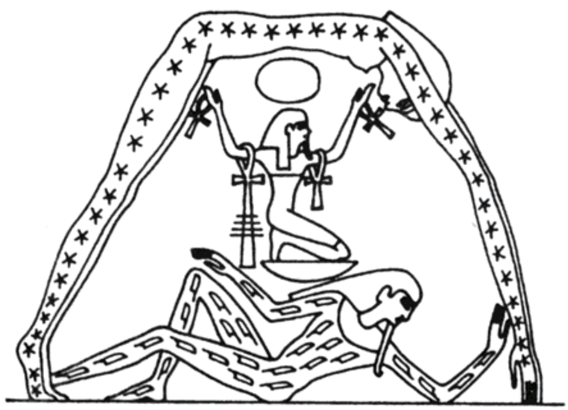
Poznamenejme pro zajímavost, že se na jedné chrámové stěně v Luxoru dochovala konstrukce oválu s hlavní osou delší než 1,5 metru. Pochází patrně z doby Ramesse III. (XX. dynastie) z 12. století př. Kr. Na následujících obrázcích je znázorněn jednak ovál z Luxoru, jednak jeho konstrukce.







Poznamenejme na závěr, že řadu poznatků o egyptském zeměměřictví a stavitelství, o využívání astronomických poznatků, o měření času, hodinách a dalších přístrojích nalezneme např. v pracích [Bo4], [Bo5], [Bo6], [Bo7], [Bo8], [CE], [Ed], [Pet3], [Vet3], [Gan], [Bu], [HP], [HŠ], [Chi], [Ka], [Kl], [Lum], [Ly], [MP], [Ne8], [Po], [RS] a [Slo].



Bohyně nebeské klenby Nut, její otec Šov a její bratr a manžel – bůh země Geb

ČÍSELNÁ MYSTIKA.

Ve starém Egyptě se postupně rozvinula číselná mystika, patrně byla ovlivněna sledováním pohybů nebeských těles a měřením času. Víme již, že egyptský rok měl $360 + 5$ dnů, dělil se na 3 období po 4 měsících, které měly po 30 dnech, měsíce se ještě dělily na 3 desetidenní „týdny". Astronomický den měl 2 části (den a noc), den měl 3 části, ráno, poledne a večer; den i noc se rovněž dělily na 12 hodin. Měsíční fáze, které se střídají po 7 dnech, „upozorňovaly" na význam čísla 7.

Číslo jedna vyjadřovalo jedinečnost (boha, slunce, ...).

Číslo dvě představovalo základní vazby (bůh a bohyně, muž a žena, Slunce a Měsíc, den a noc, Horní a Dolní Egypt atd.).

Trojka reprezentuje božské trojice, rodiče s dítětem, tři části dne atd.

Čtyřka je spjata se čtyřmi světovými stranami a s obřady s nimi spjatými, rovněž se čtyřmi syny boha Hora apod.

Kult pětky patrně souvisel s počtem planet a s tím, že pět epagomenálních dnů bylo přidáváno k základní délce roku. Poznamenejme ještě, že hvězdy byly v Egyptě znázorňovány pěticípé.

Oblíbeným číslem byla sedmička a její násobky (viz též příklad **R79**). Poměrně často se některé božstvo objevovalo „ve svém sedminásobku" (sedm Reů, sedm Chnumů, sedm Hathor atd.). V egyptském podsvětí je 14 různých míst, vede tam 21 bran, záhrobních soudců je 42, balzamování trvá 70 dnů apod. Osud dítěte určovalo 7 sudiček. V základě kultu sedmičky bylo patrně sedmidenní střídání měsíčních fází.

Osmička se vyskytuje jako dvojnásobek čtyřky, osm prabohů jsou čtyři božské dvojice apod.

Devítka představuje zejména božské Devatero.

Délka lidského života bývala vymezována 60 lety, ideální život však měl trvat 110 let, případně „jen" 100 let.

Bohyně nebeské klenby Nut, její otec Šov a její bratr a manžel – bůh země Geb

ŘECKÁ SVĚDECTVÍ.

Egyptská matematika musela být na značně vysoké úrovni již v době staveb prvních pyramid, tj. v polovině třetího tisíciletí př. Kr. Přesto není nezajímavé uvést, co o matematických znalostech a schopnostech Egypťanů soudili Řekové zhruba o dvě nebo dvě a půl tisíciletí později.

Již v pátém století před Kristem soudili Řekové, že se geometrii naučili od Egypťanů, kteří jako první rozvinuli zeměměřictví. Např. Hérodotos napsal ve svých *Dějinách* o egyptském králi Sesóstrisovi toto:

Tento král prý rozdělil půdu mezi všechny Egypťany a každému přidělil stejně velký čtverhranný díl; podle toho pak určil daně a nařídil, aby byly odváděny ročně. Jestliže řeka někomu kus pozemku urvala, přišel ke králi a oznámil, co se stalo. Král poslal své lidi, aby věc zhlédli a vyměřili, o kolik se pozemek zmenšil, aby pak jeho majitel platil nařízenou daň úměrně podle zbylé výměry. Myslím, že tak vzniklo zeměměřičství a dostalo se do Řecka. ...[28]

Rovněž podle Prokla (asi 410 až 484) vznikla geometrie v Egyptě z ustavičné potřeby přeměřovat půdu po každoročních záplavách způsobených rozvodněným Nilem. Do Řecka prý přinesl geometrické znalosti Thalés Milétský (6. stol. př. Kr.), který jako jeden z prvních Řeků pokročil v abstraktním myšlení. Thalés prý v Egyptě zjišťoval výšku pyramid pomocí délky jejich stínů, k výpočtům využíval podobných trojúhelníků. Rozhodný krok učinil nedlouho po něm Pýthagorás, který začal matematiku budovat na „základních principech“.

Obdobné informace nacházíme u Aristotela (384–322),[29] Platóna (427–347) a dalších řeckých filozofů, u Diodóra Sicilského (asi 80 až 29), Strabóna z Pontu (asi 65 př. Kr. až 25 po Kr.) a Marca Honorata Servia.

Často se tvrdí, že egyptská matematika měla zcela praktický a konkrétní charakter a že teprve Řekové začali matematická tvrzení dokazovat. Odpůrci tohoto názoru se odvolávají na Démokrita (asi 460 až 370), který se zmiňuje o tom, že egyptští spojovači provazů, tzv. *harpedonapté*, ovládali umění důkazů:

Já jsem ze všech svých vrstevníků prošel největší část země, zkoumaje největší věci, spatřil jsem nejvíce podnebí a zemí, slyšel jsem nejvíce moudrých lidí a v skládání čar s důkazem mě ještě nikdo nepředstihl, ani takzvaní egyptští spojovači provazů. A s nimi jsem byl v cizině pět let, navštíviv je po všech ostatních učencích.[30]

Různé úvahy o stáří egyptské matematiky a o jejím vlivu na rozvoj matematiky řecké viz např. [Lu], [Re4] a [Ve].

---

[28] Hérodotos: *Dějiny ...*, Odeon, Praha, 1972, II.109, str. 134.

[29] *Tak matematické vědy byly sestaveny nejprve v Egyptě; tam totiž volný čas byl ponechán třídě kněží.* Aristotelés: *Metafysika I.*

[30] *Řečtí atomisté*, Svoboda, Praha, 1980, přeložil K. Svoboda; viz str. 74.

ČESKÝ PŘÍNOS.

Českou egyptologii založil František Lexa (1876–1960), který byl původně profesorem matematiky a fyziky na středních školách v Praze a Hradci Králové, později působil jako řádný profesor egyptologie na Karlově univerzitě, založil Československý egyptologický ústav. Je autorem prvních původních českých egyptologických prací. Zabýval se egyptskou literaturou, náboženstvím, magií, jazykem a reáliemi; viz např. [Le1] až [Le11]. Znalcem dějin Egypta, egyptských písemných památek a hieratického písma byl Lexův žák, český egyptolog Jaroslav Černý (1898–1970).

Žákem Lexy a Černého byl Zbyněk Žába (1917–1971), který byl rovněž světově uznávaným egyptologem, profesorem egyptologie na UK, spoluzakladatelem a ředitelem Československého egyptologického ústavu. Zabýval se egyptskými dějinami, filologií, astronomií, právem a literaturou. Viz [Ž1] až [Ž3].

Na práci těchto tří významných egyptologů velmi úspěšně navazuje současný Český egyptologický ústav UK.

Roku 1881 zveřejnil krátký článek o egyptské matematice František Josef Studnička (1836–1903), tehdejší profesor pražské univerzity; v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*, který redigoval, publikoval krátkou zprávu [Stu] o Rhindově papyru, který byl roku 1877 vydán Eisenlohrem. Studnička své informace čerpal z monografie *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* [Can] z roku 1880 od Moritze Cantora (1829–1920).

Český matematik Emil Weyr (1848–1894), který byl v letech 1875 až 1894 profesorem vídeňské univerzity, přednesl na půdě vídeňské akademie přednášku *O geometrii starých Egypťanů* [We]; publikována byla v Almanachu vídeňské akademie věd. Cantorův článek [Can2] je výňatkem z jeho dopisu Emilu Weyrovi; reagoval v něm totiž na Weyrův článek [We]. Poznamenejme, že práci [We] cituje D. P. Tsinserling ještě roku 1925.

Egyptskou matematikou se později zabýval český historik matematiky Quido Vetter (1881–1960), autor článků [Vet2] až [Vet6]. V půvabné knížce [Vet1] z roku 1926 věnoval egyptské matematice velkou pozornost. Roku 1925 publikoval v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* recenzi Peetova překladu Rhindova papyru z roku 1923.

Weyrova publikace, Studničkův krátký článek i zmíněné Vetterovy práce jsou připomenuty v Archibaldově bibliografickém přehledu v monografii [Ch]. Dva Vetterovy články jsou citovány i v Gillainově monografii *La Science Égyptienne* [Gil] z roku 1927.

V posledních letech se rozvíjí spolupráce mezi matematiky a egyptology na UK v Praze. Hana Vymazalová se zabývala egyptskou matematikou ve své magisterské práci [Vym1] z oboru Egyptologie. Na ni navazují další odborné studie a přednášky a vychází z ní i připravovaná publikace podrobně komentovaných překladů všech dostupných textů, jež by měla vyjít jako jeden ze svazků edice Dějiny matematiky.

LITERATURA

Rhindův papyrus

[E] Eisenlohr A., *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt von A. Eisenlohr*, J. C. Hinrichs' Buchhandlung, Leipzig, 1877, zweite Ausgabe (Ohne Tafeln), Leipzig, 1891; Repr. Sandig. Wiesbaden, 1972.

[P] Peet T. E., *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Introduction, Transcription, Translation and Commentary*, The Univ. Press of Liverpool Limited, Hodder and Stoughton Limited, London, 1923, Repr. Brill, Leiden, 1977.

[Ch] Chace A. B., Bull L. S., Manning H. P., *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Photographic Facsimile, Hieroglyphic Transcription, Transliteration, Literal Translation, Free Translation, Mathematical Commentary, and Bibliography*, Vol. I, II, Mathematical Association of America, Oberlin, Ohio, U. S. A., 1927 – 1929, repr. 1979; připojeny soupisy R. C. Archibald: *Bibliography of Egyptian Mathematics, Bibliography of Egyptian and Babylonian Mathematics* a krátká informace S. R. K. Glanville: *The Mathematical Leather Roll in the British Museum* s fotografií.

[RS] Robins G., Shute Ch., *The Rhind Mathematical Papyrus, an Ancient Egyptian Text an Ancient Egyptian Text*, The Trustees of the British Museum, British Museum Press, London, 1987, repr. 1990, 1998.

[WB] Walls Budge E. A. (ed.), *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus in the British Museum*, British Museum, Department of Egyptian and Assyrian Antiquities, London, 1898.

Moskevský papyrus

[S] Struve W. W., *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau*, herausgegeben und kommentiert von W. W. Struve unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turajeff, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A, Band 1, J. Springer, Berlin, 1930.

Káhúnské papyry

[Gr] Griffith F. L., *The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gurob (Principally of the Middle Kingdom)*, Vol. 1, 2, Bernard Quaritch, London, 1898.

Dřevěné tabulky

[D1] Daressy G., *Catalogue Général des Antiquités égyptiennes du Musée du Caire, Ostraca*, Le Caire Imprimerie de l'Institut Francais d'Archeologie Orientale, 1901, strany 95–96.

[D2] Daressy G., *Calculs égyptiens du Moyen-Empire*, Recueil de Travaux relatifs à la Philologie et à l'Archéologie égyptiennes et assyriennes, Nouvelle série **12** (1906), 62–72.

Berlínský papyrus

[S1] Schack-Schackenburg H., *Der Berliner Papyrus 6619*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **38** (1900), 135–140.

[S2] Schack-Schackenburg H., *Das kleinere Fragment des Berliner Papyrus 6619*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **40** (1902), 65–66.

Kožený svitek

[Gl] Glanville S. R. K., *The Mathematical Leather Roll in the British Museum*, Journal of Egyptian Archaeology **13** (1927), 232–239.

Papyrus Anastasi I

[G] Gardiner A. H. (ed.), *Egyptian Hieratic Texts Transcribed, Translated and Annotated by .... Series I: Literary Texts of the New Kingdom. Part I The Papyrus Anastasi I and the Papyrus Koller together with the parallel texts,*, Hinrichs, Leipzig, 1911.

[Cam] Caminos R. A., *A Fragmentary Duplicate of Papyrus Anastasi I in the Turin Museum*, The Journal of Egyptian Archaeology **44** (1958), 3–4.

Matematika ve starém Egyptě

[Aa] Aaboe A., *Episodes from the Early History of Mathematics*, New Mathematical Library, Vol. 13, Mathematical Association of America, Random House, New York, Toronto, 1964.

[BH] Becker O., Hofmann J. E., *Geschichte der Mathematik*, Athenäum-Verlag, Bonn, 1951.

[Bir] Birch S., *Geometric Papyrus*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **6** (1868), 108–110.

[Bob] Bobynin V. V., *Matematika drevnich egiptjan*, Moskva, 1882.

[Boe] Boev G. P., *Vyčislenie poverchnostej i ob'emov tel vraščenija u drevnich egiptjan*, Vestnik drevnej istorii **3** (33), 1950, 196–201.

[BHP] Bönning A., Hilton P., Pedersen J., *Writing a Rational Number in Egyptian Form*, The Mathematical Gazette **86** (2002), N. 86, 432–436.

[Bo1] Borchardt L., *Wie wurden die Böschungen der Pyramiden bestimmt?*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **31** (1893), 9–17.

[Bo2] Borchardt L., *Der Inhalt der Halbkugel nach einem Papyrusfragment des mittleren Reiches*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **35** (1897), 150–152.

[Bo3] Borchardt L., *Besoldungsverhältnisse von Priestern im mittleren Reich*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **40** (1902/03), 113–117.

[Bo4] Borchardt L., *Längen und Richtungen der vier Grundkanten der grossen Pyramide bei Gise*, Berlin, 1926.

[Bo5] Borchardt L., *Altägyptische Sonnenuhren*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **48** (1910), 9–17.

[Bo6] Borchardt L., *Ein altägyptisches astronomisches Instrument*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **37** (1899), 10–17.

[Bo7] Borchardt L., *Altägyptische Werkzeichnungen*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **34** (1896), 69–76.

[Bo8] Borchardt L., *Die Entstehung der Pyramide, an der Baugeschichte der Pyramide bei Mejdum nachgewiesen*, Berlin, 1928.

[Bor] Bortolotti E., *La scienza algebrica degli egiziani e dei babilonesi*, Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ser. IX **2** (1934–1935), 184–232, 390–452.

[BS] Bruckheimer M., Salomon Y., *Some Comments on R. J. Gillings Analysis of the 2/n Table in the Rhind Papyrus*, Historia Mathematica **4** (1977), 445–452.

[Br] Brugsch H., *Ueber den mathematischen Papyrus im britischen Museum zu London*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **12** (1874), 147–149.

[Bru] Bruins E. M., *The Part in Ancient Egyptian Mathematics*, Centaurus **19** (1975), 241–251.

[Bu] Butler H. R., *Egyptian Pyramid Geometry*, Mississauga, 1998.

[Ca] Calice F., *Zur Böschungsbestimmung im Pap. Rhind*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **40** (1902/03), 147.

[Can1] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I*, Leipzig, 1880, 2. vyd. 1894, 3. vyd. 1907, 4. vyd. 1922, repr. Johnson Reprint, New York, 1965.

[Can2] Cantor M., *Über die sogenannten Seqt der ägyptischen Mathematiker*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Abth. II, Vienna **90** (1884), 475–477.

[Cas] Cassina M., *Sulla geometria egiziana*, Period. di Math. 4. seria **22** (1942), 1–39.

[Cl] Clagett M., *Ancient Egyptian Science, Vol. 1, Knowledge and Order, Vol. 2, Calendars, Clocks, and Astronomy*, American Philosophical Society, Independence Square, Philadelphia, 1989, 1995.

[CE] Clarke S., Engelbach R., *Ancient Egyptian Construction and Architecture*, New York, 1930.

[Co] Cooke R., *The History of Mathematics. A Brief Course*, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 1997.

[Coo] Coolidge J. L., *A History of Geometrical Methods*, Oxford, 1940.

[Ed] Edwards I. E. S., *The Pyramids of Egypt*, Penguin Ed., London, 1947, nové vyd. Harmondsworth, Penguin Books, 1972, 1993; polsky 1995.

[En] Engels H., *Quadrature of the Circle in Ancient Egypt*, Historia Mathematica **4** (1977), 137–140.

[Gan] Gandz S., *Die Harpedonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Band 1, J. Springer, Berlin, 1931, 255–277.

[Gar1] Gardiner A. H., *Egyptian Grammar being an Introduction to the Study of Hieroglyphs*, 1. vyd., Clarendon Press, Oxford, 1927, 3. vyd., Oxford Univ. Press, 1957; další vyd. 1976; též Griffith Institut, Oxford, 1982.

[Gar2] Gardiner A., *Egypt of the Pharaohs*, Oxford University Press, London, 1974, dřívější vyd. 1961, 1964, 1972.

[Ger] Gerdes P., *Three Alternate Methods of Obtaining the Ancient Egyptian Formula for the Area of a Circle*, Historia Mathematica **12** (1985), 261–268.

[GeH] Gericke H., *Mathematik in Antike und Orient*, Wiesbaden, Fourier Verlag, 1992, 3. vyd. 1994; dřívější vyd. Springer-Verlag, 1984, 1990.

[Gil] Gillain O., *La Science Égyptienne. L'Arithmétique au Moyen Empire*, Bruxelles, Édition de la Fondation Égyptologique, Reine Élisabeth, 1927.

[Gi1] Gillings R. J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Cambridge, Massachusetts, and London, MIT Press, 1972, Repr. Dover, 1982.

[Gi2] Gillings R. J., *The Volume of a Truncated Pyramid in Ancient Egyptian Papyri*, The Mathematics Teacher **57** (1964), 552–555.

[Gi3] Gillings R. J., *The Addition of Egyptian Unit Fractions*, The Journal of Egyptian Archaeology **51** (1965), 95–106.

[Gi4] Gillings R. J., *The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus. How Did the Ancient Egyptian Scribe Prepare It?*, Archive for History of Exact Sciences **12** (1974), 291–298.

[Gi5] Gillings R. J., *The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus and the Egyptian Mathematical Leather Roll*, Historia Mathematica **6** (1979), 442–447.

[Gi6] Gillings R. J., *What is the Relation between the EMLR and the RMP Recto?*, Archive for History of Exact Sciences **14** (1974/75), 159–167.

[Gi7] Gillings R. J., *The Egyptian 2/3 Table for Fractions. The Rhind Mathematical Papyrus (B.M. 10057-8)*, The Australian Journal of Science **22** (1959), 247–250.

[Gi8] Gillings R. J., *The Egyptian Mathematical Leather Role - Line 8. How Did the Scribe Do it ?*, Historia Mathematica **8** (1981), 456–457.

[Gre] Greaves J., *Pyramidographia*, London, 1946.

[Gug] Guggenbuhl L., *The New York Fragments of the Rhind Mathematical Papyrus Papyri*, The Mathematics Teacher **57** (1964), 406–410.

[Gui] Guitel G., *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, Paris, 1975.

[Gun] Gunn B., *Review of "The Rhind Mathematical Papyrus" by T. E. Peet*, The Journal of Egyptian Archaeology **12** (1926), 123–137.

[GP] Gunn B., Peet T. E., *Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus*, The Journal of Egyptian Archaeology **15** (1929), 167–185.

[Ha] Hankel H., *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874.

[Har] Harris J. R., *The Legacy of Egypt*, 2. vyd., Clarendon Press, Oxford, 1971.

[HP] Honl I., Procházka E., *Úvod do dějin zeměměřictví I. Starověk*, Ediční středisko ČVUT, Praha, 1981.

[Ho] Honl I., *Několik poznámek o zeměměřictví ve starověkém Egyptě*, Kartografický přehled **8** (1954), 93–101.

[HŠ] Hons J., Šimák B., *Pojďte s námi měřit zeměkouli*, Nakl. Dr. K. Kolářová, Praha II., Praha, 1942.

[HO] Helc W., Otto E., *Lexikon der Ägyptologie I – VI*, O. Harrassowitz, Wiesbaden, 1975, 1977, 1980, 1982, 1984, 1986.

[Chi] Childe G. V., *Člověk svým tvůrcem*, Svoboda, Praha, 1949, z angl. originálu *Man Makes Himself* přel. J. Schránilová.

[Ja] Janovskaja S. A., *K teorii egipetskich drobej*, Trudy Instituta istorii estestvoznanija **1** (1947), 269–282.

[Jun] Junker H., *Nachtrag. Die sechs Teile des Horusauges und der „sechste Tag"*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **48** (1910), 101–106.

[Jü] Jürss F. (red.), *Geschichte des wissenschaftlichen Denkens im Altertum*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[J] Juškevič A. P., *Istorija matematiki I*, Nauka, Moskva, 1970.

[Ka] Kadeřávek F., *Geometrie a umění v dobách minulých*, 2. vyd., Praha, 1994, první vyd.: J. Štenc, Praha, 1935; ke 2. vyd. jsou připojeny Daferovy *Poznámky* z roku 1935.

[Kl] Kleppisch K., *Die Cheopspyramide*, München, 1921.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[Kn] Knorr W., *Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece*, Historia Mathematica **9** (1982), 133–171.

[Le10] Lexa F., *O staroegyptských měrách délkových a plošných*, Zeměměřičský Věstník **15** (1927), 14–22, 36–39.

[Le11] Lexa F., *Deux notes sur l'astronomie des anciens Égyptiens*, Archiv orientální **18** (1950, č. 3), 442–450.

[Lum] Lumpkin B., *Note: The Egyptians and Pythagorean Triples*, Historia Mathematica **7** (1980), 186–187.

[Lun] Lüneburg H., *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992, 2. vyd. 1993.

[Lu] Lur'e S. Ja., *K voprosu o egipetskom vlijanii na grečeskuju geometriju*, Trudy instituta istorii nauki i techniki, ser. 1, **1** (1933), 45–70.

[Ly] Lyons H., *Two Notes on Land-measurement in Egypt*, The Journal of Egyptian Archaeology **12** (1926), 242–244.

[Me] Messerly O., *Le cadastre sous les pharaons*, Journal des Géomètres Experts et Topographes Français **84** (1923), 314–323.

[Mö] Möller G., *Die Zeichen für die Bruchteile des Hohlmaßes und das Uzatauge*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **48** (1910), 99–101.

[Ne1] Neugebauer O., *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, J. Springer, Berlin, 1926.

[Ne2] Neugebauer O., *Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter.*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Band 1, J. Springer, Berlin, 1931, 301–380.

[Ne3] Neugebauer O., *Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Band 1, J. Springer, Berlin, 1931, 413–451.

[Ne4] Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, E. Munksgaard, Copenhagen, 1951, Princeton, Princeton Univ. Press, 1951; 1952; 2. vyd. Brown University Press, Providence, Rhode Island, 1957; New York, Harper & Row, 1962; Dover, New York, 1969; ruský překlad: *Točnye nauki v drevnosti*, Nauka, Moskva, 1968; italský překlad: *Le scienze esatte nell'antichità*, Milano, 1974.

[Ne5] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, I. Vorgriechische Mathematik*, 1. vyd. Berlin, 1934, 2. vyd., Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[Ne6] Neugebauer O., *Über den Scheffel und seine Teile*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **65** (1930), 42–48.

[Ne7] Neugebauer O., *Zur ägyptischen Bruchrechnung*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **64** (1929), 44–48.

[Ne8] Neugebauer O., *On the orientation of Pyramids*, Centaurus **24** (1980), 1–3.

[NP] Neugebauer O., Parker R. A., *Egyptian Astronomical Texts. I. The Early Decans, II. The Ramesside Star Clocks, III. Decans, Planets, Constellations and Zodiacs. Plates, III. Decans, Planets, Constellations and Zodiacs. Text*, Brown Egyptological Studies III., V., VI., Brown University Press, Providence, Rhode Island, Lund Humphries, London, 1960–1969.

[Ni] Nims C. F., *The Bread and Beer Problems of the Moscow Mathematical Papyrus*, The Journal of Egyptian Archaeology **44** (1958), 56–65.

[Par1] Parker R. A., *Calendars and Chronology*, in J. R. Harris (ed.): *The Legacy of Egypt*, 2. vyd., Clarendon Press, Oxford, 1971, pp. 13–26.

[Par2] Parker R. A., *The Calendars of Ancient Egypt*, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1950.

[Par3] Parker R. A., *Demotic Mathematical Papyri*, Providence and London, 1972.

[Pe1] Peet T. E., *Arithmetic in the Middle Kingdom*, The Journal of Egyptian Archaeology **9** (1923), 91–95.

[Pe2] Peet T. E., *A Problem in Egyptian Geometry*, The Journal of Egyptian Archaeology **17** (1931), 100–106.

[Pe3] Peet T. E., *Notices of Recent Publications: „Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Von W. W. Struve"*, The Journal of Egyptian Archaeology **17** (1931), 154–160.

[Per] Perepelkin J. J., *Die Aufgabe Nr. 62 des mathematischen Papyrus Rhind*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Band I, J. Springer, Berlin, 1931, 108–112.

[Pet3] Petrie W. M. F., *The Pyramids and Temples of Gizeh*, London, 1883, nové vyd.: London, 1990.

[Po] Polák B., *Astronomická orientace egyptských chrámů a pyramid*, Říše hvězd **33** (1952), 150–155, 177–180, 209–223.

[Ra1] Raik A. E., *Novye rekonstrukcii nekotorych zadač iz drevneegipetskich i vavilonskich tekstov*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **11** (1958), 171–182.

[Ra2] Raik A. E., *Dve lekcii o egipetskoj i vavilonskoj matematike*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **12** (1959), 271–318.

[Ra3] Raik A. E., *K teorii egipetskich drobej*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **23** (1978), 181–191, 358.

[Ra4] Raik A. E., *Očerki po istorii matematiki v drevnosti*, Saransk, 1967.

[Ree] Rees C. S., *Egyptian Fractions*, Mathematical Chronicle **10** (1981), 13–30.

[Re1] Reineke W. F., *Mathematik und Gesellschaft im Alten Ägypten*, in Acts 1st ICE 1979, 543–552.

[Re2] Reineke W. F., *Ägyptische Geschichte, Mathematik, Astronomie, ...*, in F. Jürss a kol.: *Geschichte des wissenschaftlichen Denkens im Altertum*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[Re3] Reineke W. F., *Der Zusammenhang der altägyptischen Hohl- und Längenmasse*, MIO **9** (1963), 145–163.

[Re4] Reineke W. F., *Gedanken zur vermutlichen Alter der mathematischen Kenntnisse im Alten Ägypten*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **105** (1978), 67–76.

[Red] Redford D. B. (red.), *The Oxford Encyclopedia of Ancient Egypt*, Oxford University Press, 2001.

[RW] Resnikoff H. L., Wells R. O., Jr., *Mathematik im Wandel der Kulturen*, Braunschweig, Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1983, původní vyd. *Mathematics in Civilization*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973.

[Ris] Rising G. R., *The Egyptian Use of Unit Fractions for Equitable Distribution*, Historia Mathematica **1** (1974), 93–94.

[RS] Robins G., Shute Ch. C. D., *Mathematical Bases of Ancient Egyptian Architecture and Graphic Art*, Historia Mathematica **12** (1985), 107–122.

[Rob1] Robins G., *The 14 to 11 Proportion in Egyptian Architecture*, Discussion in Egyptology **16** (1990), 75–80.

[Rob2] Robins G., *Irrational Numbers and Pyramids*, Discussion in Egyptology **18** (1990), 43–53.

[Se1] Sethe K., *Das Zahlwort 10*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **34** (1896), 90.

[Se2] Sethe K., *Zum Zahlwort „hundert"*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **31** (1893), 112–113.

[Se3] Sethe K., *Untersuchungen über die ägyptischen Zahlwörter*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **47** (1910), 1–41.

[Se4] Sethe K., *Eine bisher unbeachtete Bildung für die Ordinalzahlworte im Neuägyptischen*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **38** (1900), 144–145.

[Se5] Sethe K., *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Ein Beitrag zur Geschichte von Rechenkunst und Sprache*, Schriften der wissenschaftlichen Gesellschaft Straßburg, 25. Heft, K. J. Trübner, Straßburg, 1916.

[S3] Schack-Schackenburg H., *Die angebliche Berechnung der Halbkugel*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **37** (1899), 78–79.

[S4] Schack-Schackenburg H., *Nr. 60 des Mathematischen Handbuchs*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **41** (1904), 77–78.

[S5] Schack-Schackenburg H., [*iw.i mḥ.kwi*], Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **41** (1904), 79–80.

[Si] Simpson W. K., *Papyrus Reisner I., II., III., IV. Transcription and Commentary*, Museum of Fine Arts, Boston, 1963–1969.

[Slo] Sloley R. W., *Primitive Methods of Measuring Time with Special Reference to Egypt*, The Journal of Egyptian Archaeology **17** (1931), 166–178.

[Sp] Spiegelberg W., *Beiträge zur Erklärung des Papyrus Anastasi I.*, Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **44** (1907), 118–125.

[Stu] Studnička F. J., *O nejstarším spisu mathematickém vůbec*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **10** (1881), 185–187.

[Th] Thomas W. R., *Moscow Mathematical Papyrus, No. 14*, The Journal of Egyptian Archaeology **17** (1931), 50–52.

[To] Toomer G. J., *Mathematics and Astronomy*, in J. R. Harris (ed.): *The Legacy of Egypt*, 2. vyd., Clarendon Press, Oxford, 1971, pp. 27–54.

[Ve] Veselovskij I. N., *Egipetskaja nauka i Grecija*, Trudy Instituta istorii estestvoznanija **2** (1948), 426–498.

[Vet1] Vetter Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Lidová universita, sv. XV., Melantrich, Praha, 1926.

[Vet2] Vetter Q., *Egyptské zlomky*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **52** (1923), 169–177, franc. resumé.

[Vet3] Vetter Q., *Poznámka k t. zv. trigonometrii Ahmōseově a k rozměrům pyramidy Chufuovy*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **54** (1925), 281–283, franc. resumé.

[Vet4] Vetter Q., *Egyptské dělení*, Věstník Královské české Společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká (Jahresberichte der königlichen-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Classe II) **52** (1921–1922, XIV), 1–25, franc. resumé.

[Vet5] Vetter Q., *Le progressioni aritematiche presso gli Egiziani*, Bolletino di Matematica, Sezione Storico-bibliografica (1923), 97–99.

[Vet6] Vetter Q., *Quelques remarques sur le papyrus mathématique no. 621 de la Michigan collection*, Classical Philology **20** (1925), 309–312.

[Vi] Vilenkin N. Ja., *O vyčislenii ob'ema usečennoj piramidy v drevnem Egipte*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **28** (1985), 123–125.

[Vo1] Vogel K., *The Truncated Pyramid in Egyptian Mathematics*, The Journal of Egyptian Archaeology **16** (1930), 242–249.

[Vo2] Vogel K., *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der 2:n-Tabelle des Papyrus Rhind*, München, 1929, repr. Sändig, Wiesbaden, 1970.

[Vo3] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik I, Vorgeschichte und Ägypten*, Schrödel, Hannover, 1958.

[Vyg] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, 2. vyd., Nauka, Moskva, 1967, 1. vyd. Moskva, Leningrad, 1941.

[Vym1] Vymazalová H., *Řešení matematických problémů v egyptských textech*, Diplomová práce (vedoucí M. Verner), Český egyptologický ústav, Praha, 2001.

[Vym2] Vymazalová H., *aHa-problems in Ancient Egyptian Mathematical Texts*, Archiv Orientální **69** (2001), 571–582.

[Vym3] Vymazalová H., *The Wooden Tablets from Cairo: the Use of the Grain Unit HqAt in Ancient Egypt*, Archiv Orientální **70** (2002), 27–42.

[Vym4] Vymazalová H., *Svitek písaře Ahmose. Rhindův papyrus a výuka matematiky ve starověkém Egyptě*, Pražské egyptologické studie **1** (2002), 197–206.

[Vym5] Vymazalová H., *Odraz úřednické praxe v úlohách Rhindova matematického papyru*, Pražské egyptologické studie **2** (2003), v tisku.

[Wae1] van der Waerden B. L., *Ontwakende Wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde*, P. Noordhoff N. V., Groningen, 1950, anglický překlad: *Science Awakening*, Noordhoff, Groningen, 1954; New York, 1963; Groningen, 1971; německý překlad: *Erwachende Wissenschaft*, Basel, Birkhäuser, 1968; ruský překlad: *Probuždajuščajasja nauka. Matematika drevnego Egipta, Vavilona i Grecii*, Moskva, 1959.

[Wae2] van der Waerden B. L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[Wae3] van der Waerden B. L., *Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Band 4, J. Springer, Berlin, 1937, 359–382.

[We] Weyr Em., *Über die Geometrie der alten Aegypter. Vortrag gehalten in der feierlichen Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften am XXIX. Mai, MDCCCLXXXIV*, Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Vienna **34** (1884), 213–247.

[Wi] Wieleitner H., *War die Wissenschaft der alten Aegypter wirklich nur praktisch?*, ISIS, International Review devoted to the History of Science and Civilization **9** (1927), N 29, 11–28.

[Wu] Wussing H., *Mathematik in der Antike*, 2. vyd., Leipzig, 1965.

[Zeu] Zeuthen H., ruský překlad: *Istorija matematiki v drevnosti i v srednie veka*, 2. vyd., Moskva, Leningrad, 1938.

[Ž3] Žába Z., *L'orientation astronomique dans l'ancienne Égypte et la précession de l'axe du monde*, ČSAV, Praha, 1953.