Jindřich Bečvář

Leonardo Pisánský - Fibonacci

In: Jindřich Bečvář (editor): Matematika ve středověké Evropě. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. pp. 264–339.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401789

Leonardo Pisánský – Fibonacci

(socha v Pise)

LEONARDO PISÁNSKÝ — FIBONACCI

JINDŘICH BEČVÁŘ

Leonarda Pisánského můžeme považovat za nejvýznamnějšího matematika středověké Evropy. Jeho dílo bylo překonáno až na přelomu středověku a novověku.

Přesné časové vymezení jeho života neznáme. Narodil se v Pise kolem roku 1170, jeho otec Guilielmo Bonacci byl městským úředníkem, písařem a notářem; v devadesátých letech 12. století pracoval v Bougii, jedné z obchodních kolonií Pisy v severní Africe, která dnes leží v Alžíru. Tam mladý Leonardo studoval; své znalosti si později rozšiřoval při cestách za obchodem ve Středomoří a v Orientu. Navštívil Egypt, Sýrii, Řecko, Byzanc, Sicílii, Provence a patrně i další města a země. Seznámil se nejen s počítáním na abaku, patrně Gerbertově, ale zejména s pracemi islámských matematiků, s některými výsledky řecké, egyptské a mezopotámské matematiky, inspiroval se však i dalšími matematickými pracemi, se kterými se během svých cest setkal. Kolem roku 1200 se vrátil do Pisy, která tehdy patřila mezi nejmocnější a nejbohatší italská města; rozvoj řemesel, podnikání a obchodu vyžadoval všeobecný nárůst vzdělanosti, mimo jiné i v počtářství (kupecké počty, úrokový počet, směšovací počet, převody měn, délkových a váhových jednotek atd.). Po návratu do Pisy Leonardo sepsal během čtvrtstoletí své matematické dílo.

Římským císařem byl tehdy Fridrich II., král Neapole a Sicílie.[1] Ačkoliv byl císařem Svaté říše římské, byl cele zaujat Itálií, opíral se o sicilské a jihoitalské državy. Obratnou politikou vytvořil z jižní Itálie centralizovaný stát, ve kterém uplatňoval své pozoruhodné myšlenky o vládě a uspořádání státu. Byl temperamentní a vládychtivý, nábožensky vlažný, křesťanské zásady kombinoval s východními prvky, ovlivněn byl východní filozofií. Obdivoval vzdělanost a kulturu, podporoval šíření vzdělanosti, arabských vědomostí, zajímal se i o matematiku; roku 1224 založil v Neapoli univerzitu. K okruhu jeho vzdělanců patřil Michael Scottus (1190– ?), který studoval v Paříži a ve Španělsku, cestoval po východních zemích a pak působil jako císařův astrolog a odborník na vzdělávání,[2] a Mistr Theodorus, císařův dvorní filozof. Ve styku s císařským dvorem byli rovněž filozof Mistr Joannes z Palerma a Mistr Dominicus.

---

[1] Fridrich II. z rodu Hohenstaufů (1194–1250), syn Jindřicha VI. a vnuk Fridricha I. Barbarossy, byl od r. 1212 německým králem a od r. 1215 římsko-německým císařem. Český král Přemysl Otakar I. (český kníže 1192–1193 a 1197–1198, český král 1198–1230) podpořil Fridricha II. vojensky i politicky. Dne 26. 9. 1212 od něho získal dědičný královský titul (*zlatá bula sicilská*); prestiž českého království tak byla výrazně posílena, svobody země potvrzeny a rozšířeny. O Fridrichovi II. viz [KE].

[2] Dante Alighieri (1265–1321) ho v *Božské komedii* vyhostil do Pekla (20. zpěv, 115–117): *Ten štíhlý v bocích, co se plouží tam,/ byl Michal Skot, ten hubený jak bidlo,/ ovládal dobře kouzelnický klam.* Přeložil V. Mikeš.

Začátkem dvacátých let měl císař svůj dvůr v Pise. Právě Mistr Dominicus představil císaři Leonarda, který již byl známým učencem. Krátce před rokem 1225 se Leonardo na císařském dvoře velmi úspěšně zúčastnil matematického turnaje; řešil úlohy, které mu zadal Joannes Palermský.

Roku 1240 získal Leonardo od města Pisy jakousi finanční podporu; to je poslední zpráva, kterou o něm máme.

Leonardo Pisánský je rovněž zván Fibonacci; toto jméno vzniklo podle některých badatelů zkrácením slovního spojení *filius Bonacci*, tj. syn Bonacciův; snad toto jméno uvedli v život až Guillaume Libri (1803–1869) a Baldassarre Boncompagni (1821–1894). Podle jiných názorů znamená označení Fibonacci jen příslušnost k širší rodině Bonacciů.

Fibonacci je autorem následujících matematických spisů.

1. *Liber abaci* (*Kniha o abaku*) z roku 1202, přepracována roku 1228.

Fibonacci toto dílo sepsal, jak sám uvádí, aby lidé dorozumívající se latinsky nebyli v nevědomosti o matematických metodách aritmetiky a algebry. Tento spis se však měl spíše jmenovat *Kniha o početním umění*; nepopisuje počítání na abaku, jak by název naznačoval, ale uvádí velké množství početních metod aritmetiky, algebry a teorie čísel a řadu demonstrujících příkladů.

Kniha je poměrně rozsáhlá, má 15 kapitol; obsahuje velké množství poznatků, metod a úloh, které Fibonacci převzal hlavně z arabských pramenů, připojeny jsou však i jeho původní výsledky, metody a úlohy. Kniha svou rozmanitostí, efektivností metod a bohatstvím materiálu, výkladem, úplností i hloubkou výrazně překonala úroveň aritmetických a algebraických spisů 12. až 14. století, ať už byly sepsány arabsky nebo latinsky.

Liber abaci bylo inspirativním dílem; úlohy i metody pocházející z tohoto spisu nacházíme v řadě rukopisů i knih následujících století, dokonce i v Eulerově *Algebře*, která vyšla rusky v letech 1768–1769 pod názvem *Universalnaja arifmetika* a německy roku 1770 jako *Anleitung zur Algebra.*

Zachovala se přepracovaná verze z roku 1228, která je věnována mistru Michaelu Scottovi.[3]

Tištěná verze *Liber abaci* byla vydána podle rukopisu *Codice Magliabechiano* C. I, 2616 *Badia Fiorentina* n.° 73 ze začátku 14. století, který má 213 listů popsaných z obou stran; v tištěném vydání [LP1-I] má *Liber abaci* 459 velkých stran. Po krátkém úvodu s věnováním je uveden obsah, tj. názvy všech 15 kapitol ([LP1-I], str. 1–2; viz ukázka).[4]

2. *Practica geometriae* (*Praxe geometrie*) z roku 1220 nebo 1221.

I tato kniha má poněkud matoucí název, neboť je nejen příručkou aplikací geometrie v zeměměřictví, ale zejména teoretickým dílem o geometrii a trigonometrii. Obsahuje věty i důkazy, ukazuje souvislosti aritmetiky, planimetrie a stereometrie, některé geometrické úlohy řeší algebraicky. Kniha má osm částí,

[3] Existuje třináct rukopisů *Liber abaci*, některé však nejsou kompletní.

[4] Ukázky z Fibonacciho díla jsou umístěny v závěru tohoto článku.

teprve v sedmé jsou vyloženy zeměměřické postupy, výpočty vzdáleností a výšek na základě měření kvadrantem.

Fibonacci tuto knihu věnoval mistru Dominikovi, na jehož popud byla sepsána. Zachovalo se devět rukopisů (jeden v Římě, dva v Paříži).

Tištěná verze Fibonacciho díla *Practica geometriae* byla vydána podle rukopisu *Codice Urbinate* n° 292 *della Biblioteca Vaticana*, který má 146 listů popsaných (kromě posledního) z obou stran; tištěná verze v [LP1-II] má 224 velkých stran. Po krátkém úvodním slovu je uveden obsah, tj. názvy všech osmi částí ([LP1-II], str. 1; viz ukázka).

3. *Flos* (*Květ*) z roku 1225.

Toto dílo bylo sepsáno pro císaře Fridricha II., na jehož dvoře Joannes Palermský zadal Fibonaccimu matematické problémy. Hlavním tématem práce je diskuse o kořenu jedné kubické rovnice s celočíselnými koeficienty.

4. *Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris* (*Dopis podepsaného Leonarda Mistru Theodorovi, císařskému filozofovi*), nedatováno.

Dopis je věnován diofantickým soustavám lineárních rovnic, které jsou řešeny v oboru přirozených čísel, a jednomu geometrickému problému.

5. *Liber quadratorum* (*Kniha čtverců*) z roku 1225.

Kniha je podstatně teoretičtější než *Liber abaci*. Obsahuje úlohy na neurčité kvadratické rovnice a jejich soustavy, které jsou řešeny v oboru racionálních čísel; dnes bychom toto dílo zařadili do teorie čísel.

Tištěné verze předchozích tří Fibonacciho spisů byly vydány podle rukopisu *Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano*, E. 75 *Parte Superiore*, který pochází z první poloviny 15. století; má 39 pergamenových listů velikosti $21,7 \times 14$ cm, které jsou popsány z obou stran. Jen poslední stránka končí osmým nekompletním řádkem a slovem *quadrato*. V tištěném vydání [LP1-II] najdeme tato tři díla na stranách 225–247, 247–252, 253–283.

Další verze *Liber quadratorum* (Codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze) je otištěna a komentována v [PE1].

Nezachovala se Fibonacciho kniha o obchodní aritmetice a jeho traktát o iracionalitách inspirovaný desátou knihou Eukleidových *Základů*, který patrně prezentoval Fibonacciho numerický přístup k iracionalitám.

Je zajímavé, že žádný Fibonacciho spis nebyl vydán po vynálezu knihtisku. Snad to bylo i tím, že jedním z prvních vytištěných matematických děl byla *Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita* (Benátky, 1494). Autor tohoto díla, františkánský mnich Luca Pacioli (1445–1514), totiž z Fibonacciho díla hodně čerpal a jeho *Summa* tak do značné míry Fibonacciho spisy nahradila.

Fibonacciho dílo zpřístupnil až B. Boncompagni v letech 1854–1862 (viz [LP1] a [LP2]); zájem o Fibonacciho život a dílo však vzbudil již G. Libri, který ve své monografii *Histoire des sciences mathématiques en Italie* [LiG] z let

1838 až 1841 zveřejnil některé pasáže Fibonacciho prací. Na konci čtyřicátých a potom hlavně v padesátých letech 19. století pak vyšly práce A. Agostiniho [AA], B. Boncompagniho [BB1], [BB2], [BB3], A. Genocchiho [GA1], [GA2], [GA3], [GA4], V. A. Lebesguea [LVA], O. Terquema [TO], F. Woepckeho [WF1], [WF2], [WF3], [WF4] a dalších matematiků a historiků vědy.

V první třetině 20. století věnovali Fibonacciho životu a dílu pozornost zejména M. Lazzarini [LaM], L. C. Karpinski [KLC], R. B. McClenon [MR], G. Loria [LG2], E. Bortolotti [BE2], o něco později zveřejnil důležitou práci K. Vogel [VK1].

V posledních desetiletích opět zájem o Fibonacciho dílo vzrostl, jak o tom svědčí např. následující práce: P. Ver Eeckeho překlad Fibonacciho spisu *Liber quadratorum* do francouzštiny (1952 [LP3]), studie G. Arrighiho (1966 [AG1], 1967 [AG2]), práce R. E. Grima otištěné v časopise *The Fibonacci Quarterly* (1966 [GR1], 1973 [GR2]), práce E. Picuttiho (1979 [PE1], 1983 [PE2], 1981 [PE3]), který přeložil do italštiny a podrobně komentoval Fibonacciho práce *Flos* a *Liber quadratorum*, článek R. Franci a L. Toti Rigatelli (1985 [FTR]), L. E. Siglerův překlad Fibonacciho spisu *Liber quadratorum* do angličtiny (1987 [LP4]) a velmi zajímavá knížka H. Lüneburga *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers* [LH] z roku 1992 (2. vyd. 1993).[5]

Fibonacci čerpal hlavně z arabských a řeckých matematických prací, inspiroval se však řadou dalších výsledků.

Ve Fibonacciho době již byly k disposici latinské překlady slavného algebraického traktátu *Al-kitáb al muchtaṣar fí ḥisáb al-džabr wa-l-muqábala* (*Krátká kniha o počtu algebry a al-mukabaly*) al-Chwárizmího, který žil asi v letech 780 až 850; kolem roku 1145 tento traktát přeložil v Segovii Robert z Chesteru a později v Toledu Gherard z Cremony (1114–1187). Rovněž al-Chwárizmího aritmetický traktát, který se v arabské verzi nezachoval (patrně se původně jmenoval *Kitáb al-džam*ᶜ *wa-t-tafrígh bi-ḥisáb al-Hind* – *Kniha o sčítání a odčítání podle indického počtu*),[6] již byl k disposici ve dvou latinských zpracováních; jedno snad pochází od Adelarda z Bathu či Roberta z Chesteru, druhé je dílem Joannesa ze Sevilly (či Toleda). Adelard z Bathu patrně přeložil i al-Chwárizmího astronomický traktát a jeho astronomické tabulky obsahující základy trigonometrie.

Abú Kámil, který žil asi v letech 850 až 930, je autorem dalšího slavného algebraického traktátu, *Kitáb al-džabr wa-l-muqábala* (*Kniha o algebře a almukabale*); tu známe z latinského a starohebrejského překladu až z poloviny 15. století. Fibonacci mohl toto dílo poznat v arabské verzi nebo zprostředkovaně. V knize [LeM] je na str. 217–220 otištěn přehled úloh, které Fibonacci od Abú Kámila převzal zcela beze změn či s malými modifikacemi. Viz též [KLC].

Gherard z Cremony přeložil do latiny i *Knihu tří bratří o geometrii* (*Liber trium fratrum de geometria*), ve které jsou mimo jiné podány základy exhaus-

[5] Existuje též německy psaná diplomová práce o Fibonacciho spise *Liber quadratorum* (R. Stoll [SR]).

[6] Je to první známá arabská práce, ve které je podán výklad zápisů čísel a aritmetických operací v desítkové poziční soustavě.

tivní metody a vyložen Archimédův způsob výpočtu čísla π ($3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$), odvozen Hérónův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka, uvedena „zahradnická" konstrukce elipsy, výsledky o povrchu a objemu kužele a koule apod. Autory této knihy byli bratři Muḥammad, al-Ḥasan a Aḥmad ibn Músá, synové jednoho z důvěrníků chálífa al-Mamúna (? – 872); původní název zmíněného spisu byl *Kitáb maᶜrifa masáḥa al-aškál al-básiṭa wa-l-kuríja*, tj. *Kniha o měření rovinných a sférických obrazců*.

Fibonacci se patrně inspiroval i algebraickými pracemi al-Karadžího (*Al-Fachrí*) a Omara Chajjáma (*O důkazech úloh algebry a al-mukabaly*).

Eukleidovy *Základy* již ve Fibonacciho době v Evropě existovaly v latinském překladu Adelarda z Bathu a Gherarda z Cremony; rovněž byl k disposici latinský překlad komentářů an-Najrízího (Anaritius, ? – asi 922) k první až desáté knize *Základů*; autorem tohoto překladu je Gherard z Cremony.

Archimédova práce *Měření kruhu* byla v Evropě ve 12. století k disposici ve dvou překladech, jejichž autory byli Plato z Tivoli a Gherard z Cremony.

V polovině 12. století se v Evropě objevila i latinská verze Ptolemaiova *Almagestu* v překladu Gherarda z Cremony.

Výsledky Diofantovy *Aritmetiky* mohl Fibonacci poznat v Byzanci, kde byla patrně k disposici její řecká verze.

Fibonacci též hodně čerpal z geometrického spisu *Liber embadorum* (*Kniha o měřeních*) z roku 1145; šlo o latinský překlad hebrejsky psané práce z roku 1116 židovského matematika Abrahama Bar Chijji (Savasorda), který žil asi v letech 1070 až 1136; autorem překladu je Ital Plato z Tivoli, který s Chijjou v Barceloně spolupracoval na překladech odborných spisů.

S velkou dávkou jistoty lze předpokládat, že řada výsledků čínské, babylonské, egyptské a arabské matematiky se k Fibonaccimu dostala zprostředkovaně.

Fibonacci přispěl k rozšíření poziční desítkové soustavy s indicko-arabskými číslicemi a k rozvoji matematického myšlení v Evropě. Zprostředkoval přenos arabské vědy, oživil řadu starších metod, shromáždil a uspořádal obrovské množství poznatků, postupů i úloh, a metodicky je uspořádal, více než kdokoliv jiný ve středověké Evropě kladl důraz na důkazy. Přinesl i vlastní výsledky a metody, vytvořil řadu původních úloh, které nemají arabské vzory. Jeho přístup k matematice byl originální a tvůrčí (např. užití nuly a záporných čísel, rozvíjení souvislostí aritmetiky, algebry a geometrie, využití algebry při řešení geometrických problémů, teorie čísel atd.).

Celé jeho dílo je velmi bohaté co do obsahu i původnosti. Je významné i z metodických důvodů, neboť řada úloh je řešena více způsoby a uvedené metody je tak možno úspěšně porovnávat.

Fibonacciho dílo značně převyšuje poměrně nízkou úroveň spisů jeho současníků i následovníků. Proto ovlivnilo evropský vývoj v mnoha směrech až se značným zpožděním. Fibonacci bezprostřední pokračovatele neměl, i když ovlivnil italské mistry počtáře (*maestri d'abbaco*) a přispěl k rozvoji symboliky.[7]

---

[7] Oba velké Fibonacciho spisy, *Liber abaci* a *Practica geometriae*, nebo jen jejich části

Fibonacciho dílo bylo plně pochopeno až koncem středověku. Navázal na ně zejména Luca Pacioli svou knihou *Summa de Arithmetica* ..., ve které Fibonacciho často cituje; v 16. století je ve svém spise *Artis arithmeticae tractatus de integris* oceňoval např. Girolamo Cardano (1501–1576).

Poznamenejme ještě, že existuje FIBONACCI ASSOCIATION, která vydává časopis *The Fibonacci Quarterly, the Official Journal of the Fibonacci Association devoted to the study of integers with special properties.* Založili ho roku 1963 Verner E. Hoggatt, Jr. (1921–1980) a B. Alfred Brousseau (1907–1988). Problematice tzv. *Fibonacciho čísel* jsou věnovány mezinárodní konference.[8]

V následujících paragrafech podrobně pojednáme o Fibonacciho matematických výsledcích a o jeho přínosu. Na některých místech se budeme odvolávat na ukázky, které jsou umístěny v závěru tohoto článku.

1. Zápis čísel. Aritmetické operace.

Fibonacci přinesl začátkem 13. století do Evropy indicko-arabský poziční desítkový systém s arabským označením cifer a propagoval početní postupy prováděné v tomto novém systému. V Evropě tak podstatně přispěl k postupnému rozšiřování těchto nových početních postupů.

První kapitola Fibonacciho knihy *Liber abaci* ([LP1-I], str. 2–7) je věnována zápisům čísel v pozičním desítkovém systému, který využívá arabských číslic, Fibonacci však hovoří o znacích indických.

Devatero znaků indických je 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1*; těmito devíti znaky a znakem* 0*, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo.*[9]

Fibonacci nejprve uvedl, že při novém způsobu zápisu čísel potřebuje jen dvě, resp. tři, resp. čtyři číslice pro zápis čísel od 10 do 99, resp. od 100 do 999, resp. od 1 000 do 9 999. Přednosti nového zápisu čísel pak demonstroval tabulkou srovnávající zápisy čísel starým způsobem římským a novým způsobem indicko-arabským; v tabulce odpovídá zápisu MI zápis 1001, zápisu MMXXIII zápis 2023 atd. ([LP1-I], str. 2–4; viz ukázky).

První kapitola končí krátkým výkladem znázorňování čísel na prstech (*computum per figuram manuum*)[10] a tabulkami jednoduchých součtů a součinů (od $2 + 2$ do $90 + 90$ a od $2 \cdot 2$ do $10 \cdot 20$):

2 *et* 2 *fiunt* 4, 2 *et* 3 *fiunt* 5, ... 3 *et* 3 *fiunt* 6, ..., 90 *et* 90 *fiunt* 180, 2 *uices* 2 *fiunt* 4, 2 *uices* 3 *fiunt* 6, ..., 3 *uices* 3 *fiunt* 9, ..., 10 *uices* 20 *fiunt* 200.

---

byly ve 14. až 16. století opisovány.

[8] Viz např. *Proceedings of The Eighth International Research Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications*, ed. F. T. Howard, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000.

[9] Fibonacci přeložil slovo *as-sifr* jako *zephirum*, z čehož později vzniklo slovo *zero* – nula. Jiní autoři překládali *as-sifr* jako *sciffula*, *ciffra*, *cifra*; tak se zrodilo italské slovo *cifra*, které však má dnes jiný význam – cifra, číslice, šifra.

[10] V zachovaných verzích Fibonacciho spisu *Liber abaci* nalézáme i obrázky, na kterých je počítání na prstech znázorněno. Viz např. [LH].

Další čtyři kapitoly *Liber abaci* ([LP1-I], str. 7–47) jsou věnovány aritmetickým operacím prováděným s čísly vyjádřenými v desítkovém pozičním systému. Nejprve je vysvětlováno násobení, potom sčítání, odčítání a dělení; výklad je demonstrován na velké řadě příkladů, jednoduchých i početně náročnějších (např. $12 \cdot 12$, $37 \cdot 49$, ale i $12\,345\,678 \cdot 87\,654\,321$, $25 + 49$, ale i $25 + 461 + 6\,789 + 58 + 10\,718 + 491$, $89 - 35$, ale i $81\,728 - 28\,391$, $1\,364 : 4$, ale i $13\,976 : 23$). Pro výsledky násobení a sčítání jsou užívány termíny *summa multiplicationis*, *summa additionis*; slovo *summa* bylo tehdy užíváno ve smyslu *výsledek*. Pro výsledek odčítání je často užíván termín *residuum*. Při dělení je dělenec označován slovy *diuisus*, resp. *diuidendus* a dělitel slovy *diuidens*, resp. *diuisor*. O sudých, resp. lichých číslech se hovoří jako o *par*, resp. *impar*.

V tabulce *Diuisiones per binarium, ternarium, introductiones quaternarii, ...* ([LP1-I], str. 25–26) jsou uvedeny podíly a zbytky při dělení čísly 2, 3, 4 a podíly při dělení čísly 5, ..., 13 (dělení je zde značeno zlomkem):

$\frac{1}{2}$ *de* 1 *est* 0 *et remanet* 1, $\frac{1}{2}$ *de* 2 *est* 1, ..., $\frac{1}{13}$ *de* 195 *est* 15.

V souvislosti s operací dělení Fibonacci provádí rozklady čísel v součiny čísel i prvočísel (*numeri primi* nebo podle arabských vzorů čísla *hasam*; tabulka prvočísel od 11 do 97 – *Tabula numerorum hasam* – viz [LP1-I], str. 31); uvádí např. rozklad $624\,481 = 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 397$. Rozkladů v součin využívá i při dělení. Např. při dělení čísla 749 číslem 75 ([LP1-I], str. 41) uvažuje prvočíselný rozklad dělitele. V dnešní symbolice vypadá jeho výpočet takto:

$$\frac{749}{75} = \frac{749}{3 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{249\frac{2}{3}}{5 \cdot 5} = \frac{49 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5}}{5} = 9 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 5}$$

Výsledek Fibonacci zapisuje v tvaru, který je pro nás na první pohled nesrozumitelný:

$$\frac{2\ \ 4\ \ 4}{3\ \ 5\ \ 5}9$$

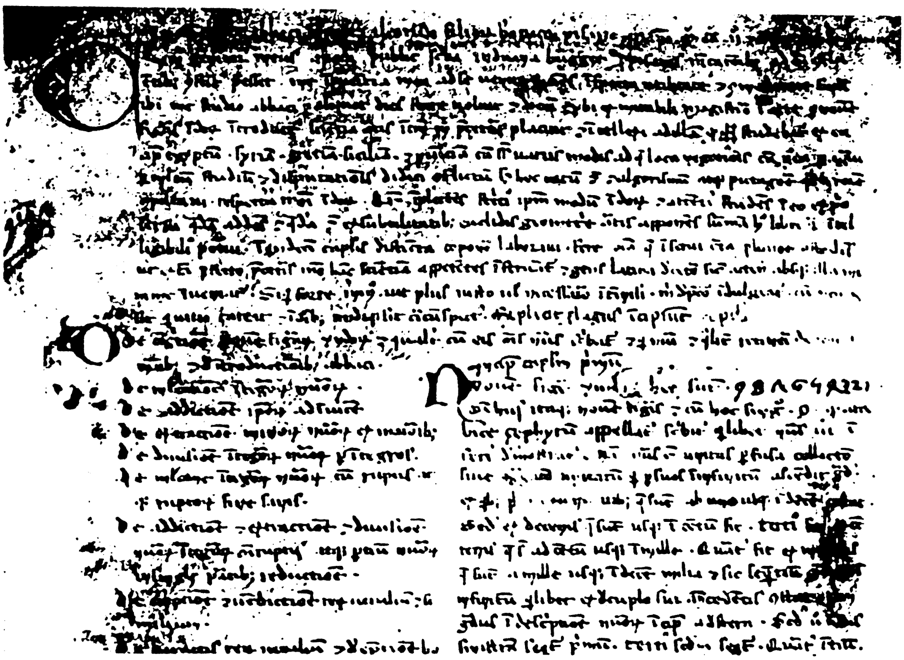
V řadě případů provádí Fibonacci tzv. devítkovou zkoušku (v [LP1-I] se objevuje již na str. 8), která byla užívána již indickými a arabskými počtáři; na některých místech však užívá i zkoušku sedmičkovou, jedenáctkovou a třináctkovou (viz např. [LP1-I], str. 39, 41, 42). Podstata těchto zkoušek je v dělitelnosti; je-li např. $a + b = c$, je zbytek c' při dělení čísla c devítkou roven součtu zbytků a', b' při dělení čísel a, b devítkou (nebo zbytku při dělení čísla $a' + b'$ devítkou). Devítková zkouška má výraznou výhodu; vlastní dělení nemusíme provádět, neboť zbytky zjišťujeme jednoduše pomocí tzv. ciferného součtu.

V ukázkách, které jsou uvedeny na konci tohoto článku, jsou úryvky s následujícími výpočty:

$$123 \cdot 456 = 56\,088\,, \qquad 123 + 4\,567 = 4\,690\,,$$

$$81\,728 - 28\,391 = 53\,337\,, \qquad 13\,976 : 23 = 607\frac{15}{23}\,;$$

devítková zkouška je zde provedena po výpočtech součinu $123 \cdot 456$ a rozdílu $81\,728 - 28\,391$ ([LP1-I], str. 12, 19, 23, 33–34; viz ukázky).



Fibonacci: *Liber abaci*

(počátek textu, tzv. incipit)

2. Zlomky a smíšená čísla.

Fibonacci věnoval poměrně velkou pozornost práci se zlomky a smíšenými čísly. V šesté kapitole *Liber abaci* vyložil násobení smíšených čísel, v následující sedmé kapitole pak sčítání, odčítání a dělení smíšených čísel ([LP1-I], str. 47–83). Zlomky jsou nazývány *fractiones*, *fracti*, resp. *rupti* (sing. *ruptus*), čitatel, resp. jmenovatel *denominans*, resp. *denominatus*.

Zlomky převáděl na společného jmenovatele, smíšená čísla na nepravé zlomky (výsledek této operace je označován jako *summa ruptorum*), často využíval nejmenší společný násobek (*minimum mensurarum numerorum*), vysvětloval i krácení; kromě těchto postupů, které užíváme téměř ve stejné podobě dodnes, najdeme u Fibonacciho i několik návodů na určení rozkladu zlomků na součet dvou nebo více kmenných zlomků (zde se projevil egyptský vliv), tj. zlomků typu $\frac{1}{n}$ – takový zlomek je nazýván *minutum*; vyjádření čísel pomocí šedesátinných zlomků ukazuje mezopotámský a arabský vliv.

Převodem smíšených čísel na nepravé zlomky se stejným jmenovatelem vypočítal Fibonacci např. součet[11]

$$12\frac{1}{3} + 126\frac{3}{4} = \frac{148}{12} + \frac{1521}{12} = 139\frac{1}{12}$$

a obdobným způsobem vypočetl součin

$$12\frac{1}{2} \cdot 23\frac{3}{5} = \frac{25}{2} \cdot \frac{118}{5} = 295 \ ;$$

kromě převedení smíšených čísel na nepravé zlomky zde ukázal i výpočet využívající krácení ([LP1-I], str. 48–49; viz ukázka).

V jednom krátkém odstavci uvedl, že chceme-li vydělit smíšené číslo $523\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ smíšeným číslem $17\frac{1}{6}\frac{2}{5}$, musíme vydělit číslo 47 149 číslem 1 581; vydělíme-li naopak číslo 1 581 číslem 47 149, získáme podíl výše uvedených smíšených čísel, ale v opačném pořadí ([LP1-I], str. 75; viz ukázka).

Na stejném místě Fibonacci odečetl zlomek smíšeného čísla od zlomku smíšeného čísla; v dnešní symbolice vypadá výpočet takto:[12]

$$\frac{5}{7} \cdot \left(128\frac{2}{9}\right) - \frac{3}{4} \cdot \left(29\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1\,154}{9} - \frac{3}{4} \cdot \frac{147}{5} = 69\frac{677}{1\,260} \ .$$

V šesté a sedmé kapitole *Liber abaci* najdeme i tabulku se součty zlomků: od $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ až po $\frac{7}{8} + \frac{1}{10} = \frac{39}{40}$ (viz [LP1-I], str. 54–55) a tabulku s částmi celku: od $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ až po

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ ,$$

[11] Viz [LP1-I], str. 71. Při zápisu smíšených čísel psal Fibonacci podle arabského způsobu nejprve zlomky, např. $\frac{1}{3}12$, $\frac{3}{4}126$, $\frac{1}{12}139$. Jako první užíval zlomkovou čáru, kterou nazýval *uirgula*; všeobecného rozšíření došla až v 16. století.

[12] Výchozí čísla jsou zapsána v tvaru $\frac{2}{9}128\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}29\frac{3}{4}$ a výsledek v tvaru $\frac{1\quad 2\quad 3\quad 5}{2\quad 7\quad 9\quad 10}69$.

$$\frac{99}{100} = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

(viz [LP1-I], str. 79). Projevil se zde egyptský vliv.

Partes de 6 : 1 *de* 6 *est* $\frac{1}{6}$, 2 *de* 6 *est* $\frac{1}{3}$, ..., 5 *de* 6 *est* $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. *Partes de* 8 : ... 7 *de* 8 *est* $\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ ... *Partes de* 24 : ... 13 *de* 24 *est* $\frac{1}{8}\frac{1}{6}\frac{1}{4}$ ...

3. Kupecké počty.

V osmé až jedenácté kapitole *Liber abaci* ([LP1-I], str. 83–166) rozpracoval Fibonacci různé metody pro řešení úloh kupeckých počtů, které posbíral při svých obchodních cestách. Jde o úměry, jednoduchou a složenou trojčlenku,[13] o výpočty poměrů při míchání směsí a výrobě slitin atd. Úlohy jsou velmi často komplikovány převodem jednotek (finančních, váhových, délkových apod.).

Nejjednodušší úlohy Fibonacci charakterizuje na počátku osmé kapitoly jako proporcionální vztah čtyř čísel, kdy tři čísla jsou známá a čtvrté neznámé. První úloha, kterou řeší, je velmi jednoduchá ([LP1-I], str. 83–85; viz ukázka):

100 *rotulí nějakého zboží*[14] *stojí* 40 *liber. Kolik stojí* 5 *rotulí?*

Návod k řešení tohoto příkladu je podrobně popsán a znázorněn následujícím schématem:

$$\begin{array}{ccc} 40\ \textit{liber} & & 100\ \textit{rotulí} \\ & \diagdown & \\ & & 5\ \textit{rotulí} \end{array}$$

Návod k řešení úlohy je velmi jednoduchý: součin čísel „spojených" čarou je třeba vydělit zbývajícím číslem. V naší symbolice je tedy hledanou hodnotou, tj. výsledkem úlohy, číslo

$$\frac{40 \cdot 5}{100} = 2\,.$$

Následující úloha je velmi blízká úloze předchozí a je zřejmě uvedena z metodických důvodů:

100 *rotulí určitého zboží stojí* 40 *liber. Kolik rotulí získáme za* 2 *libry.*

Fibonacci řešil i takové úlohy, ve kterých vystupuje více veličin. Takovéto příklady vedou na složenou trojčlenku, řešeny jsou podobným způsobem jako úlohy jednoduché. V následující úloze vystupuje pět známých veličin ([LP1-I], str. 118–119; viz ukázka):

20 *loktů sukna stojí* 3 *libry,* 42 *rotulí bavlny stojí* 5 *liber. Kolik rotulí bavlny je možno dostat za* 50 *loktů sukna?*

---

[13] Později byl pro trojčlenku užíván termín *regula de tri.*

[14] Rotule byla pisánská váhová jednotka. Sto rotulí bylo tzv. *cantare*, jedna rotule měla 12 váhových uncí, jedna unce $39\frac{1}{2}$ váhových denárů atd. Viz [LP1-I], str. 84–85 – počátek ukázky.

Návod k řešení je znázorněn na následujícím schématu:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3\ \textit{libry} & & 20\ \textit{loktů} \\ & / & & \diagdown & \\ 42\ \textit{rotulí} & & 5\ \textit{liber} & & 50\ \textit{loktů} \end{array}$$

Součin čísel „spojených“ čarami je podle návodu třeba vydělit zbývajícími čísly. Hledanou hodnotou je tedy

$$\frac{42 \cdot 3 \cdot 50}{5 \cdot 20} = 63\,.$$

V následující komplikované úloze figuruje dokonce devět známých veličin ([LP1-I], str. 126–127; viz ukázka):

12 *římských mincí odpovídá* 31 *pisánským,* 23 *pisánských odpovídá* 12 *janovským,* 13 *janovských* 12 *turínským,* 11 *turínských* 12 *barcelonským. Kolik barcelonských mincí dostaneme za* 15 *římských?*[15]

Návod k řešení této úlohy je opět znázorněn odpovídajícím schématem:

$$\begin{array}{ccccccccc} \textit{barc.} & & \textit{tur.} & & \textit{jan.} & & \textit{pis.} & & \textit{řím.} \\ & & 12 & & 13 & & 31 & & 12 \\ & / & & \diagdown & & / & & \diagdown & \\ 12 & & 11 & & 12 & & 23 & & 15 \end{array}$$

Součin čísel „spojených“ čarami je třeba vydělit zbývajícími čísly. Výsledkem je tedy

$$\frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 15}{11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 12} = 20\frac{1\,180}{3\,289}\,,$$

Fibonacci ho udává v tvaru $\frac{3}{11}\,\frac{3}{13}\,\frac{8}{23}20$, což znamená $20\frac{3+11\cdot 3+8\cdot 11\cdot 13}{11\cdot 13\cdot 23}$.

Poznamenejme ještě, že Fibonacci užívá pro výše uvedená schémata a rovněž pro metodu řešení příkladů tohoto typu termín *figura cata*, resp. *figura chata* (viz např. [LP1-I], str. 119, 132); v osmnáctém století se vžil termín *řetězové pravidlo.*[16]

---

[15] Podobnou úlohu najdeme i v učebnici Jiřího Goerla z Goerlštejna nazvané *Arithmetica to gest knijžka početnij neb uměnij počtůw na linách a cyffrách skrze exempla a mince rozličné wšem w handlech, w auřadech, a w hospodářstwij se obijragijcým welmi užitečná a prospěšná* (německy před r. 1577, česky 1577, 1597, 1610), která byla věnována císaři Rudolfu II.: *Item 6 penízů polských platí 1 peníz uherský, 4 uherské 12 vídenských a 4 vídenské 3 pen. bílé české. Otázka: Kolik penízů polských má dáti za 40 penízů bíl. českých?* Vyjde $106\frac{2}{3}$ penízů polských. Viz [BZ], str. 74.

[16] Fibonacci v této souvislosti cituje Ptolemaiův *Almagest* a spis o úměrách egyptského matematika Ameta (Abú Dža^{c}far Aḥmad ibn Júsuf al-Miṣrí (? – 912 ?), který v latinském překladu Gherarda z Cremony nese název *De proportione et proportionalitate.* Viz [LP1-I], str. 119.

4. Posloupnosti.

V obsáhlé dvanácté kapitole *Liber abaci* ([LP1-I], str. 166–318) nalézáme mimo jiné různé úlohy na stanovení součtu prvních n členů aritmetické a geometrické posloupnosti, posloupnosti čtverců přirozených čísel a úlohu o posloupnosti zadané rekurentně.

V prvních příkladech této kapitoly je prezentován výpočet součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti, který odpovídá známému vzorci $\frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$. Tímto způsobem jsou zde vypočteny součty $7+10+13+16+19+22+25+28+31$, $1 + 2 + \cdots + 60$, $2 + 4 + \cdots + 60$, $3 + 6 + \cdots + 60$, $1 + 3 + \cdots + 19$ ([LP1-I], str. 166–167) apod.

V následujícím odstavci Fibonacci sčítá čtverce:

$$1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6 \cdot (11 - 10)} = 385\ ,$$

$$1 + 9 + 25 + \cdots + 81 = \frac{9 \cdot 11 \cdot 20}{6 \cdot (11 - 9)} = 165\ ,$$

$$4 + 16 + \cdots + 100 = \frac{10 \cdot 12 \cdot 22}{6 \cdot (12 - 10)} = 220\ ,$$

$$16 + 64 + \cdots + 400 = \frac{20 \cdot 24 \cdot 44}{6 \cdot (24 - 20)} = 880\ ;$$

z uvedených příkladů snadno vyplývají obecné návody.

Fibonacciho úloha, jejímž cílem je sečíst několik prvních členů geometrické posloupnosti s kvocientem 7, se v různých podobách objevuje během celé kulturní historie lidstva a setrvává v rekreační matematice dodnes ([LP1-I], str. 311–312; viz ukázka).

Sedm stařen míří do Říma, každá má sedm mulů, na každém je sedm pytlů, v každém pytli je sedm chlebů, u každého chleba sedm nožů a každý nůž je v sedmi pochvách. Kolik je všeho dohromady?

Při řešení této úlohy je nejprve vypočten součet

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 = 137\,256$$

a potom je podán návod k řešení, který odpovídá výpočtu čísla

$$7 \cdot (1 + 7 \cdot (1 + 7 \cdot (1 + 7 \cdot (1 + 7 \cdot (1 + 7)))))\ .$$

Poznamenejme, že obdobnou úlohu řešili stejným způsobem ve starém Egyptě již v 18. století př. Kr.[17]

---

[17] Jde o 79. úlohu Rhindova papyru, která se často uvádí v následující podobě: *Je sedm domů, v každém sedm koček, každá chytí sedm myší, každá myš sežere sedm klasů pšenice*

S Fibonacciho jménem se nejčastěji setkáváme v souvislosti s tzv. Fibonacciho čísly. Jde o rekurentně zadanou posloupnost, jejíž původ je v následující úloze ([LP1-I], str. 283–284; viz ukázka):

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. Jelikož první pár v prvním měsíci dá potomstvo, zdvojnásob, a v tomto měsíci budeš mít 2 *páry; z nich jeden pár, totiž první, rodí i v následujícím měsíci, takže ve druhém měsíci budeš mít* 3 *páry; z nich v následujícím měsíci* 2 *páry dají potomstvo, takže v třetím měsíci se zrodí ještě* 2 *páry králíků – počet párů králíků v tomto měsíci dosáhne* 5*; z nich v dalším měsíci dávají potomstvo* 3 *páry, takže počet párů králíků ve čtvrtém měsíci dosáhne* 8*; z nich* 5 *párů zrodí dalších* 5 *párů, které přičteny k* 8 *párům dají v pátém měsíci* 13 *párů; z nich* 5 *párů, narozených v tomto měsíci, nedá v dalším měsíci potomstvo, kdežto ostatních* 8 *párů rodí – v šestém měsíci stoupne tedy počet na* 21 *párů; přičteme-li* 13 *párů, které se zrodí v sedmém měsíci, dostaneme* 34 *párů; přičteme-li* 21 *párů, narozených v osmém měsíci, dostaneme v tomto měsíci* 55 *párů; sečteme-li tyto páry s* 34 *páry narozenými v devátém měsíci, dostaneme* 89 *párů; k těm přičteme* 55 *párů, které se zrodí v desátém měsíci, takže v tomto měsíci máme* 144 *párů; opět přičteme* 89 *párů, které se zrodí v jedenáctém měsíci, takže v tomto měsíci máme* 233 *párů; znovu přičteme* 144 *párů narozených v posledním měsíci a dostaneme* 377 *párů; tolik párů přivedl na svět onen první pár průběhem jednoho roku. Skutečně, na tomto okraji můžeš vidět, jak to děláme; nejprv sečteme první číslo s druhým, t. j.* 1 *a* 2*; druhé s třetím; třetí se čtvrtým, pak čtvrté s pátým a tak dál a dál, až sečteme desáté s jedenáctým, t. j.* 144 *a* 233*, a dostaneme celkový počet párů našich králíků, t. j.* 377*; tak je to možné dělat dál do nekonečného počtu měsíců.*[18]

Za časovou jednotku vezměme jeden měsíc. V časovém okamžiku 0 máme jeden pár králíků; ptáme se, kolik párů králíků budeme mít po roce, tj. v časovém okamžiku 12. Vývoj „králičí populace“ můžeme srozumitelně znázornit

a každému klasu pšenice odpovídá sedm klasů ječmene. Kolik je všeho dohromady? Vychází $7+7^2+7^3+7^4+7^5=19\,607$. Podobné úlohy se vyskytují i později na nejrůznějších místech. Např. v ruských středověkých rukopisech se objevuje tato úloha: *Jde sedm bab:* 7*/ Každá baba má sedm sukovic:* 49*/ Na každé sukovici sedm suků:* 343*/ Na každém suku sedm měšců:* 2 401*/ V každém měšci sedm pirohů:* 16 807*/ V každém pirohu sedm vrabců:* 117 649*/ Každý vrabec má sedm žaludků:* 823 543*/ A celkem je všeho:* 960 799. Připomeňme ještě anglickou dětskou říkanku: *As I was going to St. Ives,/ I met a man with seven wives/ Every wife had seven sacks/ Every sack had seven cats/ Every cat had seven kits/ Kits, cats, sacks, and wives/ How many were going to St. Ives?*

[18] Citováno z knížky N. N. Vorobjev: *Fibonacciova čísla*, SNTL, Praha, 1953 (přeložil E. Čech), str. 9–11. Fibonacci doplnil na okraji stránky text jednoduchým schématem, ve kterém uvedl u jednotlivých měsíců počet párů králíků: *pár* 1; *první* [měsíc] 2, *druhý* 3, *třetí* 5, *čtvrtý* 8, *pátý* 13, *šestý* 21, *sedmý* 34, *osmý* 55, *devátý* 89, *desátý* 144, *jedenáctý* 233, *dvanáctý* 377. Fibonacci se zde projevil jako skutečný matematik; uvažuje „nekonečný počet měsíců“ – a králíci jsou přitom nesmrtelní!

v následující tabulce (S_k, resp. M_k, resp. F_k značí počet starých, resp. mladých, resp. všech párů králíků na konci k-tého měsíce):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
M_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
F_k	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Po roce tedy budeme mít 377 párů králíků.

Uvědomíme-li si, jak je úloha zadána, snadno zjistíme, že

$$F_k = S_k + M_k = S_k + S_{k-1} = F_{k-1} + F_{k-2} ,$$

tj. každé číslo na spodním řádku tabulky je rovno součtu dvou předcházejících čísel tohoto řádku. Čísla F_k jsou zavedena *rekurentně*; počet párů králíků v konkrétním měsíci je součtem počtů párů králíků v předchozích dvou měsících.

Posloupnost $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1\,597, \ldots$ se nazývá *Fibonacciho posloupnost*, její prvky *Fibonacciho čísla*;[19] mají řadu zajímavých vlastností.[20]

5. Odmocniny.

V první a páté části čtrnácté kapitoly *Liber abaci* ([LP1-I], str. 352–387) vysvětluje Fibonacci metody přibližného výpočtu druhé a třetí odmocniny (*radix*, *radix cubica*) a ukazuje, jak se s odmocninami počítá.[21] Druhou odmocninu definuje takto:

[19] Tento termín pochází od francouzského matematika E. Lucase (1842–1891), viz jeho práce *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, Amer. J. Math. 1(1878), 184–240, 289–321. Posloupnost bývá zadána rekurentně vztahem $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, kde $k = 2, 3, \ldots$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, což neodpovídá zcela přesně původní Fibonacciově úloze.

[20] Česky např. N. N. Vorobjev: *Fibonacciova čísla*, SNTL, Praha, 1953, 62 stran (anglicky 1963); J. Veselý: *Zlatý řez a co vše s ním souvisí*, Učitel matematiky 6(1997/98), 153–158, 7(1998/99), 14–24; E. Calda: *Kterak od jedné vlastnosti Fibonacciovy posloupnosti ku číslu π dospěti možno jest*, Matematika, Fyzika, Informatika 8(1998), 202–204; P. Trojovský: *Fibonacciova čísla a řady*, Učitel matematiky 8(1999/2000), 1–12; J. B. Dynkin, V. A. Uspenskij: *Matematické besedy*, SNTL, Praha, 1955. Viz dále V. E. Hoggatt: *Fibonacci and Lucas Numbers*, Univ. Santa Clara, Houghton-Mifflin, Boston, 1969; D. Jarden: *Reccuring Sequences*, Riveon Lematematike, Jerusalem, 1958 (další vydání 1973); P. Ribenboim: *My Numbers, My Friends. Popular Lectures on Number Theory*, Springer, 2000; R. C. Archibald: *The golden section*, Amer. Math. Monthly 25(1918), 232–238; D'Arcy W. Thompson: *On grow and form*, Cambridge Univ. Press, New York, 1942; H. S. M. Coxeter: *The golden section, phyllotaxis, and Wythoff's game*, Scripta Mathematica 19(1950), 135–143, atd.

[21] O výpočtu odmocnin v pracích italských matematiků 13. až 16. století viz M. T. Rivolo, A. Simi: *Il Calcolo delle Radici Quadrate e Cubiche in Italia da Fibonacci a Bombelli*, Arch. Hist. Exact Sci. 52(1998), 161–193.

Radix quidem cuiuslibet numeri est numerus qui, cum in se multiplicatur, facit ipsum numerum, ut 3, que sunt radix de 9. Et 6 de 36; quia ter tria faciunt 9, et sexcies 6 faciunt 36. ... ([LP1-I], str. 353)

Při výpočtu odmocnin postupuje více méně jako Arabové, výpočty provádí *secundum abaci materiam*, tj. „podle umění abaku"; tento slovní obrat ukazuje, že u Fibonacciho má slovo abakus zcela jiný význam než o dvě století dříve u Gerberta.

Přirozené číslo A, které není čtvercem a jehož druhou odmocninu chce Fibonacci vypočítat, vyjádří v tvaru $A = a^2 + r$, kde a^2 je nejbližší menší druhá mocnina přirozeného čísla. Odtud $\sqrt{A} = a + k$, kde $0 < k < 1$; přibližnou hodnotu čísla k je třeba nalézt. Je tedy

$$A = a^2 + r = a^2 + 2ak + k^2 ,$$

odkud

$$k = \frac{r}{2a + k} .$$

Položíme-li ve jmenovateli $k = 0$, resp. $k = 1$, získáme odhad

$$\frac{r}{2a+1} < k < \frac{r}{2a} .$$

Při odmocňování Fibonacci nejprve počítá podle známého algoritmu číslo a, tj. celou část odmocniny $\sqrt{A}$, potom klade $k = \frac{r}{2a}$; dále vypočte rozdíl

$$\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 - A$$

a z rovnice

$$\left(a + \frac{r}{2a} - x\right)^2 = A ,$$

ve které x^2 zanedbá, vypočte přibližnou hodnotu x.

Tento postup Fibonacci demonstruje na výpočtu odmocniny čísla 10. První aproximací je $\sqrt{10} \doteq 3\frac{1}{6}$. Protože je $(3\frac{1}{6})^2 = 10\frac{1}{36}$ (což je přibližně 10,028), hledá hodnotu x z rovnice $(3\frac{1}{6} - x)^2 = 10$. Po umocnění a zanedbání hodnoty x^2 dostává $x = \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{19} = \frac{1}{228}$. Vychází tedy

$$\sqrt{10} \doteq 3\frac{1}{6} - \frac{1}{228} = 3\frac{37}{228} ;$$

tato hodnota je velmi přesná, je $(3\frac{37}{228})^2 \doteq 10{,}000\,018$.

V dalších příkladech již Fibonacci počítá jen „první aproximaci" ([LP1-I], str. 353–356):

$$\sqrt{743} \doteq 27\frac{7}{27} , \qquad \sqrt{8\,754} \doteq 93\frac{35}{62} ,$$

$$\sqrt{12\,345} \doteq 111\frac{4}{37} , \qquad \sqrt{927\,435} \doteq 963\frac{11}{321} .$$

Vypočtené hodnoty jsou podle předešlého o něco větší než skutečné odmocniny, jsou však poměrně přesné:[22]

$$\left(27\frac{7}{27}\right)^2 \doteq 743,067\ , \qquad \left(93\frac{35}{62}\right)^2 \doteq 8\,754,319\ ,$$

$$\left(111\frac{4}{37}\right)^2 \doteq 12\,345,011\ , \qquad \left(963\frac{11}{321}\right)^2 \doteq 927\,435,012\ .$$

Fibonacci poznamenal (např. po výpočtu odmocnin čísel 743 a 927 435), že je možno výsledky zpřesnit podobně, jako při výpočtu hodnoty $\sqrt{10}$.

Zajímavý je jeho výpočet druhé odmocniny čísla 7 234 ([LP1-I], str. 355–356). Podle předchozího postupu by bylo

$$\sqrt{7\,234} \doteq 85\frac{9}{170}\ .$$

Fibonacci však postupuje takto:

$$\sqrt{7\,234} = \frac{1}{100}\cdot\sqrt{72\,340\,000} \doteq \frac{1}{100}\cdot\left(8\,505 + \frac{4\,975}{2\cdot 8\,505}\right) \doteq 85\frac{1}{20} + \frac{1}{400}$$

Poznamenejme pro zajímavost, že hodnota, kterou takto Fibonacci vypočetl, je horší než hodnota $85\frac{9}{170}$. Je to způsobeno nevhodným odhadem zlomku $\frac{4\,975}{2\cdot 8\,505}$. Patrně však v tomto příkladu nešlo o přesnost, ale o prezentování jiné cesty k výsledku.

Ve spise *Practica geometriae* je druhým odmocninám věnována celá druhá část ([LP1-II], str. 18–30). Na řadě příkladů je nejprve procvičován algoritmus pro výpočet druhé odmocniny. Odmocňované veličiny jsou však chápány geometricky, připomenuty jsou některé převodní vztahy délkových a úhlových jednotek: sáh nebo prut (*pertica*) je 6 stop (*pes*), stopa je 18 uncí (*uncia*), stupeň (*gradus*) je 60 minut (*minutum*), minuta je 60 sekund (*secundum*), sekunda je 60 tercií (*tertia*). Fibonacci pak počítá odmocninu z 67 čtverečních sáhů; nejprve je převede na čtvereční unce, tj. $67\cdot 6^2\cdot 18^2 = 781\,488$, odmocněním získá $884 + \frac{32}{2\cdot 884} \doteq 884\frac{1}{55}$ délkové unce a výsledek upraví pomocí převodních vztahů na 8 sáhů, 1 stopu a $2\frac{1}{55}$ unce. Uvádí však i druhý způsob výpočtu, kdy nejprve odmocní 67 čtverečních sáhů, získá $8\frac{3}{2\cdot 8}$ délkového sáhu a pomocí převodních vztahů výsledek upraví na 8 sáhů, 1 stopu a $2\frac{1}{4}$ unce.[23]

Výpočet třetích odmocnin Fibonacci provádí podobně jako výpočet odmocnin druhých ([LP1-I], str. 380–383). Prezentovaný postup považuje za svůj výsledek, ačkoliv se objevuje již dříve v arabských pracích. Odmocňované číslo A, které není třetí mocninou přirozeného čísla, vyjádří v tvaru $A = a^3 + r$,

[22] Poznamenejme, že chyba při odhadu čísla k je menší než $\frac{r}{2a} - \frac{r}{2a+1} = \frac{r}{2a(2a+1)}$. Protože r může být maximálně $(a+1)^2 - a^2 - 1 = 2a$, je chyba při výpočtu druhé odmocniny čísla A menší než $\frac{1}{2a+1}$. Druhá mocnina čísla $a + \frac{r}{2a}$ je o $\frac{r^2}{4a^2}$ větší než odmocňované číslo A.

[23] Malý rozdíl ve výsledcích je způsoben užitím algoritmu pro přibližný výpočet odmocnin.

kde a^3 je nejbližší menší třetí mocnina, přirozené číslo a počítá podle známého algoritmu. Nyní je $\sqrt[3]{A} = a + k$, kde $0 < k < 1$; číslo k je třeba nalézt. Je tedy

$$A = a^3 + r = a^3 + 3a^2k + 3ak^2 + k^3 \ ,$$

odkud

$$k = \frac{r}{3a^2 + 3ak + k^2} \ .$$

Položíme-li ve jmenovateli $k = 0$, resp. $k = 1$, získáme odhad

$$\frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = \frac{r}{3a^2 + 3a + 1} < k < \frac{r}{3a^2} \ .$$

Fibonacci dále vychází z odhadu

$$\sqrt[3]{A} \doteq a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} \ ,$$

který však není tak uspokojivý, jako předchozí odhad pro výpočet druhých odmocnin.[24]

Proto vypočtený zlomek nahradí zlomkem „jednodušším", aby si usnadnil další výpočet; získané číslo umocní, zjistí rozdíl a vypočte „opravu". Tuto metodu demonstruje na několika příkladech.

Nejprve počítá podle předchozího postupu třetí odmocninu čísla 47:

$$\sqrt[3]{47} \doteq 3\frac{20}{37} \doteq 3\frac{1}{2} \ .$$

Potom vypočte (jako třetí mocninu dvojčlenu – užívá slova *cubicare*, *cubicatio*) třetí mocninu tohoto čísla a zjistí, jak přesně počítal:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^3 = 42\frac{7}{8} \ , \qquad 47 - 42\frac{7}{8} = 4\frac{1}{8} \ .$$

Jeho další výpočet odpovídá následují úvaze (v současné symbolice):

$$\left(3\frac{1}{2} + x\right)^3 \doteq 42\frac{7}{8} + 3 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \ ,$$

kde místo $(3\frac{1}{2})^2$ bere $3\frac{1}{2} \cdot 4$ a členy s x^2 a x^3 zanedbá; nyní má být

$$3 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x = 4\frac{1}{8} \ ,$$

odtud $x \doteq \frac{1}{10}$. Tedy

$$\sqrt[3]{47} \doteq 3\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 3\frac{3}{5} \ ;$$

[24] Chyba při odhadu čísla k je menší než $\frac{r}{3a^2} - \frac{r}{3a^2+3a+1} = \frac{r(3a+1)}{3a^2(3a^2+3a+1)}$. Protože r může být maximálně $(a+1)^3 - a^3 - 1 = 3a(a+1)$, je chyba při výpočtu třetí odmocniny čísla A menší než $\frac{(a+1)(3a+1)}{a(3a^2+3a+1)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{3a^2+3a+1}$.

pro kontrolu pak vypočte, že $(3\frac{3}{5})^3 = 47 - \frac{43}{125}$. Pokud bychom předchozí postup zopakovali, získali bychom přesnější hodnotu odmocniny.

V dalším příkladu Fibonacci počítá stejným způsobem třetí odmocninu čísla 900. První odhad $9\frac{171}{271}$ zaokrouhluje na $9\frac{2}{3}$, toto číslo umocní a vypočte diferenci,

$$\left(9\frac{2}{3}\right)^3 = 903\frac{8}{27}\,, \qquad 903\frac{8}{27} - 900 = 3\frac{8}{27}\,,$$

a naznačuje výpočet opravy:

$$\left(9\frac{2}{3} - x\right)^3 \doteq 903\frac{8}{27} - 3\cdot 9\frac{2}{3}\cdot 10\cdot x\;;$$

uvádí, že ze vztahu

$$3\cdot 9\frac{2}{3}\cdot 10\cdot x = 3\frac{8}{27}$$

je možno hodnotu opravy x vypočítat – je

$$x = \frac{89}{7\,830} \doteq 0{,}011\,37\;;$$

tento výsledek však již Fibonacci neuvádí.

Stejným způsobem počítá třetí odmocninu čísla 2 345; uvádí výsledek $13\frac{17}{60}$. Poznamenejme, že třetí mocninou tohoto čísla je přibližně 2 343,8.

V dalších příkladech již počítá jen celou část odmocnin $\sqrt[3]{56\,789}$, $\sqrt[3]{456\,789}$, $\sqrt[3]{9\,876\,543}$.

Ve spisu *Practica geometriae* je třetím odmocninám věnována celá pátá část … *de radicibus cubicis inueniendis* ([LP1-II], str. 148–158; viz ukázka). Fibonacci zde mimo jiné počítá stejné příklady jako v *Liber abaci.*

Fibonacci rovněž ukazuje, jak se s druhými a třetími odmocninami pracuje; zkoumá např. odmocniny binomů tvaru $m + \sqrt{n}$, $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, kde na čísla m, n klade různé podmínky ([LP1-I], str. 357–358). Dobře rozlišuje, zda je výsledek číslo racionální, odmocnina racionálního čísla, či odmocnina čísla iracionálního. Iracionální čísla označuje termínem *surde.* Ve čtrnácté kapitole *Liber abaci*, ale i ve spise *Practica geometriae* ([LP1-I], str. 361, [LP1-II], str. 155–156; viz ukázky) najdeme např. slovní popisy následujících rovností:

$$\sqrt{\sqrt{20}}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{\sqrt{20\cdot 100}}\,, \qquad \sqrt{\sqrt{12}}\cdot 7 = \sqrt{\sqrt{12\cdot 2\,401}}\,,$$

$$\sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[3]{60} = \sqrt[3]{2\,400}\,, \qquad 2\cdot\sqrt[3]{20}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{160}\cdot\sqrt[3]{1\,080}\,,$$

$$\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{\frac{1}{20}}\,, \qquad 8\sqrt[3]{10} : 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5\,120} : \sqrt[3]{135}\,,$$

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}\,, \qquad 4 + \sqrt[4]{10} = \sqrt{16+\sqrt{10}+8\sqrt[4]{10}}\,.$$

Fibonacci rovněž znázorňuje iracionality geometricky pomocí Eukleidovy věty o výšce; např. druhá odmocnina čísla $10 = 2 \cdot 5$ je znázorněna výškou pravoúhlého trojúhelníka spuštěnou na přeponu, kde přepona je 7 a její úseky přilehlé k jednotlivým odvěsnám jsou 2 a 5 ([LP1-I], str. 353). Případ odmocniny prvočísla, kdy je třeba uvažovat triviální rozklad $p = p \cdot 1$, v *Liber abaci* diskutován není. Je však probrán v pozdějším díle *Practica geometriae* na příkladu odmocniny prvočísla 67 ([LP1-II], str. 25).

Práce s kvadratickými iracionalitami svědčí mimo jiné o Fibonacciho dobré znalosti desáté knihy Eukleidových *Základů*, ve které je podána Theaitetova klasifikace iracionalit. O tom, že tuto knihu pečlivě studoval, se Fibonacci zmiňuje ve spise *Flos* ([LP1-II], str. 228):

... et ob hoc super ipso .X.° Euclidis accuratius studui, adeo quod sui teoraemata ipsius memorie commendaui, et ipsarum intellectum comprehendi.

V práci *Practica geometriae* se znovu zabývá geometrickými konstrukcemi odmocnin (viz [LP1-II], str. 18, 22, 153–154); zde je chápe jako geometrické veličiny.

6. Lineární rovnice a jejich soustavy.

Problematiku lineárních a kvadratických rovnic prezentoval Fibonacci velmi podrobně a obsáhle.

Ve dvanácté kapitole *Liber abaci* použil k řešení lineárních úloh nejprve tzv. *metodu chybného předpokladu*, která byla užívána již ve starém Egyptě ve 2. tisíciletí př. Kr. Fibonacci ji nazývá *regula versa.*

Jaká je celková výška stromu, jehož $\frac{1}{3}$ *a* $\frac{1}{4}$, *což je* 21 *dlaní, je pod zemí?*[25]

Úloha vede na rovnici

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot x = 21 \ .$$

Fibonacci volí jako chybný předpoklad $x_1 = 12$; podotýká však, že je možno volit každé číslo, které je násobkem obou jmenovatelů. Po dosazení čísla 12 dostává místo čísla 21 číslo 7, tj. třikrát méně. Místo čísla 12 je tedy třeba vzít třikrát více, tj. 36; výška stromu je 36 dlaní.

Na lineární rovnici vede i následující poměrně známá úloha *De Leone et leopardo et urso* ([LP1-I], str. 182):

Lev sežere ovci za čtyři hodiny, leopard za pět hodin a medvěd za šest hodin. Za jak dlouho ji sežerou společně.

Výsledek $1\frac{23}{37}$ získáme řešením rovnice $x \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1$.

Jedna z dalších úloh se týká finančních obnosů dvou osob ([LP1-I], str. 190):

Dá-li první druhému denár, budou mít stejně. Dá-li druhý prvnímu denár, bude mít první desetkrát tolik.

---

[25] *Est arbor, cuius* $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *latet sub terra; et sunt palmi* 21*: queritur quanta sit arboris illius longitudo: ...* ([LP1-I], str. 173).

Úloha vede na soustavu rovnic

$$x - 1 = y + 1 \ ,$$
$$x + 1 = 10(y - 1) \ ;$$

Fibonacci zavádí novou neznámou $z = x + y$. Jeho řešení odpovídá v moderní symbolice následujícím rovnicím:

$$y + 1 = \frac{1}{2}z \ , \qquad x + 1 = \frac{10}{11}z \ ;$$

po jejich sečtení získáme rovnici

$$z + 2 = \frac{31}{22}z \ .$$

Odtud je $z = 4\frac{8}{9}$, $x = 3\frac{4}{9}$, $y = 1\frac{4}{9}$.

S následující zajímavou úlohou ([LP1-I], str. 190–191) se Fibonacci seznámil v Konstantinopoli:

Jestliže jeden člověk dostane od druhého 7 *denárů, bude mít pětkrát více než druhý. Jestliže druhý člověk dostane od prvního* 5 *denárů, bude mít sedmkrát více než první. Kolik mají nyní?*[26]

V naší symbolice, označíme-li x a y původní peněžní obnosy obou osob, vede úloha na soustavu rovnic

$$x + 7 = 5(y - 7) \ ,$$
$$7(x - 5) = y + 5 \ .$$

Fibonacci si nejprve představí celkovou částku (tj. $x + y$) jako úsečku, která je rozdělena na dvě části – původní obnosy obou osob, stejně jako ve výše uvedeném příkladu. Obě podmínky úlohy pak odpovídají jinému rozdělení této úsečky. V současné algebraické symbolice jde o rovnosti

$$x + y = (x + 7) + (y - 7) = (x - 5) + (y + 5) \ ,$$

přičemž podle podmínek úlohy je $y - 7$ jednou šestinou celé úsečky a $x - 5$ jednou osminou celé úsečky. Součet $x + y - 12$ je tedy roven $(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}) \cdot (x + y)$, neboli

$$\frac{17}{24} \cdot (x + y) = 12 \qquad \text{a} \qquad x + y = \frac{12 \cdot 24}{17} = 16\frac{16}{17}$$

a odtud $x = 7\frac{2}{17}$ a $y = 9\frac{14}{17}$.

[26] *Item si proponatur, quod unus illorum petat alteri denarios 7; et habeat quincuplum eius. Et secundus petat primo 5 denarios; et habeat septuplum eius.* ... Viz též [GH], str. 98–99.

Fibonacci dále ukazuje jiný, algebraický postup pocházející z arabských zdrojů, který nazývá *regula recta*.[27] Volí novou neznámou, pomocnou veličinu $z = y - 7$; původní peněžní obnosy jsou tedy $x = 5z - 7$ a $y = z + 7$. Z druhé podmínky dostane vztah

$$7(5z - 12) = z + 12 ,$$

odtud $z = 2\frac{14}{17}$. Původně tedy šlo o hotovosti $7\frac{2}{17}$ denáru a $9\frac{14}{17}$ denáru.

Fibonacci celý postup popisuje slovy, úlohu však řeší „algebraickou úvahou"; pro neznámou, kterou jsme označili z, používá termínu *res*.[28] Na následujících stránkách řeší Fibonacci obecnější úlohy.[29] Při algebraických postupech označuje veličiny, které chápe jako pomocné neznámé, slovy *maior, minor, media, mediana*, případně *prima, secunda, tertia* apod.

V dalších partiích dvanácté kapitoly *Liber abaci* jsou algebraickými metodami řešeny obdobné úlohy; často jsou podstatně komplikovanější (týkají se více osob), někdy nemají řešení. To se týká např. úlohy ([LP1-I], str. 284–285), která vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 27 , \\ y + z &= 31 , \\ z + w &= 34 , \\ x + w &= 37 ; \end{aligned}$$

poslední rovnice je neslučitelná s předchozími. Proto Fibinacci mění zadání, jako čtvrtou rovnici bere $x + w = 30$; tato úloha je řešitelná (v kladných číslech pro každé $x < 27$): $y = 27 - x$, $z = 4 + x$, $w = 30 - x$.

Ve dvanácté kapitole *Liber abaci* je řada úloh věnována výpočtu majetků osob, které dosáhnou určité hodnoty jen tehdy, přidá-li se k jejich majetku část majetku jiné osoby nebo jiných osob.

První Fibonacciho úloha tohoto typu ([LP1-I], str. 228–229), úloha o finančních obnosech dvou osob, které nedosahují hodnoty s, vede na soustavu

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}y &= s , \\ y + \frac{1}{4}x &= s . \end{aligned}$$

Obecný případ úloh tohoto typu odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x + \frac{a_1}{b_1}y &= s , \\ y + \frac{a_2}{b_2}x &= s . \end{aligned}$$

---

[27] ***In soluendis itaque questionibus est regula quedam, que recta dicitur, qua arabos utuntur: et est illius regule modus ualde laudabilis, cum per ipsam infinite questiones solui ualeant:*** ... ([LP1-I], str. 191).

[28] Slovo *res* znamená latinsky *věc*; v arabštině se ve stejném významu používalo slovo *šaj*.

[29] Na str. 192–198 věnuje velkou pozornost úlohám, které vedou na soustavy rovnic tvaru $x + 7 = 5(y - 7) \pm p$, $7(x - 5) = y + 5 \pm q$.

Protože je rovnost

$$x + \frac{a_1}{b_1}y = y + \frac{a_2}{b_2}x$$

ekvivalentní s rovností

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1} \cdot y = \frac{b_2 - a_2}{b_2} \cdot x \ ,$$

je soustava splněna právě tehdy, když je podle tzv. pravidla úměrnosti[30]

$$x = \frac{b_1 - a_1}{b_1} \cdot n \ , \qquad y = \frac{b_2 - a_2}{b_2} \cdot n$$

a

$$s = \frac{b_1 b_2 - a_1 a_2}{b_1 b_2} \cdot n \ .$$

Hodnota s není ve většině úloh zadána.[31] Fibonacci však řeší tyto úlohy v oboru přirozených čísel a hledá „nejmenší" řešení; proto bere za n součin $b_1 b_2$.

V předchozí úloze podává nejprve mechanický návod, který odpovídá výše uvedeným vztahům pro x a y.

$$x = (3-1)\cdot 4 = 8 \ , \qquad y = (4-1)\cdot 3 = 9 \ , \qquad s = 3\cdot 4 - 1\cdot 1 = 11 \ .$$

Zdůvodnění tohoto postupu podává i algebraickou cestou, která je pro konkrétní příklad poněkud jednodušší než výše uvedený obecný postup. Nakonec dochází k obecnému řešení $x = \frac{2}{3}n$ a $y = \frac{3}{4}n$, kde n je libovolné číslo:

Vnde primus homo habet $\frac{2}{3}$ ex quouis numero; et secundus habebit $\frac{3}{4}$ eiusdem numeri: ...

Následuje šest úloh o třech, čtyřech a pěti obnosech ([LP1-I], str. 229–235), které je možno vyjádřit obdobnými soustavami lineárních rovnic o třech, čtyřech, resp. pěti neznámých. Fibonacci podává stručné a srozumitelné pravidlo, jak neznámé veličiny vypočítat ze zadaných podmínek (tj. vlastně z koeficientů rovnic). Řeší tak úlohy, které vedou na soustavy rovnic typu

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{a_1}{b_1}x_2 &= s \ , \\ x_2 + \frac{a_2}{b_2}x_3 &= s \ , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_k + \frac{a_k}{b_k}x_1 &= s \ . \end{aligned}$$

Např. pro $k = 4$ je neznámá x_1 vypočtena postupem, který odpovídá vzorci

$$x_1 = \frac{(((b_1 - a_1)b_2 + a_1 a_2)b_3 - a_1 a_2 a_3)b_4}{b_1 b_2 b_3 b_4 - a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot s \ ;$$

[30] ... *per hanc enim proportionum regulam* ... *nebo* ... *ex regula proportionum* apod.

[31] Zajímavé je, že v následující úloze jsou stejné koeficienty $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ a navíc je $s = 15$.

Fibonacci však klade s rovné jmenovateli a počítá tedy pouze čitatele uvedeného zlomku.

Uveďme pro zajímavost číselné hodnoty čtyř takovýchto příkladů:

koeficienty: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ řešení: $x_1 = 45,\ x_2 = 48,\ x_3 = 52,\ s = 61$;

koeficienty: $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}$ řešení: $x_1 = 135,\ x_2 = 141,\ x_3 = 154,\ s = 229$;

koeficienty: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ řešení: $x_1 = 264,\ x_2 = 285,\ x_3 = 296,\ x_4 = 315,$ $s = 359$;

koeficienty: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

řešení: $x_1 = 176\,274,\ x_2 = 200\,772,\ x_3 = 205\,820,\ x_4 = 238\,830,\ s = 293\,391$.

Úloha ([LP1-I], str. 245), která vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}(y+z) &= s\ , \\ y + \frac{1}{4}(z+x) &= s\ , \\ z + \frac{1}{5}(x+y) &= s \end{aligned}$$

(řešením je 13, 17, 19; 25), je už v Diofantově *Aritmetice* (24. úloha 1. knihy). Reprezentuje další typ úloh, které Fibonacci řešil. Návod, podle kterého postupoval, je možno v současné terminologii a symbolice popsat asi takto: soustavu

$$\begin{aligned} x + \frac{a_1}{b_1}(y+z) &= s\ , \\ y + \frac{a_2}{b_2}(z+x) &= s\ , \\ z + \frac{a_3}{b_3}(x+y) &= s \end{aligned}$$

vyřešíme vtipným obratem, který zavádí novou neznámou

$$S = x + y + z\ .$$

Odečteme-li od této rovnice jednotlivé rovnice dané soustavy, získáme snadno vztah

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1} \cdot (y+z) = \frac{b_2 - a_2}{b_2} \cdot (z+x) = \frac{b_3 - a_3}{b_3} \cdot (x+y)\ .$$

Můžeme tedy předpokládat, že

$$y + z = \frac{b_1}{b_1 - a_1} \cdot nf\ , \qquad z + x = \frac{b_2}{b_2 - a_2} \cdot nf\ , \qquad x + y = \frac{b_3}{b_3 - a_3} \cdot nf\ ,$$

kde n je nejmenší společný násobek čísel $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ a f je pomocný koeficient. Sečteme-li tyto tři poslední vztahy, dostaneme rovnost

$$2(x+y+z) = \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i}{b_i - a_i} \cdot nf\ .$$

Nyní položíme $f = 2$, abychom mohli krátit; dále odečteme od získané rovnice tři předcházející a tak získáme neznámé x, y, z:

$$x = n \cdot \left(-\frac{b_1}{b_1 - a_1} + \frac{b_2}{b_2 - a_2} + \frac{b_3}{b_3 - a_3} \right), \ldots .$$

Následují dvě podobné úlohy ([LP1-I], str. 245–249) vedoucí na čtyři rovnice se čtyřmi neznámými s koeficienty $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ (a řešením 1, 19, 25, 28; 37), která se jen mírně liší od 25. úlohy první knihy Diofantovy *Aritmetiky* (tam jsou koeficienty $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$), resp. s koeficienty $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{6}{19}$ (a řešením 1 774, 2 047, 2 164, 2 614; 4 504).

Ještě složitější úloha tohoto typu ([LP1-I], str. 249–250) vede na soustavu pěti rovnic, ve které se jako koeficienty objevují součty kmenných zlomků (a zlomku $\frac{2}{3}$) v egyptském duchu:

$$\begin{aligned}
x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)(y + z + u + v) &= s \,, \\
y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{480}\right)(z + u + v + x) &= s \,, \\
z + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{638}\right)(u + v + x + y) &= s \,, \\
u + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{420}\right)(v + x + y + z) &= s \,, \\
v + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{810}\right)(x + y + z + u) &= s \,;
\end{aligned}$$

vychází $x = 3$, $y = 228$, $z = 231$, $u = 348$, $v = 378$, $s = 1\,030$.

Fibonacci řeší i jiné typy úloh, např. takové, které vedou na následující tři soustavy rovnic ([LP1-I], str. 238–240, 250–251, 254):

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{3}y &= s \,, \\
y + \frac{1}{4}z &= s + 2 \,, \\
z + \frac{1}{5}u &= s + 5 \,, \\
u + \frac{1}{6}v &= s + 10 \,, \\
v + \frac{1}{7}x &= s + 17 \,;
\end{aligned}$$

řešením je $x = 1\,589$, $y = 1\,713$, $z = 1\,796$, $u = 1\,845$, $v = 1\,950$, $s = 2\,160$.

$$
\begin{aligned}
x + y + \frac{1}{2}(z + u + v) &= s \ , \\
y + z + \frac{1}{3}(u + v + x) &= s \ , \\
z + u + \frac{1}{4}(v + x + y) &= s \ , \\
u + v + \frac{1}{5}(x + y + z) &= s \ , \\
v + x + \frac{1}{6}(y + z + u) &= s \ ;
\end{aligned}
$$

řešením je $x = 58$, $y = 19$, $z = 148$, $u = 49$, $v = 163$, $s = 257$.

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{3}(y + z) &= s \ , \\
y + \frac{1}{4}(z + x) &= s + 2 \ , \\
z + \frac{1}{5}(x + y) &= s + 4 \ ;
\end{aligned}
$$

řešením je $x = 7$, $y = 13$, $z = 17$, $s = 17$.

I ve třinácté kapitole *Liber abaci* prezentuje Fibonacci úlohy, které vedou na lineární rovnice a jejich soustavy. Vysvětluje zde *metodu dvou chybných předpokladů*, kterou nazývá *elchatayn* nebo *elchataieym* podle arabského *al-hatain.*[32] Tuto metodu předvádí na velké řadě příkladů, z nichž mnohé již řešil v předchozím textu. V úvodním příkladu ([LP1-I], str. 318–320) podrobně rozebírá jednotlivé případy (dva nedostatky, dva přebytky, přebytek a nedostatek); ukážeme situaci, kdy dostane přebytek a nedostatek.

100 *rotulí určitého zboží stojí* 13 *liber, kolik stojí jedna rotule?*

Poznamenejme, že 1 libra je 20 solidů a 1 solidus 12 denárů. 100 rotulí tedy stojí 260 solidů, resp. 3120 denárů.

Předpokládejme, že 1 rotule stojí 3 solidy (první chybný předpoklad), 100 rotulí pak bude stát 300 solidů neboli 15 liber, tj. o 2 libry více, než potřebujeme. Dostáváme tedy přebytek 2 (*plus*).

Předpokládejme, že 1 rotule stojí 2 solidy (druhý chybný předpoklad), 100 rotulí pak bude stát 200 solidů neboli 10 liber, tj. o 3 libry méně, než potřebujeme. Dostáváme nedostatek 3 (*minus*).

[32] Kapitola je nadepsána *Incipit capitulum 13 de regulis elchatayn, qualiter per ipsam fere omnes questiones abaci soluuntur*, její text začíná takto: *Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur, per quas fere omnium questionum solutio inuenitur; ...* [LP1-I], str. 318.

Fibonacci zapisuje veškeré hodnoty do následujícího schématu (do sloupců zaznamenává oba chybné předpoklady a příslušné výsledky, termíny *plus* a *minus* se zde objevují ve smyslu *přebytek* a *nedostatek*):

Additum ex 13 *multiplicationibus*

4		9
soldi		*soldi*
2		3
minus	$\times$	*plus*
3		2

5
additum ex erroribus

Výsledkem je hodnota

$$2 + \frac{3}{5} = 3 - \frac{2}{5} \text{ solidů } = 2 \text{ solidy a } 7{,}2 \text{ denáru},$$

která se stanoví z výše uvedeného schématu. V obecnější podobě je výsledek možno vyjádřit v tvaru

$$x = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{3+2} = \frac{9+4}{3+2} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5} = 2\frac{36}{60} = 2\frac{7,2}{12} \; .$$

Pravidlo dvou chybných předpokladů se zdůvodní (v naší symbolice) poměrně snadno.

Uvažujme rovnici $100x = 13$, kterou bychom dnes vyjádřili matematický obsah předchozího příkladu. Jejím řešením je $x = \frac{13}{100}$ liber, resp. $x = \frac{20 \cdot 13}{100}$ solidů.

Předpokládejme, že dosazením hodnoty x_1 (v solidech) získáme přebytek a_1 (v librách) a dosazením hodnoty x_2 dostaneme nedostatek a_2. Je tedy:

$$100 \cdot x_1 = 20 \cdot (13 + a_1) \; ,$$
$$100 \cdot x_2 = 20 \cdot (13 - a_2) \; .$$

Sečteme-li první rovnici vynásobenou a_2 a druhou rovnici vynásobenou a_1, dostaneme vztah

$$100 \cdot (x_1 a_2 + x_2 a_1) = 20 \cdot 13 \cdot (a_1 + a_2) \; ;$$

odtud

$$\frac{x_1 a_2 + x_2 a_1}{a_1 + a_2} = \frac{20 \cdot 13}{100} = x \; .$$

Po jednoduché úpravě je

$$x = x_1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot (x_1 - x_2) = x_2 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot (x_1 - x_2) \ .$$

Všechna výše uvedená vyjádření hledané hodnoty x tedy snadno určíme pomocí schématu:

$$\begin{array}{ccc} & x_1 a_2 + x_2 a_1 & \\ x_2 a_1 & & x_1 a_2 \\ & & \\ x_2 & & x_1 \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ \textit{minus} & & \textit{plus} \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ a_2 & & a_1 \\ & a_1 + a_2 & \end{array}$$

S lineárními úlohami se setkáváme i na jiných místech *Liber abaci*. Jedna úloha ze závěru tohoto díla ([LP1-I], str. 458) vede na soustavu rovnic

$$x + y = 10 \ ,$$

$$\frac{10}{x} \cdot y = 20\frac{1}{4} \ ,$$

která se snadno převede na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých; její řešení je

$$x = 3\frac{37}{121} \ , \qquad y = 6\frac{84}{121} \ .$$

Problematiku soustav lineárních rovnic vyšetřuje Fibonacci i ve spisu *Flos*. Jeden z problémů, které řeší, je následující velmi známá úloha z rekreační matematiky ([LP1-II], str. 234–236; viz ukázka), kterou mu zadal Joannes Palermský:

Tři muži mají společný majetek v mincích; první vlastní jednu polovinu, druhý jednu třetinu, třetí jednu šestinu. Pak si mince rozeberou bez ohledu na vlastnické podíly. Po čase se sejdou, první vrátí polovinu toho, co odnesl, druhý třetinu a třetí šestinu; když se o takto shromážděné jmění rozdělí rovným dílem, má každý to, co původně vlastnil. Vypočtěte jejich vlastnické podíly a kolik mincí si každý při dělení odnesl.

Označíme-li počty mincí, které si muži odnesli, symboly x, y, z, zachytíme podmínky úlohy homogenní soustavou tří lineárních rovnic o třech neznámých:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = \frac{1}{2}(x + y + z) \ ,$$

$$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = \frac{1}{3}(x + y + z) \ ,$$

$$\frac{5}{6}z + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = \frac{1}{6}(x + y + z) \ .$$

Fibonacci uvádí „nejmenší" řešení v přirozených číslech:

$$x = 33\,, \qquad y = 13\,, \qquad z = 1\,;$$

tři muži tedy vlastnili dohromady 47 mincí, prvnímu patřilo $23\frac{1}{2}$ mince, druhému $15\frac{2}{3}$, třetímu $7\frac{5}{6}$ mince.[33]

V dopisu mistru Theodorovi řeší Fibonacci úlohu, která vede na nehomogenní soustavu pěti lineárních rovnic o pěti neznámých ([LP1-II], str. 250; viz ukázka):

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 12\,, \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 15\,, \\ x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= 18\,, \\ x_4 + \frac{1}{5}x_5 &= 20\,, \\ x_5 + \frac{1}{6}x_1 &= 23\,. \end{aligned}$$

Jejím řešení je

$$x_1 = 6\frac{612}{721}\,, \quad x_2 = 10\frac{218}{721}\,, \quad x_3 = 14\frac{67}{721}\,, \quad x_4 = 15\frac{453}{721}\,, \quad x_5 = 21\frac{619}{721}\,.$$

O problematice lineárních rovnic a jejich soustav ve Fibonacciho díle pojednává podrobně K. Vogel [VK1] a J. Sesiano v knize [SE], str. 136–145, resp. v práci [SJ].

7. Kvadratické rovnice.

V patnácté kapitole Fibonacciho díla *Liber abaci* ([LP1-I], str. 387–459) je mimo jiné podle arabských vzorů (al-Chwárizmí, Abú Kámil) rozpracována problematika kvadratických rovnic; i v samotném názvu kapitoly je uvedeno, že půjde o algebraické problémy:

... *de questionibus aliebre et almuchabale*[34]

První část poslední kapitoly *Liber abaci* začíná delší pasáží o poměrech mezi třemi, resp. čtyřmi čísly. Fibonacci poznamenává, že na tuto problematiku vede řada geometrických otázek. Úlohy o poměrech, které zde uvádí, řeší kvadratickými rovnicemi; při řešení užívá doplnění na čtverec.

[33] Zajímavé je, že ani vlastnické podíly, ani částky, které muži vraceli ($16\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$), nejsou vyjádřeny přirozenými čísly. Pokud bychom vzali šestinásobek uvedeného řešení, tj. 198, 78, 6, byl by společný majetek 282 mincí, muži by vlastnili 141, 94, 47 mincí a vraceli by 99, 26 a 1 minci.

[34] V názvu třetí části patnácté kapitoly je formulace ... *de solutione quarumdam questionum secundum Modum algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem.*

V jedné úloze ([LP1-I], str. 387) hledá čísla x, y, pro která je

$$x + y = 10 \quad \text{a} \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{9} \,.$$

Jeho řešení odpovídá tomuto sledu úprav:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{y+9}{9} \quad \Longrightarrow \quad \frac{10}{y} = \frac{y+9}{9} \quad \Longrightarrow \quad 90 = y(y+9)$$

$$\Longrightarrow \left(y + 4\frac{1}{2}\right)^2 = 90 + 20\frac{1}{4} = \left(10\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 \,, \; x = 4 \,.$$

Záporný kořen $y = -15$ Fibonacci neuvažuje.

V další úloze ([LP1-I], str. 387) hledá čísla x, y, pro která je

$$x + y = 15 \quad \text{a} \quad \frac{4}{4+x} = \frac{x}{x+y} \,;$$

jeho řešení odpovídá úpravám

$$60 = 4 \cdot 15 = (4+x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad 64 = (2+x)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 6 \,, \; y = 9 \,;$$

záporný kořen $x = -10$ opět neuvažuje.

Úlohu ([LP1-I], str. 387–388), která vede na soustavu rovnic

$$x + y = 13 \,, \qquad \frac{x}{6} = \frac{6}{y} \,,$$

řeší Fibonacci sledem úprav

$$36 = xy \quad \Longrightarrow \quad 36 = x(13 - x) \quad \Longrightarrow \quad 36 + \left(6\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(6\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \left(6\frac{1}{2} - x\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = 4 \,, \; y = 9 \,;$$

Fibonacci při řešení předpokládá, že $x < 6\frac{1}{2}$, a proto neuvažuje druhé řešení $x = 9$, $y = 4$.

Poznamenejme, že ne všechny úlohy zde Fibonacci řeší kvadratickými rovnicemi. Zajímavá je úloha ([LP1-I], str. 388), která vede na soustavu

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} \,, \qquad x + y + z = 19 \,.$$

Fibonacci poznamenává, že má nekonečně mnoho řešení (*hoc potest fieri infinitis modis*), a ukazuje, jak je najít. Vychází z rovností $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ a $1 + 2 + 4 = 7$, ze kterých snadno získá řešení $x = \frac{19}{7}$, $y = \frac{2 \cdot 19}{7}$, $z = \frac{4 \cdot 19}{7}$.

Zajímavá je rovněž úloha na rozdělení čísla 10 na dvě části ([LP1-I], str. 390), která vede na rovnici

$$24 = x(10 - x) \ .$$

Fibonacciho výpočet odpovídá následujícím úpravám:

$$1 = 25 - 24 = 25 - x(10 - x) = (5 - x)^2 \ ;$$

odtud $x = 4$. Druhý kořen $x = 6$ zde chybí; z výpočtu vyplývá, že Fibonacci považuje x za menší z hledaných dvou částí, na které je číslo 10 rozděleno.

Ve druhé části poslední kapitoly ([LP1-I], str. 397–406) nacházíme geometrické problémy. V několika úlohách je procvičována Pythagorova věta; tyto úlohy vedou na jednoduchou kvadratickou rovnici typu $x^2 = a$, tj. spíše na odmocňování.

Ve třetí části poslední kapitoly Fibonacci uvádí klasifikaci rovnic podle al-Chwárizmího a jednotlivé typy úloh řeší ([LP1-I], str. 406–409; viz ukázka). Rozeznává tři jednoduché a tři složené případy,[35] které dnes můžeme zapsat rovnicemi

$$ax^2 = bx \ , \qquad ax^2 = c \ , \qquad bx = c \ ,$$

$$ax^2 + bx = c \ , \qquad ax^2 = bx + c \ , \qquad ax^2 + c = bx \ .$$

Při řešení konkrétní úlohy upravuje Fibonacci rovnici tak, aby byl její vedoucí koeficient (tj. koeficient u x^2) roven 1. Řešení výše uvedených tří složených případů vysvětluje na následujících konkrétních příkladech:

$x^2 + 10x = 39$, tato rovnice má kořen 3,

$x^2 = 10x + 39$, tato rovnice má kořen 13,

$x^2 + 40 = 14x$, tato rovnice má kořeny 4 a 10.

Fibonacci podává slovní popis řešení, který odpovídá známému vzorci udávajícímu kořeny kvadratické rovnice. Jeho návody i konkrétní úlohy více méně odpovídají návodům algebraického traktátu al-Chwárizmího, oba využívají při svém výkladu geometrická zdůvodnění. Zatímco u prvního a druhého typu kvadratické rovnice získává Fibonacci jediný kořen (druhý je záporný), u třetího typu vypočte oba kladné kořeny (pokud jsou reálné) a ví, kdy existuje jen jeden kořen (dvojnásobný); v naší symbolice je

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \ , \qquad x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2} \ , \qquad x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \ .$$

Neznámou Fibonacci nazývá na různých místech svých děl *res* nebo *radix*, její dvojmoc *census* nebo *quadratus*, absolutní člen *numerus simples*, *numerus denarius*, *denarius* či *dragma*. Vyšší mocniny neznámé označuje slovy *cubus* (x^3), *census census*, *census de censu* nebo *censuum census* (x^4), *census census census* nebo *cubus cubi* (x^6), *census census census census* (x^8).

[35] *... he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi.*

Popsané metody Fibonacci užívá při řešení řady problémů. Jako příklad uveďme úlohu ze série příkladů, kdy se má nějaké číslo rozdělit na dvě části, které jsou svázány další podmínkou:

Rozděl deset na dvě části; vyděl jednu druhou a druhou první, výsledky tohoto dělení přičti k 10*, výsledek vynásob jednou z částí a dostaneš* 114.[36]

Úloha vede na soustavu rovnic

$$x + y = 10\ ,$$
$$x \cdot \left(10 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 114\ ,$$

jejíž řešení je podáno dlouhým slovním popisem jednotlivých kroků. Úpravy posléze vedou na kvadratickou rovnici

$$x^2 + 130 = 24\frac{1}{4}x\ ,$$

která má dva kladné kořeny, 8 a $16\frac{1}{4}$; druhý kořen však nevyhovuje zadání úlohy (bylo by $10 = 16\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4}$), řešením úlohy je tedy rozdělení čísla 10 na 8 a 2.

Zajímavá je úloha ([LP1-I], str. 420), která vede na soustavu rovnic

$$x + y = 10\ , \qquad \left(\frac{x}{y} + x\right) \cdot y = 30\ .$$

Fibonacci přechází ke kvadratické rovnici

$$x^2 + 30 = 11x\ ,$$

která má kořeny $x_1 = 5$, $x_2 = 6$; Fibonacci však akceptuje jen kořen $x = 6$, snad proto, že rozdělení čísla 10 tvaru $10 = 5 + 5$ je triviální.

Další úloha ([LP1-I], str. 421) vede na rovnici

$$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4\ .$$

Fibonacci zavádí novou neznámou vztahem $y^2 = x^2 - 3x$ (y^2 je nový *census*). Rovnice $4y = y^2 + 4$ má dvojnásobný kořen $y = 2$; Fibonacci podle svého obecného návodu ke dvojce přičítá a odečítá nulu:

... remanet zephyrum; quo addito, uel diminuto a medietate radicum, redderit 2 *pro radice positi census: ...*

Pro výpočet původní neznámé x je nyní třeba vyřešit kvadratickou rovnici $x^2 - 3x = 4$, která má jeden kladný kořen $x = 4$.

[36] Viz [LP1-I], str. 418. Velmi podobná úloha ([LP1-I], str. 416) vede na soustavu rovnic $x + y = 12$, $\frac{xy}{x-y} = 4\frac{1}{2}$, řešením je $x = 9$ a $y = 3$.

Jedna z dalších úloh ([LP1-I], str. 434–435), kterou Fibonacci řeší, pochází od Abú Kámila. Její slovní vyjádření vede na soustavu rovnic

$$x + y = 10\ ,$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \sqrt{5}\ .$$

Fibonacci uvádí řešení

$$x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50\,000}}\ , \qquad y = 5 + \sqrt{225 - \sqrt{50\,000}}\ ,$$

které vzápětí upravuje na tvar

$$x = \sqrt{125} - 5\ , \qquad y = 15 - \sqrt{125}\ .$$

Další úlohu ([LP1-I], str. 447) od Abú Kámila je možno vyjádřit soustavou rovnic

$$xy = 10\ ,$$
$$xz = y^2\ ,$$
$$x^2 + y^2 = z^2\ ;$$

vede na rovnici $x^8 + 100x^4 = 10\,000$, kterou je možno řešit jako rovnici kvadratickou.

Následující tři příklady, které uvádíme v současné symbolice, vytvořil patrně sám Fibonacci; ve známých algebraických traktátech jeho předchůdců se nevyskytují. První úloha ([LP1-I], str. 427–428) vede na rovnici

$$x^2 = \sqrt{6x}\sqrt{5x} + 10x + 20\ .$$

Fibonacci uvádí řešení

$$x = 5 + \sqrt{7\frac{1}{2} + \sqrt{52\frac{1}{2} + \sqrt{750}}}$$

a jeho přibližnou hodnotu $16\frac{2}{3}$. Druhý kořen $x = 5 + \sqrt{7\frac{1}{2} - \sqrt{52\frac{1}{2} + \sqrt{750}}}$, který je záporný, neuvažuje.

Druhá úloha ([LP1-I], str. 422) vede na rovnici

$$\left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right) = x^2 + 13\ .$$

Fibonacci přechází pomocí jednoduché substituce $x^2 = z$ ke kvadratické rovnici, její kladné řešení je $z = 12$. Řešení dané úlohy je tedy $x = 2\sqrt{3}$ (záporné řešení $x = -2\sqrt{3}$ Fibonacci neuvádí).

Třetí úloha ([LP1-I], str. 428–429), která se opět týká rozdělení čísla 10 na dvě části, vede na soustavu rovnic

$$x + y = 10 ,$$
$$\frac{xy}{x - y} = \sqrt{6} .$$

Fibonacci uvádí řešení

$$x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31} , \qquad y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31} ;$$

druhé řešení

$$x = 5 - \sqrt{6} - \sqrt{31} , \qquad y = 5 + \sqrt{6} + \sqrt{31}$$

neuvažuje, neboť $x < 0$ a $y > 10$.

Poznamenejme, že algebraické metody se vyskytují i v knize *Practica geometriae.* Na počátku druhé části třetí kapitoly o měření obsahů čtyřúhelníků (... *de mensuratione quadrilaterorum*) podává Fibonacci šest pravidel pro řešení lineárních a kvadratických rovnic; jejich řešení zdůvodňuje geometrickými postupy, které jsou trochu odlišné od těch, které prezentuje v *Liber abaci.* Dále řeší řadu problémů o čtyřúhelnících; kromě geometrických řešení zde podává i řešení algebraická – geometrické zadání úlohy vede na lineární nebo kvadratickou rovnici.

Algebraickými postupy řeší i některé problémy osmé kapitoly (... *de quibusdam subtilitatibus geometricis*); počítá např. stranu pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka, je-li dán poloměr kružnice opsané, resp. vepsané.

8. Nula a záporná čísla.

Ve Fibonacciho pracích se na několika místech vyskytuje nula jako skutečné, téměř „plnohodnotné" číslo.

Při provádění devítkové zkoušky se nula objevuje jako zbytek při dělení devíti a je chápána jako skutečné číslo. Např. při výpočtu součinu čísel 123 a 456 ([LP1-I], str. 12; viz ukázka) vychází nula při devítkové zkoušce.

V závěru Fibonacciho spisu *Liber abaci* je mimo jiné série úloh, ve kterých je číslo 10 děleno na dvě části, mezi nimiž je určitá vazba. Jedna z takovýchto úloh ([LP1-I], str. 454–455; viz ukázka) vede na soustavu rovnic

$$x + y = 10 ,$$
$$\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\frac{1}{4} .$$

Stejná úloha se vyskytuje i v závěrečné části algebraického traktátu Abú Kámila.[37] Abú Kámilovo řešení odpovídá dosazení za 10 z první rovnice do druhé, tj. vede k rovnici

$$\frac{x + y}{x} + \frac{x + y}{y} = 6\frac{1}{4} ,$$

[37] Abú Kámil i Fibonacci nejprve zdůvodňují, že pro $x + y = a$ je $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y}$.

odtud

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4\frac{1}{4} ,$$

a úloha tak přejde na kvadratickou rovnici s neznámou $\frac{y}{x}$.

Fibonacci postupuje odlišně. Předpokládá, že je číslo 10 rozděleno na dvě části,

$$x = 2 - z \qquad \text{a} \qquad y = 8 + z ;$$

neznámou z označuje jako „věc" (*res*). Po dosazení za x a y do druhé rovnice, tj.

$$\frac{10}{2-z} + \frac{10}{8+z} = \frac{25}{4} ,$$

snadno dojdeme k rovnici (tento výpočet však u Fibonacciho uveden není)

$$(2 - z)(8 + z) = 16 , \qquad \text{resp.} \qquad z(z + 6) = 0 ,$$

která má kořeny $z_1 = 0$ a $z_2 = -6$. Fibonacci v tomto okamžiku číslo nula považuje za plnohodnotný kořen (ignoruje však záporný kořen $z_2 = -6$):

Postupuj podle algebry (v originále *secundum algebra*) *a zjistíš, že věc* [tj. neznámá z] *je nula* (v originále *rem esse nichil*), *takže jedna ze dvou částí bude* 2 *a druhá* 8.

Fibonacci vzápětí ukazuje modifikovaný postup. Opět předpokládá, že je číslo 10 rozděleno na dvě části, tentokrát je však uvažuje v tvaru

$$x = 2 + z \qquad \text{a} \qquad y = 8 - z ;$$

odtud je možno snadno dojít k rovnici

$$z(z - 6) = 0 ,$$

která má kořeny $z_1 = 0$ a $z_2 = 6$. Fibonacci však nyní považuje za plnohodnotný kořen pouze číslo 6 (a ignoruje kořen $z_1 = 0$).

Je třeba si uvědomit, že Fibonacciho metoda, při které se číslo 10 rozdělí na $2 - z$ a $8 + z$, resp. na $2 + z$ a $8 - z$, je postavena na znalosti výsledku.

U Fibonacciho nalézáme na několika místech i záporná čísla.

Ve dvanácté kapitole *Liber abaci* je úloha o finančních hotovostech pěti osob ([LP1-I], str. 227–228), která vede na následující soustavu pěti lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
x + y + b &= 2(z + u + v) , \\
y + z + b &= 3(u + v + x) , \\
z + u + b &= 4(v + x + y) , \\
u + v + b &= 5(x + y + z) , \\
v + x + b &= 6(y + z + u) ;
\end{aligned}$$

Fibonacci uvádí řešení

$$x = 22, \quad y = -9, \quad z = 57, \quad u = 12, \quad v = 71, \quad b = 267$$

a poznamenává, že úloha je neřešitelná, nepřipustíme-li, že má druhá osoba dluh (*debitum*):

... *hec questio est insolubilis, nisi ponamus, secundum hominem habere debitum* 9, ...

Jiná úloha o finančních hotovostech sedmi osob ([LP1-I], str. 252–253) vede na soustavu sedmi rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z + \frac{1}{2}(u + v + w + t) &= s\ , \\ y + z + u + \frac{1}{3}(v + w + t + x) &= s\ , \\ &\dots\dots \\ t + x + y + \frac{1}{8}(z + u + v + w) &= s\ . \end{aligned}$$

Fibonacci uvádí „nejmenší“ celočíselné řešení

$$x = 507,\ y = 171,\ z = -9,\ u = 1\,347,\ v = 451,\ w = 131,\ t = 1\,431,\ s = 2\,349;$$

opět připouští zápornou hodnotu hotovosti a zdůrazňuje, že úloha je řešitelná jen v případě, kdy má třetí člověk dluh:[38]

... *quare tercius homo habet debitum ipsos* 9, *vel hec questio est insolubilis: sit itaque solubilis cum debito tercij hominis;* ...

Záporné řešení připouští Fibonacci i u následující soustavy rovnic ([LP1-I], str. 254–257):

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}(y + z + u) &= s\ , \\ y + \frac{1}{4}(z + u + x) &= s + 3\ , \\ z + \frac{1}{5}(u + x + y) &= s + 7\ , \\ u + \frac{1}{6}(x + y + z) &= s + 12\ ; \end{aligned}$$

jde o nehomogenní soustavu, ve výsledku se objevují zlomky:

$$x = -2\ , \qquad y = 6\frac{1}{2}\ , \qquad z = 13\frac{1}{2}\ , \qquad u = 20\frac{1}{2}\ ; \qquad s = 11\frac{1}{2}\ .$$

[38] Proto mění koeficienty úlohy na hodnoty $\frac{1}{3}$ až $\frac{1}{9}$ a získává kladné řešení 1 077, 717, 489, 1 637, 997, 657, 1 749; 3 963.

Vnde hec questio cum hijs .IIIJ.or positis residuis solui non potest, nisi primus homo haberet debitum. Vnde si hanc positionem deinceps cum debito primi hominis soluere uolueris, ... remanent bizantij 2; et tot habuit debitum primus homo.

Fibonacci však dochází i ke kladnému řešení $x = 13\frac{2}{3}$, $y = 32\frac{1}{6}$, $z = 44\frac{1}{6}$, $u = 54\frac{1}{6}$; $s = 57\frac{1}{6}$.

Jiná úloha ([LP1-I], str. 296–297) vede na homogenní soustavu

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\Big) = \frac{1}{2}s\,,$$
$$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\Big) = \frac{2}{5}s\,,$$
$$\frac{5}{6}z + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\Big) = \frac{1}{10}s\,;$$

Fibonacci uvádí řešení

$$x = 326\,, \qquad y = 174\,, \qquad z = -30, \qquad s = 470\,.$$

Další úlohu o finančních hotovostech čtyř osob, v jejímž řešení se objeví záporné číslo, nalézáme jak v *Liber abaci*, tak ve spisu *Flos* ([LP1-I], str. 349–352; [LP1-II], str. 238–240; viz ukázka). Vede na soustavu čtyř lineárních rovnic:

$$x + b = 2(y + z)\,,$$
$$y + b = 3(z + t)\,,$$
$$z + b = 4(t + x)\,,$$
$$t + b = 5(x + y)\,.$$

Fibonacci označuje neznámou x jako *dragma* a neznámou y jako *res*. Jeho slovní popis řešení odpovídá v současné symbolice tomuto sledu úprav: z první a druhé rovnice získá

$$z = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}b\,, \qquad t = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{6}b\,,$$

ze třetí a čtvrté vypočte

$$b = \frac{9}{13}x + \frac{38}{13}y\,, \qquad b = \frac{33}{5}x + \frac{22}{5}y\,;$$

tyto vztahy však nemohou platit, jsou-li čísla x a y kladná. Fibonacci tak dochází k řešení

$$x = -1\,, \qquad y = 4\,, \qquad z = 1\,, \qquad t = 4\,, \qquad b = 11\,;$$

poznamenejme, že je to opět „nejmenší“ celočíselné řešení, všechna další řešení jsou jeho násobky. Výskyt záporného řešení Fibonacci komentuje takto:

... hec questio insolubilis est, nisi concedatur, primum hominem habere debitum, et sic in minoribus numeris secundus habet 4, *tercius* 1, *quartus* 4, *bursa* 11*; et debitum primi hominis est* 1*; ... Et si uis cognoscere hanc questionem sine debito primi hominis insolubilem esse, hoc scire poteris per inuestigationem proporcionum ipsorum, ...* ([LP1-I], str. 350)

... hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur, primum hominem habere debitum: ad quod demonstrandum, ponam pro bizantijs primj hominis dragmam; ... ([LP1-II], str. 238)

Ve spisu *Flos* nalézáme další úlohu se záporným řešením ([LP1-II], str. 242–243):

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}(y+z+u) &= 33 \ , \\ y + \frac{1}{3}(z+u+x) &= 35 \ , \\ z + \frac{1}{4}(u+x+y) &= 36 \ , \\ u + \frac{1}{5}(x+y+z) &= 37 \ . \end{aligned}$$

Řešením je

$$x = -3 \ , \qquad y = 18 \ , \qquad z = 25 \ , \qquad u = 29 \ .$$

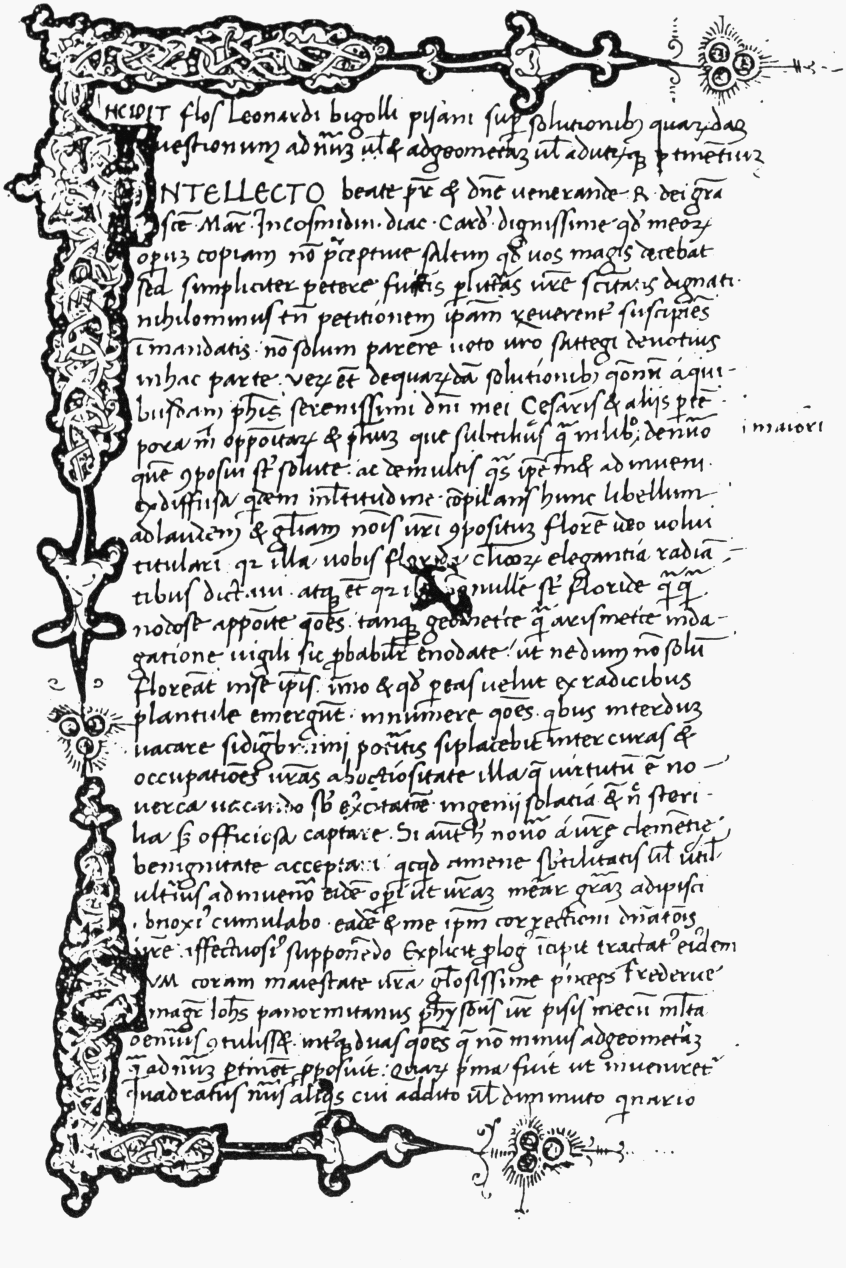
Fibonacci poznamenává, že změní-li se hodnoty na pravých stranách rovnic na 181, 183, 184, 185, má soustava kladné řešení $(1, 94, 125, 141)$.

V závěru svého dopisu mistru Theodorovi uvádí Fibonacci úlohu o finanční hotovosti pěti osob ([LP1-II], str. 251–252; viz ukázka), která vede na nehomogenní soustavu pěti lineárních rovnic o pěti neznámých:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}(y+z+u+v) &= 12 \ , \\ y + \frac{1}{3}(z+u+v+x) &= 15 \ , \\ z + \frac{1}{4}(u+v+x+y) &= 18 \ , \\ u + \frac{1}{5}(v+x+y+z) &= 20 \ , \\ v + \frac{1}{6}(x+y+z+u) &= 23 \ . \end{aligned}$$

Fibonacci udává ve svém dopise jen výsledek, přičemž zdůrazňuje, že první osoba má dluh:

$$x = -13\frac{97}{197} \ , \quad y = 3\frac{297}{394} \ , \quad z = 11\frac{99}{197} \ , \quad u = 15\frac{247}{394} \ , \quad v = 20\frac{20}{197} \ .$$



Fibonacci: *Flos*

počátek textu, tzv. incipit

(Cod. E. 75 P. sup., Biblioteca Ambrosiana, Milano)

Poznamenejme, že záporná čísla, která na několika místech ve Fibonacciho pracích nalézáme, se zde objevila jako důsledek snahy o zachování platnosti algoritmu na řešení určitého typu úloh. Tento algoritmus v řadě případů dobře fungoval; pokud ho chtěl Fibonacci využívat i při řešení dalších úloh stejného typu, musel někdy připustit existenci záporných čísel. Situace byla „ulehčena“ tím, že šlo o úlohy o finančních hotovostech, kdy bylo možno záporné číslo přirozeným a velmi názorným způsobem interpretovat jako dluh. Podrobněji o výskytu záporných čísel (nejen u Fibonacciho) viz [SJ].

Záporná čísla se objevila někdy kolem počátku našeho letopočtu ve staré Číně v díle *Matematika v devíti knihách* (*Ťiou čang suan šu*) při výkladu obecného postupu řešení soustav lineárních rovnic, který je velmi podobný Gaussovu eliminačnímu algoritmu. V sedmém století se záporná čísla vyskytují i v indické matematice u Brahmagupty (nar. 589). U arabských matematiků záporná čísla nenacházíme. V Evropě se objevila v rukopise *De arithmeticis propositionibus*, který byl napsán nejpozději v 10. století.[39] Axiomaticky zavedl záporná čísla ve druhé polovině 19. století německý matematik Hermann Hankel (1839–1873).

9. Kubické rovnice.

Ve spisu *Flos* se Fibonacci zabýval problémem, který můžeme vyjádřit kubickou rovnicí

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \ ;$$

tuto úlohu mu zadal Joannes Palermský ([LP1-II], str. 227–234; viz ukázka).[40]

Fibonacci přistupuje k problému geometricky; výraz $x^3 + 2x^2 + 10x$ chápe jako obsah obdélníka o stranách 10 a 2, který je rozdělen na tři obdélníky: jedna jejich strana je 10, druhá je po řadě $\frac{x^3}{10}$, $\frac{x^2}{5}$, x. Ze vztahu

$$2 = \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} + x$$

je zřejmé, že x není přirozené číslo (neboť $1 < x < 2$); z elementární úvahy o dělitelnosti vyplývá, že x není racionální číslo (dosadíme $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná čísla). Pokud by x bylo iracionálním číslem, které je druhou odmocninou čísla racionálního, byl by součet stran dvou uvažovaných obdélníků roven

$$2 - \frac{x^2}{5} = x \cdot \left(\frac{x^2}{10} + 1\right) \ ;$$

tato veličina by však byla racionální (viz levá strana) a současně iracionální (viz pravá strana).

Fibonacci obdobnými geometrickými postupy prozkoumal všechny typy iracionalit, které jsou uvedeny v 10. knize Eukleidových *Základů* ($\sqrt{n}$, $\sqrt[4]{n}$, $m+\sqrt{n}$,

---

[39] Viz [MK], str. 40–42.

[40] Poznamenejme, že tato kubická rovnice má jen jeden reálný kořen a ten je kladný. Objevila se už u Omara Chajjáma (1048–1131), který však podal pouze geometrické řešení problému pomocí kuželoseček a numerickou hodnotu kořene neuvedl.

$\sqrt{m}+\sqrt{n}$, $\sqrt{m+\sqrt{n}}$, $\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ atd.); zjistil, že kořen uvažované kubické rovnice nemůže mít žádný z těchto tvarů.[41]

Nakonec Fibonacci uvedl přibližnou, ale velmi přesnou hodnotu hledaného kořene; není však jasné, jakým způsobem ji vypočetl; v naší symbolice je vyjádřena součtem

$$1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6} \doteq 1{,}368\,808\,107\,853\,.$$

Podle Cardanova vzorce[42] je kořen x dán vztahem

$$x=\frac{1}{3}\cdot\Big(-2+\sqrt[3]{352+\sqrt{141\,480}}+\sqrt[3]{352-\sqrt{141\,480}}\Big) \doteq 1{,}368\,808\,107\,821.$$

Fibonacciho výsledek je tedy větší než skutečný kořen jen asi o $3\cdot 10^{-11}$.

10. Teorie čísel.

Z hlediska teorie čísel zaujímá Fibonacci čestné místo mezi Diofantem a Fermatem.

Velkou pozornost věnuje úlohám, které vedou na soustavy lineárních rovnic řešené v oboru přirozených (případně celých) čísel. S touto problematikou se setkáváme již v úlohách o směsích či slitinách (tzv. počet směšovací); cílem je vypočítat složení slitiny, která je vyrobena ze známých množství daných složek, nebo vypočítat množství známých složek, která jsou zapotřebí k výrobě daného množství požadované slitiny. Fibonacci v těchto případech většinou převádí váhové poměry jednotlivých složek na poměry přirozených čísel. Uveďme jako příklad následující úlohu ([LP1-I], str. 164):

Zvon z pěti kovů váží 775 *rotulí, výdaje na materiál činily* $162\frac{3}{4}$ *libry. Sto rotulí jednotlivých kovů stojí po řadě* 16, 18, 20, 27, 31 *liber. Jaké je složení zvonu, tj. jaká množství jednotlivých kovů obsahuje?*

Problém vede na soustavu rovnic

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=775\ ,$$
$$\frac{1}{100}\cdot\big(16x_1+18x_2+20x_3+27x_4+31x_5\big)=162\frac{3}{4}\ .$$

Vycházejí např. váhová množství 60, 150, 400, 125, 40; ceny, za které byly tyto kovy pořízeny, jsou po řadě 9 liber a 12 solidů, 27 liber, 80 liber, 33 liber a 15 solidů, 12 liber a 8 solidů.

---

[41] Viz klasický článek [WF1], dále též [GH], str. 101–103, nebo [VQ]. Fibonacciho výsledky mohly pozdějším matematikům naznačovat, že kořen uvedené kubické rovnice není možno sestrojit kružítkem a pravítkem.

[42] Viz J. Bečvář: *Algebra v 16. a 17. století*, in Matematika v 16. a 17. století, Dějiny matematiky, svazek 12, Prometheus, Praha, 1999, str. 161–235.

Na úlohy směšovacího počtu navazují tzv. „ptačí úlohy“ ([LP1-I], str. 165–166). Příklady tohoto typu totiž Fibonacci řeší podobně jako úlohy o míchání směsí.

Poznamenejme, že úlohy podobného typu uvádí Alkuin (asi 735–804) ve své známé sbírce *Propositiones ad acuendos iuvenes* (*Úlohy na bystření rozumu mladíků*) a Abú Kámil (asi 850–930) ve spise *Kniha aritmetických kuriozit*; takovéto úlohy se však vyskytují již ve starých čínských a indických matematických spisech, v Evropě je v dalších stoletích nalézáme u nejrůznějších autorů.

30 *ptáků stojí* 30 *mincí. Jedna koroptev stojí* 3 *mince, holub* 2 *mince a* 2 *vrabci jednu minci. Kolik je kterých?*[43]

Tato úloha vede na soustavu rovnic

$$x + y + z = 30 \ ,$$
$$3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30 \ ;$$

snadno se ukáže,[44] že má v oboru celých nezáporných čísel jen tři řešení,

$$(0, 10, 20) \ , \quad (3, 5, 22) \ , \quad (6, 0, 24) \ .$$

Fibonacci uvažuje pouze řešení v množině přirozených čísel, tj. dochází jen k jedinému řešení.

Následují dvě obdobné úlohy;[45] druhá vede na soustavu rovnic

$$x + y + z + t = 30 \ ,$$
$$3x + 2y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}t = 30 \ ,$$

která má 19 řešení v množině přirozených čísel.

Takovéto „ptačí úlohy“ nalezneme i ve Fibonacciho dopisu mistru Theodorovi ([LP1-II], str. 247, 248; viz ukázky):

30 *ptáků stojí* 30 *mincí. Holub stojí* 2 *mince,* 2 *hrdličky jednu a* 3 *vrabci rovněž jednu minci. Kolik je kterých?*[46]

Úloha vede na soustavu rovnic

$$x + y + z = 30 \ ,$$
$$2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 30 \ .$$

---

[43] Úloha je numericky totožná s 33. úlohou Alkuinovou. Viz [MK], str. 14.

[44] $z = 30 - x - y$, $6x + 4y + z = 60$, a tedy $5x + 3y = 30$, odtud $0 \leq x \leq 6$ a $3|x$. Dostáváme tři možnosti: $x = 0, 3, 6$.

[45] První je numericky totožná s 47. úlohou Alkuinovou. Viz [MK], str. 14.

[46] Tato úloha se objevuje na str. 122 učebnice *Sbírka úloh z algebry*, kterou roku 1876 vydali v Praze F. Hromádko a A. Strnad: *Někdo koupil za* 30 *penízů* 30 *ptáků a sice jedněch* 3, *druhých* 2 *kusy po* 1, *třetích pak kus po* 2 *penízích; kolik dostal kterých?*

Fibonacci: *Liber quadratorum*

počátek textu, tzv. incipit

(Cod. E. 75 P. sup., Biblioteca Ambrosiana, Milano)

Fibonacciho způsob řešení odpovídá dosazení $z = 30-x-y$ do druhé rovnice a „diskusi“ rovnice $10x + y = 120$; číslo 120 dělí na dvě části, z nichž jedna (tj. $10x$) je násobkem deseti a druhá (tj. y) je menší než 30. Udává jen jediné řešení $(11, 10, 9)$; navíc existují dvě řešení, $(10, 20, 0)$ a $(12, 0, 18)$, ve kterých se však vyskytuje nula.

Dále řeší obdobnou úlohu, ve které zamění 30 za 29 a dostává dvě řešení: $(10, 16, 3)$ a $(11, 6, 12)$.

V další úloze kupuje za stejné ceny 15 ptáků za 15 mincí; tato úloha připouští jen dvě řešení $(6, 0, 9)$ a $(5, 10, 0)$, která však Fibonacci neuvažuje – dochází však k řešení $(5\frac{1}{2}, 5, 4\frac{1}{2})$. Proto modifikuje zadání úlohy, kupuje 15 ptáků za 16 mincí a získává jediné řešení $(6, 6, 3)$.

V dalších dvou ptačích úlohách mění Fibonacci celé zadání. První úloha vede na soustavu rovnic

$$x + y + z = 30 ,$$
$$2x + 3y + \frac{1}{3}z = 30 .$$

Fibonacci uvádí jediné řešení $(4, 5, 21)$; existuje však ještě řešení $(12, 0, 18)$ s nulovou hodnotou. Druhá úloha vede na soustavu rovnic

$$x + y + z + t = 24 ,$$
$$3x + 2y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{5}t = 24 .$$

Fibonacci uvádí dvě řešení, $(4, 4, 6, 10)$ a $(5, 2, 12, 5)$, existují však další čtyři řešení s nulovými hodnotami: $(0, 10, 9, 5)$, $(1, 8, 15, 0)$, $(3, 6, 0, 15)$ a $(6, 0, 18, 0)$.

Jiným tématem teorie čísel jsou dokonalá čísla ([LP1-I], str. 283). Fibonacci tento pojem nejprve definuje a pak ukazuje to, co bylo známo již řeckým matematikům: dokonalými čísly jsou čísla tvaru $2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$, kde $2^{n+1} - 1$ je prvočíslo. Tvrdí, že takovýchto dokonalých čísel je nekonečně mnoho (*... poteris in infinitum perfectos numeros reperire*).[47]

Do teorie čísel bychom mohli zařadit i všechny Fibonacciho úlohy, které vedou na soustavy lineárních rovnic řešené v oboru celých (nebo přirozených) čísel; některé takové úlohy již byly výše uvedeny. Následující soustava čtyř rovnic o pěti neznámých, na kterou vede jedna z Fibonacciho úloh ([LP1-I], str. 349), je numericky náročná:

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= s , \\
\frac{1}{6}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 &= s , \\
\frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + x_3 + \frac{1}{6}x_4 &= s , \\
\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{10}x_3 + x_4 &= s .
\end{aligned}$$

[47] Tento problém je dosud otevřen.

Fibonacci dochází k „nejmenšímu“ řešení v množině přirozených čísel:

$$x_1 = 8\,569\,848\ , \quad x_2 = 21\,741\,336\ , \quad x_3 = 26\,955\,060\ , \quad x_4 = 29\,657\,460\ ,$$

$$s = 35\,839\,901\ .$$

Takovéto úlohy se většinou týkají společného majetku několika lidí.

V poslední kapitole *Liber abaci* nalézáme úlohu, která požaduje řešení neurčité rovnice $x^2 + y^2 = a^2$ v oboru racionálních čísel. Fibonacci vychází z nejznámější pythagorejské trojice $3, 4, 5$, tj. z rovnosti

$$16 + 9 = 25\ .$$

Odtud vyplývá rovnost

$$\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1\ ,$$

neboli

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1\ ;$$

odtud Fibonacci dochází k řešení

$$\left(\frac{4a}{5}\right)^2 + \left(\frac{3a}{5}\right)^2 = a^2\ .$$

Jednu úlohu, která patří do teorie čísel, nalézáme v závěru Fibonacciho spisu *Practica geometriae* ([LP1-II], str. 216–218).

Nalezněte čtvercové číslo, které zvětšeno o 5 dává opět čtvercové číslo.

Ve spisu *Liber quadratorum* je však zařazena zajímavější a obtížnější úloha ([LP1-II], str. 271; viz ukázka). Je z veřejného turnaje u Fridricha II., Fibonaccimu ji tam zadal Joannes Palermský:

Najděte racionální čtvercové číslo, které zvětšeno i zmenšeno o 5 dává znovu racionální čtvercové číslo.[48]

Tímto problémem se budeme zabývat poněkud obecněji, místo čísla 5 budeme uvažovat přirozené číslo a; problém pak vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + a &= y^2\ , \\ x^2 - a &= z^2\ , \end{aligned}$$

kterou je třeba řešit v oboru racionálních čísel. Vynásobíme-li obě rovnice čtvercem b^2 společného jmenovatele b čísel x, y, z, dojdeme k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} X^2 + C &= Y^2\ , \\ X^2 - C &= Z^2\ , \end{aligned}$$

[48] Ve spisu *Flos* je uvedeno pouze řešení této úlohy ([LP1-II], str. 227).

kde $X = bx$, $Y = by$, $Z = bz$, $C = ab^2$.

Jestliže pro přirozená čísla X a C existují přirozená čísla Y a Z, pro která výše uvedené vztahy platí, nazývá Fibonacci číslo C *congruum* a čtverec X^2 *quadratus congruentus.*[49] Součtem předchozích dvou rovnic získáme vztah

$$2X^2 = Y^2 + Z^2 ,$$

ze kterého po substituci $Y = u + v$, $Z = u - v$ plyne rovnost

$$X^2 = u^2 + v^2 .$$

Čísla u, v, X tedy tvoří tzv. pythagorejskou trojici; Fibonacci ji předpokládá v tvaru

$$u = 2mn , \qquad v = m^2 - n^2 , \qquad X = m^2 + n^2 .$$

Odtud

$$C = Y^2 - X^2 = 2uv = 4mn(m^2 - n^2) ;$$

o čísle tohoto tvaru Fibonacci dokazuje, že je dělitelné číslem 24.

Nyní se vrátíme k původní soustavě rovnic

$$x^2 + a = y^2 ,$$
$$x^2 - a = z^2 ;$$

obě rovnice máme vynásobit nějakým číslem b^2 tak, aby $C = ab^2$ bylo *congruum*, o kterém víme, že je dělitelné číslem 24. Pro $a = 5$ proto volíme $b = 12$; potom je $C = 5 \cdot 12^2 = 720 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (5^2 - 4^2)$, tj. $m = 5$, $n = 4$, a

$$X = 41 , \qquad Y = 49 , \qquad Z = 31 ,$$

a tedy

$$x = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12} , \qquad y = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12} , \qquad z = \frac{31}{12} = 2\frac{7}{12} .$$

S přihlédnutím na výše uvedené úvahy již nebude vypadat tak tajemně následující jednoduché řešení soustavy

$$x^2 + 5 = y^2 ,$$
$$x^2 - 5 = z^2 .$$

Zřejmě je $y^2 - z^2 = 10$, odtud

$$(y + z)(y - z) = \frac{1440}{144} = \frac{80 \cdot 18}{12^2} .$$

[49] Obecněji o této problematice viz R. Franci: *Numeri congruo-congruenti in codici dei secoli XIV e XV*, Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche 4(1984), str. 3–23.

Nyní položíme

$$y + z = \frac{80}{12}\,, \qquad y - z = \frac{18}{12}\,,$$

odtud

$$y = \frac{49}{12}\,, \qquad z = \frac{31}{12}\,, \qquad x = \frac{41}{12}\,.$$

V poslední části spisu *Liber quadratorum* řeší Fibonacci následující úlohu ([LP1-II], str. 279–283; viz ukázka), kterou mu zadal mistr Theodorus:

Najděte taková racionální čísla x, y, z, aby čísla

$$x + y + z + x^2\,, \qquad x + y + z + x^2 + y^2\,, \qquad x + y + z + x^2 + y^2 + z^2\,,$$

byla čtvercová.

Fibonacci uvádí nejprve iracionální řešení

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}\,, \qquad y = 8\,, \qquad z = 24\,;$$

pro tyto hodnoty je

$$x+y+z+x^2 = 6^2\,, \qquad x+y+z+x^2+y^2 = 10^2\,, \qquad x+y+z+x^2+y^2+z^2 = 26^2\,.$$

Dále vychází z dobré znalosti posloupnosti čtverců přirozených čísel a pythagorejských trojic a nalézá řešení dané úlohy v oboru racionálních čísel; jeho postup naznačíme v moderní symbolice.

Fibonacci vychází z rovností

$$(36k)^2 + (48k)^2 = (60k)^2\,, \qquad (60k)^2 + (144k)^2 = (156k)^2$$

a snaží se najít čísla x a k taková, aby pro $y = 48k$ a $z = 144k$ bylo

$$x + y + z + x^2 = (36k)^2\,;$$

pak bude zřejmě úloha vyřešena. Po dosazení za y, z je

$$x + 192k + x^2 = (36k)^2\,;$$

po provedení substituce $x = 36k - a$ a snadném výpočtu je

$$k = \frac{a(a-1)}{12(6a-19)}\,.$$

Položíme-li nyní $a = 4$, je $k = \frac{1}{5}$ a

$$x = 3\frac{1}{5}\,, \qquad y = 9\frac{3}{5}\,, \qquad z = 28\frac{4}{5}\,;$$

je tedy

$$x+y+z+x^2 = \frac{36^2}{5^2}\,, \quad x+y+z+x^2+y^2 = \frac{60^2}{5^2}\,, \quad x+y+z+x^2+y^2+z^2 = \frac{156^2}{5^2}\,.$$

Jinou volbou čísla a bychom dostali další řešení.

Fibonacci však řeší danou úlohu i v oboru přirozených čísel. Vychází z rovností

$$(7k)^2 + (24k)^2 = (25k)^2\,, \qquad (25k)^2 + (60k)^2 = (65k)^2$$

a snaží se najít čísla x a k taková, aby pro $y = 24k$ a $z = 60k$ bylo

$$x + y + z + x^2 = (7k)^2\,;$$

pak bude zřejmě úloha vyřešena. Po dosazení za y a z je

$$x + 84k + x^2 = (7k)^2\,;$$

po provedení substituce $x = 7k - a$ a snadném výpočtu je

$$k = \frac{a(a-1)}{7(2a-13)}\,.$$

Položíme-li nyní $a = 7$, je $k = 6$ a

$$x = 35\,, \qquad y = 144\,, \qquad z = 360\,;$$

je tedy

$$x+y+z+x^2 = 42^2\,, \quad x+y+z+x^2+y^2 = 150^2\,, \quad x+y+z+x^2+y^2+z^2 = 390^2\,.$$

Fibonacci uvádí ještě jedno řešení v oboru racionálních čísel, které odpovídá volbě $a = 8$, tj. $k = \frac{8}{3}$:

$$x = 10\frac{2}{3}\,, \qquad y = 64\,; \qquad z = 160\,,$$

$$x+y+z+x^2 = \frac{56^2}{3^2}\,, \; x+y+z+x^2+y^2 = \frac{200^2}{3^2}\,, \; x+y+z+x^2+y^2+z^2 = \frac{520^2}{3^2}\,.$$

Fibonacciho spis *Liber quadratorum* končí obdobnou úlohou o čtyřech číslech x_1, x_2, x_3, x_4, pro která jsou čísla

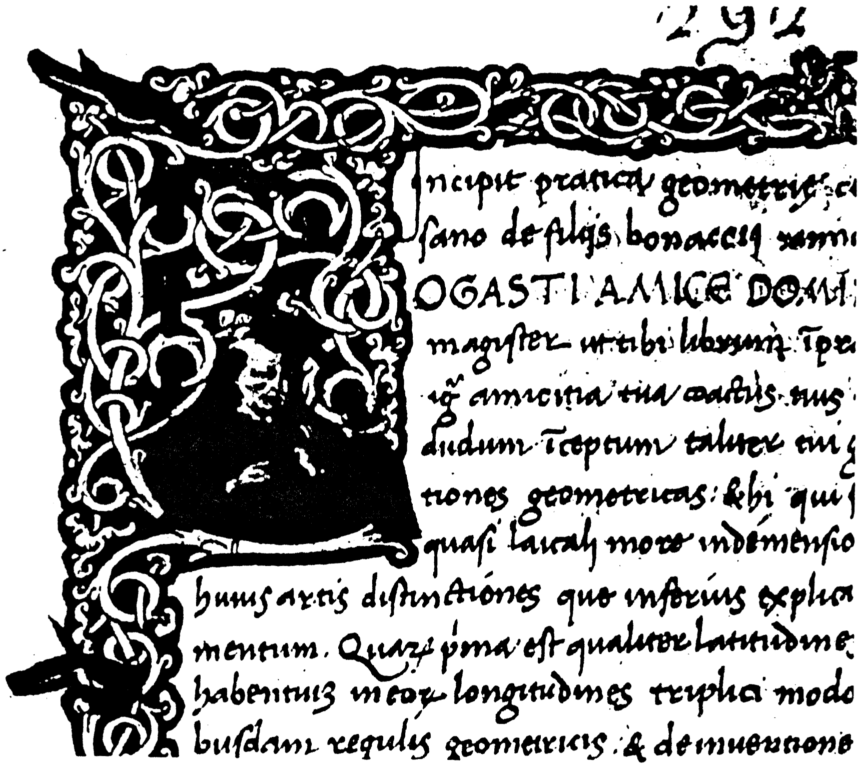
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2\,, \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 + x_2^2\,,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,, \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

čtverce. Fibonacci uvádí pouze výsledek:

$$x_1 = 1\,295\,, \qquad x_2 = 4\,566\frac{6}{7}\,, \qquad x_3 = 11\,417\frac{1}{7}\,, \qquad x_4 = 79\,920\,.$$

Pro tato čísla je

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 = 1\,332^2\,,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 + x_2^2 = \left(4\,757\frac{1}{7}\right)^2\,,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(12\,368\frac{4}{7}\right)^2\,,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \left(80\,871\frac{3}{7}\right)^2\,.$$



Fibonacci: *Practica geometriae*

počátek textu, tzv. incipit

(Cod. Urbinate n.° 292, Biblioteca Vaticana)

11. Geometrie.

Geometrickým záležitostem se Fibonacci věnuje zejména ve spise *Practica geometriae.*

Úvod tohoto spisu začíná vymezením pojmů bod, čára, přímka, rovina, úhel, ..., trojúhelník, čtyřúhelník, mnohoúhelník atd.; Fibonacci je zde inspirován Eukleidovými *Základy*. První část spisu ([LP1-II], str. 5–18) je věnována násobení geometrických veličin, využívány jsou zde některé věty Eukleidových *Základů*, např. ty, které v geometrické podobě vyjadřují distributivní zákony.

Druhá a pátá část je věnována odmocninám, jak už bylo výše uvedeno.

Třetí část tohoto díla ([LP1-II], str. 30–110) pojednává o „měření obrazců“ (... *de mensuratione omnium camporum*), jako je trojúhelník, čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník, mnohoúhelník, kruh; jde hlavně o výpočty obsahů těchto útvarů ([LP1-II], str. 30–31, 32, 33, 34, 56, 77, 78; viz ukázky). Najdeme zde i to, že každý mnohoúhelník je možno rozdělit na trojúhelníky ([LP1-II], str. 83; viz ukázka), dále např. obecný návod na výpočet obvodu a obsahu kruhu a konkrétní výpočet pro kruh s průměrem 14, kde jako π je použita hodnota $\frac{22}{7}$ ([LP1-II], str. 86; viz ukázka), i konstrukci strany pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku ([LP1-II], str. 105; viz ukázka).

Velmi zajímavou pasáží je výpočet konstanty, kterou dnes označujeme π; Fibonacci reprodukuje Archimédův výpočet ([LP1-II], str. 88–91), tj. počítá poměr obvodu pravidelného vepsaného, resp. opsaného 96-tiúhelníka k průměru.[50] Jeho výsledek můžeme v dnešní symbolice vyjádřit nerovnostmi

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}} .$$

Protože aritmetický průměr čísel $\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$ je $\frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3}$, dochází Fibonacci k přibližné hodnotě[51]

$$\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275} ,$$

což je $3,14\overline{18}$. Pro různé další výpočty týkající se kruhu (např. úlohy o úseči a výseči) slouží tabulka udávající závislost velikostí úhlů a délek příslušných tětiv ([LP1-II], str. 96); velikostí úhlu se zde rozumí délka příslušného oblouku na kružnici o průměru 42 *prutů*. Délky tětiv i velikosti úhlů jsou udávány v prutech, stopách, uncích a bodech. Např. úhlu 66 prutů (tj. přímý úhel) odpovídá

---

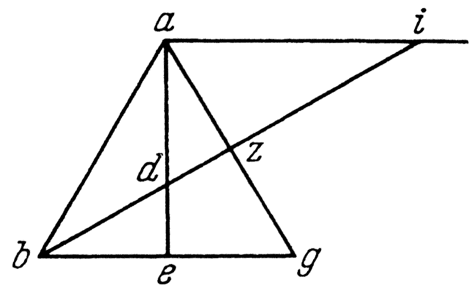
[50] Viz např. klasický článek [WH].

[51] ... *erit proportio circulj ad suum dyametrum, sicut* 1 440 *ad* $\frac{1}{3}$458, *cum sint in medio inter* $\frac{4}{9}$458 *et* $\frac{1}{5}$458. *Sed proportio de* 1 440 *ad* $\frac{1}{3}$458 *est sicut triplum unius numerorum ad triplum alterius, hoc est sicut* 4 320 *ad* 1 375*; quorum proportio in minimis numeris est sicut* 864 *ad* 275*: sed proportio de* 864 *ad* 275*, minus* $\frac{1}{11}$*, est sicut* $\frac{1}{7}$3 *ad* 1*; ...* ([LP1-II], str. 91)

tětiva 42 prutů (průměr), úhlu 33 prutů (tj. pravý úhel) odpovídá tětiva 29 prutů, 4 stopy, 3 unce a 98 bodů atd.[52]

Ve čtvrté části (... *de diuisione camporum inter consortes*, [LP1-II], str. 110–148) probírá Fibonacci dělení útvarů na části; děleny jsou zde trojúhelníky, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky, kruh a jeho části. Začíná dělením trojúhelníku na dvě stejné části přímkou, která jde jeho vrcholem ([LP1-II], str. 110; viz ukázka).

Fibonacciho původním výsledkem je patrně důkaz faktu, že *těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě* ([LP1-II], str. 112–113; viz ukázka); to znal již Archimédés, důkaz se však z antiky nezachoval. Ze shodnosti a podobnosti trojúhelníků *azi* a *gzb*, resp. *aid* a *ebd* (viz obrázek) Fibonacci dokazuje, že průsečík těžnic dělí těžnice v poměru 2 : 1 a že je tedy jediný.



Šestá část ([LP1-II], str. 158–202) se týká „měření těles“ (... *in dimensione corporum*), zejména jehlanu a koule; pozornost je rovněž věnována zlatému řezu. Výpočet povrchu a objemu koule ([LP1-II], str. 185–186) Fibonacci ukazuje na příkladu koule o průměru 7 (vychází 154 a $179\frac{2}{3}$).

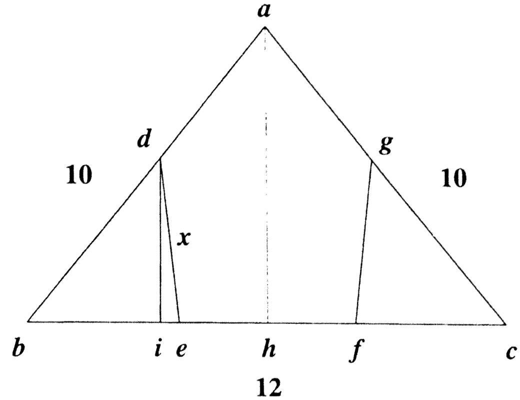
Krátká sedmá část (... *de inuentione altitudinum rerum eleuatarum, et profunditatum atque longitudinum planitierum*, [LP1-II], str. 202–206) je věnována zeměměřickým metodám určování vzdáleností a výšek.

V osmé části (... *de quibusdam subtilitatibus geometricis*, [LP1-II], str. 207–224) se Fibonacci zabývá výpočtem délek stran a úhlopříček pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka, je-li dán poloměr kružnice opsané či vepsané a naopak výpočtem poloměrů těchto kružnic, je-li dána délka strany pravidelného pětiúhelníka či desetiúhelníka. Tato problematika je zjevně inspirována 13. knihou Eukleidových *Základů*. Rovněž zde najdeme různé úlohy o vepsaných čtyřúhelnících do trojúhelníka.

V dopise mistru Theodorovi řeší Fibonacci tuto úlohu ([LP1-II], str. 249–250; viz ukázka):

[52] Prut je šest stop, stopa je 18 uncí a unce je 20 bodů. ... *Est enim pertica sex peduum; et pes est decem et octo unciarum; et uncia uiginti punctorum; uel pertica est unciarum* .108. *et punctorum* 2160.*; et suprascripte corde* .66. *intelliguntur esse protracte in semicirculo uno, cuius dyameter est* 42 *perticarum;* ... ([LP1-II], str. 95)

Vypočtěte délku strany rovnostranného pětiúhelníka, který je vepsán do rovnoramenného trojúhelníka se základnou délky 12 *a rameny délky* 10.



Při řešení Fibonacci využívá podobnosti trojúhelníků a Pythagorovy věty pro trojúhelník *die* (viz obrázek); v naší symbolice je

$$de = x\,, \qquad di = 8 - \frac{4}{5}x\,, \qquad ie = \frac{1}{10}x\,,$$

$$x^2 = \left(8 - \frac{8}{10}x\right)^2 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2\,;$$

Fibonacci tak dochází ke kvadratické rovnici

$$x^2 + 36\frac{4}{7}x = 182\frac{6}{7}\,,$$

kterou řeší pomocí „pravidel algebry“. Nakonec dochází k přibližné hodnotě

$$4 + \frac{27}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{40}{60^3} + \frac{50}{60^4} \doteq 4{,}456\,855\,709\,9\,,$$

která je správná na osmi desetinných místech, neboť

$$x \doteq 4{,}456\,855\,705\,3\,.$$

Geometrické úlohy, poznatky a postupy je možno nalézt i na dalších místech Fibonacciho děl.[53] Připomeňme např. poměrně časté využití Pythagorovy věty, reprezentaci čísel úsečkami a rovinnými útvary, geometrické vyjadřování odmocnin pomocí Eukleidovy věty o výšce, geometrická zdůvodnění metod řešení kvadratických rovnic i různé problémy a úlohy, které mají alespoň částečně geometrický charakter.[54]

[53] Např. druhá část poslední kapitoly *Liber abaci* se nazývá ... *de questionibus geometriae pertinentibus*.

[54] Některé tyto úlohy jsou známé z rekreační matematiky, např. úloha o dvou věžích a studni ([LP1-I], str. 398; [KAG], str. 115). Rovněž lze připomenout různé úlohy o nádržích; v jedné z nich je do nádrže ponořována koule (*De cisterna, in qua eiciatur spera rotunda*, [LP1-I], str. 404–405).

13. Označení veličin písmeny.

Fibonacci užívá na některých místech svých děl písmena k označení čísel a veličin; naznačuje tak cestu k obecnému přístupu k řešení úloh, kdy již nezáleží na konkrétním číselném zadání, ale na matematické podstatě úlohy. Důležité kroky v tomto směru učinili později zejména F. Viète (1540–1603) a R. Descartes (1596–1650).

Pro odlišení matematických symbolů od obyčejných písmen využívá Fibonacci tečky; veličiny označuje např. $.a.$ nebo $.b.$ Při řešení geometrických úloh nebo při interpretování čísel úsečkami často využívá dvou písmen, např. $.a.b.$; písmena a, b vlastně označují koncové body příslušné úsečky. Na některých místech jsme již tento Fibonacciho přístup demonstrovali (např. v předchozí partii o geometrii).

Fibonacciho obecný postup při řešení konkrétních problémů můžeme ukázat na následující úloze.

Pět koní spotřebuje za devět dnů šest váhových jednotek ovsa. Za kolik dnů spotřebuje deset koní šestnáct stejných váhových jednotek ovsa.

Fibonacci řeší úlohu obecně: a koní spotřebuje b ovsa v c dnech, d koní spotřebuje e ovsa v f dnech. Součin $a \cdot e \cdot c$ se rovná součinu $d \cdot b \cdot f$ a odtud vyplývá vztah udávající hledanou hodnotu.

14. Ukázky z Fibonacciho díla.

Následující ukázky z Fibonacciho díla jsou převzaty z [LP1]. Při porovnávání textů v [LP1] a [LP2] bylo zjištěno, že publikace [LP2] obsahuje velké množství chyb (vynechaná slova i celé části textu, chyby v číslech atd.). I v [LP1] je však řada nedůsledností v latině, v označení geometrických veličin, čísel apod. Některé jsou patrně již v rukopise, některé asi vznikly při sazbě.

LIBER ABACI

Incipit liber Abaci Compositus a leonardo filio Bonacij Pisano In Anno. M° cc° ij.°

SCRIPSISTis mihi domine mi magister Michael Scotte, summe philosophe, vt librum de numero, quem dudum composui, uobis transcriberem: vnde uestrae obsecundans postulationi, ipsum subtiliori perscrutans Indagine ad uestrum honorem et aliorum multorum utilitatem correxi. In cuius correctione quedam necessaria addidj, et quedam superflua resecaui. In quo plenam numerorum doctrinam edidj, iuxta modum indorum, quem modum in ipsa scientia prestantiorem elegi. ... ([LP1-I], str. 1)

* * *

Explicit prologus. Incipiunt capitula.

DE cognitione nouem figurarum yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci.

De multiplicatione integrorum numerorum.

De additione ipsorum ad inuicem.

De extractione minorum numerorum ex maioribus.

De diuisione integrarum (*sic*) numerorum per integros.

De multiplicatione integrarum (*sic*) numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis.

De additione ac extractione et diuisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.

De emptione et venditione rerum uenalium et similium.

De baractis rerum uenalium et de emptione bolsonalie, et quibusdam regulis similibus.

De societatibus factis inter consocios.

De consolamine monetarum atque eorum regulis, que ad consolamen pertinent.

De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus.

De regula elcataym qualiter per ipsam fere omnes erratice questiones soluantur.

De reperiendis radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et diuisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum.

De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et almuchabale.

Incipit primum capitulum.

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cvm his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitatum perfusa collectio siue congregatio unitatum, que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus, que sunt ab uno usque in decem, constat. Secundus ex decenis, que sunt a decem usque in centum, fit. Tertius fit ex centenis que sunt a centum usque in mille. Quartus fit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia, et sic sequentium graduum in infinitum, quilibet ex decuplo sui antecedentis constat. ... ([LP1-I], str. 2)

* * *

... Cum quattuor namque a mille usque in decem milia, ut in sequenti cum figuris numeris super notatis ostenditur.

M. I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMMDC
1 001	2 023	3 022	3 020	5 600

MMM	MCXI	MCCXXXIIII	MMMMCCCXXI
3 000	1 111	1 234	4 321

Et sic in reliquis numeris est procedendum. Cum quinque namque figuris scribuntur omnes numeri, incipiendo a decem milia usque ad centum milia. Cum sex uero, a centum milibus usque in mille milia, et sic deinceps, addendo figuram figuris, numerus gradatim in decuplum ascendit. Vnde si contigerit quod aliquem numerum multarum figurarum propter multitudinem figurarum, quis legere uel intelligere nequeat, qualiter legere et intelligere ipsum debeat, ostendere procurabo.

DE prima itaque figura, hoc est de figura primi gradus, dicat unum.

DE secunda que est in secundo gradu, dicat decem.

DE tertia que erit in tertio gradu, dicat centum, et adcentet eam in superiori parte.

DE quarta namque figura eiusdem numeri, dicat mille, et adcentet eam in inferiori parte.

DE quinta uero dicat decem milia.

DE sexta itaque centum milia, et adcentet eam in superiori parte.

DE septima dicat mille milia, et adcentet eam rursum in inferiori parte.

DE octaua dicat decem milia milium.

DE nona dicat centum milia milium, et adcentet eam in superiori parte.

DE decima dicat mille milia milium, et adcentet eam in inferiori parte; et sic semper per hos tres numeros, scilicet per millenos, et decem millenos, et centum millenos et adcentando millenos in inferiori parte, et centum millenos in superiori, usque ad ultimum gradum numeri studeat adcentare. ... ([LP1-I], str. 3–4)

* * *

Si autem inequales numeros quis multiplicare uoluerit, eadem uia et ordine erunt multiplicandi; ut si oportuerit multiplicare 123 cum 456, scribantur ad inuicem numeri ut supradictum est, ut multiplicentur 3 per 6, erunt 18: ponantur 8, retineatur 1 et multiplicentur 3 per 5, erunt 15, que addantur cum 1 seruato, erunt 16 et 6 per 2, et addantur cum 16, erunt 28: ponantur 8 et retineantur 2, et multiplicentur 3 per 4 et 6 per 1 et 2 per 5, et addatur cum 2 seruatis, erunt 30: ponatur 0, retineantur 3, et multiplicentur 2 per 4 et 5 per 1, et addantur cum 3 seruatis, erunt 16: ponantur 6, et retineantur 1, cum quo addatur multiplicatio de 1 in 4, erunt 5 que ponantur, et habebitur pro summa multiplicationis dicte 56 088. Si autem hoc probare uoluerit, iungantur figure de 123, erunt 6, et figure de 456, erunt 15, de quo numero dematur 9, remanebunt 6, que multiplicentur cum 6, erunt 36, quibus per 9 diuisis remanet 0 quod pro pensa habeatur. Tunc colligantur figure que sunt in summa dicte multiplicationis, erunt 27, quibus per nouenarium diuisis, remanet 0, ut expedit pro pensa remanere. ... ([LP1-I], str. 12)

* * *

Item si uoluerit scire collectionem de 123 cum 4 567, describat eos ut hic cernuntur; et addat 7 cum 3, erunt 10; ponat 0 et retineat 1 quod addat cum 6 et cum 2, erunt 9 que ponat. Item addat 5 cum 1 que sunt in tertio gradu, erunt 6 que ponat super eundem gradum, et per 4 que sunt in quarto gradu inferioris numeri, ponet 4 in quarto gradu exeuntis summe, cum non sit aliqua figura super ipsa in alio numero, scilicet in 123, et sic habebit pro eorum additatione 4 690. ... ([LP1-I], str. 19)

* * *

Item si uoluerit extrahere 28 391 de 81 728, extrahat 1 de 8, remanent 7 que ponat et 9 extrahat de 12, remanent 3 que ponat, et retineat 1 quod addat cum 3, erunt 4 que extrahat de 7, remanent 3 que ponat. Item 8 que sunt in quarto gradu minoris numeri extrahat de 11, scilicet de 1 quod est in eodem gradu maioris numeri, et de decenario ei super addito remanent 3 que ponat et retineat 1 quod addat cum ultima figura minoris numeri, scilicet cum 2, erunt 3 que extrahat de ultima figura maioris numeri, scilicet de 8, remanent 5 que ponat; et sic habebit 53 337 pro residuo dicte extractionis.

Probatio.

Si autem pensam prescriptarum extractionum, uel quarumlibet aliarum quis nosse uoluerit, accipiat pensam utrorumque numerorum secundum quod in multiplicationibus edocuimus. Et extrahat pensam minoris numeri, si possibile fuerit, de pensa maioris numeri; sin autem addat super pensam maioris numeri numerum pense, scilicet 9 et residuum pro pensa eiusdem extractionis habeatur. Verbi gratia: pensa maioris numeri, scilicet de 81 728 est 8 et minoris, scilicet de 28 391 est 5; et extractis 5 de 8, remanent pro pensa 3 ut in summa neutraliter residui extractionis reperitur. ([LP1-I], str. 23)

* * *

Diuisio de 13 976 *per* 23.

ITem si 13 976 per 23 quis diuidere uoluerit, ponat 23 sub 76; et cum 23 sint plus quam 13, scilicet de numero duarum ultimarum figurarum diuidendi numeri, accipiende sunt tres ipse ultime figure, quarum numerus est 139. Vnde incipiendus est ultimus gradus exeuntis numeri sub eisdem 9; ponat ibi 6, que sic inueniuntur per materiam dicti arbitrii, scilicet quod debemus relinquere primam figuram de 139, scilicet 9, remanent 13, que debemus diuidere per 2: quia 23 proprior est 20 quam alio decenario numero, exibunt 6 et semis. Vnde cum debeamus ponere minus, cum 23 sint plus 20, relinquimus ipsum semis, et ponemus 6 sub 9, ut diximus; et multiplicet ipsa 6 per 2 de 23, erunt 12, que extrahat de 13, remanet 1, quod ponat super 3 et copulet ipsum cum 9, erunt 19. Et multiplicet 6 per 3 que sunt in 23, erunt 18, que extrahat de 19, remanet 1, quod ponat super 9, ut in prima descriptione cernitur. Et copulet ipsum 1 cum 7 que antecedit eum in numeris, erunt 17; et cum ipsa 17 minus sint quam 23, ponendum est zephirum sub ipsa 7 et 6 que sunt in primo gradu numeri sunt cum ipsis 17, copulanda erunt 176: post hec ponat sub dicta 6 talem figuram, que multiplicata in 23 faciat fere 176; eritque 7 prescripta ratione, hoc est minus medietate de 17: multiplicet itaque ipsa 7 per 2 que sunt in 23, erunt 14, que extrahat de 17, remanent 3, que ponat super 7 et copulet ipsa cum 6 primi gradus, erunt 36, ex quibus extrahat multiplicationem de 7 in 3 de 23, remanent 15, que ponat super uirgulam de 23 ex parte seruatis, ut in hac ultima descriptione describitur. ([LP1-I], str. 33–34)

* * *

Item si uolueris multiplicare $\frac{1}{2}12$ per $\frac{3}{5}23$, describe questionem ut hic ostenditur, et multiplicabis 12 per 2 que sunt sub uirgula, et addes 1 quod est super ipsa 2, erunt medie 25. Item multiplicabis 23 per 5 que sunt sub uirgula, et addas 3 que sunt super ipsa 5, erunt quinte 118: multiplicabis ergo medias 25 per quintas 118, erunt medie quinte, scilicet decime 2 950: quare diuides per 2 et per 5, que sunt sub uirgulis, hoc est per 10, uel debes 2 950 diuidere per 10; quia ex duplo de $\frac{1}{2}12$ in quincuplum de $\frac{3}{5}23$, scilicet de 25 in 118, prouenit decuplum multiplicationis de $\frac{1}{2}12$ in $\frac{3}{5}23$, exibunt integra 295 et nihil aliud, ut superius in questione demonstratur. Potes enim summam dicte multiplicationis aliter reperire, scilicet ut ante quam multiplices 25 per 118, diuide 25 per 5 de uirgula; cum per ipsam integraliter possint diuidi, exibunt 5 que serua; et diuide 118 per 2 que sunt sub uirgula; cum eorum medietas sit integra, exibunt 59, que multiplica per 5 seruata fuerunt quinta pars de 25 erunt 295, que sunt summa dicte multiplicationis, ut superius repertum est: et hec talis est uitatio multum est consideranda, per quam euitatur labor multiplicandi et diuidendi: grauius enim est multiplicare 25 per 118, quam 5 per 59; quorum multiplicationem, scilicet de 5 in 59, non oportet per aliquem ruptum diuidere. Vnde cum debueris multiplicare aliquem numerum per aliquem numerum, et debueris summam illorum per aliquem numerum, uel numeros diuidere, per quem, uel per quos aliquem numerorum illorum possis integraliter diuidere, studebis semper diuidere hos quos integraliter diuidere poteris, ante quam multiplices: deinde multiplicabis residuum numerorum ad inuicem, et diuides per ruptum, uel per ruptos qui remanebunt ex euitatione, quod in sequentibus demonstrare curabimus. Sed primum uolo demonstrare unde talis euitatio procedat. Quia ex multiplicatione de 25 in 118 prouenit decuplum multiplicationis de $\frac{1}{2}12$ in $\frac{3}{5}23$, ut habetur per ea que in antecedente multiplicatione duximus. Ergo ex multiplicatione quinte partis de 25 in 118 proueniet quinta decupli triplicationis de $\frac{1}{2}12$ in $\frac{3}{5}23$, scilicet diuisum ipsius multiplicationis: quare si multiplicetur quinta 25, scilicet 5 per dimidium de 118, scilicet per 59, prouenit ipsa multiplicatio de $\frac{1}{2}12$ in $\frac{3}{5}23$. ([LP1-I], str. 48–49)

* * *

Diuisio de $\frac{1}{10}\frac{7}{9}523$ per $\frac{1}{6}\frac{2}{5}17$.

NAm si $\frac{1}{10}\frac{7}{9}523$ per $\frac{1}{6}\frac{2}{5}17$ diuidere uolueris, diuides 47 149 per 1 581: et si diuiseris 1 581 per 47 149, habebis diuisionem de $\frac{1}{6}\frac{2}{5}17$ in $\frac{1}{10}\frac{7}{9}523$, ut in precedentibus singulariter demonstrauimus. ([LP1-I], str. 75)

* * *

Incipit capitulum octauum
de reperiendis preciis mercium per maiorem guisam.

IN omnibus itaque negotiationibus quattuor numeri proportionales semper reperiuntur, ex quibus tres sunt noti, reliquus uero est ignotus: ...

De cantare pisano cum queritur precium de Rotulis, pars prima.

Cantare autem pisanum habet in se centum partes, quarum unaqueque uocatur Rotulus; et Rotuli habent uncias 12, quarum unaqueque ponderat denarios $\frac{1}{2}39$ de cantare; et denarius est carubbe 6, et carrubba est grana quattuor frumenti. Quod cantare si uendatur pro libris XL; et queratur quantum ualeant Rotuli 5: quia tres noti numeri preponuntur in hac positione, sicuti superius necesse fore prediximus, scilicet Rotuli 100, et libre 40, et Rotuli 5, quorum duo sunt unius generis, scilicet Rotuli 100 et Rotuli 5; que 100 sunt merces. Aliter uero, scilicet 40, est alterius generis, scilicet pretii; et est pretium dictorum 100 Rotulorum: quare, ut prediximus, describantur Rotuli 100, et libre 40 in una linea, retro uidelicet scribendo: deinde Rotuli 5 scribantur sub Rotulis 100, ut hic superius ostenditur; et erunt duo numeri unius generis, unus sub alio, ut prediximus, scilicet Rotuli 5 sub Rotulis 100: tunc, ipsis ita descriptis, multiplicabis numeros, qui sunt ex aduerso, scilicet 5 per 40, erunt 200; que diuide per 100, exibunt libre 2 pro pretio illorum 5 Rotulorum, que 2 describuntur sub 40: quia ille numerus, qui ex diuisione peruenit, semper est ex genere illius solius numeri, qui est in tribus dictis numeris: unde manifestum est, quod ex quattuor numeris qui ponuntur in mercationibus, duo illorum sunt merces, et duo illorum sunt pretia; et sunt ita proportionales, quia sicut 100, scilicet merces, est ad suum pretium, scilicet ad 40; ita 5, scilicet merces, erit ad suum pretium, scilicet ad 2. Nam 100 ad 40 sunt quinque medietates eorum: similiter et 5 ad 2 sunt quinque medietates eorum. Item sicut 40, scilicet pretium, est ad 100, scilicet ad suam mercem; ita 2 erunt ad suam mercem, scilicet ad 5: nam 40 sunt duo quinte de 100, et 2 sunt duo $\frac{1}{5}$ de 5: permutatim quoque, sicut merces est ad mercem, scilicet 5 ad 100; que sunt eius $\frac{1}{20}$; ita pretium est ad pretium, scilicet 2 ad 40: uel, sicut 100 sunt ad 5, que sunt uicuplum eorum, ita 40 sunt ad 2; et per istas proportiones poteris ex arbitrio colligere, si quartus numerus ignotus recte inuentus fuerit, prout demonstrabitur suo loco.

De eodem cum queritur merces de libris.

ITem Rotuli 100 per libras 40; quot Rotulos habuero per libras 2: quia in his tribus numeris duo sunt ex genere pretii, ... ([LP1-I], str. 83–85)

* * *

... Verbi gratia brachia 20 panni ualeant libras 3 pisaninorum; et Rotuli 42 cotonis ualeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot Rotuli cotonis habebuntur. Pone itaque brachia 20 in tabula; post que pone libras 3, scilicet eorum pretium, sub quibus pone libras 5; post quas 5 pone Rotulos 42; deinde brachia 50 pone sub brachiis 20, et multiplica 50 per 3, que sunt eis ex aduerso, erunt 150; que multiplica per 42, cum sint ex aduerso eisdem tribus; et quot prouenerit diuide per reliquos numeros, scilicet per 20 et per 5, hoc est per 100, uenient 63; et tot Rotuli bombicis habebuntur pro brachiis 50 panni. ... ([LP1-I], str. 118)

* * *

De baractis monetarum cum plures monete inter similes.

IMperiales 12 ualent pisaninos 31, et soldus Ianuinorum ualet pisaninos 23, et soldus turnensium ualet Ianuinos 13, et soldus Barcellonensium ualet turnenses 11; queritur de imperialibus 15 quot barcellonenses ualeant. Secundum quidem uulgarem modum consideratur primum de imperialibus 15 quot pisaninos ualeant; ualent enim pisaninos $\frac{3}{4}38$: ex quibus consideratur quot Ianuinos ualeant; ualent enim Ianuinos $\frac{5}{23}20$: ex quibus consideratur quot turnenses ualeant; ualent enim turnenses $\frac{3\;\;15}{13\;\;23}18$, scilicet parum minus de turnensibus $\frac{2}{3}18$: ex quibus etiam consideratur iterum quot barcellonenses ualeant; ualent enim parum amplius de barcellonensibus $\frac{1}{3}20$, qui sunt pretium de imperialibus 15 prescriptis. Sed secundum artem pones omnes prescriptas monetas in duabus lineis per ordinem, scilicet in superiori linea imperiales 12; et pisaninos 31, retro scribendo, et in inferiori Ianuinos 12, et pisaninos 23; ita ut sint pisanini sub pisaninis, et in superiori linea turnenses 12, et Ianuini 13; ita ut sint Ianuini 13 super Ianuinos 12: deinde sub turnensibus 12 pones turnenses 11; et retro in eadem linea pones barcellonenses 12; et sic habes in superiori linea imperiales 12, et pisaninos 31, et Ianuinos 13, et turnenses 12: in inferiori pisaninos 23, et Ianuinos 12, et turnenses 11, et barcellonenses 12: et quando habet imperiales ad cambiandum, scilicet 15, pones ipsos sub imperialibus 12, ut hic ostenditur; et multiplicabis ipsos 15 per pisaninos 31, cum sint ex aduerso; quorum summam multiplicabis per ianuinos 12, qui sunt ex aduerso eisdem 31; cuius multiplicationis summam multiplicabis iterum per turnenses 12; cum sint ex aduerso dictis Ianuinis 12; quorum multiplicationis summam multiplicabis iterum per barcellonenses 12; cum sint similiter ex aduerso dictis turnensibus 12; quam totam summam diuides per imperiales 12, et per pisaninos 23, et per ianuinos 13, et per turnenses 11; et euitabis quod euitare poteris, exibunt barcellonenses $\frac{3\;\;\;3\;\;\;8}{11\;13\;23}20$ pro pretio de imperialibus 15, scilicet parum plus de barcellonensibus $\frac{1}{3}20$, ut prediximus. ... ([LP1-I], str. 126–127)

* * *

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

QVidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 ...
... scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cun undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus. ([LP1-I], str. 283–284)

* * *

Septem uetule uadunt romam; quarum quelibet habet burdones 7; et in quolibet burdone sunt saculi 7; et in quolibet saculo panes 7; et quilibet panis habet cultellos 7; et quilibet cultellus habet uaginas 7. Queritur summa omnium predictorum. Primum quidem multiplica numerum uetularum, scilicet 7, per numerum burdonorum, scilicet per 7, erunt burdones 49; quos multiplica per numerum tascarum, scilicet per 7, erunt tasche 343; quas multiplica per numerum panum unius tasche, scilicet per 7, erunt panes 2 401; quos multiplica per numerum cultellorum unius panis, scilicet per 7, erunt cultelli 16 807; quos multiplica per numerum uaginarum unius cultelli, scilicet per 7, erunt uagine 117 649; quibus iunctis cum cultellis 16 807, et cum panibus 2 401, et cum saculis 343, et cum burdonibus 49, et cum netulis 7, erunt in summa 137 256, ut in descriptione ostenditur. Aliter quot sunt genera rerum uniuscuiusque uetule, tot septimos pone in quadam uirga, cum genera rerum ascendant per septenarium; et ante ipsam uirgam pone 1 pro una uetularum, et retro uirgam pone 7, scilicet numerum uetularum; et multiplica 1 per prima 7, et 7 $\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{1}{7}$ 1, et adde unum, quod est super ipsa, et erunt 8; que per aliam $\frac{1}{7}$, erunt 57; que multiplica per terciam $\frac{1}{7}$; que per reliquas septimas, et habe pro numero rerum unius uetule 19 608; que multiplica per 7, que posita sunt post uirgulam, erunt 137 256, ut per alium modum inuenimus. ([LP1-I], str. 311–312)

* * *

Incipit pars tertia de solutione quarumdam questionum secundum Modum algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem.

Ad compositionem quidem elgebre (*sic*), et elmulchabale tres proprietates, que sunt in quolibet numero, considerantur, que sunt radix, quadratus, et numerus simples. Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se, et prouenit aliquid. Tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati; et multiplicatus sui quadrati est radix. Vt cum multiplicatur 3 in se, ueniunt 9. Sunt enim 3 radix de 9; et 9 sunt quadratus ternarii. Et cum numerus non habet

respectum ad quadratum uel radicem, tunc sinpliciter numerus appellatur: he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est, quando quadratus, qui census dicitur, equatur radicibus. Secundus quando census equatur numero; tertius quando radix equatur numero. ...
... reliquos tres modos compositos demonstremus. Primus enim modus est, quando census et radices equantur numero. Secundus, quando radices et numerus equantur censui; tercius modus est, quando census et numerus equantur radicibus. Vnde, cum in aliqua questione inuenietur census augmentatus, uel diminutus cum compositione radicum et numeri, tunc omnia reducenda sunt ad censum unum. Verbi gratia: duo census, et decem radices equantur denariis 30. Ergo unus census, et 5 radices equantur denariis 15: ...
... Verbi gratia: census et decem radices equentur 39. Dimidium itaque ex radicibus est 5; quibus in se multiplicatis faciunt 25; quibus additis cum 39 faciunt 64; de quorum radice, que est 8, si auferatur medietas radicum, scilicet 5, remanebunt 3 pro radice quesiti census. Quare census est 9, et ipsius decem radices sunt 30; et sic census, et decem radices equantur 39. ...
... Verbi gratia: census equetur decem radicibus, et denariis 39; addam siquidem quadratum medietatis radicum, scilicet 25 super 39, erunt 64; quorum radici, scilicet 8, superadde 5, scilicet medietatem radicum, prouenient 13 pro radice quesiti census; quare census est 169. ...
... Verbi gratia: census et 40 equantur 14 radicibus; dimidiatis siquidem radicibus, ueniunt 7; de quorum quadrato, scilicet de 49, extrahe 40, remanent 9, quorum radicem, que est 3, extrahe de medietate radicum, scilicet de 7, remanebunt 4 pro radice quesiti census, census est 16; quibus additis cum 40, faciunt 56, que sunt radices 14 eiusdem census, cum ex ducta radice de 16 in 14 uenient 56; uel radicem de 9 addes super 7, erunt 10 pro radice quesiti census; et sic census erit 100; quo addicto cum 40, faciunt 140, que sunt radices 14 de 100, cum ex multiplicatione radicis de 100 in 14 prouenient 140; et sic cum non soluetur questio cum diminutione, soluetur sine dubio cum additatione. ...
([LP1-I], str. 406–409)

* * *

... diuisi 10 in duas partes, et per unam quamque ipsarum diuisi 10, et prouenerunt $\frac{1}{4}6$. Age in hiis secundum quod in consimili questione superius dicta sunt, et inuenies: uel pone pro una partium 2, minus re, et pro alia 8, et rem; et multiplica unam ipsarum in alia, et illud totum per $\frac{1}{4}6$; et quod prouenerit, oppone cum 100, que proueniunt ex ducto 10 in se; et age secundum algebra, et inuenies, rem esse nichil; quare una ipsarum duarum parcium erit 2, et alias (*sic*) 8: et posuerimus unam illarum duarum partium 2 et rem, alia 8, minus re; et multiplicabimus 2 et rem, in 8, minus re; et illud totum ducemus per $\frac{1}{4}6$, quod prouenerit, erit equale 100 dragmis. Vnde cum agimus secundum algebra in hiis inueniemus, rem esse 6; quibus additis cum 2, et extractis de 8, uenient 2 pro una partium, et 8 pro alia. ([LP1-I], str. 455)

* * *

PRACTICA GEOMETRIAE

Incipit pratica geometriae composita a Leonardo pisano de filijs bonaccij anno .M.° cc.° xx.°

ROGASTI AMICE DOMINICE ET REVERENDE magister, ut tibi librum in pratica geometriae conscriberem; igitur amicitia tua coactus, tuis precibus condescendens, opus iam dudum inceptum taliter tui gratia edidi, ut hi qui secundum demonstrationes geometricas: et hi qui secundum uulgarem consuetudinem, quasi laicalj more, in dimensionibus uoluerint operari super .viij. huius artis distinctiones, que inferius explicantur, perfectum inueniant documentum. Quarum prima est, qualiter latitudines camporum quatuor equales angulos habentium in eorum longitudines triplici modo multiplicentur. Secunda est de quibusdam regulis geometricis: et de inuentione quadratarum radicum in tantum quantum eis, qui per rationes solumodo geometricas uoluerint operari, necessarium esse putaui. Tertia de inuentione embadorum omnium camporum cuiuscunque formae. Quarta de diuisione omnium camporum inter consortes. Quinta de radicibus cubicis inueniendis. Sexta de inuentione embadorum omnium corporum cuiuscunque figurae, que continentur tribus dimensionibus, scilicet longitudine, latitudine, et profunditate. Septima de inuentione longitudinum planitierum, et inuentione altitudinum rerum eleuatarum. Optaua de quibusdam subtilitatibus geometricis. Tamen antequam ad harum distinctionum perueniam doctrinam, quedam introductoria necessaria preponenda esse putaui. Ad hec igitur secundum ingenij mei capacitatem perficienda, tuae correctionis aggressus fiducia, hoc opus curaui tuo magisterio destinare, ut que in eo fuerint emendanda, tua sapientia corrigantur.

Incipiunt introductoria.

PVNCTVS est id quod nullam habet dimensionem, idest quod non potest diuidj. Linea est longitudo carens latitudine, cuius termini puncta sunt. Recta linea est que de puncto ad punctum recte protrahitur. Superficies quidem est que latitudinem, et longitudinem tantum habet, cuius termini sunt linee: et est plana, cum undique infra suos terminos super rectas lineas dilatatur. Planus uero angulus est inclinatio duarum linearum sese in plano tangentium, cum non iaceant indirecto; et est rectilineus, cum linee continentes angulum sunt recte. Cumque linea recta super lineam rectam steterit, feceritque circa se duos angulos sibi inuicem equales, dicitur rectus uterque angulus; et linea stans super ea, cui superstat, cathetus, siue perpendicularis appellatur. Amplus uero, uel obtusus angulus est qui maior est recto. Acutus namque qui minor recto inuenitur. Et terminus est finis rei. Figura quidem est que sub uno, uel pluribus terminis iacet. Figura quidem rectilinea est que a rectis lineis circundatur. Trilatere quippe figure sunt que sub tribus rectis lineis continentur.

Quadrilatere uero sunt que quatuor rectis lineis ambiuntur. Multilatere autem figure sunt que sub pluribus quam quatuor lateribus comprehenduntur. Circulus enim est quedam plana figura sub una linea contenpta; que linea uocatur circumferens, uel periferia, infra quem est punctus: a quo omnes recte protracte ad circumferentem lineam sibi inuicem sunt equales: punctus uero ille centrum circulj appellatur. ([LP1-II], str. 1)

* * *

... Colligitur quippe embadum, scilicet area omnium triangulorum ex multiplicatione dimidij cathetus in totam basem, uel ex multiplicatione medietatis basis in totam perpendicularem ... ([LP1-II], str. 30–31)

* * *

IN orthogonio quidem trigono quadratus lateris subtendentis angulum rectum equus est duobus quadratis laterum continentium angulum rectum. ([LP1-II], str. 32)

* * *

AREA omnium trigonorum orthogoniorum colligitur ex multiplicatione unius lateris in dimidium alterius continentibus angulum rectum. ... ([LP1-II], str. 33)

* * *

OMnium trigonorum oxigoniorum area colligitur ex multiplicatione catheti in dimidium basis, uel ex multiplicatione basis in dimidium catheti. ... ([LP1-II], str. 34)

* * *

AREE quidem camporum quadrilaterorum rectos angulos habentium colliguntur, secundum quod superius in alia distinctione docuimus. Qui cum habent latera equalia, multiplicatur unum ex lateribus in se; et cum habent latera inequalia, multiplicantur longitudines ipsorum per latitudines; et sic habemus embadum ipsorum. ... ([LP1-II], str. 56)

* * *

RVMBOIDES quidem est figura paralilograma habens tantum latera opposita, et angulos ut diximus equales. Cumque hanc metiri uolumus, protrahemus in ea dyametrum, per quam figura diuisa erit in duo trigona equalia. Quare si cathetum unius per totam basem, scilicet per dyametrum ipsius multiplicauerimus, reddet aream totius rumboidis. ... ([LP1-II], str. 77)

* * *

... camporum quadrilaterorum, qui habent duo latera equidistantia et inequalia, est figura, que eque caput abscisa dicitur, cuius reliqua duo latera equalia sibi inuicem sunt, ut quadrilaterum *.abcd.*, cuius latus *.ab.* est pertice .8.; et est equidistans lateri *.cd.*, quod latus est pertice 18; quodlibet reliquorum *.ac.* et *.bd.* sit pertice .13. In hac aut figura latus *.a.b.* capitis abscissio, et latus *.cd.* abscissio basis appellatur. Cuius figure embadum colligitur ex multiplicatione catheti in dimidio laterum *.ab.* et *.cd.*; et cathetus ducitur a capite in basim. ... ([LP1-II], str. 78)

* * *

Incipit pars tertia in dimensione camporum plura latera quam quatuor habentium.

MODVS itaque metiendi multilateras figuras est, ut diuidas ipsas in trigonos, et areas omnium trigonorum in unum colligas, et sic habebis aream cuiuslibet multilaterae figure. Et notandum quia multilatera figura, que constat ex quinque lateribus, soluitur adminus in tria trigona. Que uero constant ex sex lateribus in quatuor; et sic semper omnis multilatera figura soluitur in duo trigona minus laterum ipsius ... ([LP1-II], str. 83)

* * *

Incipit pars quarta in dimensione circulorum et eorum partium.

CVM itaque campum rotundum, idest circulum, mensurare desideras, ipsius dyametrj notitiam habeas; quem in $\frac{1}{7}3$ multiplica, uel in .22 extende; et quod ex multiplicatione prouenerit per 7 partire, et habebis quantitatem linee circunferentis, et continentis ipsum circulum. Cum dimidium dyametrj per dimidium circunferentis lineae duxeris, nimirum area ipsius circulj inde proueniet: uel ex quadrato sui dyametrj undecim quartas decimas accipe; et habebis similiter circuli embadum. Vel si secundum pisanum modum mensurare desideras, dyametrum in se multiplica; et quod prouenerit diuide per 7, et habebis panora embadj ipsius circulj. ...

ET si per notitiam circunferentis linee dyametrum circulj habere desideras, ipsam in $\frac{1}{7}3$ diuide, hoc est septuplum eius diuide per 22. ... ([LP1-II], str. 86)

* * *

Et si in circulo *.abgd.* eius dyameter *.bd.* sit .8.; et uis latus penthagonicum, seu decagonicum cadens in ipso circulo reperire, super dyametrum *.b.d.* á centro *.e.* cathetus erigatur *.ea.*; et diuidatur *.ed.* in duo equa super punctum *.z.*; et copuletur recta *.az.*; et iaceat recta *.z.* equalis recte *.az.*, et copuletur recta *.ai.* Dico quidem quod recta *.ai.* latus est penthagonicum: et recta *.ie.* latus est decagonicum; quod sic probatur: quia linea *.ed.* diuisa est in duo equa super *.z.*; et indirecto ipsius adiuncta est linea *.ei.*, erit multiplicatio *.ei.* in *.id.* cum quadrato linee *.ez.* est equalis quadrato lineae *.zi.* Sed *.zi.* recta iacet equalis recte *.az.*, ergo factum ex *.ie.* in *.di.* cum quadrato linee *.ez.* equatur quadrato linee *.az.* Sed quadrato linee *.az.* equantur quadrata linearum *.ae.* et *.ez.*; ergo factum ex *.ie.* in *.id.* cum quadrato lineae *.ze.* equatur duobus quadratis linearum *.ae.* et *.ez.*: comuniter auferatur quadratum linee *.ez.*, remanebit multiplicatio *.ei.* in *.id.* equalis quadrato semidyametri *.ae.*, hoc est quadrato semidyametri *.de.*, cum *.de.* sit equalis linee *.ae.*; ergo linea *.d.i.* diuisa est media, et extrema proportione. ([LP1-II], str. 105)

* * *

Explicit distinctio tertia,
incipit quarta de diuisione camporum inter consortes.

QVARTAM siquidem distinctionem in partes quatuor diuidimus: in prima quarum triangulos: in secunda quadrilateros: in tertia multilateres: in quarta circulos, et eorum portiones diuidere docebimus.

Incipit pars prima de diuisione triangulorum.

CVM itaque triangulum aliquem in duas equas partes ab uno angulorum diuidere uis, ab ipso angulo super dimidium lateris subtendentis ipsi lineam protrahe; et habebis optatum. Verbi gratia: uolumus trigonum *.abg.* á puncto *.a.* in duo equa diuidere: diuidatur siquidem latus *.bg.* in duo equa super punctum *.d.*; et copuletur recta *.ad.*; dico siquidem, trigonum *.abg.* in duo equa trigona esse diuisum: sunt enim trigona *.abd.* et *.adg.* sibi inuicem equalia, cum sint super equales bases, et sub eadem altitudine, que est ductio catheti ab *.a.* in lineam *.bg.*: ... ([LP1-II], str. 110)

* * *

Preparatoria in diuidendis trigonis per datum punctum infra triangulum.

SI á duobus angulis trigoni super dimidium laterum subtendentium ipsos due recte protrahantur, se se proportionabiliter secabunt, ita quod quelibet portio, que est inter angulum et sectionem sui residui est dupla: et si á reliquo angulo super reliquum latus per punctum sectionis recta trahatur: diuidet utique ipsum latus in duo equa. In trigono quidem *.abg.* ab angulis *.abg.* et *.bag.* super dimidium laterum *.ag.* et *.bg.* recte protrahantur *.ae.* et *.bz.* se inuicem secantes super punctum *.d.* Dico quod proportio *.ad.* ad *.de.* est sicut proportio *.bd.* ad *.dz.*; et quelibet ipsarum sui residui est dupla; quod sic probatur: a puncto quidem *.a.* equidistantem recte *.bg.* ducam rectam *.ai.*; et protraham rectam *.bz.* donec concurrat cum *.ai.* in puncto *.i.*, et erunt trigona *.azi.* et *.gzb.* sibi inuicem similia; quare est sicut recta *.az.* ad *.zg.*, ita *.iz.* ad *.zb.*, et *.ia.* ad *.bg.* equalis est enim *.az.* ex *.zg.*; equales ergo erunt *.zi.* ex *.zb.*, et *.ia.* ex *.bg.* Rursus quia similia sunt trigona *.adi.* et *.bde.*, est sicut *.ia.* ad *.be.*, ita *.ad.* ad *.de.*, et *.id.* ad *.db.* Sed *.ia.* rectae equalis est recta *.bg.*; quare est sicut *.bg.* ad *.be.*, ita recta *.ad.* ad *.de.*, et *.id.* ad *.db.*: dupla est enim *.bg.* ex *.be.*; quare dupla est *.ad.* ex *.de.*, et *.id.* ex *.db.*: et quoniam equalis est *.iz.* ex *.zb.*, comuniter si adiungatur recta *.zd.*, erit tota recta *.id.* equalis duabus *.bz.* et *.zd.* Sed *.id.* ostensa est dupla ex *.db.*; quare due recte *.bz.* et *.zd.* duple sunt recte *.bd.*: comuniter si auferatur recta *.db.*, remanebit recta *.bd.* equalis duplo recte *.dz.*; quare *.bd.* ex *.dz.* est dupla: ostensa est enim rectam *.ad.* duplam esse ex *.de.*; ergo est sicut *.ad.* ad *.de.*, ita *.bd.* ad *.dz.*; quod oportebat ostendere. Et si ab angulo *.g.* per punctum *.d.* transeat linea *.gt.* Dico quod latus *.ab.* diuisum est in duo equa super punctum *.t.*: protraham quidem rectam *.gt.* extra triangulum *.abg.*, donec concurrit super punctum *.k.* lineae *.ik.*, et erunt trigona *.adk.* et et (*sic*) *.edg.* sibi inuicem similia; quare est sicut *.ad.* ad *.de.*, ita *.ak.* ad *.ge.*: sed *.ad.* ex *.de.* est dupla; quare recta *.ak.* est dupla recte *.ge.*, cui etiam dupla est recta *.bg.*, cum equalis sit *.be.* ex *.eg.*: que uero eidem dupla sunt, et sibi inuicem sunt equalia; quare equalis est recta *.ak.* recte *.bg.* Rursus quia similia sunt trigona *.atk.* et *.btg.*, est sicut *.ak.* ad *.bg.*, ita *.at.* ad *.tb.*; est enim *.ak.* equalis recte *.bg.*, et *.at.* quidem equalis est recte *.tb.*: diuisum est ergo latus *.ab.* in duo equa á linea *.gt.*; quod oportebat ostendere. ([LP1-II], str. 112–113)

* * *

CVBVS quidem numerus est, qui surgit ex multiplicatione trium equalium numerorum, uel ex aliquo quadrato numero in suam radicem ducto. Vt. .8. et .27., nam .8. surgunt ex multiplicatione de .2. in .2. ducta in .2., uel ex multiplicatione quaternarij in suam radicem, scilicet in .2., et 27 surgunt ex tribus ternarijs, uel ex nouenario ducto in suam radicem, que est .3. Nam radix cubica octonarij est .2.; et radix cubica de .27. est .3.; ... ([LP1-II], str. 148)

* * *

Incipit de multiplicatione radicum cubicarum inter se.

SI VIS multiplicare radicem cubicam de .40. per radicem cubicam de .60., multiplica .40 per 60., erunt .2 400., quorum radix cubica est id quod queris. Et si uis .5. multiplicare per radicem cubicam de .90., cubica .5., erunt .125.: ergo uis multiplicare radicem cubicam de .125. per radicem cubicam de .90.; quare multiplicabis .125. per .90.; et eius quod prouenerit radix cubica est illud quod queris. Et si uis multiplicare duas cubicas radices de 20. per tres radices cubicas de .40., redige eas ad radicem cubicam unius numeri sic: pro duabus radicibus de .20. cubicabis .2., erunt .8.; que multiplica per .20., erunt .160., quorum radix cubica equatur duabus radicibus de .20.: similiter pro tribus radicibus de .40. cubica .3., erunt .27.; que multiplica per .40., erunt .1 080., quorum radix cubica habetur pro tribus radicibus de 40.: multiplica ergo .160. per .1 080.; et eius quod prouenerit radix cubica erit illud quod queris. ... ([LP1-II], str. 155)

* * *

Incipit de diuisione radicarum inter se.

SI uis diuidere radicem cubicam de .100. per radicem cubicam de .5., diuide .100. per .5., prouenient .20., quorum radix cubica est id quod queris. Et si diuiseris .5. per 100, prouenient $\frac{1}{20}$, cuius radix cubica est id quod prouenit ex radice de .5. diuisa in radicem de .100. Et uis diuidere .8. per radicem de .32., cubum de .8., scilicet .512., diuide per .32., uenient .16., quorum radix cubica est id quod queris. Et si uis diuidere radicem de .80. per .2., diuide .80. per cubum binarij, uenient .10., quorum radix cubica est id quod queris. Item si uis diuidere octo radices cubicas de .10. per tres radices cubicas de.5., rediges pluralitatem ipsarum radicum ad radicem unam, et habebis .5 120 pro octo radicibus de .10.; et pro tribus radicibus de .5. habebitur radix de 135. ([LP1-II], str. 156)

* * *

De embado, et superficie rotundae sperae.

Et quia hec que demonstrata sunt, liquida sint et aperta; colligitur quod area superficiei medietatis cuiuscumque sperae est dupla aree maioris circulj cadentis in spera, cuius dyameter est dyameter sperae. Quare area superficiei totius sperae erit quadrupla areae ipsius circulj; que demonstrentur cum numeris. ...
... quia probatum est á sapientibus, quod multiplicatio tertiae partis superficiei sperae in medietatem totius dyametri facit embadum totius sperae. ([LP1-II], str. 185–186)

* * *

LIBER QUADRATORUM

Incipit liber quadratorum compositus á leonardo pisano.
Anni. M. CC. XXV.

CVM Magister dominicus pedibus celsitudinis uestre, princeps gloriosissime domine .F., me pisis duceret presentandum, occurrens Magister Johannes panormitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem; vt inuenirem numerum quadratum, cui quinque additis uel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur: super cuius questionis solutione á me iam inuenta considerans, uidi quod habebat originem solutio ipsa ex multis que quadratis et inter quadratos numeros accidunt. ... ([LP1-II], str. 253)

* * *

Hec questio predicta in prologo libri huius.

Volo inuenire quadratum, cui addito .5. uel diminuto faciat quadratum numerum. Adiaceat congruum, cui quinta pars sit quadrata, eritque 720., cuius quinta pars est .144.; in quo diuide quadratos congruentes eidem .720., quorum primus est .961., secundus est .1 681., tertius autem est .2 401.; et est radix primi quadrati .31. Secundi .41., tertij .49., exibit pro primo quadrato $\frac{97}{144}6$, cuius radix est $\frac{7}{12}$.2., que prouenit ex diuisione .31. in radicem de .144., hoc est in .12.; et pro secundo, hoc est pro quesito quadrato, ueniet $\frac{97}{144}11$, cuius radix est $\frac{5}{12}3$, que prouenit ex diuisione .41. in .12.; et pro ultimo quadrato ueniet $\frac{97}{144}16$, cuius radix est $\frac{1}{12}4$. ... ([LP1-II], str. 271)

* * *

Questio mihi proposita a magistro Theodoro
domini imperatoris phylosopho.

VOlo inuenire tres numeros, qui insimul aggregati cum quadrato primj numeri faciant quadratum numerum. Super quem quadratum, si addatur quadratus secundi, egrediatur inde quadratus numerus; cum quo quadrato, addito quadrato tertij, similiter quadratus numerus inde proueniat. ...

... radix de $\frac{1}{4}4$ minus $\frac{1}{2}$ unius; qui numerus, quamuis sit inratiocinatus, habebitur pro primo numero quesito, et secundus erit .8., tertius 24. ...

ET ut solutio questionis suprascriptae habeatur in numeris ratiocinatis, ...

... habebimus pro radice secundi quadrati $\frac{3}{5}9$, et pro radice tertij $\frac{4}{5}28$; et erit $\frac{3}{5}9$ secundus numerus ex tribus quesitis numeris, et $\frac{4}{5}28$ erit tertius: ... remanebunt $\frac{1}{5}3$ pro primo numero; et sic soluta est hec questio in numeris ratiocinatis; et secundum hunc modum potest solui in infinitis modis.

SOlui etiam hanc questionem in numeris integris, quorum primus fuit 35. Secundus 144., tertius 360., quorum aggregatio surgit in .539.; super quibus addito quadrato primj numeri, scilicet 1 225., veniunt 1 764.; qui numerus quadratus est, et eius radix est .42.: super quo quadrato addito quadrato numeri secundi, qui est 20 736, ueniunt 22 500.; qui numerus quadratus est, et radix eius est .150.: super quo quadrato addito quadrato tertij numeri, scilicet 129 600., veniunt 152 100.; qui numerus quadratus est, et radix eius est .390. ...

... ex quibus etiam quadratis inuenj hos alios tres numeros, scilicet $\frac{2}{3}10$ et 64 et 160. Et non solum per hunc modum tres numeri diuersis modis possunt inuenirj; sed etiam inuenientur quatuor cum quatuor numeris quadratis, quorum duo per ordinem et tres, nec non et omnes simul coniuncti fecerint quadratum numerum. ... Inuenj hos quatuor numeros, quorum primus est 1 295, Secundus $\frac{6}{7}4\,566$, Tertius $\frac{1}{7}11\,417$, Quartus uero est 79 920.; et eorum aggregatio est 97 199. Super quo numero, si addatur quadratus primj numeri, scilicet 1 677 025, venient 1 774 224; qui numerus quadratus est, et eius radix est 1 332. Super quo etiam quadrato ([LP1-II], str. 279–283)

* * *

FLOS

Incipit flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam, uel ad utrumque pertinentium.

INTELLECTO, beate pater et domine uenerande .R. dei gratia $\overline{\text{Sce}}$ $\overline{\text{Mar}}$. In Cosmidin diac. Cardinalis dignissime, quod meorum operum copiam non preceptiue saltim, quod uos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras uestre sanctitatis dignati; nihilominus tamen petitionem ipsam reuerenter suscipiens in mandatis, non solum parere uoto uestro sattegi deuotius in hac parte, ... ([LP1-II], str. 227)

* * *

Explicit prologus; incipit tractatus eiusdem.

CVM coram maiestate uestra, gloriosissime princeps Frederice, magister Iohannes panormitanus, phylosophus uester, pisis mecum multa de numeris contulisset, interque duas questiones, que non minus ad geometriam quam ad numerum pertinent, proposuit. Quarum prima fuit ut inueniretur quadratus numerus aliquis, cui addito uel diminuto quinario numero, egrediatur quadratus numerus; quem quadratum numerum, vt eidem magistro Iohanni retuli, inueni esse hunc numerum, vndecim et duas tertias et centesimam quadragesimam quartam unius. Cuius numeri radix est ternarius et quarta et VI^{a}. unius. Cui quadrato numero si addantur quinque, prouenient .XVI. et due tertie et una centesima quadragesima quarta; qui numerus est quadratus. Cuius radix est quatuor et una duodecima. Item si auferantur .V. ab eodem quadrato numero, remanebunt VI. et due tertie et una centesima quadragesima quarta; qui numerus etiam quadratus est. Cuius radix est duo et tertia et quarta unius. Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predictae questionis solutio, inueni ipsam habere originem ex multis accidentibus, que accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros: quare hinc sumens materiam, libellum incepi componere ad uestre maiestatis celsitudinis gloriam; quem libellum quadratorum intitulaui, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predictae, et multarum aliarum questionum solutiones, quem habere poterit uestra immensitas, si celsitudini uestre placuerit.

ALtera uero questio á predicto magistro Iohanne proposita fuit, vt inueniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent uiginti: super hoc meditando putaui huius questionis solutionem egredi ex his que continentur in .X.° lib.° Euclidis; et ob hoc super ipso .X.° Euclidis accuratius studui, adeo quod sui teoraemata ipsius memorie commendaui, et ipsarum intellectum comprehendi. Et quia difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X^{m} librum glosare incepi, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur; qui liber .X.^{s} tractat de diuersitatibus XV. linearum rectarum, quarum .XV. linearum due uocantur rite, seu ratiocinate. ... ([LP1-II], str. 227–228)

... Ergo linea *ab.*, ut demonstratum est, non est aliqua ex quindecim lineis, de quibus fit mentio in .X.°. Euclidis, ut predixi. Et quia hec questio solui non potuit in aliquo suprascriptorum, studui solutionem eius ad propinquitatem reducere. Et inueni unam ex .X. radicibus nominatis, scilicet numerum *.ab.*, secundum propinquitatem, esse unum et minuta .XXII. et secunda .VII. et tertia .XLII. et quarta .XXXIII. et quinta .IIII. et sexta .XL. ([LP1-II], str. 234)

* * *

De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus.

TRES homines habebant pecuniam comunem, de qua medietas erat primi, tertia secundi. Sexta quoque pars tertij hominis; et cum eam in tutiori loco habere uoluissent, ex ea unusquisque cepit fortuitu; et cum totam ad tutiorem locum deportassent, primus, ex hoc quod cepit, posuit in comune medietatem, secundus tertiam, tertius sextam. Et cum ex hoc, quod in comune positum fuit, inter se equaliter diuisissent, suam unusquisque habuit portionem; queritur quanta fuit illa pecunia, et quot unusquisque ex ea cepit. ...

... habebit primus homo medietatem totius pecunie, scilicet $\frac{1}{2}23$. Et secundus homo habebit tertiam partem eiusdem pecunie, scilicet $\frac{2}{3}15$. Et tertius homo habebit sextam partem eiusdem pecunie, scilicet $\frac{5}{6}7$. Et sic, secundum hunc modum, solutiones similium questionum de facilj haberi possunt. ([LP1-II], str. 234–236)

* * *

De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta, questio notabilis.

SEcunda uero questio fuit de quatuor hominibus bizantios habentibus, qui bursam bizantiorum inuenerunt, ex quibus primus cum bursa excedit secundum et tertium hominem in dupluo. Secundus tertium et quartum in triplo. Tertius quartum et primum in quadruplo. Quartus uero homo cum bursa excedit primum et secundum in quincuplo: hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur, primum hominem habere debitum: ad quod demonstrandum, ponam pro bizantijs primj hominis dragmam; qua addita cum bursa egredietur dragma una et bursa una, que sunt duplum bizantiorum secundi et tertij hominis: quare inter secundum et tertium hominem habetur equale medietatis burse et unius dragme; de qua medietate ponam, secundum hominem habere rem, remanet ergo pro bizantijs tertij hominis medietas burse et unius dragme minus una re: de inde addam bursam cum quantitate secundi hominis; et erit illud quod aggregabitur bursa una et res una, quorum tertia pars est equalis quantitatis bizantiorum tertij et quarti hominis. Ergo inter tertium et quartum hominem habent tertiam burse et unius rei; de qua tertia, si auferatur quantitas bizantiorum tertij hominis, scilicet medietas burse et unius dragme minus re una, remanebunt pro quantitate bizantiorum quarti hominis quatuor tertie unius rei minus sexta unius burse et medietate unius dragme: ... ([LP1-II], str. 238)

* * *

EPISTOLA AD MAGISTRUM THEODORUM

Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris.

ASSiduis rogaminibus et postulationibus á quodam mihi amicissimo inuitatus, ut modum sibi componerem soluendi subscriptas auium et similium questiones; ... ([LP1-II], str. 247)

* * *

De auibus emendis secundum proportionem datam.

QUIDAM emit passeres 3 pro uno denario, et turtures 2 pro uno denario, et columbam 1 pro denarijs 2, et ex his tribus generibus auium habuit aues 30. pro denarijs 30. Queritur, quot aues emit ex uno quoque genere: posui primum passeres 30 pro 10 denarijs, et seruaui denarios .20., qui sunt differentia, que est á 10 denarijs usque in 30; et mutauj unum ex passeribus in turturem, et fuit augmentum in ipsa mutatione $\frac{1}{6}$ unius denarij; quia passer ualebat $\frac{1}{3}$ unius denarij, et turtur ualebat $\frac{1}{2}$ unius denarij, scilicet $\frac{1}{6}$ unius denarij plus pretio passeris: et mutauj iterum unum ex passeribus in columbam, et melioratus sum in ipsa mutatione denarij $\frac{2}{3}1$, scilicet differentia que est á $\frac{1}{3}$ unius denarij usque in denarios 2; et feci sextas ex ipso denario $\frac{2}{3}1$, et fuerunt sexte .10.: et secundum hoc opportuit me mutare passeres in turtures et columbas, donec ex ipsa mutatione proueniant illi denarij 20, quos superius seruaui: quare ex ipsis feci sextas, et fuerunt sexte 120; quas diuisi in duas partes, quarum una posset diuidi per 10. integraliter, et alia per 1; et suma (*sic*) utriusque diuisionis non ascenderet in 30; et fuit prima pars 110, et alia 10: et diuisi primam partem, scilicet 110 per 10, et secundam per 1, et habui columbas 11 et turtures 10.: quibus extractis de auibus 30, remanserunt 9 pro numero passerum; qui passeres ualent denarii 3, et turtures 10 ualent denarii 5, et columbe .11. ualent denarii .22; et sic ex istis tribus generibus auium habebuntur aues 30 pro 30 denarijs, ut quesitum est. ([LP1-II], str. 247)

* * *

ET si uolumus habere aues 15 pro denarijs 15, hoc esse non posse sine fractione auium demonstrabo. Verbi gratia: si extraxero pretium 15 passerum de denarijs 15; et de residuis denarijs faciam sextas, que sunt 60, non poterunt diuidj in duas partes, quarum una diuisa per 10, et altera per 1, ueniat numerus integer ex ipsis duabus diuisionibus, qui sit minor de 15.: ...

... Extractis itaque columbis $\frac{1}{2}5$ et turturibus 5 de auibus 15, remanebunt passeres $\frac{1}{2}4$, quorum pretium est denarius 1 et semis; et pretium 5 turturum est denarij $\frac{1}{2}2$; et pretium columbarum $\frac{1}{2}5$ est denarij 11; et sic ex his tribus generibus auium habentur aues 15 pro denarijs .15.

ET si uolumus habere aues 15 pro denarijs 16, hoc integraliter poterit; ... ([LP1-II], str. 248)

* * *

De compositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurium datum.

LIBET etiam solutionem subscriptae questionis, quam nuper inueni lumine uestre correctionis transmittere. Videlicet cum in triangulo equicrurio noto protractum sit pentagonum equilaterum, qualiter inueniatur longitudo ipsius lateris, demonstrabo. Esto trigonum *.abc.*, cuius unum quodque latus *ab* et *ac* sit 10, mensura et basis *.bc.* sit 12, et in ipso trigono protractum sit pentagonum equilaterum *a.d.e.f.g*; et uolo inuenire longitudinem unius cuiusque lateris pentagonj: ...

... ponam unum quodque latus pentagonj rem, ...

... angulus *.d.i.e* est rectus, erunt quadrata laterum *di* et *ie* equalia quadrato linee *de.*; quod quadratum est census, cum *de* sit res: quare multiplicabo *di*, scilicet 8 minus $\frac{4}{5}$ rei, in se, uenient dragme 64 et $\frac{16}{25}$ census minus rebus $\frac{4}{5}12$; et multiplicabo *.i.e.*, scilicet $\frac{1}{10}$ rei, in se, et ueniet $\frac{1}{100}$ census; ...

... census et res $\frac{4}{7}36$, que equantur dragmis $\frac{6}{7}182$; et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebre. ...

... hoc est pro quantitate unius cuiusque lateris pentagonj, 4 et minuta 27 et secunda 24 et tertia 40 et quarta 50. Inueni etiam his diebus alias solutiones super similibus questionibus, quas dominationi uestre, quandocumque placuerit, destinabo. ([LP1-II], str. 249–250)

Modus alius soluendi similes questiones.

ITem pono solutionem sequentis questionis per quemdam pulchrum modum. Nam questio talis est. Quinque homines denarios habent, ex quibus primus cum medietate denariorum secundi habet 12. Secundus cum $\frac{1}{3}$ denariorum tertij hominis habet 15. Tertius cum $\frac{1}{4}$ denariorum quartj habet 18. Quartus cum $\frac{1}{5}$ denariorum quinti habet 20. Quintus cum $\frac{1}{6}$ denariorum primj habet 23: ... ([LP1-II], str. 250)

* * *

Inuestigatio unde procedat inuentio suprascripta.

Et si unde talis inuentio procedat habere uolueritis, uobis illud, tanquam domino uenerando mittere procurabo. Soluuntur etiam similes questiones aliter, ut in libro meo denominato uestra sapientia poterit inuenire. Et si super denarios unius cuiusque adderetur eadem pars denariorum reliquorum quatuor hominum, que additur in dicta questione unicuique de suo consequente, et haberet primus 12, Secundus 15, et cetera ut supra, tunc questio esset insolubilis, nisi concederetur, primum habere debitum; quod debitum esset $\frac{97}{197}13$. Et Secundus haberet $\frac{1}{2}\!\!-\!\!\frac{148}{197}3$. Tertius $\frac{99}{197}11$. Quartus $\frac{1}{2}\!\!-\!\!\frac{123}{197}15$. Quintus $\frac{20}{197}20$. ([LP1-II], str. 251–252)

* * *

Leonardo Pisánský – Fibonacci

LITERATURA

[LP1] Leonardo Pisano, *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, I–II, pubblicati da Baldassarre Boncompagni*, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Roma, 1857, 1862, I. díl obsahuje pouze spis *Liber abaci*, II. díl spisy *Practica geometriae, Flos, Epistola ad magistrum Theodorum* a *Liber quadratorum*; 459 + 283 stran.

[LP2] Leonardo Pisano, *Tre scriti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni*, Tipografia Galileiana di M. Cellini e C., Firenze, 1854, obsahuje spisy *Flos* (str. 1–43), *Epistola ad Magistrum Theodorum* (str. 44–54) a *Liber quadratorum* (str. 55–122).

[LP3] Léonard de Pise, *Le livre des nombres carrés*, překlad, úvod a poznámky P. Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1952.

[LP4] Leonardo Pisano Fibonacci, *The Book of Squares. An Annotated Translation into Modern English*, transl. by L. E. Sigler, Acad. Press, Inc., Boston, 1987.

[PE1] Picutti E., *Il Libro dei Quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel Codice Palatino 557 della Biblioteca Nazionale di Firenze. Introduzione e Commenti*, Physis **21** (1979), 195–339.

[PE2] Picutti E., *Il „Flos“ di Leonardo Pisano dal Codice E. 75 P. sup. della Biblioteca Ambrosiana di Milano. Traduzione e Commenti*, Physis **25** (1983), 293–387.

[AG1] Arrighi G., *Leonardo Fibonacci. La pratica di geometria. Volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano. Dal Codice 2 186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, a cura e con introduzione ...*, Testimonianze di storia della scienza 3, Domus Galilaeana, Pisa, 1966.

[AG2] Arrighi G., *Il trattato di Geometria e la volgarizzazione del „Liber quadratorum“ di Leonardo Pisano dal Codice Palatino 577 (sec. XV) della Biblioteca Nazionale di Firenze*, Atti Fondazione Ronchi, Firenze, 1967.

[SL] Salomone L., *E chasi della terza parte del XV capitolo del Liber abaci nella trascelta a cura di M^{circ} Benedetto (Secondo la lezione del codice L.IV. 21 BCS), a cura e con introduzione ...*, Quaderni del Centro studi della matematica medioevale **10** (1984), Siena, xii+105 stran.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

[AA] Agostini A., *Leonardo Fibonacci*, Archimede **1** (1849), 113–125.

[BZ] Balada Z., *Z dějin elementární matematiky*, SPN, Praha, 1959.

[BB1] Boncompagni B., *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei **5** (1851/52), 5–91, 208–246.

[BB2] Boncompagni B., *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, notizie raccolte*, Tipografia delle Belle Arti, Roma, 1854.

[BB3] Boncompagni B., *Intorno alla risolutione delle equazioni simultanee $x^2 + h = y^2$, $x^2 - h = z^2$*, Annali di Scienze matematiche e fisiche **6** (1855).

[BE1] Bortolotti E., *Italiani scopritori e promotori di teorie algebriche*, Annuario della R. Università di Modena (1918–1919), 102 stran.

[BE2] Bortolotti E., *Le fonti arabe di Leonardo Pisano*, Memorie R. Accademia delle scieze dell'Istituto di Bologna, fis.-mat. cl., ser. VII, **8** (1929–1930), 1–30.

[CM] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Teubner, Leipzig, 1880–1908, reprint New York, 1965.

[FTR] Franci R., Toti Rigatelli L., *Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli*, Janus **72** (1985), 17–82.

[GA1] Genocchi A., *Storia dell'algebra dei congrui di Leonardo Pisano*, Cimento (1855).

[GA2] Genocchi A., *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano ... Note analitiche*, Annali di Scienze matematiche e fisiche **6** (1855).

[GA3] Genocchi A., *Leonardo Pisano matematico del secolo XIII*, Annali di Scienze matematiche e fisiche **8** (1857).

[GA4] Genocchi A., *Intorno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo Liber Quadratorum. Brani di lettere a Baldassarre Boncompagni*, Annali di Scienze matematiche e fisiche **8** (1857).

[GH] Gericke H., *Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1990.

[GR1] Grim R. E., *Fibonacci on Egyptian Fractions*, The Fibonacci Quarterly **4** (1966), 339–354.

[GR2] Grim R. E., *The Autobiography of Leonardo Pisano*, The Fibonacci Quarterly **11** (1973), 99–104, 162.

[J1] Juškevič A. P. (red.), *Istorija matematiki I, II, III*, Nauka, Moskva, 1970, 1970, 1972.

[J2] Juškevič A. P. (red.), *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[KE] Kantorowicz E., *Kaiser Friedrich der Zweite*, Ernst-Klett-Verlag, Stuttgart, 1987, původně Leipzig 1928–1931, anglicky Richard R. Smith, New York, 1931, další německé vydání Kupper-Bondi, Düsseldorf, 1963.

[KLC] Karpinski L. C., *The algebra of Abu Kamil*, Amer. Math. Monthly **21** (1914), 37–48.

[KM] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, reprint ve třech svazcích, Oxford Univ. Press, New York 1990.

[KAG] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989, z ukrajinštiny (Kijev 1981) přeložil J. Šedivý.

[LVA] Lebesgue V. A., *Sur un problème traitè par Léonard de Pise*, Annali di Scienze matematiche e fisiche **6** (1855).

[LaM] Lazzarini M., *Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia*, Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 6 (1903), 98–102, 7 (1904), 1–7.

[LeM] Levey M., *The Algebra of Abū Kāmil. Kitāb fī al-jābr wa'l-muqābala ...*, The University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee, and London, 1966.

[LiG] Libri G., *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, I.– IV., Jules Renouard, Paris, 1838–1841, 2. vyd. H. W. Schmidt, Halle 1865, další vydání Hildesheim 1967. Ve 2. dílu je na str. 287–479 otištěna část úvodu a 15. kapitola Fibonacciho díla *Liber abaci* a část úvodu jeho spisu *Practica geometriae.*

[LG1] Loria G., *Storia delle matematiche I, II, III*, Sten, Torino, 1929, 1931, 1933, 2. vyd. Hoepli, Milano, 1950, 975 stran.

[LG2] Loria G., *Leonardo Fibonacci*, in Gli scienziati italiani, Aldo Mieli, Rome, 1923, 4–12.

[LH] Lüneburg H., *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992, 2. přeprac. a rozšíř. vyd. 1993.

[MK] Mačák K., *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil*, Dějiny matematiky, sv. 15, Prometheus, Praha, 2001.

[MR] McClenon R. B., *Leonardo of Pisa and his Liber Quadratorum*, Amer. Math. Monthly **26** (1919), 1–8.

[OO] Ore O., *Number Theory and its History*, Dover Publications, Inc., New York, dřívější vydání McGraw-Hill 1948, 1976, Dover 1988.

[PE3] Picutti E., *Sui numeri congruo-congruenti di Leonardo Pisano*, Physis **23** (1981), 141–170.

[SE] Scholz E. (Hrsg.), *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*, Wissenschfatsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.

[SJ] Sesiano J., *The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics*, Arch. Hist. Exact Sci. **32** (1985), 105–150.

[SR] Stoll R., *Der „Liber Quadratorum" des Leonardo Pisano, Diplomarbeit*, Universität Innsbruck, 1998.

[TO] Terquem O., *Sur Léonard Bonacci de Pise et sur trois écrits de cet auteur ...*, Annali di Scienze matematiche e fisiche **7** (1856).

[TJ] Tropfke J., *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. vyd., De Gruyter, Berlin, New York, 1980, přepracoval K. Vogel, K. Reich, H. Gericke.

[VQ] Vetter Q., *Poznámka k řešení kubické rovnice ze spisu „Flos" Leonarda Pisana*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **58** (1929), 149–151.

[VK1] Vogel K., *Zur Geschichte der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten*, Deutsche Mathematik **5** (1940), 217–240.

[VK2] Vogel K., *Fibonacci, Leonardo, or Leonardo of Pisa*, in Dictionary of Scientific Biography I.– XVI., ed. C. C. Gillispie, Chas. Scribner's Sons, New York, 1976–1980.

[WB] van der Waerden B. L., *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[WH] Weissenborn H., *Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano*, Berliner Studien für clasische Philologie und Archeologie **14** (1894), 3. Heft, 1–32.

[WF1] Woepcke F., *Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni*, Journal de mathématiques pures et appliquées **19** (1854), 401–406.

[WF2] Woepcke F., *Note su le Traité des nombres carrés, de Léonard de Pise, retrouvé et publié par M. le prince Balthasar Boncompagni*, Journal de mathématiques pures et appliquées **20** (1855), 54–62.

[WF3] Woepcke F., *Sopra la teorica dei numeri congrui*, Annali di matematica pura ed applicata **3** (1860), 206–215.

[WF4] Woepcke F., *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise ... et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes*, Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, 10 (1856/57), 236–248, 12 (1858/59), 14(1860/61), 211–356.

[ZHG] Zeuthen H. G., *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen, 1896.