HILBERTŮV PROGRAM: PROMĚNA MATEMATICKÉ PRAXE PŘED A PO GÖDELOVÝCH VĚTÁCH O NEÚPLNOSTI

Ludmila Dostálová*

Úvod

Matematika první poloviny 20. století je silně poznamenána diskusemi o základech matematiky z přelomu století a bouřlivým rozvojem moderní logiky, který byl jedním z důsledků tohoto dění. Vítězné tažení, na které se tehdy logika po staletích stagnace vydala, bylo zapříčiněno tím, že nové systémy výrokové a predikátové logiky dokázaly úspěšně vyřešit řadu otázek, se kterými se tradiční logika od počátku marně potýkala, takže se nemohla stát vhodným nástrojem matematiky.[1] Nyní matematika poprvé dostala nástroj umožňující nejen analyzování pojmů, ale zejména provádění ekvivalentních úprav tvrzení a jejich dokazování, takže se náhle zdálo, že ideál *Lingua characteristica universalis et calculus raticionator* je na dosah ruky. Nový systém z Russellových a Whiteheadových *Principia Mathematica* přinášel jistotu dokazovacích metod srovnatelnou s jistotou metod algebraických, takže se zdálo být jen otázkou času, kdy matematika naplní Leibnizovu představu, že všechna pravdivá tvrzení půjde prostě „vypočítat“;[2] resp. bude je možné získat prostými mechanickými manipulacemi se symboly. Po dekádách optimismu pochopitelně následovalo vystřízlivění, a to tehdy, když Gödelovy výsledky ukázaly nepřekročitelné hranice možností nových systémů a nové metody.

Hilbertův program je často vnímán jako dítě tohoto období naivního optimismu, či jako libůstka věhlasného profesora na výminku. Obojí názor se může zdát oprávněný z pohledu dnešního stavu bádání, kdy jsme jednak naučeni s despektem hledět na sebejistotu logického pozitivizmu tak charakteristického pro období 20. let, a kdy je navíc s Gödelovými výsledky (přinejmenším formálně) seznámen nejen každý student logiky a matematiky, ale i filosofie. Ve své době však měl Hilbertův program hluboké opodstatnění a matematika (ani logika) by bez něj nebyla tím, čím je. Ba dokonce ani Gödelovy výsledky by

* Práce vznikla za podpory grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky.*

[1] Tradiční logika se zabývala zejména analýzou pojmů a vztahů mezi nimi, zatímco matematika vyžaduje zejména analýzy vztahů mezi celými tvrzeními (ekvivalence, vyplývání); resp. potřebuje metody transformace jednoho tvrzení na druhé. Z toho důvodu byla v tradiční logice při uplatňování axiomaticko-deduktivní metody dedukce vždy interní záležitostí dané disciplíny – např. Eukleidovská konstrukce kružítkem a pravítkem – nikoliv metodou logickou.

[2] *Kdybychom ji* [metodu rozumového kalkulu] *měli k dispozici, byli bychom schopni uvažovat v metafyzice a morálce právě tak stejným způsobem jako v geometrii a analýze. Kdyby došlo ke kontroverzím, nebylo by již více třeba disputace mezi dvěma filosofy, než je tomu mezi dvěma počtáři. Neboť by stačilo, aby do svých rukou vzali svá pera, sedli si ke svým stolům a navzájem si řekli (s nějakým přítelem jako svědkem, kdyby chtěli): „Počítejme.“* (Leibniz, *O reformě věd*, viz [Leibniz 1956])

s největší pravděpodobností nespatřily světlo světa. Cílem příspěvku je ukázat význam Hilbertova programu a jeho zásadní vliv na další vývoj matematiky a ukázat, že Hilbert nebyl žádným průkopníkem slepých uliček, nýbrž řádným členem proudu hlavního.

Historické souvislosti

Na první pohled je Hilbertův program záležitostí dvacátých let dvacátého století – v roce 1921 jej Hilbert poprvé explicitně zformuloval;[3] roku 1926 byl precizován;[4] a v roce 1929 se už Hilbert cítil oprávněn prohlásit, že úspěšné naplnění programu je na dosah ruky;[5] aby roku 1930 pohřbily toto jeho očekávání Gödelovy výsledky.[6] Při bližším zkoumání můžeme jeho počátky hledat na počátku dvacátého století, kdy se Hilbert začal systematicky věnovat práci v základech matematiky.[7] Díky tomu se okolo něj v Göttingen shromáždila skupina logiků,[8] jejímž vědecko-výzkumným záměrem Hilbertův program v podstatě je. Nicméně ideové kořeny celého programu je třeba hledat

[3] Hilbertův program byl poprvé explicitně zformulován ve třech *Hamburských přednáškách* z léta 1921, které byly odpovědí na článek Hermanna Weyla *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Mathematische Zeitschrift 10(1921), str. 37–79. Publikovány byly o rok později jako *Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung*, Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität 1(1922), str. 157–177. Program navazuje na předchozí Hilbertovu práci v základech matematiky. Oproti předchozím formulacím (najít vhodný axiomatický systém matematiky a dokázat jeho bezespornost) se tu poprvé objevuje požadavek, že metody použité při dokazování a odvozování musí být finitní, což v podstatě odpovídá požadavku rozhodnutelnosti celého systému. Řada pozdějších prací (Hilbertových i jeho spolupracovníků) se pak zabývá otázkou, které z obecně užívaných metod tomuto kriteriu vyhovují. Nejpodrobněji tuto otázku Hilbert rozpracoval v článku *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen 95(1926), str. 161–190. Hilbertova koncepce finitních metod je velice problematickou otázkou. Podrobněji viz např. článek Richarda Zacha [Zach 2003].

[4] V článku *O nekonečnu* z tohoto roku (viz předchozí poznámka) se kromě podrobného výkladu o finitních metodách poprvé objevuje explicitní distinkce mezi tzv. matematikou reálnou a ideální, resp. matematikou finitní odpovídající běžné matematické praxi, a transfinitní (např. kvantifikátory), která má být pouze konzervativním rozšířením matematiky finitní. Konzervativní v tom smyslu, že zjednodušuje vyjadřování o finitní (reálné) části matematiky, ale veškerá tvrzení finitní (reálné) matematiky zformulovaná či odvozená pomocí matematiky transfinitní (ideální) mohou být zformulována či odvozena i bez nich, čistě finitním způsobem.

[5] Hilbert toto své prohlášení učinil v rámci přednášky *Probleme der Grundlegung der Mathematik* přednesené roku 1928 na Matematickém kongresu v Bologni a publikované o rok později v Mathematische Annalen 102(1929), str. 1–9. V tomto svém prohlášení se opíral především o Bernaysovy a Ackermannovy výsledky publikované v roce 1927 až 1928. Jednalo se o důkazy bezespornosti různých částí matematiky prostřednictvím tzv. ε-kalkulu.

[6] Gödel své výsledky poprvé prezentoval na podzim 1930 na konferenci v Königsbergu. Publikovány byly v následujícím roce jako *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38(1931), str. 173–198, kde je také poprvé zkonstruována konkrétní nedokazatelná sentence. Tato práce byla poté uznána jako habilitační.

[7] První období Hilbertovy práce v základech aritmetiky lze datovat do období mezi lety 1900 a 1905, resp. mezi publikace prací *Über den Zahlbegriff* a *Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*. K těmto tématům se pak systematicky vrací až po roce 1915, třebaže na dané téma v Göttingen často přednáší.

[8] V roce 1917 pozval Hilbert do Göttingen svého bývalého studenta Paula Bernayse, aby se

daleko hlouběji – až v Aristotelových *Druhých analytikách* a v Leibnizově *Reformě věd*, které lze chápat jako klíčové momenty ve vývoji metody, která se dnes označuje jako axiomaticko-deduktivní a je charakteristickým rysem metodologie evropské vědy. Obojí projekty vychází z představy, že lidské poznání libovolné vědní oblasti lze uspořádat do systému s relativně malým počtem výchozích tvrzení (axiomů), která se přijímají za pravdivá a nedokazují se, ale ze kterých se naopak dokazují všechna ostatní tvrzení pomocí opět malého počtu pravidel odvození, která mají tu vlastnost, že zachovávají pravdivost. Pravdivost všech tvrzení daného oboru tak je odvozena od pravdivosti výchozích axiomů.

Krize matematiky v 19. století související zejména s objevem neeukleidovských geometrií a zpochybňující tak nárok matematiky na pravdivost založenou na evidenci (Eukleides), resp. intuici (Kant), způsobila, že tento princip budování vědy bylo třeba založit na nových základech – resp. zdůvodnit či dokázat pravdivost axiomů matematiky. Pro Hilberta již axiomy nejsou evidentně pravdivá tvrzení, jejichž pravdivost je založena na nutnosti (Aristotelés),[9] resp. jednoduchosti (Descartes, Leibniz),[10] ale pouze ta tvrzení, která stačí k vygenerování všech tvrzení daného systému, ale jejichž pravdivost je třeba ověřovat stejně jako u empirických věd.[11] Jeho program pak není ničím jiným než konstrukcí takového systému a zdůvodněním jeho korektnosti, úplnosti a pravdivosti.

Hilbertův program a úplnost aritmetiky

Stručně je možné Hilbertův program shrnout do dvou bodů:

1. najít konečný systém (reálných)[12] axiomů, ze kterého by bylo možné (pouze

s ním systematicky věnoval práci v základech matematiky. Tento akt lze považovat za založení tzv. Hilbertovy školy, kterou tvořili další Hilbertovi žáci jako Ackermann, von Neumann, Gentzen, Schütte a další. Přednášky o základech matematiky z let 1917 až 1920 stejně jako spis *Die axiomatische Denken* pak výrazně předznamenávají Hilbertův program, který je vlastně výsledkem jeho systematické práce v základech matematiky a nikoliv nahodilým projektem.

[9] *Každá dokazovací věda se zabývá … obecnými počátky, takzvanými axiómy, z kterých se jako z toho, co je první dokazuje.* (Anal. Post. I 10 76b)
*Dokazovací vědění je vědění z **nutných** počátků.* (Anal. Post. I 6 74b)
Je-li totiž nutno vědět dřívější, tedy to, z čeho vychází důkaz, a je-li dále nutné zastavit se jednou u bezprostředního, je to nutně nedokazatelné. (Anal. Post. I 3 72a – citováno dle [Aristotelés])

[10] *Všechny první pravdy rozumu i faktů mají společné to, že nemohou být dokázány prostřednictvím něčeho jistějšího, protože jsou jednoduché a nesložené.* (Nové zkoumání o lidském rozumu; Bk IV. Ch. 2 § 8 – citováno dle [Leibniz 2010])

[11] *V případě axiomatického systému stačí, vložíme-li axiomy do odvozovacího aparátu, jako je např. logický stroj Stanlyho Jevonse, a pak už jen pozorujeme, jak vyrůstá celá geometrie. Pravdivost kteréhokoliv axiomu musí být ověřena empiricky. Pravdivost Eukleidova pátého postulátu v aktuálním světě musí být ověřována stejnými prostředky, které jsou užívány k ověřování např. Einsteinovy obecné teorie relativity.* (Grundlegung der Geometrie; citováno dle [Hilbert])

[12] Viz poznámka č. 4.

finitními metodami)[13] odvodit veškerou matematiku;

2. dokázat (opět finitními prostředky) bezespornost tohoto axiomatického systému.

Naplnit tento program předpokládá důslednou formalizaci matematiky – přepis všech tvrzení matematiky do formalizovaného jazyka a nalezení pravidel pro odvozování tak, aby důkaz konkrétního tvrzení (jeho odvození z těchto axiomů) v principu spočíval pouze v čistě mechanické manipulaci se symboly tohoto formalizovaného jazyka. Hilbert v tomto ohledu vychází ze systému *Principia Mathematica*.[14]

První bod programu v sobě v podstatě zahrnuje důkaz (korektnosti), úplnosti, konzervativnosti[15] a rozhodnutelnosti[16] zvoleného axiomatického systému. Hlavní pozornost se však soustředila na druhý bod programu, a sice na důkaz bezespornosti, čímž měla být zaručena pravdivost axiomů, resp. celého systému matematiky. Tento důkaz bezespornosti měl být přímý a nikoliv relativní; tj. bezespornost příslušného axiomatického systému neměla být dokazována vnořením do nějaké jiné teorie, jako tomu bylo s dosavadními důkazy tohoto druhu, nýbrž přímo (z axiomů tohoto systému samých) a sice tak, že se (finitními prostředky) ukáže, že z axiomů tohoto systému nelze odvodit spor. Tímto směrem se proto ubírala většina práce při naplňování Hilbertova programu, především práce Wilhelma Ackermanna a Paula Bernayse, o něž především se opíral Hilbert při svém prohlášení z roku 1929.

Gödelovy věty o neúplnosti

Gödelova práce se zpočátku odvíjela víceméně v intencích Hilbertova programu. V roce 1929 se mu podařilo dokázat úplnost predikátového kalkulu prvního řádu.[17] V duchu Hilbertova programu by mu nyní stačilo:

1. najít vhodný úplný systém axiomů matematiky a
2. dokázat jeho bezespornost.

Gödel však při své práci došel k principiálně záporné odpovědi na oba dva úkoly.[18] Tyto výsledky jsou známé jako První a Druhá Gödelova věta o neúplnosti.

---

[13] Viz poznámka č. 3.

[14] Systém logiky představený Russellem v jeho spise *Principia Mathematica* v podstatě odpovídá dnešní klasické predikátové logice prvního řádu a kalkulu přirozené dedukce.

[15] Viz poznámka č. 4.

[16] Viz poznámka č. 3.

[17] Úplnost predikátové logiky prvního řádu (resp. kalkulu funkcí prvního řádu) byla jedním z otevřených problémů Hilbertova programu. Gödel v roce 1929 předložil na Vídeňské univerzitě řešení tohoto problému jako svou disertační práci. Publikována byla o rok později jako *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37(1930), str. 349–360.

[18] Viz poznámka č. 6.

První Gödelova věta o neúplnosti

Pro každý dobře definovaný systém axiomů a odvozovacích pravidel vždy existují diofantické problémy tohoto typu, které jsou těmito axiomy a pravidly nerozhodnutelné, a to za pouhého předpokladu, že nejsou odvoditelné žádné nepravdivé výroky tohoto typu.[19]

Gödel vychází z aritmetiky (teorie přirozených čísel) a logiky prvního řádu (tedy v podstatě ze systému dnes označovaného jako Peanova aritmetika), která se obecně považovala za vhodný základ axiomatizace matematiky, neboť v ní již byla interpretována valná část tehdejší matematiky.[20] Uvnitř tohoto systému se mu však podařilo zkonstruovat nezávislou sentenci, tj. dokázat, že (Peanova) aritmetika nestačí k axiomatizaci ani aritmetiky jako takové (natožpak veškeré matematiky), neboť existuje tvrzení aritmetického jazyka, které je pravdivé a při tom není odvoditelné (dokazatelné) z axiomů (Peanovy) aritmetiky. Navíc lze tento výsledek zobecnit v tom smyslu, že podobnou nezávislou sentenci je možné zkonstruovat v každém axiomatickém systému, který aritmetiku obsahuje. První Gödelova věta tak nejen ukazuje, že (Peanova) aritmetika není vhodným axiomatickým systémem k axiomatizaci veškeré matematiky, její důsledek navíc znamená, že matematika, jako taková, nemůže být plně axiomatizovaná konečným, resp. rekurzivním způsobem. Tím je prokázána neuskutečnitelnost prvního úkolu Hilbertova programu. Druhá Gödelova věta o neúplnosti pak ukazuje nemožnost jeho druhého bodu, a sice požadavku přímého důkazu bezespornosti.

Druhá Gödelova věta

Pro každý dobře definovaný systém axiomů a pravidel je výrok, tvrdící jejich konsistenci (či spíše ekvivalentní výrok teorie čísel), nedokazatelný z těchto axiomů a pravidel, pokud jsou tyto axiomy a pravidla konsistentní a dostačující k odvození určité části finitistické aritmetiky přirozených čísel.[21]

Druhá Gödelova věta tedy tvrdí, že každý axiomatický systém obsahující aritmetiku a schopný dokázat vlastní bezespornost je sporný; takže bezespornost axiomatického systému lze dokázat jen relativně vzhledem k jinému

---

[19] *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications* – [Gödel 1995], Vol. 3, str. 304–323.

[20] Úplnost a bezespornost aritmetiky (teorie přirozených čísel) jakožto nejjednodušší části matematiky byla v té době zcela samozřejmě předpokládána stejně jako nebyla problematizována finitnost jejích metod, takže relativní důkazy bezespornosti se prováděly právě vnořením (překladem) do aritmetiky, resp. konstrukcí interpretace (modelu) příslušné teorie prostřednictvím aritmetického modelu. Také Gödelovi původně nešlo o aritmetiku jako takovou nýbrž o interpretaci a důkaz bezespornosti matematické analýzy (teorie funkcí) uvnitř aritmetiky resp. aritmetické teorie prvního řádu. Během práce na tomto důkazu, kdy bylo třeba definovat predikát pravdivosti, však Gödel zjistil, že predikát pravdivosti narozdíl od predikátu dokazatelnosti v aritmetice zkonstruovat nelze. Neúplnost aritmetiky tak je jakoby vedlejším produktem úvahy, která měla vést k důkazu bezespornosti matematické analýzy. Podrobně se těmto skutečnostem věnuje Hao Wang ve své knize [Wang].

[21] *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications* – [Gödel 1995], Vol. 3, str. 304–323.

axiomatickému systému. To vedlo ke vzniku teorie modelů dokazující bezespornost jednotlivých systémů vzhledem k teorii množin – konstrukcí příslušného modelu tohoto axiomatického systému.

Gödel sám o svých výsledcích mluví jako o důkazu nezúplnitelnosti nebo nevyčerpatelnosti matematiky; tj. přiznává skutečnost, že neexistuje konečný (resp. rekurzivní) axiomatický deduktivní systém, který by matematiku popisoval úplně.

Druhy úplnosti

Chápeme-li teorii jako množinu tvrzení daného jazyka, pak řekneme, že tato teorie (množina tvrzení) je úplná, pokud pro každé tvrzení tohoto jazyka platí, že buď toto tvrzení, nebo jeho negace patří do této teorie (množiny tvrzení). Neboli, úplné teorie jsou zvláštním případem maximálně bezesporných množin tvrzení.[22] Od tohoto základního syntaktického pojmu úplnosti se odvíjí všechny tři různé pojmy úplnosti, které souvisí především s tím, jak zjistit úplnost nějakého systému nebo jak jí dosáhnout. V tomto duchu se nerozlišuje mezi systémem logiky a specifickou teorií – obojí je teorie, tj. množina platných tvrzení.

Sémantická úplnost je vlastností konkrétního systému logiky. Systém logiky (kalkul) je sémanticky úplný, pokud množina jeho teorémů (odvoditelných formulí) je totožná s množinou všech tautologií (platných formulí).

Deduktivní úplnost je v podstatě tou úplností, kterou měl Hilbert na mysli při formulování svého programu. Toto pojetí úplnosti je čistě syntaktické. Teorie je deduktivně úplná, pokud existuje množina tvrzení (axiomů) a systém odvozovacích pravidel (kalkul) takové, že pro každé tvrzení, které je zformulováno v jazyce této teorie, platí, že buď toto tvrzení, nebo jeho negace je odvoditelné prostřednictvím příslušných odvozovacích pravidel z daných axiomů. Hilbert měl jedině tu omezující podmínku na danou množinu axiomů i pravidla, aby byly konečné, resp. rekurzivní. V jeho pojetí tedy úplnost do jisté míry splývá s efektivní rozhodnutelností.

Deskriptivní úplnost na rozdíl od deduktivní je ryze sémantickou vlastností systému. Teorie je deskriptivně úplná, pokud se jedná o takovou množinu tvrzení, která má pouze zamýšlené modely. V případě axiomatické teorie[23] to znamená, že třída modelů množiny axiomů neobsahuje žádné nestandardní

[22] Množina tvrzení daného jazyka se nazývá teorií, pokud obsahuje všechny své syntaktické důsledky. Bezesporná množina tvrzení daného jazyka je množina, pro kterou platí, že neobsahuje žádné tvrzení zároveň s jeho negací. Maximálně bezesporná množina tvrzení daného jazyka pak je taková množina tvrzení, do které když přidáme jakékoliv tvrzení, které zatím neobsahuje, vznikne množina sporná (tj. obsahuje negace všech tvrzení, která nejsou jejím prvkem). Každá maximálně bezesporná množina tvrzení je teorií, ale ne každá teorie je maximálně bezespornou množinou, tj. úplnou teorií.

[23] Výše bylo řečeno, že teorie je taková množina tvrzení daného jazyka, která obsahuje všechny své důsledky. Teorie se nazývá axiomatizovaná, pokud existuje taková její podmnožina, že všechna tvrzení teorie jsou jejími důsledky.

modely; resp. že všechny její modely jsou isomorfní. Tato koncepce úplnosti pracuje pouze s pojmem platnosti tvrzení a není spojena s žádným konkrétním systémem logiky. Tím se především liší od deduktivní úplnosti, kde kromě množiny axiomů je zapotřebí brát v úvahu i systém odvozovacích pravidel.

Mezi těmito třemi druhy úplnosti platí následující vztah: **teorie je deduktivně úplná, pokud její mimologická axiomatizace je deskriptivně úplná a použitý systém logiky je úplný sémanticky**.

Problém úplnosti matematiky po Gödelovi

Gödelovy věty byly od počátku vnímány jako konec Hilbertova programu a všechny Hilbertovy aktivity z třicátých jsou vlastně jen pokusy o jeho revizi ať již diskreditací Gödelova důkazu nebo revizí vlastního programu. Obecně bývají Gödelovy věty vykládány jako důkaz neúplnosti a nezúplnitelnosti matematiky. S oblibou se pak zvláště ve filosofických kruzích interpretují jako důkaz omezení lidského poznání a nemožnosti absolutního vědění. Gödel sám se však takovýmto interpretacím vždy bránil a varoval před takovým přeceňováním svého důkazu. Ten ukazuje pouze meze syntaktické metody dokazování. Jeho výsledkům nijak neodporuje, že ke každému tvrzení lze vytvořit systém, ve kterém bude toto tvrzení dokazatelné, třebaže tento systém sám bude opět neúplný; nezávislou ale bude jiná sentence.

Přesněji řečeno, Gödelovy výsledky znamenají, že neexistuje a nemůže existovat **deduktivně** úplná axiomatizace matematiky, neboť vždy bude existovat nezávislá sentence. Tato skutečnost ale bývá obvykle interpretována v tom smyslu, že neexistuje a nemůže existovat **deskriptivně** úplná axiomatizace matematiky, tj. matematická axiomatizovaná teorie, která by měla pouze zamýšlené modely a vylučovala ty nestandardní. Ve skutečnosti však Gödelovy výsledky znamenají pouze tolik, že **deskriptivně úplná axiomatizace matematiky nemůže být založena na sémanticky úplné logice**. Tento fakt pak vytyčil dva směry, kterými se vydala praxe konstrukce matematických teorií a práce v základech matematiky:

1. konstrukce deduktivně úplných fragmentů matematiky a důkazy relativní úplnosti vedoucí ke vzniku teorie modelů (redukovaný Hilbertův program);
2. konstrukce deskriptivně úplných, ale deduktivně neúplných axiomatizací aritmetiky.

Redukovaný Hilbertův program

V okamžiku přijetí Gödelových výsledků je Hilbertův program v celém svém rozsahu neudržitelný. Hilbert sám tedy poměrně záhy celý program redukuje na program důkazů relativní bezespornosti, což je cesta, kterou nabízí i sám Gödel. Tento redukovaný Hilbertův program znamená, že nadále už matematika nehledá přímé důkazy bezespornosti, ale pouze důkazy relativní – bezespornost systému se tedy i nadále dokazuje pouze vnořením daného systému do systému jiného. Respektive, v systému silnějším se zkonstruuje interpretace čili model dané teorie, a tím je zdůvodněna jeho relativní bezespornost. Lze tak vytvořit vzájemné závislosti jednotlivých matematických teorií. Tento způsob vnořování a vytváření hierarchie stále silnějších a silnějších systémů propagoval např. zejména Turing. Celý projekt pak má tu slabinu, že se jedná o proces neustálého vnořování, resp. konečné zdůvodnění bezespornosti „nejsilnějšího“ systému se musí odehrát mimo-formalistickými metodami, a tedy se vposledku opět odvolávat na matematickou evidenci či intuici.

Druhou oblastí redukovaného Hilbertova programu pak jsou důkazy relativní úplnosti. Jestliže matematika nemůže být v rámci logiky prvního řádu úplně axiomatizovatelná, pak se hledají úplně axiomatizovatelné fragmenty a jejich úplnost se pak dokazuje vzhledem k příslušným (částečným) modelům. Výsadní teorií se v tomto smyslu stala teorie množin, v jejímž rámci se nakonec konstruují všechny struktury modelů různých formálních teorií.

V důsledku této proměny v základech matematiky se tak mění i celá matematika. Do popředí zájmu se tak místo tradičních výpočetních a konstrukčních disciplín dostávají odvětví popisující matematické a abstraktní struktury (teorie množin, algebra), protože jejich výsledky jsou nezbytné pro rozvíjející se teorii modelů. Jedině Hilbertovu programu tak vděčí teorie množin a algebra za svůj rozvoj, neboť bez potřeby vzniklé v rámci řešení otázek základů matematiky by nikdy nevznikla potřeba věnovat se těmto odvětvím matematiky popisujícím struktury a opustit tradiční výpočetní disciplíny.

Deskriptivně úplné axiomatizace aritmetiky

Druhým proudem v základech matematiky se stává konstrukce deskriptivně úplných axiomatizací. Jestliže do Hilberta bývá náplň práce matematika vnímána zejména jako spočívající v dokazování pravdivosti matematických tvrzení, což byla práce, kterou měl Hilbertův program jednou provždy naplnit a dokončit, pak po Gödelových důkazech nanaplnitelnosti tohoto ideálu se hlavním úkolem matematika stává beze zbytku popsat matematickou strukturu, když už nemůže vygenerovat všechna tvrzení, která v ní platí. Tyto deskriptivně úplné axiomatizace matematiky jsou založeny na sémanticky neúplných logikách a tedy jsou vždy nutně neúplné. Nicméně úplně popisují strukturu, kterou popsat mají a jednoznačně tak identifikují příslušné modely.

Nejběžnějšími jsou deskriptivně úplné axiomatizace matematiky v rámci predikátové logiky druhého řádu. Např. doplní-li se k Peanově aritmetice místo schématu indukce druhořádový axiom indukce

$$\forall X\{[X(0) \wedge \forall x(X(x) \rightarrow X(x+1))] \rightarrow \forall x X(x)\},$$

vznikne tak (při standardní sémantice)[24] deskriptivně úplná teorie aritmetiky; tj. axiomatizace, která vylučuje nestandardní modely aritmetiky.

[24] Standardní sémantika predikátové logiky druhého řádu vyžaduje, aby ke každé možné třídě individuí prvního řádu existovala entita druhého řádu, která má za své prvky tato a pouze tato individua, což je požadavek ontologicky značně problematický.

Stejně tak lze v logice vyšších řádů zformulovat i jiné matematické principy a pojmy, které se vymykaly úplné definici či axiomatizaci na úrovni prvního řádu, jako je např. konečnost či nekonečnost, potence, kardinalita, dobré uspořádání a především rovnost (identita jako taková a ekvikardinalita).[25] Právě nemožnost definovat, resp. axiomatizovat tyto pojmy na úrovni predikátové logiky prvního řádu způsobuje neúplnost matematických teorií prvního řádu a připouští tak nestandardní modely a interpretace. Proto se tyto pojmy k příslušným teoriím prvního řádu připojují jako metateoretické omezení a doplňují předpoklady, aby bylo v prvním řádu (deskriptivní) úplnosti dosaženo alespoň na sémantické, když ne syntaktické úrovni.

Objevují se však i pokusy o deskriptivně úplné axiomatizace aritmetiky v nestandardních systémech logiky. Za všechny jmenujme např. Hintikkovu IF-logiku,[26] která je ekvivalentní se Σ_1^1 fragmentem predikátové logiky druhého řádu při zachování prvořádového jazyka.[27] Umožňuje tedy nadefinovat výše zmíněné matematické pojmy zaručující deskriptivně úplnou axiomatizaci matematiky, ale bez ontologické problematičnosti logiky druhého řádu. Navíc tato axiomatizace v rámci IF-logiky navzdory deduktivní neúplnosti umožňuje přímý důkaz bezespornosti a zaručuje i rozhodnutelnost.

Tyto a jiné axiomatizace pak splňují svůj účel, ovšem jen potud, pokud cíl matematiky nevidíme v odvozování teorémů, ale v popisování matematických struktur.

---

[25] Za zvláštní pozornost v tomto kontextu stojí pojem rovnosti definovatelný v predikátové logice druhého řádu pomocí tzv. Leibnizova principu identity

$$\forall x \forall y \{x = y \leftrightarrow P[P(x) \leftrightarrow P(y)]\},$$

s jehož pomocí již lze zapsat vlastnost standardních modelů aritmetiky, a sice, že každé přirozené číslo je následníkem nuly, a tím vytvořit deskriptivně úplnou axiomatizaci logiky. Identita je tak zde pojmem čistě logickým (nadefinovaným jen z logických konstant), a tedy i celá aritmetika se tak stává součástí logiky. V jistém smyslu lze tedy tuto axiomatizaci vnímat jako naplnění Fregova programu logicismu.

[26] Hintikkova IF-logika vznikne rozšířením jazyka predikátové logiky prvního řádu o tzv. nezávislé kvantifikátory. Podle Hintikky je klasická predikátová logika díky Fregemu zásadním způsobem omezena právě v pojetí kvantifikátorů jakožto závislých jednoho na druhém, resp. závislostí existenčního kvantifikátoru na předchozím obecném, což je odvozeno od funkční závislosti mezi proměnnými v matematice. Vezmeme-li například formuli

$$\forall x \exists y R(x, y),$$

pak při jejím ohodnocování je volba hodnoty proměnné y funkčně závislá na předchozí volbě hodnoty proměnné x. Tato závislost se projevuje například tím, že zatímco pořadí stejných kvantifikátorů lze změnit, aniž by se změnily pravdivostní podmínky daného tvrzení, pro různé kvantifikátory tato úprava ekvivalentní není.
Nezávislosti kvantifikátorů Hintikka dosáhne obohacením jazyka predikátové logiky prvního řádu o slash „/“ symbolizující nezávislost logických operátorů.

[27] Tj. kvantifikuje se pouze přes individuové proměnné. Srv. [Hintikka 1998].

Závěr

Hilbertův program stanovil dva cíle – nalézt (deduktivně) úplnou axiomatizaci matematiky a dokázat přímým způsobem její bezespornost. Kromě toho ale také stanovil prostředky, jimiž má být tohoto cíle dosaženo – axiomatizace i metody odvozování mají být pouze finitistické (konečné, resp. rekurzivní).

Gödelovy věty o neúplnosti pak ukazují, že stanovenými prostředky nelze požadovaného cíle dosáhnout. Konečná, resp. rekurzivní axiomatizace matematiky nemůže být deduktivně úplná (je-li bezesporná). Má-li být axiomatizace matematiky úplná deskriptivně, pak nemůže být rekurzivní nebo nemůže být založena na sémanticky úplném systému logiky. Tím byla jednou provždy prokázána nerealizovatelnost Hilbertova programu.

Všechny následující pokusy o „úplné" axiomatizace aritmetiky tak nejsou v žádném případě popřením nebo překonáním těchto Gödelových výsledků. Pouze na ně navazují a pokračují ve směru, který věty o neúplnosti vytyčily. Jedná se buď o naplnění tzv. redukovaného Hilbertova programu – úplné axiomatizace fragmentů aritmetiky a důkazy jejich relativní bezespornosti i úplnosti v rámci teorie modelů, resp. vůči silnější teorii. Nebo se jedná o axiomatizace, kde použité logiky nejsou sémanticky úplné, a proto Gödelovým výsledkům nijak neodporuje, když se v jejich rámci podařilo zformulovat deskriptivně úplnou axiomatizaci aritmetiky, stejně jako je-li jejími prostředky možné nejen rozhodovat, zda dané aritmetické tvrzení je platné či nikoliv, ale případně i provést přímý důkaz bezespornosti.

Tyto výsledky však nelze považovat za splnění Hilbertova programu, neboť prostředky, jimiž bylo dosaženo cíle, nejsou finitistické. Tyto logiky nejsou rekurzivně axiomatizovatelné a metody rozhodování platnosti matematického tvrzení v dané matematické axiomatizaci nejsou finitistické (rekurzivní). Neodpovídají tedy těm metodám, jež pro dosažení svého cíle Hilbert ve svém programu stanovil.

Přestože však Gödelovy věty jednou pro vždy prokázaly nerealizovatelnost Hilbertova programu, nelze se na něj dívat jako na marginální záležitost a slepou uličku vývoje matematiky. Hilbertův program byl organickou součástí dění v základech matematiky své doby a pokusy o jeho naplnění stejně jako posléze prokázání jeho nerealizovatelnosti zásadním způsobem proměnily podobu matematiky. Na první pohled by se mohlo zdát, že výsledky tohoto druhu se nijak nedotknou práce běžného matematika. Zdánlivě Hilbertův program bezprostředně souvisí jen s rozvojem moderní teorie důkazů a matematické logiky vůbec; jeho překonání pak přispělo ke vzniku a rozvoji teorie modelů. Tyto poznatky nijak neovlivňují pravdivost již známých matematických tvrzení ani nebrání matematikům dokazovat pravdivost nových. Na druhou stranu se však při bližším pohledu stane zřejmým, že v důsledku překonání Hilbertova programu dochází k proměně matematiky samé. Těžiště pozornosti matematiků se od tradičních matematických oblastí výpočetních a konstrukčních (aritmetika, geometrie, analýza) přesouvá k disciplínám novým jako je teorie množin, topologie a algebra; tedy k disciplínám popisujícím matematické a abstraktní struktury. Potřeba zabývat se abstraktními strukturami by však nikdy nenabyla důležitosti bez Hilbertova programu a potřeby realizovat důkazy relativní bezespornosti či hledat deskriptivně úplné axiomatizace aritmetiky bez úplnosti deduktivní. Matematika se tak z vědy čistě dokazovací mění ve vědu deskriptivní.

LITERATURA

[Aristotelés] Aristotelés, *Druhé analytiky*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1962.

[Detlefsen] Detlefsen M., *Hilbert's Program*, Reidel, Dordrecht, 1986.

[Ewald] Ewald W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, str. 1115–1133, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[Gödel 1995] Gödel K., *Collected Work*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[Gödel 1999] Gödel K., *Filosofické eseje*, OIKOYMENH, Praha, 1999.

[Hilbert] Hilbert D., *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, Mathematische Annalen **102** (1929), 1–9 [Přednáška podaná na Mezinárodním kongresu matematiků ze dne 3. srpna 1928.].

[Hintikka 1996] Hintikka J., *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[Hintikka 1998] Hintikka J., *Language, Truth and Logic in Mathematics (Selected papers Vol. 3)*, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[Leibniz 1956] Leibniz G. W. F., *O reforme vied*, Slovenská akedemie vied, Bratislava, 1956.

[Leibniz 2010] Leibniz G. W. F., *New Essays on Human Understanding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996 [Anglický překlad Jonathan Bennett. Dostupný on-line http://www.earlymoderntexts.com/leibne.html (rev. 2010-11-07).].

[Parkinson] Parkinson G. H. R. (ed.), *Leibniz G. W. F.: Logical Papers*, Clarendon Press, Oxford, 1966.

[Shapiro] Shapiro S., *Foundations without Foundationalism: A Case for Second Order Logic*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[Sieg] Sieg W., *Hilbert's Programs: 1917–1922*, The Bulletin of Symbolic Logic **5** (1999), Issue 1 (March), 1–44.

[Wang] Wang H., *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, MA, 1987.

[Zach 2003] Zach R., *The Practice of Finitism. Epsilon Calculus and Consistency Proofs in Hilbert's Program*, Synthese **137** (2003), 211–259.

[Zach 2004] Zach R., *Hilbert's Program Then and Now*, in: Jacquette D. (ed.): Handbook of Philosophy of Logic, str. 917–925, North Holland, Amsterdam, 2004.