VÝPOČTY HODNOT GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Zdeněk Halas

Abstrakt

V tomto článku se věnujeme některým historicky nejvýznamnějším postupům pro výpočet hodnot goniometrických funkcí a délek tětiv, které jim předcházely. Zaměřujeme se přitom zejména na výpočty Ptolemaiovy, Árjabhaṭovy a odhady arabských učenců Abú'l-Wafá' a al-Kášího. Zmíněny jsou také Rhaeticovy tabulky a výpočty Mikuláše Koperníka. Na závěr je uveden algoritmus CORDIC.

Mezopotámie a Egypt

Již ze starověké Mezopotámie máme dochovány různé tabulky. Jedná se například o tabulky druhých a třetích mocnin, násobení, převrácených hodnot, a další. Takové tabulky jsou odrazem lidské snahy po usnadnění stále se opakujících výpočtů tím, že se provedou jednou provždy a výsledky se pečlivě zaznamenají.

Ze starověkého Egypta se nám také dochovaly různé tabulky, zajímavé jsou zejména ty, které obsahují rozklady zlomků na součet kmenných zlomků.[1] Více informací o nich lze nalézt například v [Be].

Nejvýznamnějším matematickým textem, který se nám z Egypta dochoval, je Rhindův papyrus. Nacházejí se na něm mimo jiné řešené úlohy[2] na výpočet sklonu pyramidy, tzv. *seqed*. Geometricky rozumíme pyramidou pravidelný čtyřboký jehlan. Sklon pyramidy seqed je pak poměr poloviny délky jeho podstavné hrany a a výšky v, což odpovídá dnešní kotangentě úhlu φ, který svírá podstava a boční stěna, tedy

$$\mathrm{seqed} = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{v}.$$

Díky těmto úlohám se u egyptské matematiky někdy hovoří o tzv. protogoniometrii.

Nás však budou nejvíce zajímat texty, v nichž se objevují počátky goniometrických funkcí v natolik rozvinuté formě, že jsou systematicky počítány jejich hodnoty.

Řecké tětivy a Ptolemaios

Nejranější doklady užívání goniometrických funkcí sahají do starověkého Řecka. Řekové používali místo našich goniometrických funkcí délku tětivy kružnice o poloměru R danou středovým úhlem o velikosti α. V tomto textu

---

[1] Tj. zlomků s jedničkou v čitateli.

[2] Jedná se o úlohy R56–R60. Jejich překlad s komentářem je uveden v [Vy].

ji budeme značit $\operatorname{crd}\alpha$. Náš $\sin\alpha$ je vlastně polovina délky tětivy příslušející dvojnásobnému úhlu vydělená poloměrem R, platí tedy vztah

$$\operatorname{crd}\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Délky tětiv hrály důležitou roli zejména v astronomii. Jako první sestavil jejich tabulky významný řecký astronom HIPPARCHOS (asi 180–125 př. Kr.). Jeho dílo se nám dochovalo ve zlomcích,[3] a tak jsme odkázáni jen na pozdější svědectví.

Na Hipparchovo dílo vědomě navázal zejména KLAUDIOS PTOLEMAIOS (asi 90–165 po Kr.), který Hipparcha několikrát zmiňuje. Z Ptolemaiova díla můžeme alespoň zčásti usuzovat, že Hipparchos tabulky hodnot $\operatorname{crd}\alpha$ opravdu potřeboval a používal je například při studiu pohybu Měsíce.

Idea tětivy pochází nejspíše právě od Hipparcha. Délky tětiv byly později nahrazeny polovičními délkami, což odpovídalo našemu sinu. Poprvé to máme doloženo u indického matematika ÁRJABHAṬY (476–550 po Kr.), jemuž se budeme věnovat později.

Nejvýznamnějším helénistickým autorem, jehož astronomické dílo máme dochováno, je bezpochyby Klaudios Ptolemaios.

Klaudios Ptolemaios

O Klaudiovi Ptolemaiovi toho víme poměrně málo. Žil přibližně někdy mezi lety 90 a 165, jak lze vysledovat z pozorování popisovaných v *Almagestu*, a působil v Alexandrii. Podrobněji se lze o něm dočíst například v [Št]. Byl to velmi plodný autor, jak je patrné ze stručného přehledu jeho díla.

- Almagest.
- Kanopská poznámka – předběžné shrnutí parametrů Ptolemaiovy soustavy; cca 9 stran.
- Tetrabiblos – astrologická příručka, zajistilo mu proslulost ve středověku.
- Geografie – rozsáhlé dílo, obsahuje topografický popis a 27 map; (Súdéta oré: česko-německé pomezí, Ebúron: asi oblast jižně od Brna).
- Optika.
- Planetární hypotézy – o vzdálenostech planet.
- Příruční tabulky – pro výpočet poloh kosmických těles; obsahuje katalog 180 hvězd.
- Fáze nehybných hvězd.

Dnes je asi nejznámější jeho monumentální astronomické kompendium *Almagest*, jehož vydání [He] čítá 1 154 stran. Toto dílo mělo pro astronomii podobný význam, jako pro geometrii Eukleidovy *Základy*. Celá astronomie je zde budována na základě geocentrické soustavy.

Původní řecký název celého díla byl *Mathématikés syntaxeós biblia 13* (Třináct knih matematického pojednání, Μαθηματικῆς συντάξεως βιβλία ιγ̅). Později

[3] V úplnosti se dochoval pouze Hipparchův kritický komentář k Arátově astronomické básni *Fainomena*.

však bylo také nazýváno *Megalé syntaxis* (Velké pojednání, Μεγάλη σύνταξις). Arabští překladatelé tento název změnili na *Megisté syntaxis* (Největší pojednání, Μεγίστη σύνταξις), což možná učinili z úcty k tomuto ohromnému dílu. Přepisem do arabštiny a opatřením členem *'al* pak vzniklo *'al-mdžsṭj*, což dále přešlo do latiny jako *Almagest*.

Pro zajímavost uvádíme zestručnělý obsah první ze třinácti knih *Almagestu*.

(1) Předmluva.
(2) O řazení vět.
(3) Že se nebe pohybuje po sféře.
(4) Že i Země jako celek je kulatá.
(5) Že Země je středem nebe.
(6) Že Země je vůči vesmíru jako bod.
(7) Že se Země nepohybuje.
(8) Že na nebi jsou dva druhy primárních pohybů.
(9) O postupné výstavbě.
(10) O délce tětiv v kružnici.
(11) Tabulka tětiv v kružnici.
(12) O oblouku mezi slunovraty.
(13) Úvod pro sférické důkazy.
(14) O obloucích mezi rovníkem a ekliptikou.

...

Z obsahu první knihy je patrné, že Ptolemaios vypracoval tabulky délek tětiv. Jsou to nejstarší dochované tabulky tohoto typu. V následujících dvanácti knihách je pak používá v různých astronomických výpočtech. Ptolemaios neuvádí pouze tabulku, ale také podrobný návod na její sestavení.

Ptolemaiova goniometrie

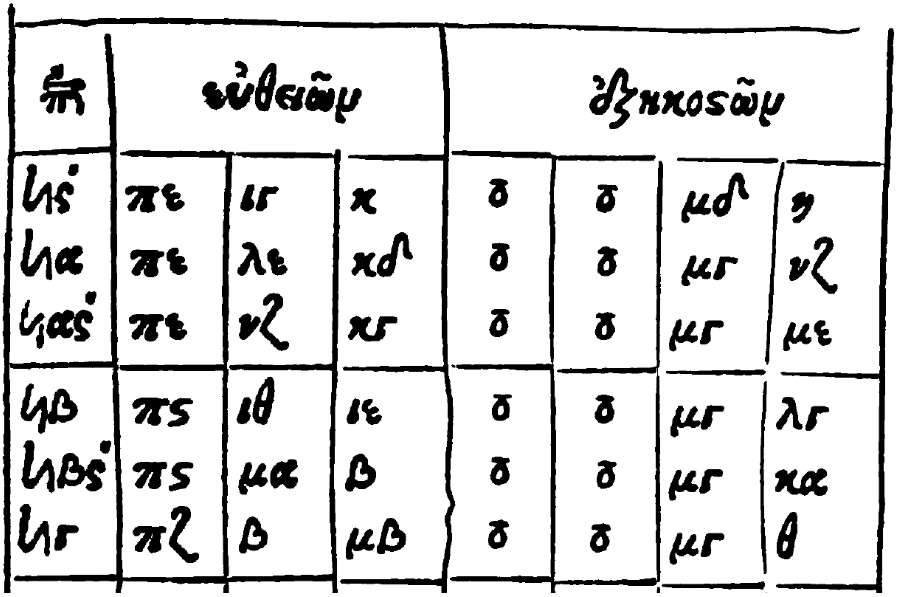
V první knize *Almagestu* je vybudována rovinná goniometrie, a to včetně pečlivých důkazů. Slouží zde jako pomocný aparát pro astronomické výpočty v průběhu celé knihy. Jak už bylo zmíněno, Ptolemaios pracuje s délkami tětiv na rozdíl od našich sinů. Dále Ptolemaios používá babylónské dělení kružnice na $360°$ a počítá dokonce v šedesátkové soustavě.[4] Průměr dělí na 120 stejně dlouhých dílů, bere tedy kružnici o poloměru $R = 60$ jednotek. Jelikož má strana pravidelného šestiúhelníka stejnou délku jako poloměr kružnice opsané, dostáváme základní poznatek, z něhož Ptolemaios vychází:

$$\operatorname{crd} 60° = 60.$$

Za těchto předpokladů odvozuje několik vět, které jsou teoretickým základem výpočtu tabulky délek tětiv příslušných středovým úhlům o velikostech od $0°$

[4] Společně s přílivem astronomických poznatků z Babylónie se do Řecka dostalo používání šedesátkové soustavy. V Řecku se její náznaky objevily poprvé někdy v polovině třetího století v geografickém díle Eratosthena z Kyreny (276–194 př. Kr.). Toto dílo se nám nedochovalo, k dispozici máme pouze několik úryvků zejména u Strabóna.

do 180° s krokem $\frac{1}{2}^\circ$. Tato tabulka je také součástí *Almagestu*, ukázka z ní je na následujícím obrázku.



περιφ.	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
ϙς'	πε	ιγ	κ	ο	ο	μδ	θ
ϙα	πε	λε	κδ	ο	ο	μγ	νζ
ϙας'	πε	νζ	κγ	ο	ο	μγ	με
ϙβ	πς	ιθ	ιε	ο	ο	μγ	λγ
ϙβς'	πς	μα	β	ο	ο	μγ	κα
ϙγ	πζ	β	μβ	ο	ο	μγ	θ

Ukázka z Ptolemaiovy tabulky, vydání [Gr] z roku 1538.

Teoretický aparát, z něhož postup tvorby tabulek tětiv vychází, je rozdělen do šesti kroků. Všechny věty, na nichž jsou jednotlivé kroky založeny, Ptolemaios pečlivě dokazuje.

(1) Určí se hodnoty crd 72° a crd 36°: na základě geometrické konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku a užitím Pýthagorovy věty dostaneme[5]

$$\mathrm{crd}\,72^\circ = 70\ 32\ 3 \qquad \mathrm{crd}\,36^\circ = 37\ 4\ 55.$$

(2) Ptolemaiova věta[6] – základ pro odvození součtového vzorce.
Pro libovolný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC| = |AC|\cdot|BD|,$$

neboli $ac+bd=ef$, kde a, b, c, d jsou postupně délky stran tětivového čtyřúhelníka a e, f jsou délky jeho úhlopříček.

---

[5] Zde zachováváme Ptolemaiův poziční šedesátkový zápis, například 70 32 3 znamená $70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{60^2}$. Vždy se jedná o trojici čísel oddělených mezerou, nemůže tak dojít k žádnému nedorozumění. V případě, že by na některé pozici měla být nula, píše Ptolemaios malý kroužek, který je patrný i na přiložené ukázce. Tento kroužek však nelze považovat za právoplatného předchůdce nuly, neboť slouží výhradně k označení „prázdné" pozice v šedesátkovém zápisu.

[6] Její formulaci a důkaz nacházíme poprvé právě v Almagestu.

(3) Vztah pro $\operatorname{crd}(\alpha - \beta)$ – lze tedy odvodit $\operatorname{crd} 12^\circ = \operatorname{crd}(72^\circ - 60^\circ)$.
(4) Vztah pro $\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$ – odtud se odvodí $\operatorname{crd} 6^\circ$, $\operatorname{crd} 3^\circ$, $\operatorname{crd}\frac{3}{2}^\circ$ a $\operatorname{crd}\frac{3}{4}^\circ$.
(5) Odhad pro $\operatorname{crd} 1^\circ$, odtud pak $\operatorname{crd}\frac{1}{2}^\circ$:

$$\operatorname{crd} 1^\circ = 1\ 2\ 50 \qquad \operatorname{crd}\frac{1}{2}^\circ = 0\ 31\ 25.$$

(6) Sestavení tabulky s krokem $\frac{1}{2}^\circ$ s pomocí odvozených vztahů.

Tětiva odpovídající jednomu stupni

Nalezení odhadu pro $\operatorname{crd} 1^\circ$ je z hlediska historie matematiky velmi významné, podáme tedy přesnější popis tohoto postupu. Viděli jsme, že z odvozené hodnoty $\operatorname{crd} 12^\circ$ lze pomocí formule pro $\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$ získat $\operatorname{crd}\frac{3}{2}^\circ$ a $\operatorname{crd}\frac{3}{4}^\circ$, ne však $\operatorname{crd} 1^\circ$. Bylo by potřeba provést trisekci úhlu, a tak musí Ptolemaios hledat dostatečně dobrou aproximaci.

Základem hledání dolního a horního odhadu je nerovnost (která platí pro $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$)

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\operatorname{crd}\alpha}{\operatorname{crd}\beta} > \frac{\alpha}{\beta},$$

která byla v té době známa, používali ji například Aristarchos, Eukleidés či Archimédés. Lze ji přepsat ve tvaru

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\operatorname{crd}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{crd}\beta}{\beta}. \tag{1}$$

Nerovnost (1) je poměrně názorná; říká, že se větší oblouk od příslušné tětivy liší více, než je tomu u menšího oblouku.

S použitím (1) dostaneme

$$\frac{\operatorname{crd}\frac{3}{2}^\circ}{\frac{3}{2}} < \frac{\operatorname{crd} 1^\circ}{1} < \frac{\operatorname{crd}\frac{3}{4}^\circ}{\frac{3}{4}}.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti hodnoty $\operatorname{crd}\frac{3}{2}^\circ = 1\ 34\ 15$ a $\operatorname{crd}\frac{3}{4}^\circ = 0\ 47\ 8$ vypočítané ve čtvrtém kroku Ptolemaiova postupu, obdržíme

$$1\ 34\ 15 \cdot \frac{2}{3} < \frac{\operatorname{crd} 1^\circ}{1} < 0\ 47\ 8 \cdot \frac{4}{3},$$

$$1\ 2\ 50 < \frac{\operatorname{crd} 1^\circ}{1} < 1\ 2\ 50\frac{2}{3},$$

kde je rozdíl mezi horním a dolním odhadem $\operatorname{crd} 1^\circ$ tak malý, že při zvolené přesnosti na dvě šedesátinná místa ihned dostáváme $\operatorname{crd} 1^\circ = 1\ 2\ 50$.[7]

[7] $1\ 2\ 50 = 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{3600} = 1{,}047\,222\ldots$, přičemž $\operatorname{crd} 1^\circ = 2 \cdot 60 \cdot \sin\frac{1}{2}^\circ = 1{,}047\,184\ldots$

Poslední sloupec v Ptolemaiově tabulce

V Ptolemaiových tabulkách je uveden ještě jeden (třetí) sloupec, který obsahuje interpolační údaje, konkrétně hodnoty

$$\frac{\operatorname{crd}\left(\alpha + \frac{1}{2}^{\circ}\right) - \operatorname{crd}\alpha}{30}.$$

Rozdíly délek tětiv sousedících v tabulce jsou vyděleny 30, přičemž tyto sousední tětivy příslušejí úhlům lišícím se velikostí o půl stupně; jedna třicetina tedy odpovídá naší jedné minutě. Pro zajímavost poznamenejme, že dělení třiceti je v šedesátkové soustavě jednoduché; provede se vynásobením dvěma a posunutím řádové čárky o jedno místo doleva.

Tento interpolační údaj tedy umožňuje rozšířit tabulky alespoň přibližnými hodnotami počítanými s krokem 1 minuta. Potřebujeme-li například hodnotu $\operatorname{crd} 7^\circ\,42'$, nalezneme v tabulkách $\operatorname{crd} 7^\circ\,30'$ a interpolační údaj, což je jedna třicetina rozdílu $\operatorname{crd} 8^\circ - \operatorname{crd} 7^\circ\,30'$. Tento údaj vynásobíme dvanácti a přičteme jej k $\operatorname{crd} 7^\circ\,30'$, čímž dostaneme pomocí lineární interpolace přibližnou hodnotu $\operatorname{crd} 7^\circ\,42'$.

Indické tabulky sinů a Árjabhaṭa

V Indii lze zájem o astronomii s jistotou vysledovat už v prvním tisíciletí před Kristem, možná i o něco dříve. Výrazně propracovanější a přesnější se indická astronomie stala někdy kolem 5. stol. př. Kr., kdy se předpokládá příliv poznatků z Babylónie. Přibližně ve 3. a 4. stol. po Kr. se začaly objevovat také řecké vlivy. K dřívějším babylónským aritmetickým schématům se tehdy začínají přidávat řecké postupy založené na geometrii. Indičtí astronomové postupně začali řešit prakticky všechny úlohy jako Řekové, zejména určování polohy Slunce, Měsíce a planet, předpovědi zatmění, nalezení délky stínu gnómónu a další. Výpočty tohoto druhu máme zachovány už v nejstarších dochovaných astronomických dílech *Árjabhaṭíja* a *Pañcasiddhántiká* z přelomu 5. a 6. století. Tyto výpočty vyžadovaly hodnoty goniometrických funkcí, není tedy divu, že prakticky každé astronomické pojednání obsahovalo v nějaké podobě goniometrické tabulky.

Výraznou změnou oproti Řecku je, že indičtí matematici začali používat polovinu délky tětivy, což odpovídalo našim sinům. Žádný komentář se k této změně nedochoval, přesto však není nijak obtížné odhadnout, že k ní vedla nutnost násobení a dělení dvěma při počítání s celými tětivami, což se objevovalo v některých typech výpočtů.

Pro indickou vědu je typické, že mnohé výsledky byly shrnovány do stručných formulí, které usnadňovaly zapamatování. V této formě máme například dochovánu celou gramatiku sanskrtu, která obsahovala 3 976 gramatických pravidel. Tato stručná pravidla nejsou běžně srozumitelná, je potřeba předem vědět, jak jsou v nich příslušné informace „zakódovány“.

Do této skupiny textů patří také již zmíněná matematicko-astronomická báseň *Árjabhaṭíja*, kterou ve svých 23 letech sestavil významný a hojně komentovaný matematik Árjabhaṭa (476–550 po Kr.). Zde také nacházíme snad první dochovanou tabulku hodnot sinů.[8] Celá tabulka je na malé ploše pouhých dvou veršů. Zde postupně uvádíme jejich zápis slabičným písmem dévanágarí,[9] přepis do latinky a překlad.

मखि भखि फखि धखि णखि ञखि ङखि हस्झ स्ककि किष्ग श्घकि किघ्व ।
घ्लकि किग्र हक्य धकि किच स्ग झश ङ्व क्ल प्त फ छ कलार्धज्याः ॥१०॥

makhi bhakhi phakhi dhakhi ṇakhi ñakhi
ṅakhi hasdžha skaki kiṣga śghaki kighva |

ghlaki kigra hakya dhaki kica sga
džhaśa ṅva kla pta pha cha kaládhedžjáḥ ||

25+200 24+200 22+200 19+200 15+200 10+200
5+200 100+90+9 90+1+100 100+80+3 70+4+100 100+4+60 |
4+50+100 100+3+40 100+1+30 19+100 100+6 90+3
70+9 5+60 1+50 21+16 22 7, což je polovina tětivy. ||
(Árjabhaṭíja 1,10)

Zvolený přepis naznačuje strukturu jednotlivých „slov“: pomocí přidaných znamének plus jsou pro názornost oddělena jednotlivá čísla reprezentovaná slabikami v rámci jednoho slova.

Čísla, která nacházíme v těchto dvou verších, jsou *diference* polovin délek tětiv. Árjabhaṭa si bere za základ kružnici, jejíž obvod rozdělil na 21 600 stejných dílků (tj. $60 \cdot 360$), jeden dílek tak odpovídá naší jedné minutě. Poloměr této kružnice je pak přibližně 3 438 dílků.

Díky tomu, že se berou jen poloviny délek tětiv, stačí uvádět hodnoty pouze pro první kvadrant. Tabulka obsahuje 24 čísel; rozdělíme-li tedy první kvadrant na 24 stejných částí, zjistíme, že jsou v Árjabhaṭově tabulce počítány hodnoty s krokem $3^\circ\,45'$, čemuž odpovídá 225 Árjabhaṭových dílků (všimněme si, že $21\,600 = 225 \cdot 4 \cdot 24$).

Abychom dostali Árjabhaṭův sinus například 15°, musíme sečíst první čtyři čísla, tj. $225 + 224 + 222 + 219 = 890$. Přepočet na náš sinus získáme, když vydělíme tuto hodnotu délkou poloměru, tj.

$$\sin 15^\circ = \frac{890}{3\,438} \doteq 0,25887.$$

Níže uvádíme kompletní tabulku vytvořenou na základě Árjabhaṭových veršů. Jednotlivé Árjabhaṭovy hodnoty jsou pro přehlednost očíslovány. U každého pořadí je uvedena velikost příslušného úhlu ve stupních, následuje samotná

[8] Árjabhaṭův postup jejich výpočtu není přesně znám, existuje pouze několik rekonstrukcí.

[9] Slabičné písmo dévanágarí se čte zleva doprava. Tyto verše užívají notace, kdy každé slabice je přiřazeno číslo, čímž vzniká možnost zápisu čísel, která vypadají jako slova. Ta však v sanskrtu obecně nemají žádný běžný význam. Například slabice *ma* odpovídá číslo 25, slabice *khi* číslo 200, slovo makhi tedy označuje číslo 225.

Árjabhaṭova hodnota diference. Tyto diference jsou v dalším sloupci postupně sčítány, čímž je získán Árjabhaṭův sinus, tj. hodnota $3\,438 \cdot \sin \alpha$. Tyto hodnoty jsou v dalším sloupci vyděleny 3 438, čímž se získá hodnota, která už v podstatě odpovídá našemu sinu. V posledním sloupci jsou pak pro srovnání dnešní hodnoty funkce sinus.

Árjabhaṭova tabulka diferencí sinů

Pořadí	Stupně	Diference	Součet	Součet / 3438	sinus
1	$3^\circ 45'$	225	225	0,0654450	0,0654031
2	$7^\circ 30'$	224	449	0,1305992	0,1305262
3	$11^\circ 15'$	222	671	0,1951716	0,1950903
4	15°	219	890	0,2588714	0,2588190
5	$18^\circ 45'$	215	1105	0,3214078	0,3214395
6	$22^\circ 30'$	210	1315	0,3824898	0,3826834
7	$26^\circ 15'$	205	1520	0,4421175	0,4422887
8	30°	199	1719	0,5	0,5
9	$33^\circ 45'$	191	1910	0,5555556	0,5555702
10	$37^\circ 30'$	183	2093	0,6087842	0,6087614
11	$41^\circ 15'$	174	2267	0,6593950	0,6593458
12	45°	164	2431	0,7070971	0,7071068
13	$48^\circ 45'$	154	2585	0,7518906	0,7518398
14	$52^\circ 30'$	143	2728	0,7934846	0,7933533
15	$56^\circ 15'$	131	2859	0,8315881	0,8314696
16	60°	119	2978	0,8662013	0,8660254
17	$63^\circ 45'$	106	3084	0,8970332	0,8968727
18	$67^\circ 30'$	93	3177	0,9240838	0,9238795
19	$71^\circ 15'$	79	3256	0,9470622	0,9469301
20	75°	65	3321	0,9659686	0,9659258
21	$78^\circ 45'$	51	3372	0,9808028	0,9807853
22	$82^\circ 30'$	37	3409	0,9915649	0,9914449
23	$86^\circ 15'$	22	3431	0,9979639	0,9978589
24	90°	7	3438	1	1

Árjabhaṭa patřil mezi velmi významné indické učence. Určil například obvod Země s udivující přesností – jeho údaj je jen o přibližně 100 km menší než současná hodnota. Uvádí také hodnotu $\pi = 3,1416$. Věděl, že to není přesná hodnota (zmiňuje, že se „blíží“); často se mu tak připisuje, že věděl o iracionalitě π, což však není v kontextu indické vědy zcela korektní. Árjabhaṭu dále citují význační arabští matematikové, například al-Chwárizmí, který jeho dílo *Árjabhaṭíja* přeložil kolem roku 820 do arabštiny, což také sehrálo důležitou úlohu na cestě arabských číslic do Evropy.

Názvy goniometrických funkcí

Árjabhaṭa nazývá polovinu tětivy *ardha-džja* (nebo zkrácené *džja*), což znamená „polovina tětivy luku“. Tento standardní termín staré indické matematiky pak arabští matematikové přepsali při překladu indických děl do arabštiny jako *džiba* (psáno bez samohlásek *džb*), což však nemá v arabštině žádný význam. Pozdější autoři jej tedy začali někdy v 9. století nahrazovat slovem *džaib* („záliv, zátoka“). Když pak ve 12. stol. překládali ROBERTUS CASTRENSIS[10] roku 1145 a GHERARDO Z CREMONY (1114–1187) roku 1175 tyto spisy do latiny, nahradili arabské *džaib* doslovně latinským ekvivalentem *sinus* („záhyb, oblouk, záliv“).

Název pro kosinus (vlastně zkratka pro latinské *complementi sinu*) zavedl spolu s názvem kotangens roku 1620 anglický astronom a matematik EDMUND GUNTER (1581–1626).

Dnes poměrně opomíjený kotangens se objevil dříve než tangens, v arabské matematice jej zavedl v 9. stol. AL-BATTÁNÍ (asi 858–929). V Evropě jej znovuobjevil anglický matematik THOMAS BRADWARDIN (1290–1349).

Arabští učenci

Arabští matematici znali velmi dobře *Almagest* a některá díla indických matematiků. Také jim byla dobře známa výhoda používání sinu místo délky celé tětivy. Goniometrie byla v raných arabských dílech pěstována prakticky výhradně kvůli astronomii, takže základní goniometrické výsledky nacházíme vesměs v úvodních kapitolách astronomických pojednání. Arabové pozvedli rovinnou i sférickou goniometrii na úroveň opravdové matematické disciplíny, například v přepracovaném vydání Ptolemaiova *Almagestu* z doby kolem roku 920 od AL-BATTÁNÍHO (asi 858–929).

Astronomické výpočty se prováděly v šedesátkové soustavě, proto byla také nejčastěji používána varianta sinu, kdy se nebrala za základ kružnice jednotková, ale o poloměru 60. Tuto variantu sinu budeme značit Sin. Platí pro něj zřejmý vztah

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{\operatorname{crd}\alpha}{2} = 60 \cdot \sin\alpha,$$

kde $\operatorname{crd}\alpha$ bereme v užším smyslu jako délku tětivy kružnice o poloměru 60 odpovídající středovému úhlu α.

První tabulky sinů, které se nám od Arabů dochovaly (ovšem jen v pozdějším přepracování), sestavil ve svém astronomickém díle *Zídž al-Sindhind*[11] MUHAMMAD IBN MÚSÁ AL-CHWÁRIZMÍ (780–850). Obsahovaly šedesátkové tabulky sinů s intervalem 1° s přesností na 3 šedesátinná místa. Al-Chwárizmí zde také implicitně používá kotangens a tangens při řešení úloh na zjišťování výšek pomocí gnómónu a stínu.

Zpřesňování výpočtů u Arabů

V Ptolemaiově postupu výpočtu hodnot délek tětiv je přesnost omezena přesností odhadu $\operatorname{crd} 1^\circ$, který je proveden na dvě šedesátinná místa. Zlepšením tohoto odhadu se úspěšně zabývali arabští učenci.

[10] Psán také jako Robert z Chesteru. Jeho přesná životní data nejsou známa, lze je odhadovat pouze na základě doby sepsání jeho díla.

[11] Toto dílo bylo založeno na stejnojmenné dřívější práci, která byla překladem sanskrtského astronomického textu.

Nejstarší známé zpřesnění odhadu pro $\operatorname{Sin} 1^\circ$ provedl egyptský astronom Ibn Júnus (asi 950–1009). Pro nalezení přesnějšího odhadu bere známé hodnoty $\operatorname{Sin} \frac{9}{8}^\circ$ a $\operatorname{Sin} \frac{15}{16}^\circ$, ze kterých získává pomocí lineární interpolace hodnotu $\operatorname{Sin} 1^\circ$ s přesností na 3 šedesátinná místa (tj. 6 desetinných míst). S touto přesností pak také počítá tabulky sinů s krokem 10 minut.

Ještě větší přesnosti než Ibn Júnus dosáhl v určování odhadu hodnoty $\operatorname{Sin} 1^\circ$ baghdádský astronom Abú'l-Wafá' al-Búzjání (940–998). Jako jeden z prvních se zabýval podrobně a systematicky goniometrickými vzorci. Ve svém díle *Almagest*[12] používal jak délku tětivy, tak i sinus. Mnoho vět, které uvádí, se zabývá vztahy mezi nimi.

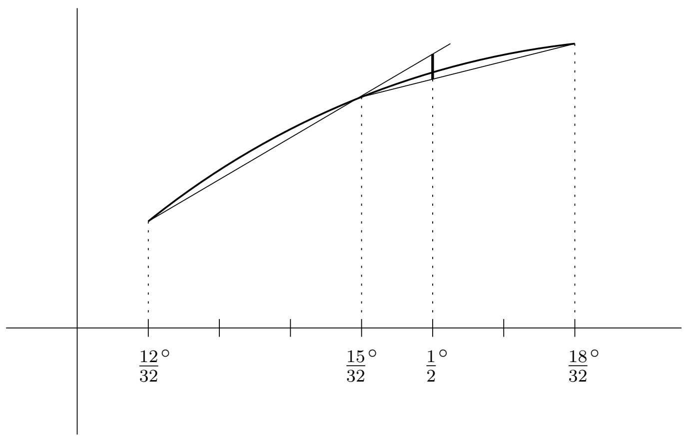
Abú'l-Wafá' navrhl nový způsob určení přesnějšího odhadu pro $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}^\circ$, čímž opět získal možnost výpočtu mnohem přesnějších tabulek. Pro výpočet $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}^\circ$ také používá interpolační metodu, přičemž předem vypočte

$$\operatorname{Sin} \frac{12}{32}^\circ, \quad \operatorname{Sin} \frac{15}{32}^\circ, \quad \operatorname{Sin} \frac{18}{32}^\circ,$$

kde

$$12^\circ = 72^\circ - 60^\circ, \quad 15^\circ = \frac{30}{2}^\circ, \quad 18^\circ = \frac{36}{2}^\circ.$$

Horní hranici pro $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}^\circ$ získá z hodnoty na přímce, která prochází body $\left[\frac{12}{32}^\circ, \operatorname{Sin} \frac{12}{32}^\circ\right]$ a $\left[\frac{15}{32}^\circ, \operatorname{Sin} \frac{15}{32}^\circ\right]$. Podobně pro dolní hranici použije přímku procházející body $\left[\frac{15}{32}^\circ, \operatorname{Sin} \frac{15}{32}^\circ\right]$ a $\left[\frac{18}{32}^\circ, \operatorname{Sin} \frac{18}{32}^\circ\right]$, jak je naznačeno na obrázku.



Získané hranice pro $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}^\circ$ jsou přibližně šestkrát užší než Ptolemaiovy. Abú'l-Wafá' tak nakonec dostává hodnotu $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}^\circ = 0;31,24,55,54,|55$, kde jsou svislou čarou oddělena platná šedesátinná místa; po převodu pak dostáváme přesnost na 7 desetinných míst.

[12] Dílo stejného názvu jako Ptolemaiův *Almagest*.

Abú'l-Rajchán al-Bírúní (973–1048) patřil mezi největší arabské učence. Napsal ohromné množství prací o astronomii (zejména *Qánún al-Mas'údí*), matematice, geografii, indické literatuře a mnoha dalších tématech. Goniometrii se věnoval v díle *Kniha o odvození tětiv v kružnici.*

V tabulkách sinů, které uvádí v *Qánún al-Mas'údí*, bral kružnici s jednotkovým poloměrem; jeho sinus tak přesně odpovídá našemu. To však tehdy přinášelo jen malé výhody, protože se astronomické výpočty stále ještě prováděly v šedesátkové soustavě. Přechod k jednotkové kružnici začal být nevyhnutelný až tehdy, když se začalo upouštět od šedesátkové soustavy a výpočty se prováděly v soustavě desítkové. Užívání jednotkové kružnice pak znamenalo vyhnout se neustálému násobení a dělení šedesáti. V Evropě se sinus, jak jej známe dnes, definitivně prosadil až zásluhou Leonharda Eulera (1707–1783).

Originálním způsobem se postavil k problému s aproximací $\operatorname{Sin} 1^\circ$ matematik Al-Samaw'al ibn Jachjá al-Maghribí (asi 1130–1180) ve své práci *Odhalení chyb astronomů.* Zde mimo jiné poukazuje na to, že astronomové spoléhají na tětivu příslušnou jednomu stupni, přitom však nikdo nezná přesně její délku. Odhalil, že kořenem tohoto problému je rozdělení kružnice na 360 dílů. Hned také navrhuje řešení: rozdělit kružnici na 240 nebo na 480 dílů. Při rozdělení na 480 dílů totiž odpovídá strana pravidelného vepsaného pětiúhelníka 96 dílům a šestiúhelníka 80 dílům. Odtud se pak snadno určí délka tětivy odpovídající $96 - 80 = 16$ dílům. Postupným půlením pak už snadno dostaneme délku tětivy odpovídající právě jednomu dílu.

Al-Káší

V Samarkandu byla ve 20. letech 15. stol. zřízena observatoř vybavená nejlepšími přístroji té doby. Tam byly také sestaveny velmi přesné astronomické tabulky *Zídž Guragání*, které obsahovaly tabulky sinů (s krokem 1 minuty) a tangent, obojí s přesností na 5 šedesátinných míst.

Džamšíd al-Káší (asi 1380–1429) popisuje v dopise *Rísalat al-watar wa-l-Džajb* (Dopis o tětivě a sinu, kolem roku 1400), jak získat jiným způsobem než Ptolemaios hodnotu $\operatorname{Sin} 1^\circ$. Ptolemaiův postup pomocí odhadu lze totiž zpřesňovat jen obtížně. Jedná se tedy o úplně jiný přístup, než který navrhl Abú'l-Wafá', který ještě navazoval na Ptolemaia.

Původní al-Kášího práce je sice ztracena, jeho postup však máme zaznamenán například v komentáři k astronomickým tabulkám *Pravidla operací a oprava tabulek*, který sepsal Marjám Čelebí (kol. r. 1500). V jednom z rukopisů je výslovně řečeno, že tento uvedený postup výpočtu $\operatorname{Sin} 1^\circ$ pochází od al-Kášího. Čelebího dědeček byl astronom a matematik Qádí Záda al-Rúmí (1364–1436), který pracoval v Samarkandu podobně jako al-Káší. Sepsal *Traktát o určení sinu jednoho stupně*, v němž je vyložen al-Kášího způsob výpočtu.

Al-Kášího postup

V době al-Kášího byla velmi dobře známa hodnota (v šedesátkové soustavě)

$$\operatorname{Sin} 3^\circ = 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15,$$

což odpovídá (po převedení do desítkové soustavy a po přepočtu na náš sinus) hodnotě

$$\sin 3^\circ = 0{,}052\,335\,956\,242\,94|4.$$

Tuto hodnotu lze získat standardním Ptolemaiovým postupem. Pro přehlednost budeme celý postup modernizovat a budeme používat našeho sinu.

Al-Káší vychází z tehdy známého vzorce

$$\sin 3\alpha = 3\,\sin\alpha - 4\,\sin^3\alpha,$$

kde za α dosazuje 1°. Přitom $\sin 1^\circ$ bere jako „věc“, která není známa, čímž celý problém převede na řešení kubické rovnice

$$\sin 3^\circ = 3x - 4x^3,$$

kde hledá $x = \sin 1^\circ$. Toto přeformulování problému trisekce úhlu na rovnici třetího stupně se podařilo už v 11. století. Celou rovnici pak al-Káší píše ve tvaru

$$3x = 4x^3 + \sin 3^\circ,$$

což je po úpravě

$$x = \frac{4x^3 + \sin 3^\circ}{3}$$

základem iteračního předpisu

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^3 + \sin 3^\circ}{3}, \quad x_0 = \frac{1}{60}.$$

Přesněji řečeno, al-Káší hledal neznámou ve formě součtu

$$x = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9,$$

kde jednotlivá a_i reprezentují jednotlivé cifry v šedesátkové soustavě vydělené příslušnou mocninou šedesáti. V al-Kášího postupu je pak například

$$a_2 = \frac{4(a_0 + a_1)^3 + \mathrm{Sin}\,3^\circ}{3} - (a_0 + a_1) \approx 0;0,49.$$

Po devíti takových iteracích tedy obdržel hodnotu

$$\mathrm{Sin}\,1^\circ = 1;2,49,43,11,14,44,16,|19,16,$$

kde je správných sedm šedesátinných míst (poslední dvě šedesátinná místa by měla být $26,18$). Tato hodnota odpovídá našemu

$$\sin 1^\circ = 0{,}017\,452\,406\,437\,28|2\,8,$$

čímž dosáhl velké přesnosti. Celý postup má oproti předchozím přístupům založeným na omezování hodnoty pomocí lineární interpolace tu velikou výhodu, že stačí znát dostatečně přesně hodnotu $\mathrm{Sin}\,3^\circ$, a poté dostaneme po několika málo iteracích pohodlně $\mathrm{Sin}\,1^\circ$ s požadovanou přesností.

Georg Joachim Rhaeticus

Georg Joachim Rhaeticus (1514–1574) byl původně profesorem aritmetiky a geometrie. Poté, co musel opustit Lipsko, odešel do Prahy studovat medicínu. Usadil se v Krakově, kde se věnoval medicíně a astronomii.

G. J. Rhaeticus je zpravidla spojován s osobou astronoma, právníka a lékaře Mikuláše Koperníka (1473–1543), neboť v roce 1539 M. Koperníka navštívil a podpořil jej v publikování jeho objevů. Bez něho by patrně Koperníkovo dílo úplně zapadlo.

V roce 1551 vydal spisek *Canon doctrinae triangulorum*, který obsahoval tabulky všech šesti tehdy používaných goniometrických funkcí (sin, cos, tg, cotg, sec, cosec). G. J. Rhaeticus v tomto spisku učinil velmi významný krok: opustil kruhové oblouky a tětivy a zavedl goniometrické funkce pomocí vztahů mezi úhly a stranami v pravoúhlém trojúhelníku, tj. způsobem, kterým se ke goniometrickým funkcím přistupuje dnes na základní škole.

V Krakově se kromě medicíny věnoval také astronomii, zvláště sestavování ohromných tabulek goniometrických funkcí *Opus Palatinum de triangulis*. Toto dílo čítá přes 1 400 stran. Obsahuje také teoretickou část, která zahrnuje prakticky celou rovinnou i sférickou trigonometrii.

Necelý rok před svou smrtí k sobě G. J. Rhaeticus přijal mladého studenta jménem Lucius Valentinus Otho (asi 1550–1603), který se později stal profesorem v Heidelbergu. Do teoretické části tabulek přispěl 340stránkovým pojednáním o sférických trojúhelnících. Po Rhaeticově smrti se L. V. Otho postaral o dokončení celého díla, které vyšlo roku 1596, práce mu tedy zabrala asi dvacet let.

Mikuláš Koperník

Úpravy Ptolemaiova *Almagestu* a komentáře k němu zůstaly až do doby Koperníkovy základem veškeré evropské astronomie. Sám Mikuláš Koperník koncipoval své hlavní dílo *De revolutionibus orbium coelestium* (Oběhy nebeských sfér) podle *Almagestu.* Toto jeho dílo mělo být jakýmsi novým *Almagestem* vycházejícím však z heliocentrického názoru.

Pro zajímavost a pro srovnání s Ptolemaiovým *Almagestem* uvedeme obsah celé první knihy.

Úvod.

(1) O tom, že svět je kulatý.
(2) O tom, že také Země je kulatá.
(3) O tom, jak Země s vodou tvoří jedinou kouli.
(4) O tom, že pohyb nebeských těles je rovnoměrný, kruhový, nepřetržitý anebo složený z kruhových pohybů.
(5) O tom, zda se Země pohybuje kruhovým pohybem, a o jejím místě.

(6) O nesmírné velikosti nebe vzhledem k velikosti Země.
(7) Proč se staří domnívali, že Země leží nehybně ve středu světa jako jeho centrum.
(8) Řešení předložených důvodů a jejich nedostatečnost.
(9) Zda je možné Zemi přisoudit více pohybů a o středu světa.
(10) O pořadí nebeských sfér.
(11) Důkaz o trojnásobném pohybu Země.
(12) O přímkách, které jsou tětivami kruhu.
(13) O stranách a úhlech přímostranných rovinných trojúhelníků.
(14) O sférických trojúhelnících.

Kapitoly 12 až 14 první knihy měly původně tvořit samostatnou druhou knihu, která by obsahovala pomocný matematický aparát. Tato část vyšla odděleně pod Koperníkovým jménem ještě před publikací celého díla roku 1542 pod názvem *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum* (O stranách a úhlech rovinných přímostranných a sférických trojúhelníků) ve Wittenbergu. O vydání se postaral G. J. Rhaeticus.

Pro nás je nejzajímavější 12. kapitola, v níž Koperník uvádí Ptolemaiův postup výpočtu a tabulky. Samotný výklad s důkazy je veden pro tětivy. Potom však poznamenává, že bude v tabulce uvádět *jen poloviny tětiv dvojnásobného oblouku*. Díky tomu vystačí pouze s kvadrantem a nemusí brát celý půlkruh. Navíc jsou ve výpočtech a v důkazech užitečnější poloviny než celé délky tětiv. Své tabulky uvádí s krokem šestiny stupně, tj. 10 minut.

O volbě průměru kružnice Koperník píše:[13]
Kruh jsme v obecné shodě s matematiky rozdělili na 360 stupňů. Staří autoři brali průměr jako 120 dílů; pozdější autoři, aby se vyhnuli spleti malých čísel při násobení a dělení těchto čar, které jsou nesouměřitelné v délkách, ale spíše v mocninách, odkdy se ustálilo používání indických číslic, určili průměr na dvanáctkrát sto tisíc, další na dvacetkrát sto tisíc, jiní určili racionální průměr nějak jinak. Tento způsob číselného označení je dokonalejší než kterýkoli jiný, ať už řecký nebo latinský, protože se dá neobyčejně pohotově použít na výpočty.[14] *Proto jsme i my přijali 200 000 dílů průměru jako dostačujících, aby zabránily vydělitelné chybě.*[15] *To, co navzájem není v poměru jako číslo k číslu, je možné vyjádřit tím, co stojí nejblíže.*[16] *Následujíce z velké části Ptolemaia, vysvětlíme to v šesti teorémech a v jedné úloze.*

Těchto šest vět skutečně odpovídá šesti krokům, ve kterých odvozuje celou teorii Ptolemaios. Pro srovnání si Koperníkovy věty stručně a bez důkazů shrneme.

(1) Pro daný průměr kruhu je dána i strana pravidelného vepsaného troj-,

[13] Viz [Ko], str. 85–86. Ze slovenštiny převedeno autorem tohoto článku.

[14] V Koperníkově době se už počítá v desítkové soustavě, proto už není výhodné volit poloměr 60, jak činí Ptolemaios, ale raději nějakou mocninu deseti.

[15] Koperníkova tabulka tedy obsahuje pouze celá čísla a při jejím používání tak není potřeba počítat s čísly desetinnými. Nacházejí se v ní hodnoty našich sinů vynásobené 100 000, což odpovídá našim tabulkám vypracovaným s přesností na pět desetinných míst.

[16] Zde se hovoří o zaokrouhlování na celá čísla.

čtyř-, šesti-, pěti- a desetiúhelníka.

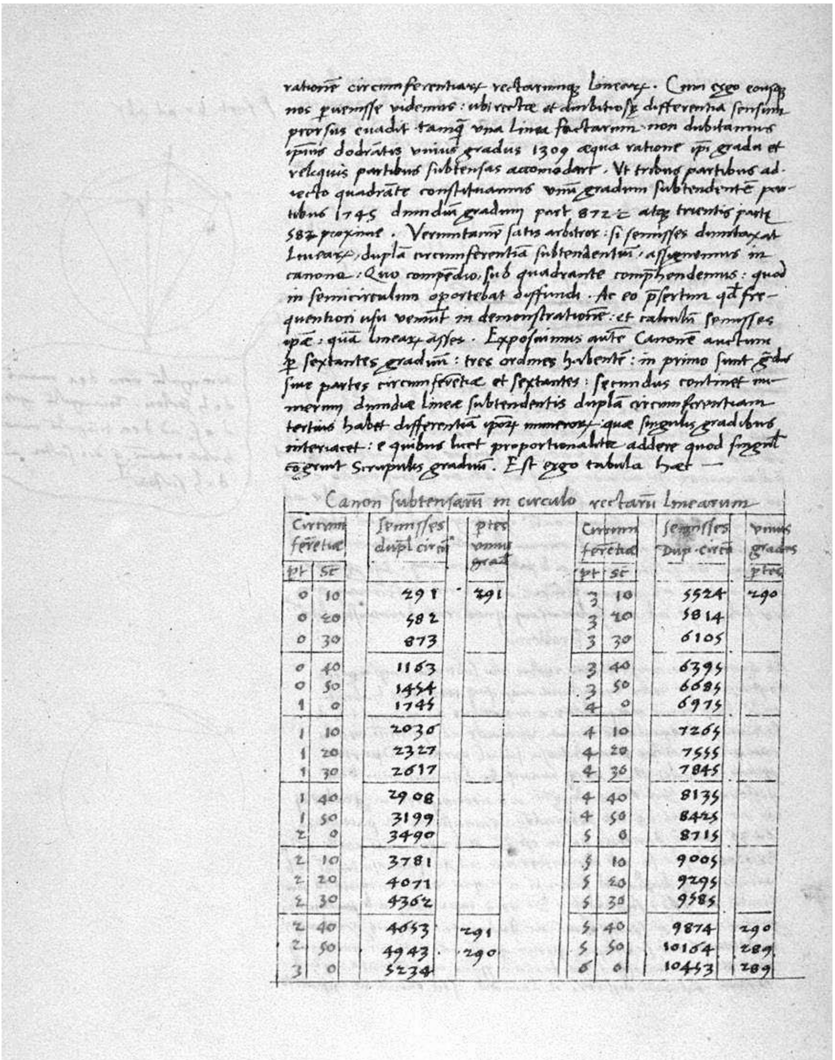
(2) Vepíše-li se do kruhu čtyřúhelník, rovná se obdélník sestrojený z úhlopříček těm rovnoběžníkům, které jsou sestrojeny z protilehlých stran. (Ptolemaiova věta)

(3) Odtud lze získat vztah pro $\operatorname{crd}(\alpha - \beta)$.

(4) Odvození vztahu pro $\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$.

(5) Odvození vztahu pro $\operatorname{crd}(\alpha + \beta)$.

(6) Důkaz nerovnosti $\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\operatorname{crd}\beta}{\operatorname{crd}\alpha}$.



Canon subtensarum in circulo rectarum linearum

Circumferentiae pt	sc	Semisses dupl. circ.	ptes unius grad.	Circumferentiae pt	sc	Semisses dup. circ.	unius gradus ptes
0	10	291	291	3	10	5524	290
0	20	582		3	20	5814	
0	30	873		3	30	6105	
0	40	1163		3	40	6395	
0	50	1454		3	50	6685	
1	0	1745		4	0	6975	
1	10	2036		4	10	7265	
1	20	2327		4	20	7555	
1	30	2617		4	30	7845	
1	40	2908		4	40	8135	
1	50	3199		4	50	8425	
2	0	3490		5	0	8715	
2	10	3781		5	10	9005	
2	20	4071		5	20	9295	
2	30	4362		5	30	9585	
2	40	4653	291	5	40	9874	290
2	50	4943	290	5	50	10164	289
3	0	5234		6	0	10453	289

Ukázka autografu Koperníkových *Oběhů*, folio 15 verso.[17]

[17] Vlevo nahoře na širokém okraji prosvítá z předchozí stránky ilustrace k šesté větě.

Celý teoretický aparát je podle Ptolemaia vybudován pro tětivy. Před uvedením samotných tabulek podává Koperník ještě stručný komentář, jak lze tabulky na základě dokázaných vět vytvořit. Zde už hovoří o polovině délky tětivy. K určení poloviny délky tětivy příslušné jednomu stupni, která je základem tabulek, poznamenává, že *když vezmeme oblouk AB rovný* $1\ 1/2°$ *a oblouk AC je velký* $3/4°$*, bude tětiva AB těch 2 618 dílů a tětiva AC 1 309 dílů, a tak musí být větší než polovina tětivy AB; nelze však pozorovat, že by se od ní lišila, ale poměr oblouků a tětiv už vypadá jakoby stejný. Když jsme tedy došli až tam, kde je rozdíl přímky a oblouku nepostřehnutelný, jako by byli touž čarou, nepochybujeme o tom, že se tětivy, právě tak jako tětiva* $3/4°$*, která je 1 309 dílů, stejně přizpůsobují k jednomu stupni a k ostatním jeho částem.*[18]

Mikuláš Koperník zde naznačuje, že polovinu délky tětivy příslušné $1°$ získal lineární interpolací z hodnot 1 309 pro $3/4°$ a 2 618 pro $1\ 1/2°$. Dostal tak hodnotu[19]

$$1\,309 + \frac{2\,618 - 1\,309}{3} \doteq 1745.$$

Na výše uvedeném obrázku[20] je ukázka z autografu Koperníkových *Oběhů*, na které je začátek jeho tabulky sinů. V prvních dvou sloupcích jsou uvedeny stupně a minuty (v původním rukopise psány červeně), druhý sloupec obsahuje „poloviční tětivy dvojnásobných oblouků“, tj. čísla, která jsou po posunu řádové čárky o pět míst doleva přesně rovna našim sinům. Všimněme si například hodnoty 1745 u jednoho stupně.

Mocninné řady, řetězové zlomky

Objev diferenciálního a integrálního počtu přinesl úplně nové možnosti výpočtu hodnot goniometrických funkcí. Konkrétní rozvoje některých funkcí byly známy dokonce ještě o něco dříve, diferenciální počet však přinesl možnost celkového utřídění těchto dílčích poznatků a začala se také zkoumat konvergence těchto řad.

Taylorovy rozvoje funkcí do mocninné řady jsou známy velmi dobře. Například máme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Tato řada konverguje velmi rychle pro x blízká nule. Nepřekvapí tedy, že Taylorovy (případně Laurentovy) rozvoje nacházejí uplatnění v praxi. Pro zajištění dostatečné rychlosti konvergence na celém základním intervalu se tento interval rozdělí na několik podintervalů a pro každý z nich je v paměti uložen speciální rozvoj vhodný pro příslušný podinterval.

Rozvoje do mocninných řad se tedy pro praktické výpočty vesměs hodí. Napsat Taylorův rozvoj pro funkci tangens je však nepoměrně složitější, než

[18] Viz [Ko], str. 91–92. Ze slovenštiny převedeno autorem tohoto článku.

[19] Pro srovnání: $\sin 1° = 0,017\,452\ldots$

[20] Obrázek byl převzat z digitalizované verze volně dostupné na stránkách Jagellonské univerzity v Krakově, viz [W1].

pro funkce sinus a kosinus. Jinak je tomu s řetězovým zlomkem, který lze pro funkci tangens napsat poměrně snadno:[21]

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}.$$

Tento zápis se často píše v úspornější formě:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1-}\,\frac{x^2}{3-}\,\frac{x^2}{5-}\,\frac{x^2}{7-}\cdots$$

Rozvoje do řetězových zlomků mají ještě jednu nezanedbatelnou výhodu: jsou často numericky výhodnější než rozvoje do mocninných řad, řetězové zlomky totiž v mnoha případech konvergují rychleji.

V praxi se používají i jiné aproximace zadané funkce, a to polynomem či racionální funkcí, například aproximace Čebyševova nebo Padého, případně interpolační vzorce.[22] Ve všech těchto případech však výpočet obsahuje mnoho násobení a dělení, což dříve bývalo náročné na čas i na místo na papíře, respektive v paměti počítače. V dobách počátků výpočetní techniky se tedy musel hledat vhodnější způsob výpočtu goniometrických funkcí, který by vyhovoval možnostem tehdejší výpočetní techniky.

CORDIC

V září roku 1959 vyvinul Jack E. Volder v oddělení letecké elektroniky v Convair speciální algoritmus pro výpočet hodnot funkce tangens. Tehdy bylo potřeba nahradit analogový řešič v navigačním počítači bombardéru B-58. Nový algoritmus dostal název CORDIC, tj. Coordinate Rotation on a Digital Computer. Svůj výsledek publikoval v článku [Vo].

Tento algoritmus byl navržen s ohledem na omezené možnosti tehdejší výpočetní techniky. Potřeboval prakticky pouze sčítání, odčítání a posun desetinné čárky, což jsou operace, které lze provádět velmi snadno a rychle. Pokud tedy procesor nemá zabudováno hardwarové násobení, tak je CORDIC obecně rychlejší než jiné algoritmy. Jinak jsou však mocninné řady a metody založené na načítání z tabulky a následné interpolaci rychlejší.

John Stephen Walther z Hewlett–Packardu tento algoritmus později zobecnil[23] tak, že jej bylo možno použít nejen na výpočet funkčních hodnot goniometrických a hyperbolických funkcí, ale také funkcí exponenciálních, druhé odmocniny, logaritmů a násobení i dělení.

---

[21] Viz [Pr], str. 91–92.
[22] Podrobněji viz [AS].
[23] Viz [Wa].

CORDIC byl původně vytvořen pro dvojkovou soustavu, v sedmdesátých letech se pak objevila modifikace pro soustavu desítkovou – většina kapesních kalkulátorů totiž byla konstruována tak, že ve dvojkové soustavě reprezentovala dekadické číslice (tzv. BCD, binary coded decimal).

Podstata algoritmu

Algoritmus CORDIC je založen na použití součtového vzorce pro funkci tangens. Chceme-li pro dané α vypočítat $\operatorname{tg}\alpha$, je postup následující.

1. V paměti máme uložena jednou provždy čísla α_i taková, že $\operatorname{tg}\alpha_i = 10^{-i}$, tj.

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{10}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{100}, \quad \dots$$

2. Zadané α vyjádříme jako součet těchto α_i:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.$$

Dostaneme tak

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right).$$

3. S použitím součtového vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \alpha_j) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_i) + \operatorname{tg}(\alpha_j)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_i) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_j)}$$

dostaneme výsledek. Konkrétně, označme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) = \frac{y'}{x'},$$

dostaneme

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) = \frac{\frac{y}{x} + \operatorname{tg}\alpha_i}{1 - \frac{y}{x} \cdot \operatorname{tg}\alpha_i} = \frac{y + x\operatorname{tg}\alpha_i}{x - y\operatorname{tg}\alpha_i} = \frac{y'}{x'},$$

odkud obdržíme

$$y' = y + x\operatorname{tg}\alpha_i, \quad x' = x - y\operatorname{tg}\alpha_i.$$

Násobení $\operatorname{tg}\alpha_i$ je realizováno pouhým posunem desetinné čárky, neboť máme $\operatorname{tg}\alpha_i = 10^{-i}$. Zde je skryta podstata a účinnost tohoto algoritmu. Úplně na závěr celého výpočtu je pak potřeba provést jediné dělení.

CORDIC – program v C

Funkci tohoto algoritmu lze snadno simulovat na počítači. Na závěr tohoto textu přikládáme jednoduchý program napsaný v C, který je určen pro vlastní experimentování s algoritmem CORDIC.

```
#include<stdio.h>

main()
{
   double x=1, y=0, t=10, a=0; int i=0;

   double alfa[9];
   alfa[0] = 0.7853981633974483096156608;       //arctg(1)
   alfa[1] = 0.09966865249116202737844612;      //arctg(1/10)
   alfa[2] = 0.009999666686665238206340116;     //arctg(1/100)
   alfa[3] = 0.0009999996666668666665238096;
   alfa[4] = 0.00009999999966666666866666665;
   alfa[5] = 0.000009999999999666666666686667;
   alfa[6] = 0.0000009999999999996666666666669;
   alfa[7] = 0.00000009999999999999966666666667;
   alfa[8] = 0.000000009999999999999999666666667;

   printf("Pocitame tangens; velikost uhlu (v rad):  ");
   scanf("%lf", &a); double uhel=a;

   for (i=0; i<9; i++)
   {
      t=t/10;

      while (a >= alfa[i])
      {
         a = a - alfa[i];
         x = x - t*y;
         y = y + t*(x+t*y);      //vlastně y = y + t*x;
      }
   }
          //tisk výsledku:
   printf("\ntg %g = \t %.12g \n", uhel, y/x);
}
```

LITERATURA

[AS] Abramowitz M., Stegun I. (ed.), *Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.

[Al] Aleksandrova N. V., *Matěmatičeskije těrminy*, Vysšaja škola, Moskva, 1978.

[Be] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003.

[Br] Brummelen G., *The Mathematics of the Heavens and the Earth*, PUP, Princeton, 2009.

[Ca] Cajori F., *A History of Mathematical Notations (1. a 2. díl)*, Dover, New York, 1993.

[Ch] Chabert J.-L. (ed.), *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer–Verlag, Berlin, 1999.

[Gr] Grynaeus S. (ed.), *Kl. Ptolemaiú Megalés syntaxeós bibl.* ΙΓ *(1. díl)*, Editio princeps, Basilej, 1538.

[He] Heiberg J. L. (ed.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia volumen I., Syntaxis mathematica (1. díl)*, Teubner, Lipsko, 1898.

[Ju] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[Ko] Kopernik M., *Obehy nebeských sfér*, Veda, Bratislava, 1973.

[Pr] Press W. H., *Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[PJ] Pedersen O., *A Survey of the Almagest. With Annotation and New Commentary by Alexander Jones*, Springer, 2010.

[Št] Štefl V., *Klaudios Ptolemaios*, Edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek č. 15, Prometheus, Praha, 2005.

[T1] Toomer G. J., *Ptolemy's Almagest*, PUP, Princeton, 1998.

[T2] Toomer G. J., *The Chord Table of Hipparchus and Early History of Greek Trigonometry*, Centaurus **18** (1973), 6–28.

[Vo] Volder J., *The CORDIC Trigonometric Computing Technique*, IRE Transactions on Electronic Computers **EC-8** (1959), 330–334.

[Vy] Vymazalová H., *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty*, Edice Dějiny matematiky, svazek č. 31, Český egyptologický ústav, Praha, 2006.

[Wa] Walther J., *A Unified Algorithm for Elementary Functions*, Spring Joint Computer Conference Proceedings **38** (1971), 379–385.

[W1] http://www.bj.uj.edu.pl/bjmanus/revol/toc_e.html.