Počátky počtu pravděpodobnosti

I. část: Vznik počtu pravděpodobnosti

In: Karel Mačák (author): Počátky počtu pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Prometheus, 1997.
pp. 8–22.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401657

I.část
Vznik počtu pravděpodobnosti

1 Úvod k I. části

1.1 Vstupní úvaha

S náhodnými jevy se lidstvo setkávalo od nepaměti, k jejich matematickému zkoumání ale přikročilo až v novověku; za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou spolu v létě a na podzim r. 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat. Příčin tohoto poměrně pozdního počátku matematického přístupu k jevu náhody mohlo být více [1]; dle našeho názoru mohou být rozděleny do dvou skupin:

I. První skupinu by bylo možno nazvat příčinami epistemologickými; tyto příčiny spočívají v tom, že nikdo neviděl (nerozpoznal) žádnou souvislost mezi matematikou na straně jedné a náhodnými jevy na straně druhé. Pokud se matematiky týče, byla do ní tradičně zahrnována geometrie, aritmetika a algebra; zde se nic náhodného nevyskytovalo. Pokud se náhody týče, bylo k ní přistupováno (byla-li vůbec zkoumána) v podstatě dvojím způsobem.

1. Náhoda byla jistým způsobem „zbožštěna“; náhodné jevy byly považovány za projev vůle tajemného božstva a jejich zkoumání náleželo tedy do kompetence kněží, nikoli matematiků.

2. Náhoda byla považována za synonymum pro neznalost všech příčin a kauzálních vazeb, což v podstatě znamená odmítnutí objektivní existence náhody; uveďme zde v této souvislosti dva citáty ze Spinozovy *Etiky* [2] (citujeme podle překladu vydaného nakladatelstvím Svoboda, Praha 1977):

> TVRZENÍ 29 *(str. 88): V přírodě neexistuje nic náhodného, nýbrž všechny věci jsou přirozeností Boha nutně determinovány k určitému modu existence a působení.*
>
> POZNÁMKA 1 *(str. 92 - 93): ... Jako náhodnou však označujeme věc jen z důvodů tkvících v nedostatečnosti našeho poznání. Ta věc, o níž nevíme, zda její esence nezahrnuje protiklad, nebo o níž bezpečně víme, že žádný protiklad nezahrnuje, a přesto o její existenci nemůžeme nic s jistotou tvrdit, protože řád příčin je nám skryt, taková věc se nám nemůže jevit ani jako nutná, ani jako nemožná, a proto ji nazýváme náhodnou nebo možnou.*

---

[1] Obecně a podrobně je tato otázka probrána v knize HACKING, I.: *The Emergence of Probability.* Cambridge Univ. Press, 1975; reakcí na tuto knihu je článek GARBER, D. - ZUBELL, S.: *On the Emergence of Probability.* Archive for History of Exact Sciences 21 (1979), 1, 33-53.

[2] Benedikt Spinoza (1632 - 1677) dokončil svůj spis *Ethica ordine geometrico demonstrata* v r. 1675; vydán byl v r. 1677 až po Spinozově smrti. Byl tedy psán právě v době, kdy vznikala teorie pravděpodobnosti a je známo, že Spinoza se zajímal i o matematickou stránku této teorie (viz dále II.3.1.2).

II. Druhou skupinu by bylo možno nazvat příčinami utilitaristickými; tyto příčiny spočívají v tom, že matematické zkoumání náhodných jevů nebylo dříve nutné, protože ho nikdo k ničemu nepotřeboval. Nutnost přesného popisu náhodných jevů se objevila jednak v souvislosti s rozvojem mořeplavby, obchodu, (tehdy) moderního buržoazního státu a z toho plynoucího vzniku demografie a pojišťovnictví, jednak v souvislosti s rozvojem exaktních přírodních věd (hlavně astronomie a experimentální fyziky) a z toho plynoucí nutnosti zpracovávat výsledky měření zatížené náhodnými chybami [3].

Uvedené skutečnosti (a možná i další vlivy) mohly být příčinou toho, že matematická teorie pravděpodobnosti začala vznikat až v 16. století, i když její základní principy jsou velice jednoduché (třeba ve srovnání s řeckou geometrií). Při jejím vzniku sehrály roli „odrazového můstku" hazardní hry a sázky, obzvláště hra v kostky. Základním matematickým aparátem se postupně stala paralelně vznikající kombinatorika, jejíž rozvoj zde ale nebudeme sledovat (i když paralelní vývoj kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti v počátcích obou těchto disciplín je jistě zajímavý); připomeneme si pouze některé základní práce.

1.2 Výchozí problémy

Jak už bylo řečeno, za datum vzniku teorie pravděpodobnosti je považován rok 1654. V té době už byly v jistém smyslu „ustálené" dva typy problémů z oblasti hazardních her a sázek, které sloužily formující se teorii pravděpodobnosti jako základní materiál:

I. První typ problémů bychom dnes asi označili za problémy kombinatorické a týkaly se např. toho, kolika způsoby může padnout jistý počet ok při házení dvěma, třemi, atd. kostkami; úlohy podobného typu se objevují v teorii pravděpodobnosti a jejích aplikacích i dnes [4].

II. Druhý typ problémů má dnes význam čistě historický a týkal se tzv. úlohy o rozdělení sázky, kterou lze formulovat v nejjednodušší podobě takto:

Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her (lidově se někdy říká, že hráči hrají <u>na</u> k vítězných her, a v dalším textu budeme této formulace občas používat, protože je stručná). Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří"). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?

Všimněme si toho, že oba typy problémů lze formulovat bez použití pojmu „pravděpodobnost" a původně opravdu bez použití tohoto pojmu formulovány

---

[3] Tento faktor se však ve vývoji teorie pravděpodobnosti výrazněji uplatnil až později (Gauss, Laplace) a v tomto příspěvku mu nebude věnována pozornost. Zájemce o tuto problematiku upozorňujeme na práce ŠEJNIN, O.B.: *Laplace's Theory of Errors.* Archive for History of Exact Sciences 17 (1977), 1, 1-61 a od téhož autora v tomtéž časopisu *C.F. Gauss and the Theory of Errors*, 20 (1979), 1, 22-72.

[4] Jako příklad uveďme článek GULDAN, F.: *Je lepšie hrať ruletu alebo blackjack?* PMFA 38 (1993), 1, 29-39.

byly; nemluvilo se o pravděpodobnostech, ale o dělení sázky, šancích na výhru a podobně.

1.3 Bezprostřední předchůdci

Některé konkrétní případy úlohy o rozdělení sázky řešil již Luca Pacioli (1445(?) - 1514(?)) v knize *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (vyšla r. 1494) a Nicolo Tartaglia (1499(?) - 1557) v knize *General trattato di numeri et misura* (vyšla r. 1556); jejich řešení jsou ale chybná.

Zřejmě první prací, věnovanou speciálně problémům zahrnovaným dnes do teorie pravděpodobnosti, byla práce Hieronyma Cardana (1501 - 1576) *De ludo aleæ*, kterou Cardano napsal asi r. 1526, ale nevydal ji tiskem; byla nalezena v jeho rukopisné pozůstalosti a otištěna v 1. svazku jeho sebraných spisů, který vyšel r. 1663.

Teorií pravděpodobnosti se zabýval i Galileo Galilei (1564 - 1642); jeho spis *Considerazione sopra il giuco dei dadi* vyšel až r. 1718 a datum vzniku není známo.

Rozbor všech uvedených prací lze nalézt např. v [2], str. 22 - 42 [5].

2 Vznik teorie pravděpodobnosti

2.1 Hlavní postavy

Jak už bylo řečeno, za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou v r. 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat o problémech, se kterými se na Pascala obrátil rytíř de Méré. Část těchto dopisů se nezachovala; zachovaná korespondence byla vydána tiskem v Toulouse v r. 1679 [6].

2.1.1 Blaise Pascal (1623 - 1662)

Narodil se v Clermont - Ferrandu; jeho otec Etienne Pascal (1588 - 1651) byl povoláním soudce, ale rovněž se zabýval matematikou (Pascalovy závitnice). V r. 1631 se rodina přestěhovala do Paříže.

Blaise Pascal byl všestranně nadaný: ve věku 16 let publikoval pojednání o kuželosečkách, ve dvaceti sestrojil počítací strojek, v letech 1648 - 1653 opakoval a ověřil Toricelliho pokusy k výpočtu atmosférického tlaku, v letech 1653

[5] U nás byl publikován stručný přehled této problematiky v článku COUFAL, J.: *Alea iacta est aneb půl tisíciletí od vytištění úlohy rytíře de Méré.* Informační bulletin České statistické společnosti 5 (1994), č.1 a 2. Nejpodrobnější prací na dané téma je asi článek ŠEJNIN, O.B: *On the Prehistory of the Theory of Probability.* Archive for History of Exact Sciences 12 (1974), 2, 97-141.

[6] Z pedagogického hlediska by v této souvislosti neměla být přehlédnuta knížka RÉNYI, A.: *Dialogy o matematice.* MF Praha 1980; jedna její část je věnována právě vzniku teorie pravděpodobnosti.

- 1654 se zabýval teorií pravděpodobnosti, v letech 1658 -1659 se zabýval cykloidou (z hlediska výpočtu plochy, těžiště apod., čímž vlastně předjímal infinitesimální metody Newtonovy a Leibnizovy). Zabýval se rovněž filozofií a teologií; v r. 1656 uveřejnil ostře protijezuitské *Listy venkovanovi* a od r. 1658 pracoval na obraně křesťanského náboženství, z níž napsal pouze fragmenty, vydané po jeho smrti pod názvem *Pensées* (1669).

2.1.2 Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Působil jako právník v Toulouse, matematikou se zabýval jako koníčkem. Byl vynikajícím znalcem jazyků klasických (latina, řečtina) i současných (španělština, italština); ve francouzštině, španělštině a italštině psal i básně. Ke studiu matematiky ho zřejmě přivedla četba originálů řeckých matematických klasiků (Eukleida, Archimeda, Diofanta a dalších). Je považován za zakladatele teorie čísel, kde získala největší proslulost tzv. velká Fermatova věta, a spoluzakladatele teorie pravděpodobnosti.

2.1.3 Antoine Gombaud de Méré (1607 - 1685)

Byl známou postavou na dvoře Ludvíka XIV; zabýval se literaturou, filozofií a matematikou [7]. V r. 1653 podnikl s Pascalem a dalšími přáteli cestu do Poitou, odkud pocházel [8]; přitom asi seznámil Pascala a další s některými matematickými problémy, kterými se zabýval, a tím asi dal podnět k Pascalově korespondenci s Fermatem.

2.2 Problémy rytíře de Méré a jejich řešení

De Méré seznámil Pascala se dvěma problémy, z nichž Pascala s Fermatem hlavně zaujala úloha o rozdělení sázky, jejíž formulaci jsme již uvedli v části 1.2. Druhá úloha byla poměrně elementární a Pascal ji zřejmě vyřešil obratem ruky (viz citace v následující části); tato úloha se dodnes objevuje v učebnicích a zde bude vyložena jako první.

Při řešení těchto problémů vycházeli Pascal s Fermatem z pojetí pravděpodobnosti odpovídajícího dnešní tzv. klasické definici pravděpodobnosti, pojem „pravděpodobnost“ ale vůbec nedefinovali; jejich cílem bylo řešení jistých konkrétních úloh, nikoli definování obecných pojmů a teoretické studium jejich vlastností.

2.2.1 Úloha o kostkách

De Méré tvrdil, že chce-li někdo hodit aspoň jednou šestku při opakovaném házení jednou kostkou, má nadpoloviční šanci na úspěch počínaje čtyřmi hody

[7] Některé prameny uvádějí jako rok úmrtí r. 1684; v knize HORÁK, P.: *Svět Blaise Pascala*. Vyšehrad, Praha 1985, str. 68, je uvedeno, že de Méré zemřel při hře v karty.

[8] Poitou je oblast ve střední Francii, jejímž centrem je město Poitiers; připomeňme si při této příležitosti v souvislosti s dějinami arabské matematiky, že v r. 732 porazila francouzská vojska vedená Karlem Martellem Araby v bitvě u Poitiers.

a poměr šancí na úspěch k šancím neúspěšným při čtyřech hodech je 671 : 625 ([2], str. 50). Pokud chce někdo hodit aspoň jednou dvě šestky při házení dvěma kostkami, měl by mít dle de Mérého nadpoloviční šanci na úspěch počínaje 24 hody (neboť poměr 24 : 36 je stejný jako poměr 4 : 6), ale de Méré zjistil (asi ve své hráčské praxi), že to není pravda, což ho pobouřilo [9].

První tvrzení de Mérého je správné, druhé ale nikoli. Snadno nahlédneme, že pravděpodobnost toho, že v k hodech nepadnou ani jednou dvě šestky, je rovna $(\frac{35}{36})^k$. Řešení daného problému tedy lze nalézt řešením nerovnice

$$\left(\frac{35}{36}\right)^k < \frac{1}{2},$$

ze které plyne $k \doteq 24,6$, takže dvěma kostkami je třeba hodit aspoň pětadvacetkrát, aby šance na úspěch byla nadpoloviční. Pomocí programového produktu MAPLE bylo zjištěno, že poměr šancí na úspěch k šancím neúspěšným je potom

$$\frac{36^{25} - 35^{25}}{35^{25}} = \frac{4086116839922937470920116898425226215 01}{399669593472470313551127910614013671875} \approx 1,022\,.$$

2.2.2 Úloha o rozdělení sázky

Obecnou formulaci úlohy jsme už uvedli v části 1.2; Pascal s Fermatem řešili ve své korespondenci pouze některé speciální případy úlohy o rozdělení sázky pro konkrétní dané hodnoty C, k, m, n. Základní myšlenka jejich řešení spočívala v tom, že za spravedlivé považují takové rozdělení sázky, při kterém je částka C rozdělena mezi hráče ve stejném poměru, v jakém jsou v okamžiku přerušení série her jejich pravděpodobnosti výhry celé částky, kdyby se celá série dohrávala. Pascal se touto úlohou zabýval i mimo rámec své korespondence s Fermatem. Ve spisu *Traité du triangle arithmétique* napsaném r. 1654, ale vydaném až posmrtně v r. 1665, uvádí obecné řešení [10], které lze stručně shrnout takto:

I. Do dokončení celé série chybí nejvýše $m + n - 1$ her.

II. První hráč vyhraje celou sázku, jestliže druhý hráč vyhraje nejvýše $n - 1$ her.

III. Druhý hráč vyhraje celou sázku, jestliže první hráč vyhraje nejvýše $m - 1$ her.

IV. Z celkového počtu $m + n - 1$ her lze vyhrát (tj. vybrat) k her celkem $\binom{m+n-1}{k}$ způsoby.

---

[9]Pascal v dopisu Fermatovi z 29.VII.1654 o tom píše: *To tedy byl jeho veliký skandál, který ho přiměl domýšlivě říci, že poučky nejsou stálé a že se aritmetika mýlí: vy ale jistě snadno uvidíte důvod podle principů, k nimž jste dospěl.*

(Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'etaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait: mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.) ([5], str. 166).

[10]Podrobně je tato otázka probrána ve třetí části naší práce.

V. Poměr šancí obou hráčů na výhru celé sázky tedy je

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{j}$$

a ve stejném poměru musí být rozdělena i částka C mezi oba hráče.

2.2.3 Příklad úlohy o rozdělení sázky

Jak už bylo řečeno, v dnešních učebnicích teorie pravděpodobnosti se úloha o rozdělení sázky prakticky nevyskytuje [11], proto považujeme za vhodné uzavřít tuto část jedním konkrétním příkladem na několik různých řešení této úlohy, a to v případě, kdy hráči A, B hrají na šest vítězných her a hráč A už vyhrál pět her, hráč B tři hry.

a/ Tartagliovo řešení ([2], str. 34)

Autorem uvedené úlohy je podle [2] N. Tartaglia, který ji také řešil. Podle jeho pojetí by odchylka vyplacené částky od vložené částky měla být úměrná rozdílu počtu vyhraných her. Protože v daném příkladu je rozdíl v počtu vyhraných her roven 2, což je 1/3 počtu her nutného k celkové výhře, obdrží hráč A podle Tartaglii o 1/3 více než vsadil a hráč B obdrží o 1/3 méně než vsadil, tj. celá částka C se rozdělí v poměru 2 : 1.

b/ Pascalovo řešení v dopisu Fermatovi z 29. VII. 1654

Pascal a Fermat zřejmě nevěděli, že se zabývají úlohou, kterou řešil již Tartaglia. Z hlediska jejich přístupu je pro řešení úlohy podstatný počet her, které jednotlivým hráčům chybí k celkové výhře; Tartagliova úloha pro ně tedy znamená najít spravedlivé rozdělení sázky v případě, kdy hráči A chybí jedna hra a hráči B tři hry (tj. v našem značení $m = 1$, $n = 3$). U Pascala se hraje o částku 64 pistolí [12] a nejprve řeší jednodušší případ $m = 1$, $n = 2$ následující úvahou (přeloženo dle [5], str. 382):

Uvažte tedy, pane, že když první vyhraje, připadá mu 64; když prohraje [13], *připadá mu 32. Když tedy nechtějí dát v sázku tuto hru a chtějí se rozdělit bez hraní, první musí říci: „Mám jistých 32 pistolí, protože i při prohře je dostanu;*

[11] Úlohu jsme našli v knihách RENYI, A.: *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha 1972 (cvičení 48 na str. 158) a SVEŠNIKOV, A.A. A KOL.: *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí,* SNTL Praha 1971 (úloha 5.36 na str. 38).

[12] Pistole = zlatá španělská mince zavedená králem Filipem II. jako dvojnásobek zlatého escuda o hmotnosti 6,2 g. Název se rozšířil od 17. do 19. století i ve Francii jak pro francouzskou zlatou ražbu (louisdor), tak i pro hodnotu 10 livrů ve stříbře (*Malá čs. encyklopedie IV,* Academia Praha 1986).

[13] Bude-li sehrána ještě jedna hra a vyhraje-li ji hráč B, pak bude oběma hráčům chybět po jedné hře; je přirozené, že chybí-li oběma hráčům stejný počet her do celkového vítězství (jinak řečeno: oba hráči jsou na tom stejně) a hráči nechtějí dále pokračovat ve hře, vezme si každý hráč zpět to, co vsadil (tj. polovinu celkové částky, o kterou se hraje).

co se ale zbývajících dvaatřiceti týče, snad budou mé, snad budou vaše; riziko je stejné; rozdělme tedy oněch 32 pistolí napůl a dáte mi kromě toho mých 32, které mám jisté.“ Bude tedy mít 48 pistolí a druhý 16.

S využitím tohoto výsledku pak Pascal řeší Tartagliovu úlohu, tj. případ $m = 1, n = 3$. Bude-li sehrána ještě jedna hra a vyhraje-li ji hráč A, pak získává celou částku, vyhraje-li ji hráč B, pak vzniká stejná situace jako v předešlém případu (tj. $m = 1$, $n = 2$). Hráč A tedy má podle Pascala říci:

Vyhraju-li, získám vše, to jest 64; prohraju-li, náleží mi spravedlivě 48; dejte mi tedy oněch 48, které mám jisté v případě, že prohraju, a rozdělme 16 zbývajících napůl, protože je stejná šance, že je vyhrajete vy jako já.

Podle Pascala tedy hráči A přísluší 56 pistolí a hráči B zbývajících 8 pistolí, což je dělení sázky v poměru 7 : 1. Řešíme-li úlohu pomocí vzorce z předešlé části této práce, dostaneme stejný výsledek, protože

$$\left[\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right] : \binom{3}{0} = 7 : 1.$$

c/ Pascalovo řešení v dopisu Fermatovi z 24. VIII. 1654.

V tomto dopisu je navržena jiná metoda, spočívající ve vypsání všech stejně dlouhých (tj. v dnešní terminologii stejně pravděpodobných) možností pokračování hry a porovnání počtu možností příznivých hráči A s počtem možností příznivých hráči B. Jako příklad je v tomto dopisu řešena úloha s $m = 2$ a $n = 3$, ale kdybychom tuto metodu použili na Tartagliův příklad, dostali bychom následujících 8 stejně dlouhých možností pokračování hry (písmeno znamená hráče, který příslušnou hru vyhraje):

ABB	BAB	BBA	BAA
ABA	AAB	AAA	BBB.

Pouze poslední možnost BBB vede k celkovému vítězství hráče B, zatímco sedm zbývajících možností vede k vítězství hráče A; je tedy třeba dělit sázku v poměru 7 : 1.

d/ Dnešní řešení

Zdá se, že z dnešního hlediska by asi bylo nejjednodušší řešit úlohu vypsáním všech možností dohrávky Tartagliovy úlohy a jejich pravděpodobností, což by vedlo k tabulce obsahující následující čtyři možnosti:

$$1.\ \ \mathrm{A} \quad \ldots \quad p_1 = \tfrac{1}{2} \qquad 3.\ \ \mathrm{BBA} \quad \ldots \quad p_3 = \tfrac{1}{8}$$

$$2.\ \ \mathrm{BA} \quad \ldots \quad p_2 = \tfrac{1}{4} \qquad 4.\ \ \mathrm{BBB} \quad \ldots \quad p_4 = \tfrac{1}{8}.$$

Pravděpodobnost celkové výhry hráče A je tedy rovna součtu pravděpodobností $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{7}{8}$, pravděpodobnost celkové výhry hráče B je rovna pravděpodobnosti p_4; z toho plyne dělení sázky v poměru 7 : 1.

3 Christian Huygens a jeho spis *De ratiociniisin ludo aleæ*

3.1 Základní životopisné údaje

Christian Huygens se narodil 14. IV. 1629 v Haagu. Jeho otec Konstantin Huygens byl nejen významným politickým činitelem (působil jako sekretář oranžských princů) a majitelem několika panství (Zuylichem, Zeelhelm, Monnikeland), ale psal i básně a komponoval. Christian studoval práva na univerzitách v Leydenu a Bredě; doktorát získal v r. 1655 na univerzitě v Angers ve Francii a při této cestě také navštívil Paříž, což je z našeho hlediska důležité, neboť se zde dozvěděl o Pascalově korespondenci s Fermatem týkající se problémů rytíře de Méré. V r. 1666 se stal členem právě založené francouzské Akademie věd [14] a usadil se trvale v Paříži. Žil zde až do r. 1681, kdy odcestoval do Haagu na léčení; protože v r. 1685 byl ve Francii zrušen nantský edikt, který od r. 1598 zaručoval náboženské a politické svobody hugenotů, nemohl se již protestant Huygens do Francie vrátit. Zemřel v Haagu 8. VII. 1695.

Huygens učinil řadu důležitých objevů ve fyzice: studoval kyvadlové hodiny [15], zdokonalil dalekohled a provedl řadu významných astronomických pozorování (objevil např. Saturnův prstenec), vypracoval vlnovou teorii světla a zabýval se mnoha dalšími problémy; jeho sebrané spisy byly vydány ve francouzštině a holandštině v Haagu v letech 1888 - 1950 a mají 22 svazků (z čehož prvních 10 svazků je věnováno Huygensově korespondenci) [16]. Z našeho hlediska je ovšem podstatné, že se zabýval i teorií pravděpodobnosti a napsal spis *De ratiociniis in ludo aleæ.*

3.2 Vznik spisu *De ratiociniis in ludo aleæ*

Tuto část v podstatě přebíráme z [6], str. 3 - 8.

Když Huygens v r. 1655 přijel do Paříže, byl díky svým předchozím publikovaným pracím [17] rovnocenným partnerem tamních matematiků. Zde se dozvěděl, o čem si dopisují Pascal s Fermatem, neboť Pascal o tom informoval další matematiky, mezi nimi Robervala [18], s nímž se Huygens stýkal. Když se vrátil do Nizozemí, zůstal v písemném styku s francouzskými učenci a sám začal holandsky psát pojednání o problémech teorie pravděpodobnosti.

---

[14] [4] na str. 88 uvádí, že se stal dokonce jejím prezidentem, ale žádný jiný pramen to nepotvrzuje.

[15] Jeho hlavní matematické dílo *Horologium oscillatorium* (1673) je vlastně věnováno tomuto problému; přitom zavedl např. pojem „evolventa dané křivky" ([3], III, str. 140).

[16] Bohužel tyto sebrané spisy nejsou dostupné v žádné knihovně v českých zemích.

[17] Dle [6] se jedná o práce
Teoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro,
Exetasis Cyclometriæ Cl. Viri Gregorii à St. Vincentio,
De circuli magnitudina inventa,
Illustrium quorundam problematum constructiones;
první dvě práce vyšly společně r. 1651 a druhé dvě rovněž společně r. 1654, vždy v Leidenu.

[18] Giles Personnier de Roberval (1602 - 1675) byl profesorem matematiky na Collége Royal ([3], II. str. 876).

V dubnu 1656 spis dokončil (chybělo v něm pozdější *Propositio IX* a dodatek s neřešenými úlohami) a informoval o tom Robervala; rukopis poslal svému učiteli Fraciscovi van Schootenovi [19], který ho začal překládat do latiny [20]. Mezitím ale Huygens začal o pravděpodobnostních problémech korespondovat s Carcavym [21] a na základě této korespondence svůj spis doplnil o *Propositio IX* a dodatek tvořený pěti neřešenými úlohami, z nichž u tří byly uvedeny výsledky. V březnu 1657 Schooten poslal Huygensovi k přehlédnutí latinský překlad textu a když pak Huygensův spis na podzim r. 1657 v Leidenu vyšel jako příloha ke Schootenovu spisu *Exercitationum mathematicarum libri quinque* [22], obsahoval místo předmluvy Huygensův dopis Schootenovi datovaný 27. IV. 1657, ve kterém se Huygens zříká cti prvního objevitele ve prospěch svých francouzských kolegů, poukazuje ale právem na to, že byl nucen celý předmět od začátku rozvíjet sám, neboť francouzští matematici své metody nezveřejňovali.

Tento Huygensův spis byl prvním samostatným tištěným pojednáním o úlohách teorie pravděpodobnosti. Výrazně ovlivnil počáteční fázi formování teorie pravděpdobnosti; Jacob Bernoulli ve svém spise *Ars conjectandi* [7] věnuje zhruba čtvrtinu svého spisu novému otištění a podrobnému komentování této Huygensovy práce. Po dobu přibližně půl století (až do vydání již zmíněného *Ars conjectandi* a prací Montmortových a Moivreových) [23] byl Huygensův spis základní prací v oblasti teorie pravděpodobnosti. Přes všechna uvedená fakta byla tato poměrně raná Huygensova práce zastíněna jeho pozdějšími díly a dnes stojí poněkud stranou pozornosti. Protože jejímu podrobnému rozboru je věnována druhá část naší práce, podáme zde pouze její stručný obsah; budeme přitom vycházet z textu otištěného v [8].

3.3 Obsah spisu *De ratiociniis in ludo aleæ*

Spis je poměrně krátký (viz II/2) a je členěn do čtrnácti témat (zvaných *Propositio*), která lze podle obsahu rozdělit do tří skupin. V úvodu a první části (*Propositiones I - III*) dospívá Huygens (řečeno dnešní terminologií) od pojmu aritmetického průměru k pojmu střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny, ani jeden z těchto termínů se u něj ale neobjevuje; všechny jeho úvahy se vztahují ke hře o nějakou částku (sázku) a příslušný pojem se proto nazývá buď

[19] Je míněn Franciscus van Schooten mladší (1615 - 1660), který byl profesorem na univerzitě v Leydenu stejně jako jeho otec, který se také jmenoval Franciscus a žil v letech 1581 - 1646 ([3], II, str. 660).

[20] Z tohoto důvodu je v souborném vydání [6] považován text holandský za původní a vychází se z něj, nikoli z textu latinského, i když latinský text vyšel dříve.

[21] Pierre de Carcavy (? - 1684) byl parlamentním radou v Toulouse (1622 - 1636) a v Paříži (1636 - 1647), pak byl ve službách vévody z Liancourtu a od r. 1663 byl konservátorem královské knihovny ([3], II, str. 758).

[22] Dle [6] vyšel potom v r.1660 v Amsterodamu v holandštině jak tento Schootenův spis s Huygensovou přílohou, tak i Huygensův spis samostatně.

[23] Pierre Remond de Montmort (1678 - 1719): *Essai d'analyse sur les jeux de hazards*, první vydání 1708; Abraham de Moivre (1667 - 1754): *De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus*, první vydání ve *Philosophical Transactions* Nr. 329, 1711.

expectatio [24] nebo *sors* [25].

Huygensova definice pojmu, nazývaného dnes střední hodnotou, je následující [26]:

Je-li počet případů, v nichž obdržím částku a, *roven* p, *a počet případů, v nichž obdržím částku* b, *roven* q, *a předpokládám-li, že všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno, pak mé očekávání bude mít hodnotu*

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Sílu tohoto pojmu demonstruje Huygens tím, že všechny úlohy ve svém spisu řeší jeho užitím, a to i v případech, kdy bychom dnes dali přednost jednodušší úvaze kombinatorické.

Huygensovy *Propositiones I - III* jsou zajímavé i z hlediska vzniku tzv. klasické definice pravděpodobnosti, jejímž výchozím pojmem jsou stejně možné elementární náhodné jevy. Huygens pojem „pravděpodobnost" vůbec nezavádí, stačí mu pojem „očekávaná výhra", ale s problémem stejně možných elementárních jevů se nějak vypořádat musí, což činí formulací, že „všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno".

Právě v uvedených *Propositiones I - III* a v dalším *Propositio IX* lze spatřovat podstatný rozdíl mezi spisem Huygensovým na straně jedné a korespondencí Pascala s Fermatem na straně druhé; zatímco Pascal s Fermatem pouze řešili úlohy, u Huygense je už náznak obecných pojmů a postupů.

Druhá část (*Propositiones IV - IX*) je věnována úloze o rozdělení sázky. Huygens vychází ze stejného pojetí spravedlivého rozdělení jako Pascal s Fermatem, neřeší ale úlohu kombinatoricky, nýbrž využívá *Propositiones I - III* k tomu, že postupně řeší případy $m = 1$ a $n = 2$, $m = 1$ a $n = 3$ nebo 4, $m = 2$ a $n = 3$, $m = 2$ a $n = 4$; pak úlohu zobecňuje na tři stejně dobré hráče, z nichž dvěma chybí k výhře po jedné hře a třetímu chybí dvě hry. Nakonec dává zcela obecný (i když poněkud nejasně formulovaný) rekurentní postup k řešení úlohy o rozdělení sázky pro libovolný počet stejně dobrých hráčů a tento postup ilustruje řešením příkladu hry tří hráčů, kdy prvnímu hráči chybí jedna hra, druhému a třetímu po dvou hrách; na závěr uvádí tabulku rozdělení sázky pro 17 různých situací ve hře tří hráčů.

Třetí část (*Propositiones X - XIV*) obsahuje různé úlohy s „herní" motivací; počítají se zde (řečeno dnešní terminologií) pravděpodobnosti výher jednotlivých hráčů za různých podmínek, přičemž ovšem pojem „pravděpodobnost" se v textu vůbec neobjevuje.

Poznamenejme, že většina úloh obsažených v *Propositiones IV - XII* se nalézá už v Pascalově korespondenci s Fermatem.

Celý Huygensův spis je uzavřen dodatkem obsahujícím pět neřešených úloh, z nichž u tří jsou uvedeny výsledky. V souvislosti s citací ze Spinozovy *Etiky*

[24] *expectatio* nebo *exspectatio, onis*, f. = očekávání

[25] *sors, sortis*, f. = los, losovací kamének, věštba

[26] *Si numerus casuum, quibus mihi eveniet* a, *sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet* b *sit* q, *sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

v kap.1.1 je zajímavé, že v r. 1687 vyšel v Haagu malý anonymní spis obsahující jednak pojednání o duze, jednak pojednání o teorii pravděpodobnosti; v tomto „pravděpodobnostním“ pojednání je citováno všech pět úloh z Huygensova dodatku a první z nich je řešena (a to správně). V současné době se považuje za prokázané [27], že autorem těchto prací byl právě Spinoza, což svědčí o jeho aktivním přístupu k aktuálním problémům matematické teorie pravděpodobnosti oné doby.

4 Další související práce

4.1 Filozofie

I když jsme už v úvodu k naší práci řekli, že se nebudeme zabývat filozofickými aspekty vzniku počtu pravděpodobnosti, přece jen se musíme aspoň krátce zmínit o jedné knize. V r. 1662 vyšla v Paříži kniha Antoina Arnaulda a Pierre Nicola *La Logique, ou l'art de penser* [28]. Za hlavního autora je považován A. Arnauld (1612 - 1694), který stál v čele pařížských jansenistů soustředěných kolem kláštera Port-Royal; uvádí se, že jako první zkoumal vztah mezi různými přístupy k pojmu pravděpodobnosti. Byl přítelem Pascalovým, stýkal se s Huygensem a Leibnizem a i když sám nebyl matematikem, jeho názory na pravděpodobnostní problematiku údajně ovlivnily i tvůrčí matematiky [29].

4.2 Kombinatorika

Kombinatorickou problematiku lze sledovat v průběhu celé historie matematiky v rámci aritmetiky a algebry; v polovině 17.století se kombinatorika začíná vyčleňovat jako relativně samostatná část matematiky, což dle našeho názoru souviselo právě s formováním teorie pravděpodobnosti.

Za první samostatnou práci věnovanou kombinatorické problematice je dle našeho názoru možné považovat již zmíněnou Pascalovu práci *Traité du triangle arithmétique* napsanou r. 1654 a vydanou r. 1665. Z jejího názvu je zřejmé, že Pascal sám asi kombinatoriku za samostatný okruh problémů nepovažoval a chápal ji spíš jako aplikační oblast aritmetiky, nicméně z dnešního hlediska lze obsah některých částí tohoto Pascalova pojednání hodnotit jako kombinatorický. Poznamenejme ještě, že na základě tohoto spisu je Pascal považován za objevitele metody úplné indukce ([3], II, str. 749). O Pascalově řešení úlohy

[27] Viz např. Dutka, J.: *Spinoza and the Theory of Probability.* Scripta mathematica 19 (1953), 1, 24-33.

[28] V češtině snad neexistuje žádné pojednání o této Arnauldově knize. Podrobnější informaci o vztazích mezi Arnauldem a Pascalem lze najít v již jednou zmíněné knize Horák, P.: *Svět Blaise Pascala.* Vyšehrad, Praha 1985. Ve vydavatelských poznámkách k německému překladu knihy [7] se uvádí, že Arnauldova kniha vyšla v r. 1664 a že její autoři použili i rukopisu jednoho Pascalova pojednání.

[29] O Arnauldovu vztahu k počtu pravděpodobnosti viz např. již jednou zmíněnou práci Shafer, G.: *Non-Additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert.* Archive for History of Exact Sciences 19 (1978), 4, 309-370.

o rozdělení sázky pomocí kombinačních čísel už byla řeč a navíc je této Pascalově práci věnována třetí část této publikace, proto nepovažujeme za nutné pojednávat zde o ní podrobněji.

Za první samostatné kombinatorické pojednání bývá někdy považována Leibnizova [30] práce citovaná obvykle jako *Ars combinatoria*; její úplný název (citovaný dle vydání z r. 1690) zní [31]:

> GOTTFREDI GUILIELMI LEIBNÜZII *Lipsiensis,* ARS COMBINATORIA, *in qua ex arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi, seu Logicæ inventionis semina sparguntur.*
>
> *Præfix est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco Demonstratio Existentiæ Dei ad Mathematicam certitudinem exacta.*

Spis byl vydán v r. 1666, kdy bylo Leibnizovi 20 let a matematikou se ještě vůbec nezabýval; plný název spisu nasvědčuje tomu, že Leibnizovi vlastně o matematiku ani nešlo a užíval jí pouze jako nástroje k řešení problémů, které bychom dnes nejspíše označili jako logicko-filozofické (ostatně v některých vydáních Leibnizových spisů je tento spis řazen mezi spisy filozofické). Spis má zhruba 100 stran a problematice matematické je věnována (nejvýše) polovina z nich; z historického hlediska je třeba konstatovat, že se zde znovu (nezávisle na Pascalovi) objevuje aritmetický (tj. Pascalův) trojúhelník i některé další pojmy a výsledky kombinatorické.

Podle našeho názoru lze formování kombinatoriky jako relativně samostatné části matematiky považovat za završené knihou Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi*, o které budeme podrobněji mluvit v poslední části této práce. Vyšla sice tiskem až r. 1713, ale napsána byla už okolo r. 1685 ([3], III, str. 339) a druhá ze čtyř částí této knihy je celá věnována kombinatorice [32]. Z historického hlediska je zajímavé, že Bernoulli zde uvádí jako své předchůdce Schootena, Leibnize, Wallise a Presteta [33], ale ne Pascala, jehož práci o aritmetickém trojúhelníku zřejmě neznal.

[30] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) po získání doktorátu práv v r. 1666 vstoupil do diplomatických služeb mohučského kurfiřta, což ho přivedlo na čtyři roky (1672 - 1676) do Paříže, kde navázal řadu vědeckých kontaktů (včetně matematických). Od r. 1676 působil v Hannoveru jako knihovník a dvorní rada (pro zajímavost poznamenejme, že v letech 1710 - 1712 zde působil i hudební skladatel G. F. Händel). Jeho vědecké zájmy byly neuvěřitelně široké; v dějinách matematiky je znám hlavně jako jeden ze zakladatelů infinitesimálního počtu.

[31] ARS COMBINATORIA *Gottfrieda Wilhelma Leibnize z Lipska, ve které je vybudována na základech aritmetiky nauka o spojování a přemísťování s novými pravidly, & je ukázáno použití obojího na veškerém okruhu věd; rovněž jsou obsaženy nové základy umění přemýšlet neboli logiky vynalézání. Předeslán je přehled celého pojednání, & jako dodatek přesný důkaz existence Boží dovedený k matematické jistotě.*

[32] Titul této části zní *Artis conjectandis pars secunda, continens doctrinam de permutationibus & combinationibus.*

[33] O Schootenovi a Leibnizovi už byla řeč. John Wallis (1616 - 1703) byl kaplanem anglického krále Karla II. ([3], II, str. 765) a profesorem geometrie v Oxfordu ([3], II, str. 687). Kromě jiného vydal v r. 1685 spis *„Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises"*, jehož část je věnována kombinatorice a je o ní řeč v [1], str. 34 - 36.

Pro naše účely považujeme tento stručný přehled základních historických faktů o vývoji kombinatoriky v 17. století za postačující; podrobnější výklad lze nalézt v již často citovaných knihách [1 - 4].

4.3 Pojistná matematika

O souvislosti vzniku teorie pravděpodobnosti a pojistné matematiky už byla zmínka v části 1.1; zde uvedeme stručně několik základních faktů (podrobnější výklad opět viz [1, 2, 3]).

Za první publikovanou práci z této oblasti je považována kniha Angličana Johna Graunta *Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality* (1662) [34]; je zde např. poprvé číselně vyjádřen poměr počtu narozených chlapců ku počtu narozených dívek [35].

Další významnou postavou v této oblasti byl Johann de Witt (1625 - 1672), který byl od r. 1653 tzv. velkým penzionářem Hollandu a faktickým vládcem Spojených provincií nizozemských. Je autorem spisu *De vardye van de lyf-renten na proportie van los-renten*, což lze podle [3], III, str. 45 přeložit jako *Hodnota doživotních důchodů ve vztahu k obyčejným důchodům*; spis vyšel r. 1671 ve třiceti exemplářích a vzbudil značnou pozornost [36].

Poslední jméno, které si zde připomeneme, je známý anglický astronom Edmund Halley (1656 - 1742), který v r. 1693 v časopise *Philosophical Transactions* uveřejnil zásadní článek *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw* [37]*; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives* obsahující teorii doživotních důchodů. Uveďme zde jeden příklad z této knihy, neboť je zde zřejmě poprvé použito geometrického pohledu na pravděpodobnostní úlohu [38].

Z úmrtnostních tabulek je známo, kolik lidí z 1000 narozených se dožije věku $1, 2, 3, \dots$ let. Uvažujme dva lidi, jednoho ve věku v_1, druhého ve věku v_2, $v_1 < v_2$, a ptejme se, jaká je pravděpodobnost, že za k let budou žít oba (resp. bude žít jen mladší, bude žít jen starší, nebude žít ani jeden). Z úmrtnostních tabulek víme, že ve věku v_1 žije N lidí, ve věku $v_1 + k$ žije R lidí; označme $Y = N - R$. Pro v_2 mají analogický význam čísla n, r, y. Vynásobením rovnic $N = R + Y$, $n = r + y$ dostaneme rovnici $Nn = Rr + Yr + Ry + Yy$, kde každý sčítanec

---

Jean Prestet (? - 1690) vydal v r. 1675 učebnici „*Elemens des Mathématiques*“, která byla velmi ceněna ([3], III, str. 102); další podrobnosti se nám nepodařilo zjistit.

[34] John Graunt (1620 - 1674) byl obchodníkem s látkami; na základě zmíněné knihy byl zvolen za člena Royal Society. Dle [2], str. 65 tuto Grauntovu knihu v témže roce četl a velice kladně ocenil Huygens, který v r. 1669 sám napsal práci věnovanou problematice úmrtnostních tabulek.

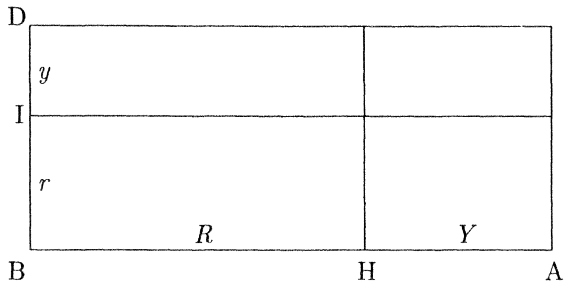
[35] Na základě záznamů vedených 32 let ho Graunt stanovil jako 1068 : 1000 ([3], II, 761). V knize CIPRA, T.: *Matematické modely demografie a pojištění.* SNTL Praha 1990, str. 106 se uvádí, že v ČSSR v r.1961 byl tento poměr roven 1,055.

[36] Dle [2],str. 65 si o něm dopisovali Huygens s Johannem van Huddem, o kterém ještě bude řeč v kap.II.3.2; dle [1], str. 40 si o něm dopisovali Leibniz s Jakobem Bernoullim.

[37] Jedná se o dnešní polskou Wrocław; podrobnější informace lze nalézt v knize PAVLÍK, Z. - RYCHTAŘÍKOVÁ, J. - ŠUBRTOVÁ, A.: *Základy demografie.* Academia Praha 1986, str. 30.

[38] O geometrických pravděpodobnostech viz např. článek MAČÁK, K.: *Geometrické pojetí pravděpodobnosti.* Učitel matematiky 5 (1996/97), 3, 137-142, 4, 204-212.

je roven počtu všech možných dvojic s některou shora uvedenou vlastností (např. Yr je počet všech dvojic, v nichž starší přežije mladšího). Dělíme-li tuto rovnici číslem Nn, dostaneme hledané pravděpodobnosti. Halley tyto úvahy ilustruje následujícím obrázkem, kde $|BA| = N$, $|BD| = n$, $|BH| = R$, $|BI| = r$, $|HA| = Y$, $|ID| = y$; poměr obsahů příslušných „malých“ pravoúhelníků k obsahu celého obdélníku udává hledané pravděpodobnosti.



5 Závěr I. části

Jak už bylo řečeno několikrát, za počátek počtu pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou spolu vedli Pascal s Fermatem v létě a na podzim roku 1654; Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleæ* sice vyšel až v r. 1657, byl ale prvním a dlouho jediným tištěným pojednáním o úlohách teorie pravděpodobnosti a jeho vliv na počáteční období formování teorie pravděpodobnosti byl značný. Mluvíme-li ovšem dnes o teorii pravděpodobnosti, pak předpokládáme, že je zde obecně (tj. teoreticky) zkoumáno cosi, co se nazývá „pravděpodobnost“; pokusme se nyní na závěr posoudit onen Huygensův spis z tohoto hlediska.

Pokud se teorie týče, v Huygensovu spisu je jí velice málo; dalo by se říci, že celý spis obsahuje jednu definici (*Propositio III*), dva její speciální případy (*Propositio I, II*) a jednu větu (*Propositio IX*), která však neudává žádnou obecnou vlastnost nějakého obecného pojmu nebo souvislost mezi pojmy, ale obsahuje obecně formulovanou metodu (dnes bychom řekli: algoritmus) řešení jistého problému. Za hlavní teoretický přínos spisu lze považovat zavedení střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny, nazývané ovšem „očekávaná výhra“ nebo podobně; většina spisu je věnována řešení problémů pocházejících většinou od Pascala a Fermata. To nic nemění na našem hodnocení tohoto spisu, které bylo vysloveno hned v úvodu a znovu připomenuto v předešlém odstavci, současně ale považujeme za nutné vyslovit názor, že prvním skutečně teoretickým výsledkem v této oblasti byla první formulace a důkaz zákona velkých čísel ve čtvrté části spisu Jakoba Bernoulliho *Ars conjectnadi*; soudíme, že až od tohoto spisu lze mluvit o skutečné teorii pravděpodobnosti.

Pokud se pojmu „pravděpodobnost" týče, nevyskytuje se ani u Huygense, ani v žádném jiném matematickém spisu z té doby; první pokus definovat tento pojem se objevuje opět až ve čtvrté části *Ars conjectandi* [39]. Domníváme se však, že lze předpokládat u Huygense (i u Pascala a Fermata) intuitivní chápání tohoto pojmu ve smyslu tzv. klasické definice pravděpodobnosti, čemuž nasvědčuje i Bernoulliova definice. V souvislosti s tím však stojí za povšimnutí, že prakticky současně s tímto pojetím pravděpodobnosti se objevují i jiná pojetí. Výzkumy demografické (např. již zmíněná otázka poměru počtu narozených chlapců a dívek) vedly postupně k tzv. statistické definici pravděpodobnosti, a (rovněž již zmíněnou) Halleyovu myšlenku znázornit pravděpodobnostní úlohu geometricky lze považovat za první náznak tzv. geometrické definice pravděpodobnosti. Všechny tyto definice (dnes bychom spíš asi řekli: přístupy) jsou dodnes používány při řešení různých úloh, protože jsou jednoduché a každá z nich vystihuje některou stránku problému; obecná axiomatická definice pravděpodobnosti byla podána až v první polovině tohoto století [40].

Shrneme-li tedy vše, co zde bylo řečeno, pak lze dle našeho názoru říci, že Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleæ* byl posledním přípravným krokem k tomu, aby ve spisu Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi* začala vznikat teorie pravděpodobnosti v dnešním pojetí této matematické disciplíny.

♣ ♢ ♠ ♡

[39] *Pravděpodobnost totiž je stupněm jistoty a liší se od ní jako část od celku. Jestliže totiž celá a absolutní jistota, kterou označíme písmenem* a *nebo jednotkou* 1, *se podle předpokladu skládá například z pěti pravděpodobností jako částí, z nichž tři jsou pro existenci nebo budoucí výskyt nějakého jevu, ostatní jsou proti: o onom jevu bude řečeno, že má* $\frac{3}{5}a$ *nebo* $\frac{3}{5}$ *jistoty.*

(Probabilitas enim est gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum si certitudo integra & absoluta, quam litera a *vel unitate* 1 *designamus, quinque verb.gr. probabilitatibus seu partibus constare supponatur, quarum tres militent pro existentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere* $\frac{3}{5}a$*, seu* $\frac{3}{5}$ *certitudinis.)*

Podle knihy HACKING, I.: *The Emergence of Probability.* Cambridge Univ. Press, London 1975, str. 125, zde Bernoulli vycházel z Leibnizových názorů.

[40] Za základní v tomto směru je považována práce sovětského matematika A. N. Kolmogorova publikovaná v r. 1933 německy a dostupná u nás v ruštině pod názvem *„Osnovnyje ponjatija teorii verojatnostej"* (1.vyd. 1936, 2.vyd. Nauka, Moskva 1974).