Magdalena Hykšová

Fraktály a jejich objektově orientované definice

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. I. Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1998. pp. 192–210.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401621

FRAKTÁLY A JEJICH OBJEKTOVĚ ORIENTOVANÉ DEFINICE

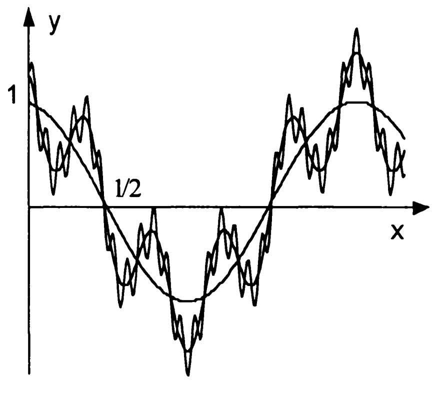
MAGDALENA HYKŠOVÁ

Fraktály, chaos – to jsou slova, která se dnes skloňují ve všech pádech a o kterých se hovoří jako o revoluci konce tohoto století. Méně jsou již věcí snadno přístupnou a srozumitelnou. Cílem tohoto příspěvku je ukázat cestu, která může přivést aspoň na okraj světa fraktálů i člověka nepříliš matematicky vzdělaného a která snad poodhalí kouzlo ukryté za mraky a horami v počítačových science fictions. Ty, kterým se to bude zdát příliš neodborné, předem prosím, aby článek vzali jen jako pokus o to, podívat se na věc z jiného úhlu.

Než přistoupím k vlastnímu tématu, pokusím se přiblížit, kudy se ubíraly mé myšlenky. Na samém začátku byl pojem spojité funkce bez derivace. 18. 7. 1872 ukázal ve své přednášce v Královské akademii věd v Berlíně Carl Weierstrass takovou funkci, která je v celém reálném oboru spojitá, ale přitom nemá v žádném bodě derivaci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x);$$

$$0 < a < 1;\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$



Na obrázku vidíte první tři její aproximace pro $a = 1/2$, $b = 5$.

Weierstrassovu funkci uveřejnil roku 1875 P. du Bois-Reymond v *Journal für die reine und angewandte Mathematik 79* ([2]) (sám autor ji zveřejnil až v roce 1880). Dlouhou dobu pak byla považována za první správnou a přitom nejjednodušší funkci svého druhu.

V následující době se mnozí další matematikové s nadšením zabývali problémem spojitých funkcí bez derivace (např. Darboux ([1]), Dini ([3]), Lerch ([4]) aj.), jiní se však na jejich snažení dívali přímo nevraživě, jejich příklady nazývali „*matematickými monstry*“, Ch. Hermite například ve svém dopise T. Stieltjesovi z roku 1893 napsal, že se „*odvrátil s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla, jímž jsou funkce bez derivací... .*“

Značné překvapení vyvolala funkce Ch. Celleriera, která sice byla zveřejněna až posmrtně roku 1890 ([5]), ale sestrojena byla již kolem roku 1860:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} a^{-n} \sin(\pi a^n x);\ a > 1000.$$

Avšak daleko větší překvapení přišlo po 1. světové válce, poté, co středoškolský profesor matematiky z Plzně, Martin Jašek, objevil v pozůstalosti Bernarda

Bolzana ve vídeňské Národní knihovně jako součást rukopisu *Funktionenlehre* funkci, o níž Bolzano (i když ne zcela přesně) dokazuje, že nemá derivaci v množině bodů všude husté (roku 1922 pak V. Jarník ([10]) a K. Rychlík ([11]) dokázali, že derivace neexistuje v žádném bodě intervalu, kde je funkce definována). Rukopis byl připraven k tisku již roku 1834 - Bolzano tedy předběhl svou dobu o celá desetiletí. Na tom nic nezmění skutečnost, že rukopis tehdy vydán nebyl a další vývoj matematiky neovlivnil. Navíc objevení Bolzanovy funkce bylo velikým stimulem pro české matematiky. Funkce je definována geometricky jako limita posloupnosti funkcí $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ tvořených následujícím způsobem:

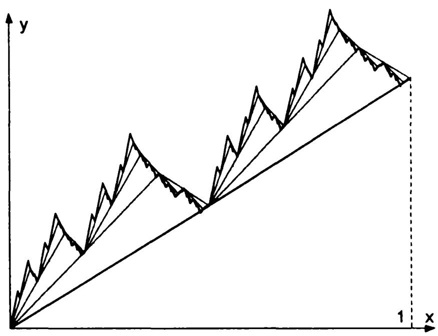
$f_0(x) = x,\ 0 \le x \le 1$; dále rozdělme interval $(0,1)$, obecněji (a,b) na čtyři části s hraničními body

$$a,\ a+\frac{3}{8}(b-a),\ \frac{a+b}{2},\ a+\frac{7}{8}(b-a),\ b$$

a těmto bodům přiřaďme hodnoty

$$A,\ A+\frac{5}{8}(B-A),\ \frac{A+B}{2},\ A+\frac{9}{8}(B-A),\ B$$

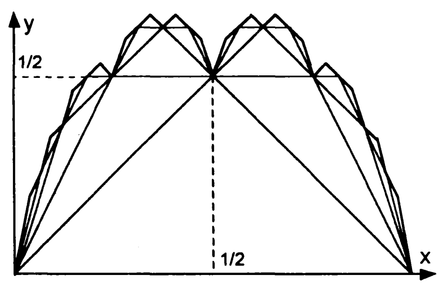
(začneme s hodnotami: $a=0,\ b=1,\ A=0,\ B=1$).



Funkce $f_1(x)$ se definuje jako lomená čára spojující právě popsané body. Potom se totéž provede s každou její částí (tedy nejprve položíme $a=0,\ b=3/8,\ A=0,\ B=5/8$, pak $a=3/8,\ b=1/2$ atd.....) a vytvoří se tak $f_2(x)$ sestávající již ze 16 úseček. Celý postup potom pokračuje dál a dál.

Za nejjednodušší příklad funkce spojité, nemající v žádném reálném bodě derivaci, je obvykle považován tzv. Waerdenův příklad z roku 1930 ([12]). Jeho mírná modifikace pochází již z roku 1903 od T. Takagiho ([6]) a dnes se často uvádí v přehlednějším tvaru:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\Delta(2^n x);\ \Delta(x) = dist(x,\mathbb{Z}).$$



Sám Takagi ji definoval takto:

$$\text{Pro } t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n},\ c_n \in \{0,1\} \text{ definuje } f(t) = \sum_{n-1}^{\infty}\gamma_n;\ \gamma_n = \begin{cases}\tau_n & \text{pro } c_n = 0\\ \tau_n' & \text{pro } c_n = 1,\end{cases}$$

$$\text{kde } \tau_n = \frac{c_n}{2^n}+\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}}+\cdots,\ \tau_n' = \frac{1}{2^{n-1}}-\tau_n$$

Vraťme se však do Čech, do roku 1920, kdy v *Časopise pro pěstování matematiky a fyziky 49* publikoval svou funkci Karel Petr ([7]). Nejen, že právě ona stála u zrodu mého příspěvku, ale je to příklad podle mého názoru nanejvýš jednoduchý: k pochopení konstrukce i důkazu spojitosti a nediferencovatelnosti úplně stačí znalost definice spojitosti a derivace a jedné věty z počátků aritmetiky o desetinných rozvojích. Petr se obejde bez pojmu stejnoměrné konvergence, ani nemusí popsat tolik stránek, kolik je třeba pro důkaz u Bolzanovy funkce.

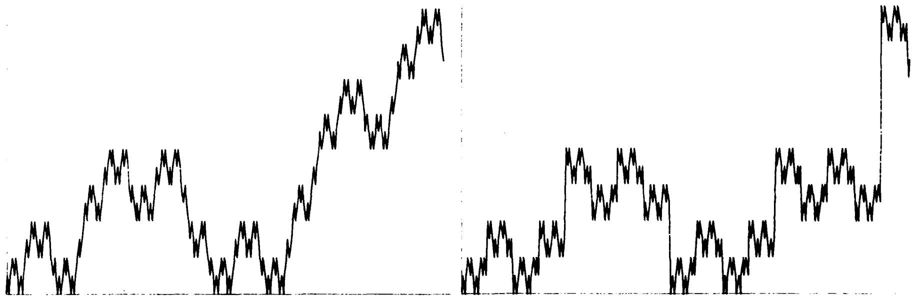
Petr vychází podobně jako Takagi z rozvoje proměnné, předpis je však ještě jednodušší:

$$x = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots ; \; a_k \text{ celá čísla}; \; 0 \le a_k \le 9;$$

$$f(x) = \frac{b_1}{2^1} \pm \frac{b_2}{2^2} \pm \frac{b_3}{2^3} \pm \frac{b_4}{2^4} \pm \cdots ; \; b_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } a_k \text{ sudé} \\ 1 & \text{pro } a_k \text{ liché} \end{cases}$$

$$\text{znaménko před členem } b_{k+1} \begin{cases} \text{opačné než před } b_k \text{ pro } a_k \in \{1,\ 3,\ 5,\ 7\} \\ \text{stejné jinak} \end{cases}$$

Grafu Petrovy funkce, resp. jeho hrubému přiblížení, je věnována část 5, kde je pro lepší názornost použito čtyřkové číselné soustavy. Proč je nejvyšší liché číslici udělena výjimka při určování znaménka, jistě pochopíte, srovnáte-li tento graf s jiným grafem (vpravo), kde jsou všechny liché číslice rovnocenné: umožní nám to „vyplnit skoky“ a sestrojit funkci opravdu spojitou:



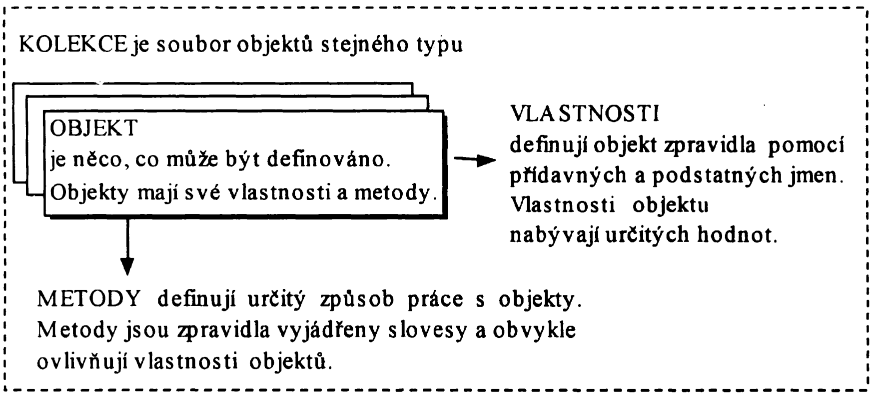
Petrovu funkci zobecnil Karel Rychlík ([8]), který přešel do tělesa ***p*-adických čísel**. Každý prvek tohoto tělesa lze jednoznačně znázornit ve tvaru: $x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \cdots$, kde r je celé číslo a koeficienty a_i čísla z množiny $0, 1, \ldots p-1$. Tomuto prvku pak přiřazuje hodnotu: $f(x) = a_r p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \cdots$.

V původním Petrově předpisu je každé číslici přisouzena nějaká vlastnost (hodnota 0 nebo 1, popř. znaménková změna). Stejně tak různé řády mají různé vlastnosti: podle toho, jaký řád odpovídá dané číslici, vypadá příslušný sčítanec ve výrazu pro $f(x)$, v jehož jmenovateli je 2^k. Konečně, chceme-li funkci graficky znázornit, přiřazujeme postupně číslům jisté ***objekty*** – úsečky. Proč ale zůstat jen u jednoho předpisu? Číslicím můžeme přiřazovat nejrůznější vlastnosti, stejně tak můžeme uvažovat nejrůznější objekty (obdélník, trojúhelník, krychle ...). Tak se před námi otevírá svět roztodivných fraktálů. Těch, které získáme jednoduchým a stále stejným způsobem. Pokaždé nám stačí říci, z jaké číselné soustavy budeme vycházet, jaké vlastnosti budeme jednotlivým číslicím přiřazovat, jakým způsobem budeme „skládat dohromady“ odpovídající hodnoty, jaké objekty si nakonec vymyslíme.

Základním sjednocujícím prvkem se tak stává vytvoření *struktury („děravé") číselné soustavy* (o libovolném základu), na které pak můžeme provádět *strukturní operace*. Ona jednotnost navíc vynikne, budeme-li fraktály definovat, ostatně i programovat, prostřednictvím jazyka *objektově orientovaného programování*, jehož hlavní ideou je právě využívání již vytvořených částí programu místo jejich znovuvytváření a jehož ústředním pojmem je *objekt* (pes, struktura číselné soustavy, číslice ...), jeho *vlastnosti* (barva srsti, hodnota ...) a *metody* (kousat, strukturní operace ...).

1.Objektový model fraktálu

Pro potřeby tohoto článku vystačíme s následujícími objektovými definicemi:

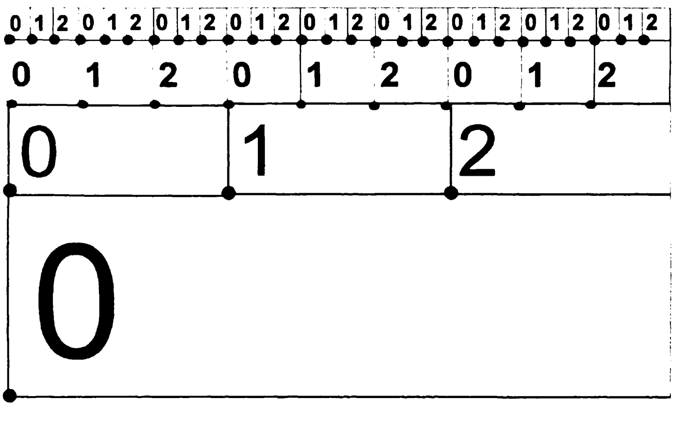


Grafické zobrazení číselné soustavy o základě 3:

Posloupnost čísel: 0000, 0001, 0002, 0010, 0011, 0012, 0020, 0021, 0022, ...
Přepis čísel do sloupců (na každém řádku jsou číslice stejného řádu):

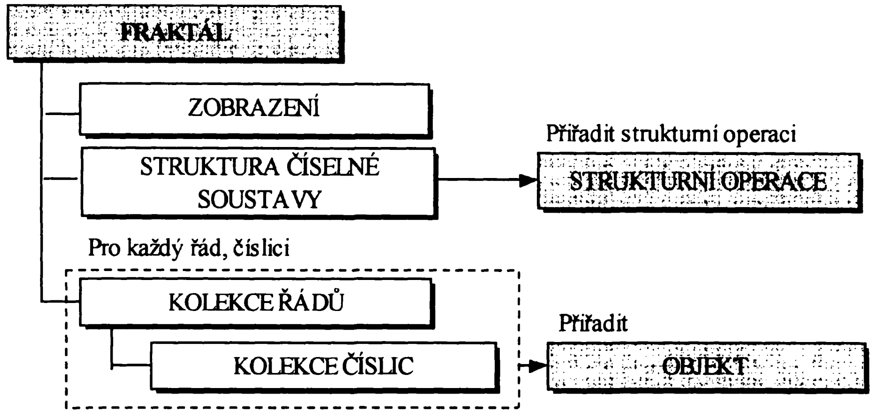
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vyjádření čísel pomocí kolekcí řádů a číslic



V tomto obrázku je možno nalézt fraktály vytvořené na základě:
- číselných bodů
- číslic
- obdélníků ohraničujících číslice

Objektový model fraktálu:

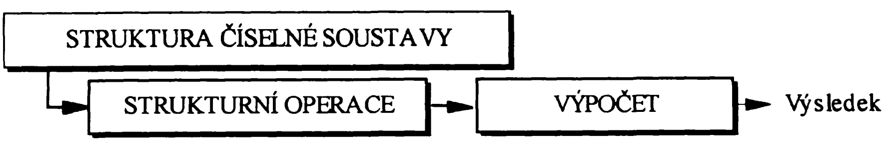


Objektový zápis definující fraktál vytvořený na základě objektu „StrukturaČíselnéSoustavy“:

Define Fraktál
  ČíselnáSoustava.Základ: = 3
  Define Zobrazení
    KartézskéSouřadnice
  End Define
  Define StrukturaČíselnéSoustavy
    PřiřaditStrukturníOperaci
  End Define
  For Each Řád; Číslice **In** StrukturaČíselnéSoustavy
    StrukturníOperace. Výpočet
    Číslice.PřiřaditObjekt
  End Each
End Define

Pro každý fraktál je třeba definovat „Strukturní operaci“, na základě které je vytvářen, a všechny objekty, které jsou přiřazovány jednotlivým číslicím.

Objektový model strukturní operace:



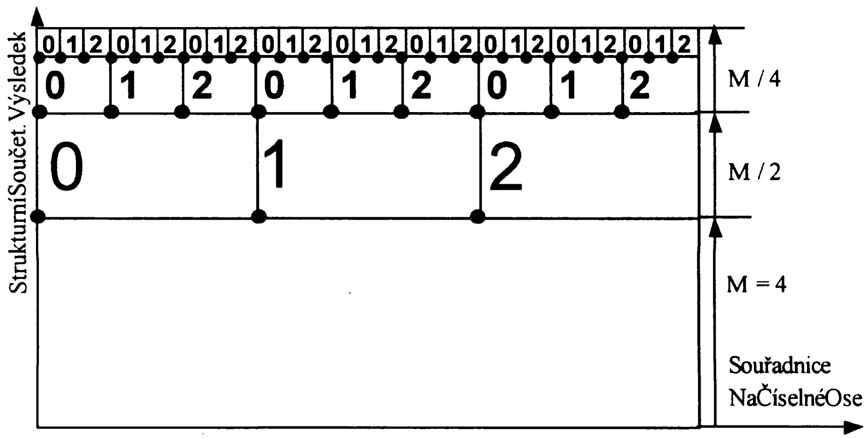
Objektový zápis výsledku strukturní operace:
StrukturaČíselnéSoustavy.StrukturníOperace.Výpočet.Výsledek:=1
„StrukturníOperace“ je metodou vzhledem k objektu „StrukturaČíselnéSoustavy“, zároveň je však objektem vzhledem k metodě „Výpočet“.
Vlastností objektu „Výpočet“ je jeho „Výsledek“.

2. Definice strukturní operace

Nejjednodušší „Strukturní operací“ přiřazenou objektu „Struktura číselné soustavy“ je „Strukturní součet“. Jak se tato operace provádí, je ukázáno na následujícím příkladě, kde je použito číselné soustavy o základu 3:

Struktura číselné soustavy

				StrukturníOperace.StrukturníSoučet			
Řád 2	Řád 1	Řád 0	Souřadnice na čísel.ose	Označení členu	Hodnota členu	výpočet	Výsledek
0			0	$\text{Člen}_{\underline{0}00}$	4	$\text{Člen}_{\underline{0}00}$	4
x	0		0	$\text{Člen}_{0\underline{0}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}$	6
x	x	0	0	$\text{Člen}_{00\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}+\text{Člen}_{00\underline{0}}$	7
x	x	1	1	$\text{Člen}_{00\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}+\text{Člen}_{00\underline{1}}$	7
x	x	2	2	$\text{Člen}_{00\underline{2}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}+\text{Člen}_{00\underline{2}}$	7
x	1		10	$\text{Člen}_{0\underline{1}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}$	6
x	x	0	10	$\text{Člen}_{01\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}+\text{Člen}_{01\underline{0}}$	7
x	x	1	11	$\text{Člen}_{01\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}+\text{Člen}_{01\underline{1}}$	7
x	x	2	12	$\text{Člen}_{01\underline{2}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}+\text{Člen}_{01\underline{2}}$	7
x	2		20	$\text{Člen}_{0\underline{2}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}$	6
x	x	0	20	$\text{Člen}_{02\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}+\text{Člen}_{02\underline{0}}$	7
x	x	1	21	$\text{Člen}_{02\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}+\text{Člen}_{02\underline{1}}$	7
x	x	2	22	$\text{Člen}_{02\underline{2}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}+\text{Člen}_{02\underline{2}}$	7
1			100	$\text{Člen}_{\underline{1}00}$	4	$\text{Člen}_{\underline{1}00}$	4
x	0		100	$\text{Člen}_{1\underline{0}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{1}00}+\text{Člen}_{1\underline{0}0}$	6
x	x	0	100	$\text{Člen}_{10\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{1}00}+\text{Člen}_{1\underline{0}0}+\text{Člen}_{10\underline{0}}$	7
x	x	1	101	$\text{Člen}_{10\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{1}00}+\text{Člen}_{1\underline{0}0}+\text{Člen}_{10\underline{1}}$	7

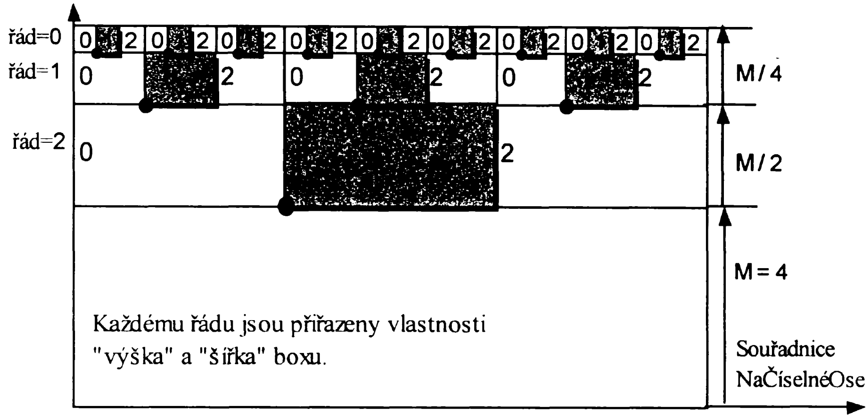


Pořadí zpřístupňování číslic jako jednotlivých objektů:

0 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 1 2 1 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 1 2 2 0 0 1 2 1 0 1 2

Tyto číslice mají stejnou souřadnici na číselné ose

Fraktál a jeho objektově orientovaná definice

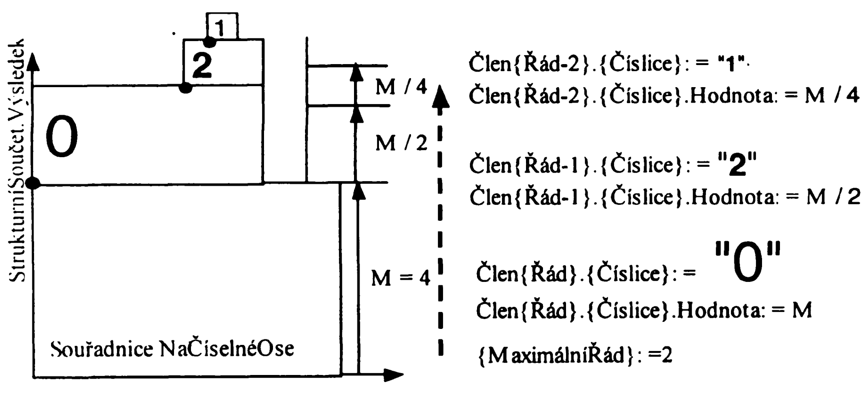


Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
Člen{MaximálníŘád}.Hodnota: = M
For Each {Číslice} **In** KolekceČíslic(0,1,2)
Člen{Řád-1}.{Číslice}.Hodnota: = $\frac{1}{2}$Člen{Řád}.Hodnota
End Each
End Define

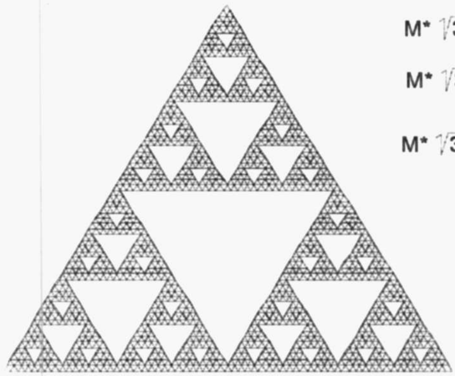
Definice objektu (zadat souřadnice levého dolního rohu, výšku a šířku boxu). Objekt je přiřazen pouze číslicím 1, a to pro všechny řády:

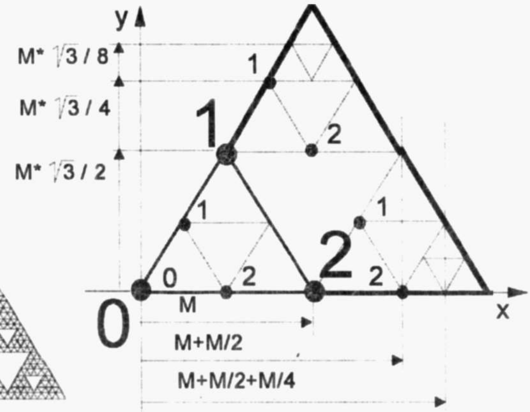
Define Objekt.Box
If Číslice: = 1
Box.x: = Člen.SouřadniceNaČíselnéOse
Box.y: = Člen.SouřadniceNaČíselnéOse StrukturníSoučet. Výsledek
Box.Výška: = Člen{Řád}.Hodnota
Box.Šířka: ={Základ} ^{Řád}
Box.Výplň: =„šedá“
End If
End Define

Definice pro jednu strukturní větev:



3. Sierpinského těsnění





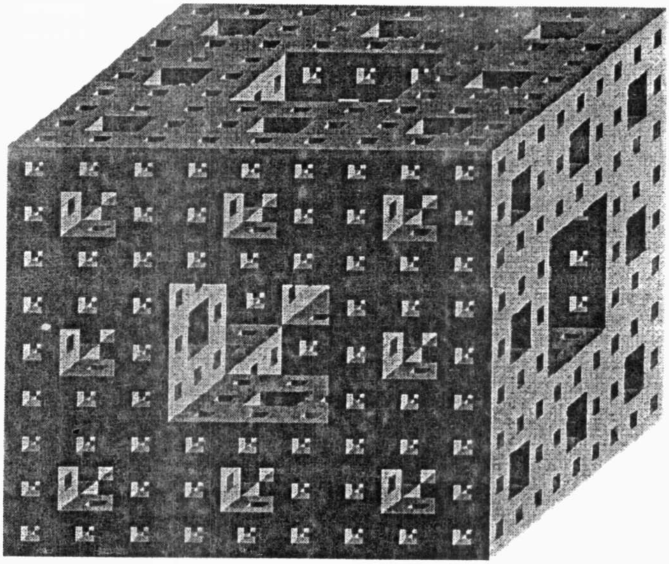
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
  Define Člen{MaximálníŘád}
    If {Číslice} = 0
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x: = 0
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y: = 0
    ElseIf {Číslice} = 1
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x: = M
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y: = M $\sqrt{3}/2$
    ElseIf {Číslice} = 2
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x: = M
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y: = 0
    End If
  End Define
  Define Člen{Řád-1}
    For Each {Číslice} **In** KolekceČíslic(0,1,2)
      Člen{Řád-1}.{Číslice}.Posunutí_x:=$\frac{1}{2}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_x
      Člen{Řád-1}.{Číslice}.Posunutí_y:=$\frac{1}{2}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_y
    End Each
  End Define
End Define

Define StrukturníOperace.StranaTrojúhelníka
  Člen{MaximálníŘád}.DélkaStrany: = M
  Člen{Řád-1}.DélkaStrany: = $\frac{1}{2}$Člen{Řád}.DélkaStrany
End Define

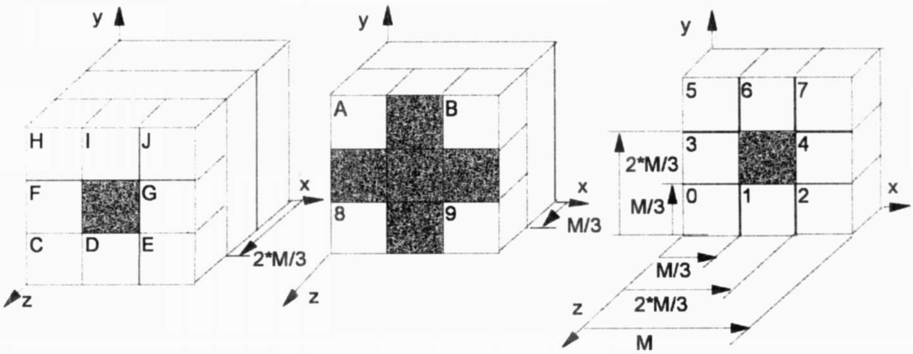
Definice objektu (zadat souřadnice levého dolního vrcholu trojúhelníka a délku strany):

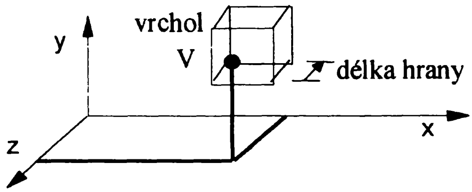
Define Objekt.Trojúhelník
  Trojúhelník.SouřadniceVrcholu_x:=
      Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseX
  Trojúhelník. SouřadniceVrcholu_y:=
      Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseY
  Trojúhelník.DélkaStrany: = Člen.StranaTrojúhelníka.DélkaStrany
End Define

4. Mengerova houba



Nejdůležitější je správně stanovit základ číselné soustavy. Krychle se při každém přechodu na nižší řád rozdělí na 27 menších krychlí. Základ číselné soustavy je však 20, protože právě tolik krychlí se bude dál dělit. Hrana krychle se při každém přechodu na nižší řád zmenší na třetinu.



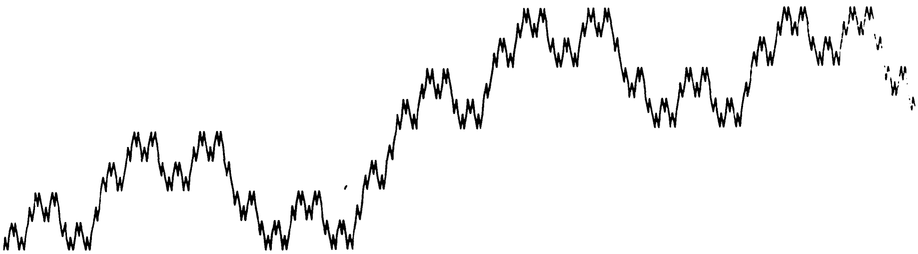


Výsledné posunutí v určitém směru vznikne „strukturním součtem" dílčích posunutí přiřazených jednotlivým číslicím daného řádu.

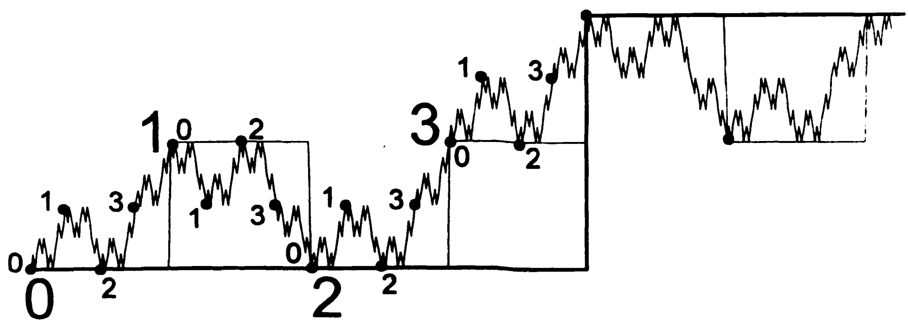
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
  Define Člen{MaximálníŘád}
    If {Číslice} = 0 or 1 or 2 or 3 or 4 or 5 or 6 or 7
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_z: = 0
    ElseIf {Číslice} = 8 or 9 or A or B
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_z: = M/3
    ElseIf {Číslice} = C or D or E or F or G or H or I or J
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_z: = 2M/3
    ElseIf {Číslice} = 0 or 1 or 2 or 8 or 9 or C or D or E
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y: = 0
    ElseIf {Číslice} = 3 or 4 or F or G
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y: = M/3
    ElseIf {Číslice} = 5 or 6 or 7 or A or B or H or I or J
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y: = 2M/3
    ElseIf {Číslice} = 0 or 3 or 5 or 8 or A or C or F or H
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x: = 0
    ElseIf {Číslice} = 1 or 6 or D or I
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x: = M/3
    ElseIf {Číslice} = 2 or 4 or 7 or 9 or B or E or G or J
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x := 2M/3
    End If
  End Define
  Define Člen{Řád-1}
    For Each {Číslice}In KolekceČíslic $(0,\dots 9, A \dots J)$
      Člen{Řád-1}.{Číslice}.Posunutí_x:=$\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_x
      Člen{Řád-1}.{Číslice}.Posunutí_y:=$\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_y
      Člen{Řád-1}.{Číslice}.Posunutí_z:=$\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_z
  End Define
End Define
Define StrukturníOperace.StranaKrychle
  Člen{MaximálníŘád}.DélkaStrany: = M
  Člen{Řád-1}.DélkaStrany: = $\frac{1}{2}$ Člen{Řád}.DélkaStrany
End Define

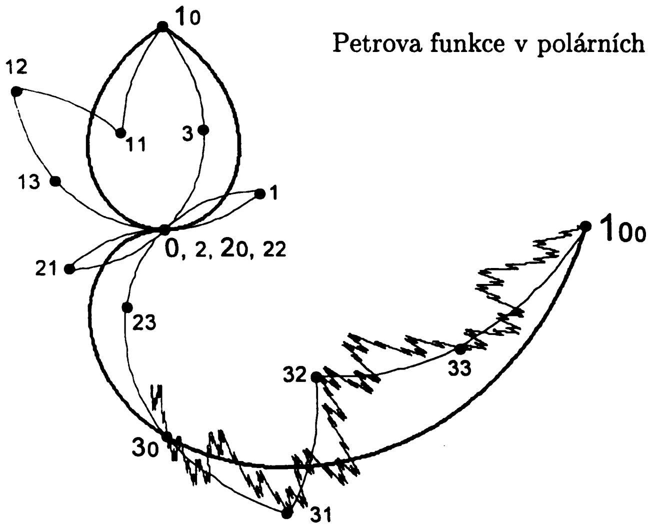
Definice objektu (zadat souřadnice vrcholu V a délku strany):
Define Objekt.Krychle
  .SouřadniceVrcholu_ x:=Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseX
  .SouřadniceVrcholu_ y:=Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseY
  .SouřadniceVrcholu_ z:=Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseZ
  .DélkaStrany: = Člen.StranaKrychle.DélkaStrany
End Define

5. Spojnicový fraktál podle Petra



```
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
   Define Člen{MaximálníŘád}
      If {Číslice}: = 1 or 3
         Člen{MaximálníŘád}.Hodnota: = M
      ElseIf {Číslice}: = 0 or 2
         Člen{MaximálníŘád}.Hodnota: = 0
      End If
   End Define
   Define Člen{Řád-1}
      For Each {Číslice} In KolekceČíslic(1,3)
         If Člen{Řád}.Hodnota: = 0
          Člen{Řád-1}.{Číslice}. Hodnota:=½Člen{Řád}.{Číslice}.Hodnota
         Else
          Člen{Řád-1}.{Číslice}. Hodnota:=-½Člen{Řád}.{Číslice}.Hodnota
         End If
      End Each
      For Each {Číslice} In KolekceČíslic(0,2)
         Člen{Řád-1}.{Číslice}.Hodnota: = 0
      End Each
   End Define
End Define
Define KorekcePodlePetra
   For Each {Číslice} In KolekceČíslic(3)
      Člen{Řád-1}.{Číslice}.Hodnota:=-Člen{Řád-1}.{Číslice}.Hodnota
   End Each
End Define
```

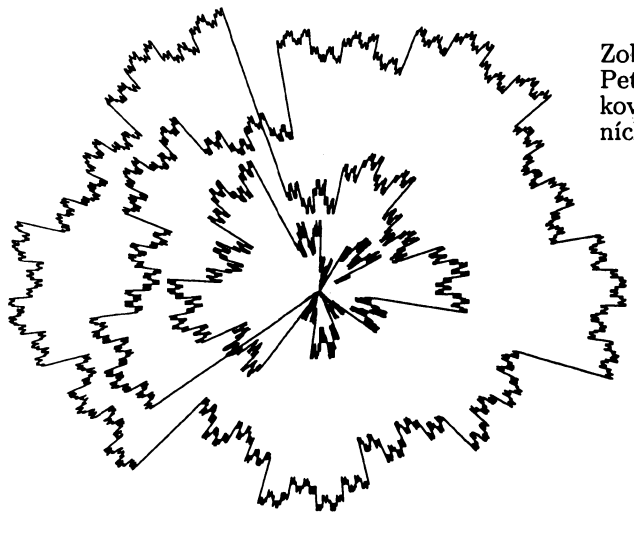




Petrova funkce v polárních souřadnicích

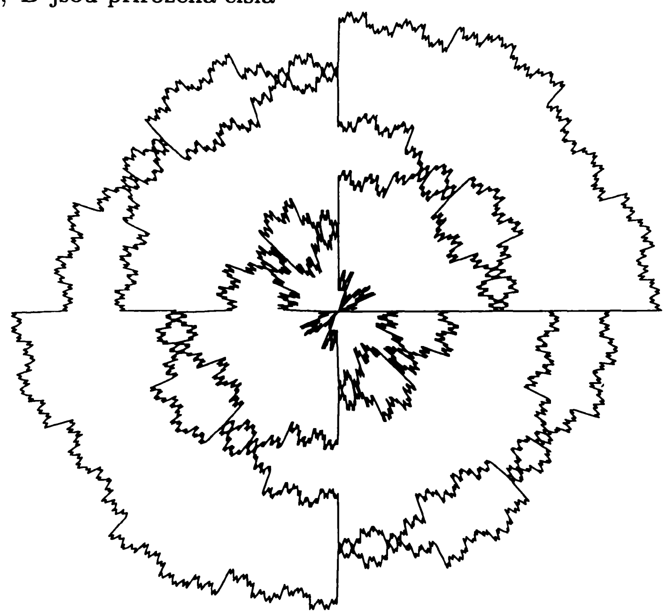
6. Chaos

Jak jsem uvedla v úvodu, profesor Petr si položil za cíl definovat spojitou funkci, která nemá v žádném bodě derivaci. Podařilo se mu však něco víc: do periodické funkce „vložil" nepatrnou odchylku, která s přibývajícími řády nabývá stále větších rozměrů. Navíc je tato odchylka definována tak, že zachovává původní „periodický motiv". Při pohledu na graf Petrovy funkce se nabízí srovnání s chytrou horákyní ve známé české pohádce: „funkce je spojitá, ale v žádném bodě nemá derivaci; ve funkci se opakuje stále stejný motiv, ale přesto není periodická; ten stále se opakující motiv není zase tak úplně stejný, protože je do něj vložena odchylka, která je pro nejnižší řády sice nepatrná, ale s přibývajícími řády nabývá obrovských rozměrů; ono se vlastně nejedná ani o odchylku, ale jen o původní periodický motiv s opačným znaménkem..."

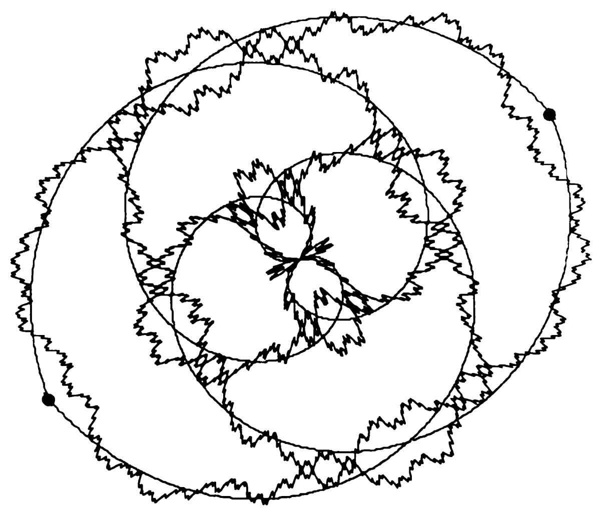


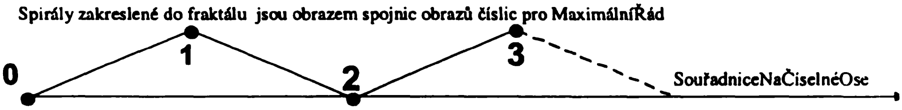
Zobrazení „zjednodušené Petrovy funkce" ve čtyřkové soustavě v polárních souřadnicích:

Při převodu fraktálu zobrazeného v kartézských souřadnicích do zobrazení v polárních souřadnicích je třeba vhodně zvolit přírustek úhlu průvodiče:
$\Delta\varphi_0 = A\ \pi\ /\ \{\text{Základ}\}^{\ B}$,
kde A, B jsou přirozená čísla



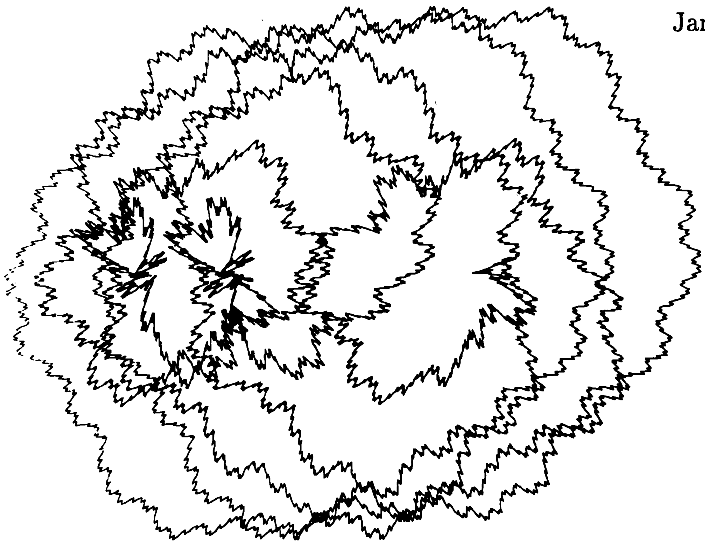
Zobrazení spojnicového fraktálu podle Petra v polárních souřadnicích:



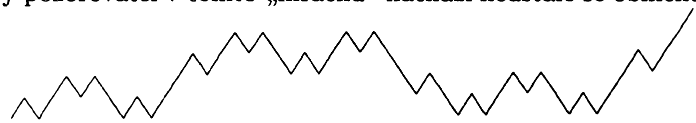


„Mraky se rozlévají po obloze a tvoří neurčité formace, ano, ovšem, najdou se i takové, které nejsou neurčité, jejich špice stojí vyrovnaně vedle sebe nebo se valí v pravidelně rýhovaných útvarech, připomínajících mozkovou kůru.“

James Gleick

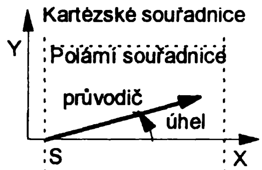


Vnímavý pozorovatel v tomto „mračnu“ nachází neustále se obměňující motiv:

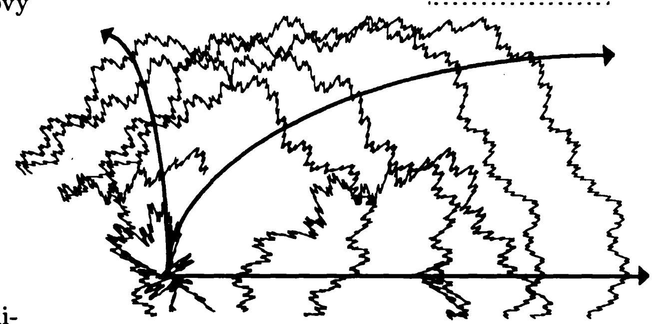


Zobrazením fraktálu v polárních souřadnicích se narušily proporční vztahy uvnitř, ale zachovala se jeho „uspořádanost“. Z pohledu výchozích kartézských souřadnic byla do systému vložena nutná nelinearita.

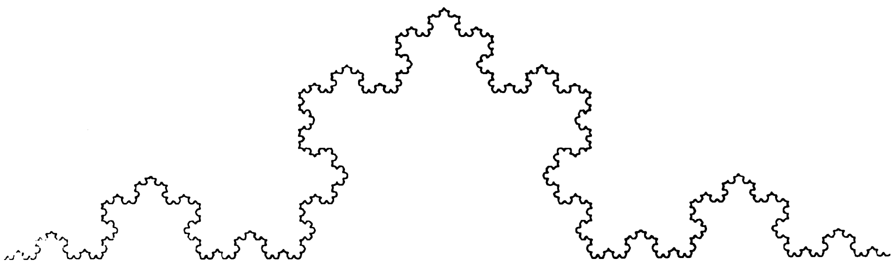
Nepatrným posouváním středu souřadnicové soustavy se naruší proporční vztahy uvnitř fraktálu i jeho „uspořádanost“, nemění se však základ číselné soustavy ani na něm závisející vlastnosti.



Tento posun, u Petrovy funkce podporovaný vloženou odchylkou, se projeví vznikem „za sebou se valících vln.“
Každá z „vln“ se přitom skládá z několika různě modifikovaných základních motivů.



7. Kochův fraktál



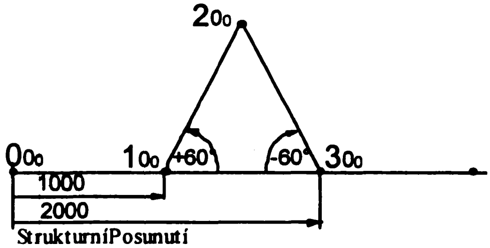
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
  DefineČlen{MaximálníŘád}
    If {Číslice} = 0
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí: = 0
    Else If {Číslice} = 1
      Člen{MaximálníŘád}. Posunutí: = M
      Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Úhel: = 60°
      Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Střed: = M
    Else If {Číslice} = 2
      Člen{MaximálníŘád}. Posunutí: = M
      Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Úhel: = -60°
      Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Střed: = 2M
    Else If {Číslice} = 3
      Člen{MaximálníŘád}. Posunutí: = 2M
    End If
  End Define
  Define Člen{Řád-1}
  For Each {Číslice} **In** KolekceČíslic(0,1,2,3)
   Člen{Řád-1}.{Číslice}.Posunutí:=$\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí
   Člen{Řád-1}.{Číslice}.Otočení.Úhel:=Člen{Řád}.{Číslice}.Otočení.Úhel
   Člen{Řád-1}.{Číslice}.Otočení.Střed:=$\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí
  End Each
  End Define
End Define

Definice objektu (zadat souřadnice levého a pravého krajního bodu úsečky):
Define Objekt.Úsečka
  Úsečka.x_0: = Zobrazení.PředchozíČlen.SouřadniceNaOseX
  Úsečka.y_0: = Zobrazení.PředchozíČlen.SouřadniceNaOseY
  Úsečka.x: = Člen.SouřadniceNaOseX
  Úsečka.y: = Člen.StrukturníSoučet. Výsledek
End Define

Grafické zobrazení strukturní operace

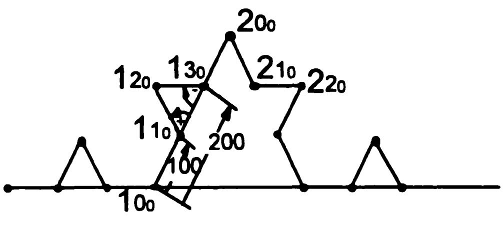
Zobrazení: KartézskéSouřadnice MaximálníŘád = 2
Číselná Soustava.Základ = 4 KolekceČlenů(Člen) = 0, 1, 2, 3

KolekceŘádů(2)



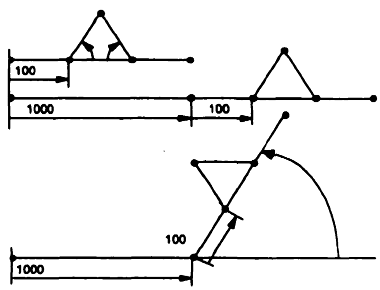
{Člen$_{000}$}. StrukturníPosunutí := 0
{Člen$_{100}$}. StrukturníPosunutí := 100
{Člen$_{100}$}. StrukturníOtočení.Úhel := 60°
{Člen$_{100}$}. StrukturníOtočení.Střed := 100
{Člen$_{200}$}. StrukturníPosunutí := 100
{Člen$_{200}$}. StrukturníOtočení.Úhel := -60°
{Člen$_{200}$}. StrukturníOtočení.Střed := 200
{Člen$_{300}$}. Strukturní.Posunutí := 200

KolekceŘádů(1, 2)

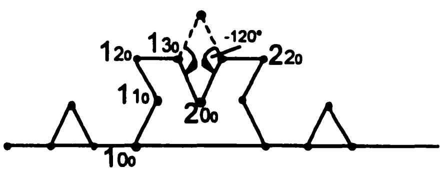


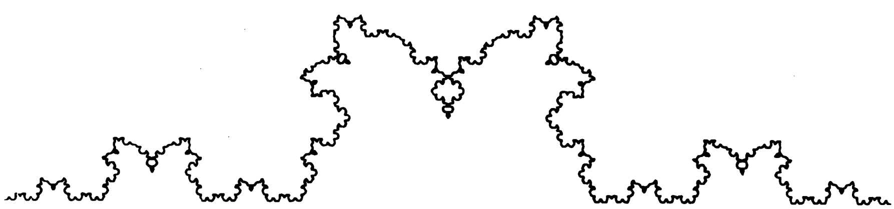
{Člen$_{100}$}. StrukturníPosunutí := 0
{Člen$_{110}$}. StrukturníPosunutí := 10
{Člen$_{110}$}. StrukturníOtočení.Úhel := 60°
{Člen$_{110}$}. StrukturníOtočení.Střed := 10
{Člen$_{120}$}. StrukturníPosunutí := 10
{Člen$_{120}$}. StrukturníOtočení.Úhel := -60°
{Člen$_{120}$}. StrukturníOtočení.Střed := 20
{Člen$_{130}$}. Strukturní.Posunutí := 20

Algoritmus se zjednoduší, provádí-li se výpočet strukturní operace od nejnižšího řádu k nejvyššímu

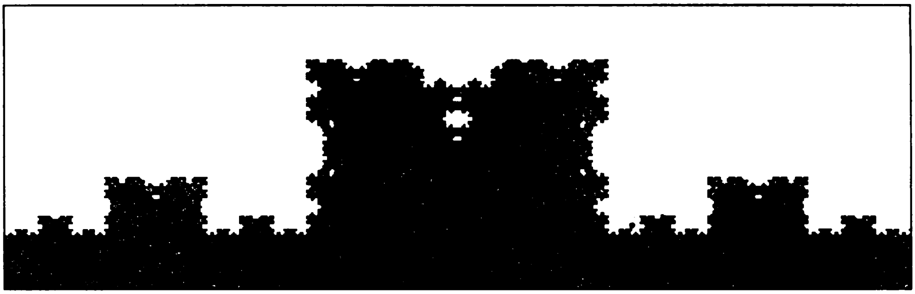


Stačí malá změna
a fraktál se výrazně promění:

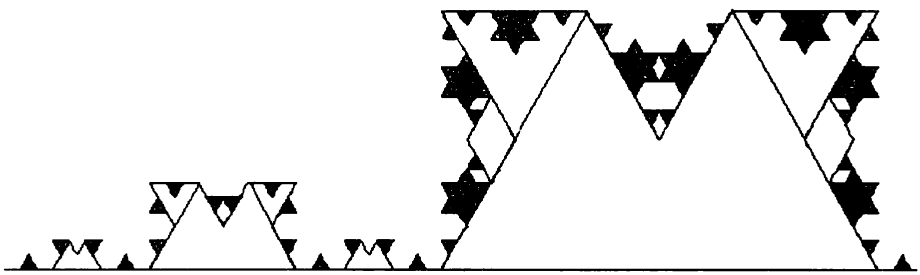


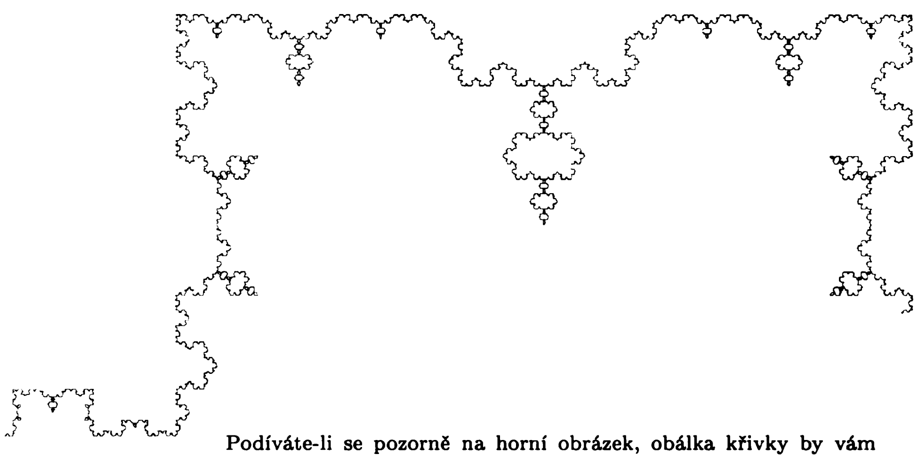


8. Variace na Cantorovo diskontinuum



Návod, jak upravit předchozí strukturní definici, plyne z tohoto obrázku:

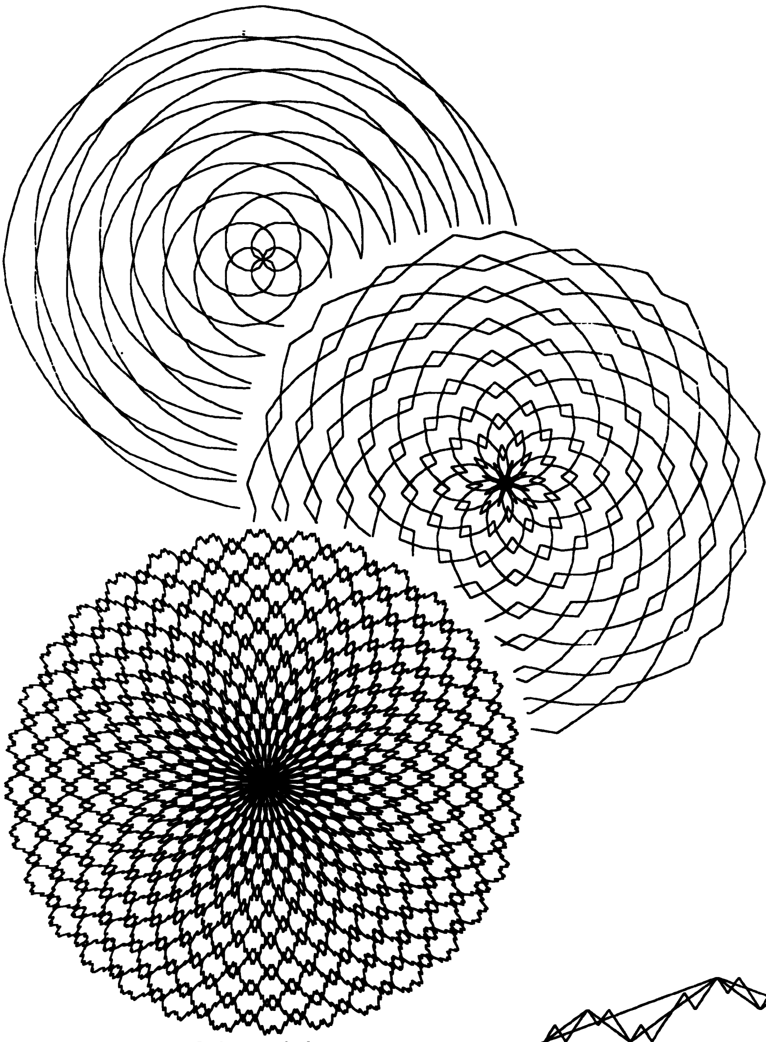




Podíváte-li se pozorně na horní obrázek, obálka křivky by vám mohla připomínat Petrovu funkci vytvořenou na základě trojkové číselné soustavy - tam se však objevují ***„skoky, které se nechtějí zaplnit.“***

10. Závěr

Jak bylo ukázáno v tomto článku, je možno jednotlivým objektům „strukturně definovaných číselných soustav" přiřazovat libovolné vlastnosti. To umožňuje vytvářet velice zajímavé fraktály na základě jednoduchých a hlavně algoritmizovatelných pravidel.



Motivem pro vytvoření tohoto fraktálu je Petrova funkce.

LITERATURA

Výčet příkladů nederivovatelných funkcí v úvodu není pochopitelně úplný a podrobný. Zájemci o podrobnější studium mohou nahlédnout například do těchto prací:

1. G. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Annales de l'Ecole normale (2) IV (1875), 57–112.
2. P. du Bois-Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **79** (1875), 21–37.
3. V. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (1878), Pisa.
4. M. Lerch, *Über die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Function*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **92** (1888), 126–138.
5. Ch. Cellérier, *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse*, Bulletin des sciences mathématiques („Darboux Bull.") **14** (1890), 142-160.
6. T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (English and Japan) **1** (1903), 176–177.
7. K. Petr, *Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **49** (1920), 25–31.
8. K. Rychlík, *Funkce spojité nemající pro žádnou hodnotu proměnné derivace v tělese čísel Henselových*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **49** (1920), 222–223.
9. M. Jašek, *Bolzanova funkce*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **51** (1922), 69–76.
10. V. Jarník, *O funkci Bolzanově*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **51** (1922), 248–264.
11. K. Rychlík, *Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichen Nachlasse*, Věstník Královské české společnosti nauk (1921–22), č. 4, 6 stran.
12. B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), Berlin, 474–475.
13. M. Hlaváček, *Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **60** (1931), 157–159.
14. K. Petr, *Poznámka k článku pana Hlaváčka*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **60** (1931), 160–161.
15. D. Preiss, *Nederivovatelné funkce*, Konference českých matematiků, Zvíkovské podhradí (1981), Matematická vědecká sekce, 13–18.
16. J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele II*, Matfyzpress, Praha, 1997.

Z velkého množství publikací věnovaných fraktálům a chaosu jmenujme alespoň některé:

17. G. Šuster, *Determinirovanyj chaos*, Mir, Moskva, 1988.
18. D. Preiss, *Něco málo matematiky k fraktálům*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **33** (1988), 162–164.
19. V. Kůrková, *Fraktální geometrie*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **34** (1989), 267–277.
20. M. Marek, I. Schreiber, *Chaotic Behavior of Deterministic Dissipative Systems*, Academia, Praha, 1991.
21. H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Fractals for the Classroom, I., II.*, Springer, New York, 1992.
22. L. Wojtczak, *Chaos a fantazie*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **39** (1994), 108–112.
23. P. Slavík, V. Seige, L. Serédi, *Fraktály a deterministický chaos*, Softwarové noviny **8** (1995), 35–41.
24. J. Gleick, *Chaos: Vznik nové vědy*, Ando Publishing [knížka populárního charakteru], Brno, 1996.