MUHAMMAD IBN MÚSA AL-CHOREZMI

JAROMÍR BAŠTINEC, ZDEŇKA KUBIŠTOVÁ

Úvod

Arabský učenec Muhammad ibn Músa al-Chorezmi patří mezi nejvýznamnější matematiky všech dob. Někdy je označován jako

Abu Abdalah Muhammad ibn Músa al-Chorezmi,[1]

Abu Abdalah Muhammad ibn Músa al-Chorezmi al-Madžúsí,

Abu Džafar Muhammad ibn Músa al-Chorezmi,

Muhammad ibn Músa al-Chwarizmi,[2]

Mohamed ben Músa al-Hovarezmi[3]

a podobně. Toto zdánlivě složité jméno v překladu znamená: otec Abdalaha (resp. Džafara), Muhammad, syn Músy z Chorezmu. Přídavek „al-Madžúsí" nám říká, že mezi jeho předky byli mágové — zoroastričtí kněží.[4]

Zprávy o jeho životě jsou velmi kusé. Pocházel z historického Chorezmu, území při dolním toku řeky Amu-Darji, kde existovaly vyspělé civilizace od prapočátků lidstva. Neštěstím bylo, že Chorezm je přístupný ze všech stran a tak byl nesčetněkrát dobyt a zničen kočovníky z okolních stepí, Huny, Avary, Araby, Mongoly a dalšími. Jeho kultura byla vždy na velmi vysoké úrovni; stupeň rozvoje matematiky a astronomie v Chorezmu byl oceňován už ve starověku. Žádné konkrétní doklady, výsledky, či práce z té doby se však nezachovaly, pouze zmínky v pracích autorů z pozdějších dob či z jiných zemí.

Po období velké arabské expanze v 7. a 8. století nastal zlatý věk arabské kultury a vědy. Přitom není možné klást rovnítko mezi nynějšími arabskými státy a tehdejším arabským světem. Na rozkvětu arabské vědy a kultury se podílely všechny národy a náboženské skupiny žijící uvnitř arabského chalífátu. Co měli učenci společné, byla arabština jako univerzální jazyk.[5] Až když došlo k vítězství ortodoxního islámu, skončil zlatý věk arabské vědy a kultury.

Arabští vládcové si velmi brzy uvědomili význam vědy a podporovali její rozvoj. V hlavním městě chalífátu, v Bagdádu, založil chalífa **al-Mamún**[6] „Dům moudrosti", zařízení plnící funkci podobnou akademii věd. Kolem této instituce

[1] Viz [1,6,7,8,10].

[2] Viz [11,12,13].

[3] Viz Frant. Fabinger: *O vývoji čísel, číslovek a číslic*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **33** (1904), 82.

[4] Zoroastrismus je staroperské náboženství, které předpokládá, že existuje bůh dobra a světla Ormuzd a bůh zla a temnot Ahriman, kteří spolu zápasí. Po vítězství Ormuzdově vstanou lidé z mrtvých. Toto náboženství založil prorok Zarathustra (řecky Zoroastrés), který žil snad někdy v období 8. – 6. st. př. n. l.

[5] Podobně byla ve středověké Evropě latina univerzálním jazykem učenců všech národů a států.

[6] Chalífa **al-Mamún** (786–833) vládl v letech 813–833.

vznikla bagdádská matematická škola. Ta se v prvním období své existence věnovala hlavně studiu antických autorů a překladům jejich děl do arabštiny. Během 150 let tak byla do arabštiny přeložena základní díla **Eukleida, Archimeda, Apollonia, Herona, Ptolemaia, Diofanta** a dalších, některá byla překládána i opakovaně, např. Eukleidovy *Základy*. Díky tomu byla mnohá díla antiky zachráněna pro budoucí generace. Současně byly překládány a studovány práce indických matematiků a astronomů, jako např. Arjabhatty I. (476–po r. 510), Bhaskary I. (6. st.), Brahmagupty (598–?) a dalších.

Smísením helenistických vlivů s vlivy indickými a s domácí tradicí (Mezopotamie, Persie, Chorezm) vznikla svébytná arabská matematika.

Nejvýznamnějším arabským matematikem tohoto období byl právě **Abú Abdalah Muhammad ibn Músa al-Chorezmi** (783–847). Data jeho života jsou uváděna různými autory různě, na základě nepřímých poznámek v pozdějších pracích.

Kde studoval, není známo. Objevuje se už jako známý vědec, který se připojil ke dvoru al-Mamúna v Mervu.[7] Al-Mamún, syn chalífa Haruna ar-Rašída (vládl 786–809) známého z Pohádek Tisíce a jedné noci, byl jmenován místodržitelem v Chorasanu v r. 809. Podle závěti Haruna ar-Rašída sepsané v r. 802 dostal starší syn **Mohammed al-Amin**, syn svobodné Arabky, titul chalífy a získal arabské, syrské, mezopotámské a severoafrické území. Syn perské otrokyně al-Mamún dostal perské a středoasijské země. Mervská oáza se stala na několik let druhým hlavním městem chalífátu. Al-Mamún odtud vedl do r. 813 boj o trůn proti svému bratru al-Aminovi. I po jeho smrti se pokusil vládnout chalífátu z Mervu. Až v r. 818 se vítězný al-Mamún přestěhoval do Bagdádu. Po založení „Domu moudrosti“ se al-Chorezmi stal jeho správcem a intenzivně pracoval. Poslední zmínka o něm je z r. 847, kdy je uveden jako svědek při smrti chalífa **al-Mutasila** (vládl 833–847). Krátce poté patrně zemřel, protože již nebyl připomínán. Rok 847 je proto většinou uváděn jako rok jeho smrti; v roce 1997 jsme si tedy připomněli 1150. výročí jeho úmrtí. Někdy se však můžeme setkat také s rokem 850.

Bagdád, který byl založen r. 762 chalífem al-Mansúrem, byl centrem tehdejší vědy a kultury. Chalífové z dynastie Abbasovců podporovali zpočátku rozvoj vědy a kultury. A možná se na ní i přímo podíleli. V předmluvě ke svému algebraickému traktátu al-Chorezmi vyzdvihuje i přímý podíl chalífy al-Mamúna na vědecké práci.

Přehled prací

Jako většina arabských učenců byl al-Chorezmi encyklopedista. Většina jeho prací se nedochovala v originále, známe je z překladů nebo o nich máme informace z prací pozdějších autorů. Uváděné názvy prací mnohdy nejsou jednoznačné, právě tak jako autorova jména. V současné době se pokládá za prokázané jeho autorství následujících prací:

1. Traktát o indické aritmetice. Známe jej z jediného latinskému překladu z 13. století, který navíc není úplný. Arabský originál se nezachoval.

[7]Nyní město Mari v Turkmenistánu.

2. Krátká kniha o počítání algebry a almukabaly. Významný algebraický traktát, který známe z několika latinských překladů, se zachoval i v arabském přepise ze 14. století.

3. Zídž — astronomické a trigonometrické tabulky, které byly potřebné pro řešení úloh teoretické i praktické astronomie (a také astrologie). V tomto díle byly poprvé v arabské literatuře sestaveny tabulky sinů a zavedena tangenta. Al-Chorezmiho *Zídž* byl velmi populární nejen na Východě, ale i v Evropě. Při jeho sestavování vycházel al-Chorezmi z indických vzorů. Nedochoval se původní originál, ale známe jeho přepracovanou verzi v arabštině z 10. století, jejímž autorem je **Abu 'l-Quasim Maslama ibn Achmad al Madžriti**.[8] Dále známe četné citace z původního díla v pracích středověkých arabských autorů. Z 9. století existuje komentář od Ibn al-Mansura, z 10. století obsáhlý komentář od Ibn al-Musanna. Na jejich základě byl rekonstruován původní text.[9]

4. Kniha obrazů Země. Zachovala se jako unikátní arabský rukopis. Jedná se o geografický spis, ve kterém jsou uvedeny souřadnice různých měst Arabského chalífátu.[10] Jde o první známou práci z geografie v arabském jazyce. Měla velký vliv na další rozvoj této vědy v zemích Východu.

5. Kniha o sestavení astrolabia. Nezachovala se, známe ji pouze podle citací a odkazů.

6. Kniha o práci s astrolabiem. Zachoval se jediný neúplný arabský rukopis této práce.

7. Kniha o slunečních hodinách. Pokládala se dlouho za ztracenou. Kolem roku 1982 byla v Istanbulu nalezena arabská rukopisná verze.

8. Traktát o výpočtu židovského kalendáře. Známe jej v jediném arabském přepisu. Je věnován výpočtům dat, na něž připadají podle požadavků Starého zákona pohyblivé židovské svátky.

9. Kniha kronika. Nezachovala se. Jsou na ni mnohé odkazy v jiných dílech. O obsahu se vedou dodnes spory. Většinou se předpokládá, že jsou v ní popisovány historické události z hlediska astronoma. Probíhá pokus restaurovat původní text na základě citací pozdějších autorů.

V dalším textu se budeme věnovat pouze prvním dvěma pracím, které měly zásadní vliv na další rozvoj matematiky.

[8] **Abu 'l-Quasim Maslama ibn Achmad al Madžriti** († 1007), arabský matematik a astronom, pocházel z Madridu a působil v Cordobě.

[9] Není jisté, zda jsou tabulky sinů a tangent prací al-Chorezmiho, nebo až pozdějším doplňkem Maslama ibn Achmad al Madžrity. Většinou se však jejich autorství přiznává al-Chorezmimu.

[10] Arabové věděli o Eratosthénově měření průměru Země, ale nevěděli, kterou délkovou jednotku Eratosthénes používal. Proto podle příkazu al-Mamúna bylo provedeno měření zemského stupně ve dvou různých oblastech dvěma skupinami učenců. V jedné z nich byl i al-Chorezmi. Každá skupina získala jiný výsledek a tak chalífa al-Mamún rozhodl, že velikost stupně bude průměrem jejich výsledků. Je to jediný dochovaný doklad o přímé účasti chalífy na vědecké práci.

Krátká kniha o počítání algebry a almukabaly[11]

Obsahuje:

a) Algebraickou část, která je věnována řešení lineárních a kvadratických rovnic a úpravám algebraických výrazů.
b) Kapitolu o obchodních smlouvách, která obsahuje i trojčlenku.
c) Geometrickou kapitolu, která obsahuje i aplikace algebry na řešení geometrických úloh.
d) Knihu o závětích, která je věnována dělení majetku podle pravidel islámského kanonického práva v podobném duchu, v jakém jej systematicky vyložil významný islámský právník **Abu Hanifa** (690–767).[12]

Ve všech latinských překladech jsou uvedeny pouze první dvě části. Zbývající chybí, i když představují více než polovinu spisu.

V algebraické části al-Chorezmi nejdříve formuluje obor svého zájmu, přičemž rozeznává kvadráty, kořeny (věci) a čísla (dirhamy). Všechny koeficienty musí být kladné (záporná čísla ještě nebyla zavedena), nezná tedy obecný tvar $ax^2 + bx + c = 0$, ale pracuje celkem se šesti typy rovnic (kromě našeho zápisu uvádíme i slovní vyjádření al-Chorezmiho):

$ax^2 = bx$	kvadrát roven kořenu
$ax^2 = c$	kvadrát roven číslu
$ax = c$	kořen roven číslu
$ax^2 + bx = c$	kvadrát a kořen roven číslu
$ax^2 + c = bx$	kvadrát a číslo rovno kořenu
$ax^2 = bx + c$	kvadrát roven kořenu a číslu

V zadání se u al-Chorezmiho může objevit i záporný koeficient. Hovoří pak o „odečítaném" členu. Vždy však následuje úprava zadání na jeden ze šesti výše uvedených typů, metody řešení jsou totiž formulovány pouze pro ně.

[11] Arabský název je *Al-kitáb al-muchtaṣar fí ḥisáb al-džabr wa-l-muqábala.*

[12] Souhrn předpisů islámského náboženského práva, který se nazývá *šari'a*, což původně arabsky znamenalo „cestu vedoucí ke studni", tedy cestu k pramenům života, vznikl v době, kdy se první muslimové začali střetávat s bezprostředními sociálními a politickými problémy a kdy se pokoušeli čerpat systematická pravidla pro své chování z Koránu a z *hadísů* (*hadís* je jednotlivý výrok nebo čin Proroka předávaný ústní tradicí).

V prvních dvou stoletích existence muslimské obce se postupně ustavily u sunitských muslimů čtyři hlavní právní školy. Nejstarší je škola *hanafovská*, kterou v Bagdádu založil **Abu Hanifa**, pak vznikla škola *malikovská*, jež se vyvinula z praxe medinského soudce **Malika Ibn Anas** († 795), dále škola *šafiovská*, vytvořená Malikovým žákem **aš-Šáfím** († 820) a konečně škola *hanbalovská*, kterou v Bagdádu založil **Ahmad Ibn Hanbal** († 855).

První tři školy se lišily technickými otázkami a tím, na co kladly největší důraz. Hanafovci např. ponechávali více prostoru pro využívání vlastního úsudku než ostatní, šafiovci lpěli více na hadísech než malikovci. V důležitých otázkách se všichni shodovali a považovali své právní systémy za stejně pravověrné. Jedině hanbalovská škola se tradicionalisticky stavěla na odpor proti tomu, co pokládala za spekulativní novátorství tří dříve vzniklých škol. Ty ji sice uznávaly za čtvrtou ortodoxní školu, ale hanbalovci jim jejich zdvořilost nebyli ochotni oplácet. Hanbalovci se rozšířili v Iráku a Sýrii, ale rychle ztráceli na významu. Hanafovci reprezentovali dominantní právní systém v Osmanské říši, Střední Asii a Indii. Šafiovci převládali v dolním Egyptě, Hidžazu (oblast kolem posvátných měst Mekky a Mediny), v jihovýchodní Asii a ve východní Africe. Malikovci ovládali zbytek muslimské Afriky.

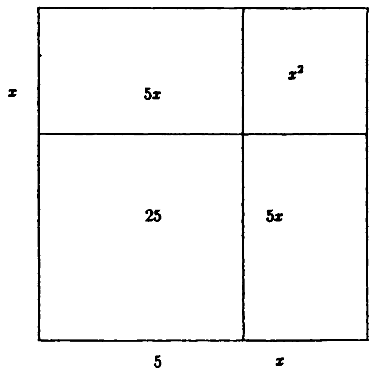
K převedení na základní typ zavádí al-Chorezmi operace *al-džabr* a *al-mukabala*. *Al-džabr* označuje přičtení téhož členu k oběma stranám rovnice. Tím se odstraní „odečítaný" člen. *Al-mukabala* značí zrušení stejných sčítanců téhož řádu na obou stranách rovnice.

Al-Chorezmi nemá žádnou symboliku, vše (včetně čísel) vyjadřuje slovy.[13] Obecné postupy řešení vysvětluje na konkrétních příkladech. Nejdříve se věnuje kanonickým tvarům, kdy je koeficient u druhé mocniny jednotkový.

Příklad (4. kapitola):

Co se týče kvadrátů a kořenů rovných číslu, jestliže řekneš: kvadrát a deset jeho kořenů je rovno třiceti devíti dirhamům, to potom znamená, že jestliže přidám k některému kvadrátu to, co je rovno deseti kořenům, dostanu třicet devět. Pravidlo je takové: rozpul počet kořenů, dostaneš v této úloze pět, vynásob to rovným jemu, bude dvacet pět. Přičti to k třiceti devíti, bude šedesát čtyři. Vypočítej kořen, bude osm a odečti od toho polovinu počtu kořenů, tj. pět, zůstanou tři. To je kořen kvadrátu, který jsi hledal, a jeho kvadrát je devět.

V 6. kapitole potom dokazuje správnost postupu. Odvození je čistě geometrické. Uvádí zde dva různé způsoby důkazu. V obou případech jde o doplnění na čtverec. V prvém případě máme (viz obr. 1):



Obr. 1

To můžeme zapsat ve tvaru:

$$x^2 + 10x = 39,$$

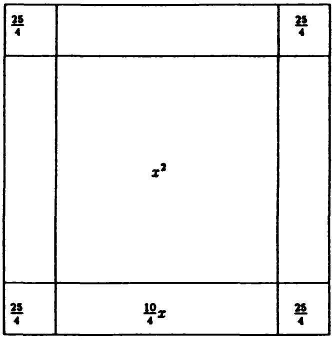
$$39 + 25 = 64,$$

$$\sqrt{64} = 8 = 5 + x,$$

$$x = 3.$$

[13] Jediným dílem v celé arabské matematice, kde se můžeme setkat se symbolikou, je aritmeticko-algebraický traktát **al-Qalasádího** († r. 1486).

Ve druhém případě máme (viz obr. 2):



Obr. 2

To můžeme zapsat ve tvaru:

$$x^2 + 4\left(\frac{10}{4}x\right) = x^2 + 10x = 39,$$

$$39 + 4\left(\frac{25}{4}\right) = 64,$$

$$\sqrt{64} = 2\left(\frac{10}{4}\right) + x,$$

$$x = 3.$$

Tato rovnice se později stala součástí snad všech učebnic algebry až do novověku.

V případě rovnic 5. typu representovaných příkladem $x^2 + 21 = 10x$ al-Chorezmi ví, že mohou existovat dva kořeny (rozuměj dva kladné kořeny), jeden kořen nebo žádný. Komplexní kořeny ani násobnost kořenů neznal. Také tento příklad se pak objevuje ve všech středověkých učebnicích. Uvádíme doslovný překlad al-Chorezmiho postupu:

Příklad (5. kapitola):

Co se týče kvadrátů a čísel rovných kořenům, to jestliže například řekneš: kvadrát a číslo dvacet jeden dirham rovno deseti kořenům, to potom znamená, že jestli přidáme ke kvadrátu dvacet jedna dirhamů, získáme rovné deseti kořenům. Pravidlo je takové: rozpul počet kořenů, dostaneš pět. Vynásob to rovným jemu, bude dvacet pět. Odečti od toho dvacet jedna, které jsou přičteny ke kvadrátu, zůstanou ti čtyři. Odmocni, máš dva. Odečti je od poloviny počtu kořenů, tj. od pěti, zůstanou ti tři. To je kořen, který jsi hledal, a jeho kvadrát je devět. A jestliže chceš, přičti to k polovině počtu kořenů a dostaneš sedm. I to je kořen, který hledáš a jeho kvadrát je čtyřicet devět. Jestliže se setkáš s úlohou, která tě přivede k této kapitole, zkus najít správné řešení sečtením a nevyjde-li ti, je nezbytné odečítání. Pouze v této kapitole ze tří kapitol, ve kterých musíš půlit počet kořenů, používej jak sčítání, tak i odečítání. Věz dále, *pokud v této kapitole rozpůlíš počet kořenů a násobíš je samým sebou a jejich součin je menší než počet dirhamů, které jsou přičítány ke kvadrátu, potom je úloha nemožná. Jestliže je však tento součin roven tomuto počtu dirhamů, je kořen kvadrátu roven polovině počtu kořenů bez sčítání a odečítání.*

Jeho postup lze přepsat takto:

$$x_{1,2} = \frac{10}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \mp \sqrt{25-21} = 5 \mp \sqrt{4} = 5 \mp 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

Al-Chorezmi zdůrazňuje, že rovnice

$$x^2 + q = px$$

pro

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$$

nemá řešení v oboru kladných reálných čísel. A dále, že pro

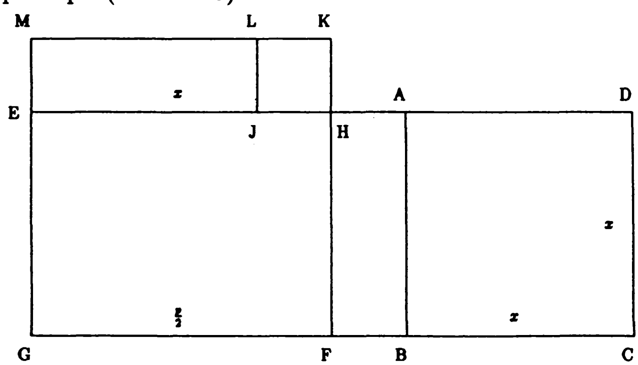
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$$

má rovnice jeden kořen

$$x = \frac{p}{2}.$$

Z dosud známé literatury je al-Chorezmi první, kdo si tohoto případu všímá. Jak je vidět, přepíšeme-li si zdánlivě složitý postup al-Chorezmiho pomocí naší symboliky, zjistíme, že se jeho klasifikace počtu řešení v ničem neodlišuje od naší známé podmínky na znaménko diskriminantu (za předpokladu, že hledáme pouze reálné kladné kořeny).

Odvození v 6. kapitole se týká pouze prvního případu. Geometrický důkaz je proveden pro případ $x < \frac{p}{2}$. Tuto podmínku al-Chorezmi neuvádí, vyplývá však z jeho postupu (viz obr. 3):



Obr. 3

$$AB = BC = x, \quad CG = DE = p,$$
$$KF = FG = \frac{p}{2},$$
$$KH = AH = JH = \frac{p}{2} - x,$$
$$JEML = FBAH,$$
$$JHKL = GFKM - GFHE - EJLM =$$
$$= GFKM - (GFHE + FBAH) = GFKM - GBAE,$$
$$JHKL = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2,$$
$$GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$
$$GBAE = px - x^2 = q.$$

Dosazením dostaneme

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$
$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Odvození druhého případu pro $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ chybí. Al-Chorezmi pouze vyslovuje pravidlo pro výpočet.

Nula není pro al-Chorezmiho řešením. Proto je pro něj rovnice prvního typu lineární. Hledaným řešením není jen kořen rovnice, ale také jeho druhá mocnina. Tu al-Chorezmi uvádí i při řešení lineární rovnice.

Po objasnění způsobů řešení kanonických typů rovnic ukazuje al-Chorezmi základní pravidla pro úpravu algebraických výrazů — násobení jednočlenem a dvojčlenem, slučování členů stejného řádu apod. Formuluje zde *znaménkové pravidlo*:

... odečítaná jednotka krát odečítaná jednotka je přičítaná jednotka.
... odečítaná jednotka krát přičítaná jednotka je odečítaná jednotka.

Al-Chorezmi nepoužívá záporná čísla v čistém tvaru. Objevují se u něj jen jako *odečítaná čísla.*[14]

Obdobně formuluje al-Chorezmi znaménkové pravidlo i pro kořeny:

... odečítaný kořen krát odečítaný kořen je přičítaný kvadrát.
... odečítaný kořen krát přičítaný kořen je odečítaný kvadrát.

Sčítání a odečítání přitom znázorňuje pomocí úseček a striktně dodržuje princip homogenity. Všechna jeho pravidla, samozřejmě vyjádřená slovně, jsou doprovázena číselnými příklady. Uveďme opět jeden z al-Chorezmiho příkladů:

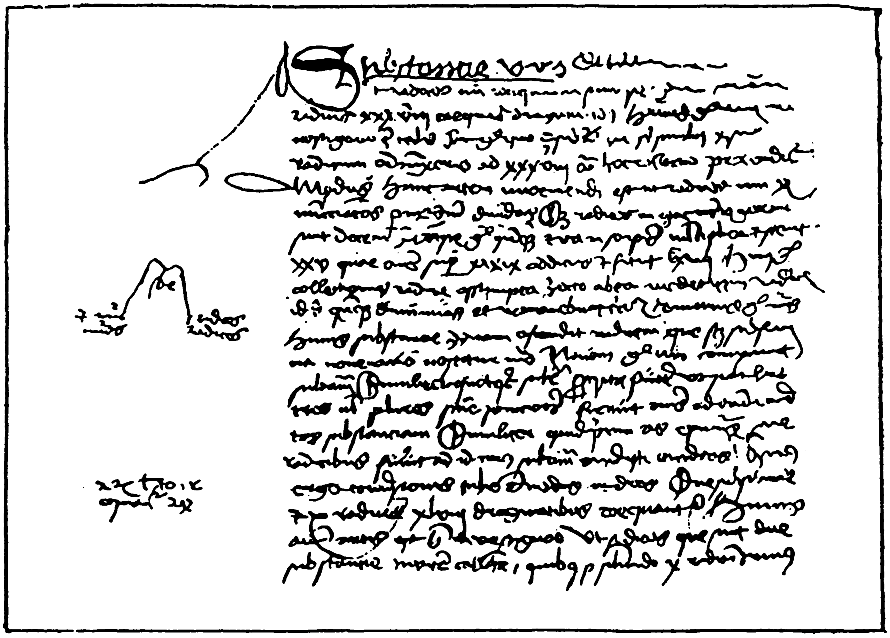
[14]Zcela analogicky definoval znaménkové pravidlo i **Diofantos** (3. st. n. l.) ve své *Aritmetice* (viz [4], I. kniha, IX. definice).

Řeknou-li: deset bez věci vynásob deseti s věcí, řekni: deset krát deset — to je sto, odečítaná věc krát deset — to je deset odečítaných věcí, věc krát deset — to je přičítaných deset věcí, odečítaná věc krát věc, to je odečítaný kvadrát, a všechno to dohromady je sto dirhamů bez kvadrátu.

V naší symbolice je:

$$(10 - x).(10 + x) = 100 - 10x + 10x - x^2 = 100 - x^2$$

Dále se zabývá zlomky a iracionalitami a prací s nimi. Danou úlohu vždy upravuje na kanonický tvar a odkazuje na již známé metody řešení.



Ukázka rukopisu latinského překladu algebraického traktátu

V geometrické části se al-Chorezmi věnuje výpočtům obsahů rovinných útvarů a výpočtu jejich jednotlivých prvků.

Al-Chorezmiho geometrii je obsahem blízký starožidovský traktát *Učení o měření* (*Mišnat ha-middót*). Někteří autoři jej řadí už do 2. století n. l., jiní až do doby al-Chorezmiho nebo ještě pozdější.

Pro π se zde uvádí hodnota $3\frac{1}{7}$, kterou znal už Archimedes. Al-Chorezmi ji uvádí také a navíc používá $\pi \doteq \sqrt{10}$, $\pi \doteq \frac{62832}{20000}$; tyto hodnoty převzal asi z Indie. O poslední z nich Al-Chorezmi uvádí, že se používá v astronomii.

Dlouho byla diskutována domněnka, že al-Chorezmi znal tento židovský traktát, ať už v překladu nebo přímo v originále. Není totiž vyloučeno, že uměl hebrejsky. Jeho traktát *O výpočtu židovského kalendáře* obsahuje citáty z Bible a svědčí o tom, že autor byl dobře seznámen s židovským náboženstvím.

V současnosti je většina autorů přesvědčena, že starožidovský traktát vznikl až po al-Chorezmim.

Závěrečná část al-Chorezmiho traktátu je věnována aplikacím algebry na problematiku dělení dědictví. Zůstávala velmi dlouho mimo zájem matematiků v neislámských zemích, protože bez znalosti islámského práva je nepochopitelná. Většina úloh se převádí na řešení lineárních rovnic, v jednom případě jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Příklad:

Jestliže řeknou: žena zemřela a zanechala svého muže, syna a tři dcery. Dále ona odkázala jiné osobě jednu osminu a jednu sedminu svého majetku. Pravidlo je takové: určíš počet dílů nepominutelného dědictví, tj. vezmeš jich dvacet. Vezmi majetek a odečti od něj jednu osminu a jednu sedminu. Zůstane majetek bez jedné osminy a jedné sedminy. Doplň svůj majetek, tj. přičti k němu patnáct čtyřicetijednin. Vynásob počet dílů neopominutelného dědictví, tj. dvacet, čtyřiceti jednou, dostaneš osm set dvacet. Přičti k tomu patnáct čtyřicetijednin toho, tj. tři sta, dostaneš, že všeho je tisíc sto dvacet. Osoba, které bylo odkázáno, dostane z toho jednu osminu a jednu sedminu. Jedna osmina a jedna sedmina je tři sta, protože jedna sedmina je sto šedesát a jedna osmina je sto čtyřicet. Zůstane osm set dvacet, které se rozdělí mezi dědice podle jejich podílů.

Jde o doslovný překlad. Je-li manželství bezdětné, pak podle islámského práva, dědí muž polovinu majetku ženy, jinak dědí čtvrtinu a dále syn dostane dvojnásobek toho co připadne dceři. Označme d podíl dcery, potom $3d$ připadne třem dcerám a synovi $2d$. Tedy

$$3d + 2d = \frac{3}{4}\,, \qquad d = \frac{3}{20}\,.$$

Nepominutelné dědictví se proto dělí na dvacet částí, z nichž 5 připadne manželovi, 6 synovi a 3 každé ze tří dcer. Podle závěti připadne $1/7 + 1/8 = 15/56$ dědictví další osobě. Zbývající část tvoří $41/56$, které se dělí na 20 částí, takže jeden díl tvoří $41/1120$. Mužovi připadne $205/1120$, synovi $246/1120$ a každé dceři $123/1120$. Další osoba obdrží $300/1120$.

Toto je jedna z možných variant řešení. Al-Chorezmiho úvahy můžeme v dnešní symbolice přepsat následovně:

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{7} = 1 - \frac{15}{56} = \frac{41}{56} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{56}{41} - \frac{15}{41} = 1 \Rightarrow \frac{56}{41} = 1 + \frac{15}{41}$$

Proto přičítá $\frac{15}{41}$. Celek (jednička, nepominutelné dědictví) musí být dělitelný 20 (dělí se na dvacet dílů) a také 41, proto násobí $41.20 = 820 + \frac{15}{41}.820$ a dostává, že celé dědictví se skládá z 1120 dílů.

Dlouho se vedly debaty o zdrojích, z nichž al-Chorezmi čerpal. On sám se o tom nikde nezmiňuje. Jedni mu připisují hlavně indický vliv, jiní zase řecký, hlavně vliv Diofanta Alexandrijského. Přímý Diofantův vliv se však nezdá být pravděpodobný. Pokud je známo, tak první překlad Diofanta do arabštiny provedl v Bagdádu křesťanský matematik **Qusta ibn Lúga al-Balabakkí.**[15] Protože al-Chorezmiho traktát je připsán chalífovi al-Mamúnovi (786–833) a předpokládá se jeho vznik těsně po r. 820, nemohl al-Chorezmi při jeho tvorbě používat tento překlad. S největší pravděpodobností al-Chorezmi velmi dobře znal tradice, které existovaly na Středním východě a zahrnovaly v sobě prvky babylonské i antické matematiky. A jejich součástí byly asi i některé postupy uvedené v Diofantově *Aritmetice*, právě tak jako vlivy indické matematiky.

Traktát o indické aritmetice

Rukopis je uložen v knihovně Cambridgeské university pod označením

MS I i.6.5.ff.102^R – 109^V.

Podle katalogu rukopisů byl přepsán ve 13. století. V rukopise je odkaz na algebraický traktát al-Chorezmiho a podle toho se předpokládá, že originální text vznikl kolem r. 825. Latinský překlad vznikl v první polovině 12. století. Autor překladu není znám. Víme však, že **Adelhard of Bath**[16] přeložil r. 1126 astronomické tabulky al-Chorezmiho upravené al-Madžritim. V r. 1145 přeložil druhý významný anglický učenec, **Robert of Chester**,[17] algebraický traktát al-Chorezmiho. Pravděpodobně mezi těmito dvěma daty došlo k překladu aritmetického spisu. Zdá se, že překladatelem byl jeden z těchto dvou učenců, kteří už měli zkušenosti s překlady jiných děl al-Chorezmiho.

Jediný známý rukopis není dělen na jednotlivé části (paragrafy). Jeho obsah je možno rozdělit následovně:

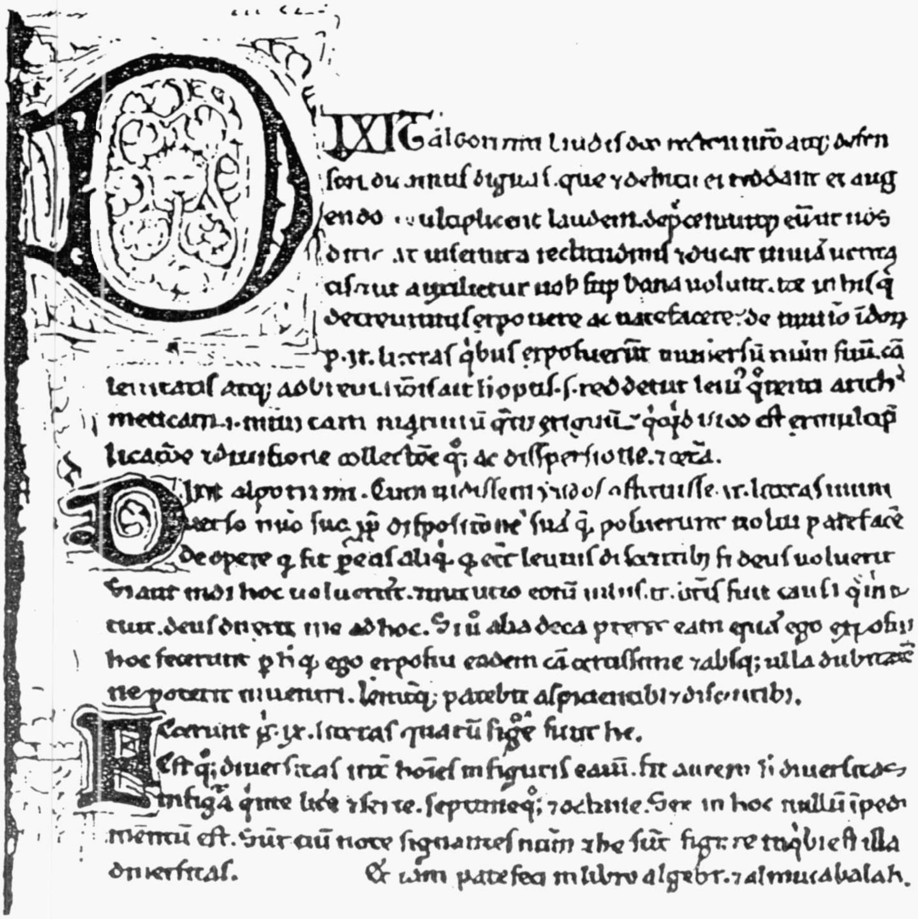
1. Úvodní poznámky o výhodách indického způsobu zápisu čísel.
2. O indických (arabských) cifrách a podstatě celých čísel.
3. Principy desítkové poziční soustavy.
4. Pravidla pro sčítání a odčítání celých čísel v indické soustavě.
5. Pravidlo o půlení a zdvojování.
6. Pravidlo pro násobení.
7. Kontrola správnosti zdvojování a násobení pomocí čísla 9.
8. Pravidlo pro dělení celých čísel.
9. O šedesátinných zlomcích.
10. Násobení šedesátinných zlomků.
11. Dělení zlomků a kontrola násobení.
12. Šedesátinné zlomky a práce s nimi.
13. Násobení desetinných zlomků.

---

[15]**Qusta ibn Lúga al-Balabakkí** pocházel z Baalbeku v nynějším Libanonu, zemřel v roce 912 v Arménii.

[16]**Adelhard of Bath** (1090–1150) byl anglický filozof a matematik, který přeložil z arabštiny do latiny Eukleidovy *Základy*, astronomické tabulky al-Chorezmiho a další spisy. Používal arabské číslice.

[17]**Robert of Chester** († kolem r. 1150) byl anglický učenec a překladatel.



První strana latinského překladu aritmetického traktátu

Podle kontextu chybí minimálně ještě jedna část. Překlad je ukončen násobením zlomků $3\frac{1}{2}$ a $8\frac{3}{11}$.

Al-Chorezmiho práce o aritmetice sehrála velmi důležitou roli v historii matematiky. Byla zde poprvé systematicky vyložena aritmetika založená na desítkovém pozičním systému s použitím nuly, tj. aritmetika, která je v našich představách přirozená. Tato aritmetika vznikla v Indii, proto ji al-Chorezmi a spolu s ním další středověcí matematici nazývali indickou. Indická aritmetika se šířila velmi pomalu. První zmínka o ní v evropské literatuře je u **Severa Seboghta**,[18] který ve svém spise z r. 622 říká, že ... ***indičtí vědci provádějí nejsložitější výpočty pomocí deseti znaků a jejich početní soustava je tak dokonalá, že ji nemůže vystihnout žádný popis.*** Podrobnější vysvětlení chybí.

Díky knize al-Chorezmiho se indická aritmetika rozšířila v zemích Blízkého a Středního Východu a odtud i do Evropy.

Latinský překlad traktátu nemá záhlaví, začíná slovy *Dixit Algorizmi* ... , což v překladu znamená *Al-Chorezmi řekl* .... *Algorizmem* nebo *algoritmem* středověcí evropští učenci nazývali celou tzv. indickou aritmetiku; později toto slovo začalo označovat každý systém výpočtů provedených podle určitého pravidla.

Na začátku svého díla al-Chorezmi říká, že ho napsal proto, aby objasnil základy indické aritmetiky, protože indický způsob zápisu čísel umožňuje s lehkostí provádět operace sčítání, odčítání, násobení, dělení atd.

V první části traktátu je podrobně objasněn princip zápisu čísel pomocí devíti znaků, které získávají význam podle toho, na jakém místě se nacházejí. Al-Chorezmi rozděluje čísla na *skupiny*, z nichž každá má svou jednotku. První je skupina jednotek, další je skupina desítek, ve které je jednotkou deset atd. Skupina jednotek musí stát v zápisu první, další skupiny pak následují od ní nalevo. Pokud se nějaká skupina v čísle nevyskytuje, je nutné na odpovídající místo napsat zvláštní znak, aby bylo jasné, ve které skupině jsou další čísla. Tomuto znaku — kroužku — věnuje al-Chorezmi zvláštní pozornost, hlavně v části o násobení, kde velmi podrobně rozebírá jeho multiplikativní vlastnosti. Al-Chorezmi nepopisuje velmi podrobně jen zápis čísel, ale i to, jak je číst. Například číslo

$$1\ 180\ 703\ 051\ 492\ 863$$

četl následovně:

Tisíc tisíců tisíců tisíců tisíců pětkrát a sto tisíc tisíců tisíců tisíců čtyřikrát a osmdesát tisíc tisíců tisíců tisíců čtyřikrát a sedmset tisíc tisíců tisíců třikrát a tři tisíce tisíců tisíců třikrát a padesát jedna tisíc tisíců dvakrát a čtyřista tisíc a devadesát dva tisíce a osmset šedesát tři.

V dalších částech práce objasňuje způsoby výpočtů odpovídající pravidlům *indické aritmetiky*. Počítalo se na desce pokryté pískem nebo prachem, proto byla indická matematika často nazývána také *výpočty pomocí desky a prachu*. Mezi výpočty na desce a na papíře nebyl samozřejmě principiální rozdíl, na desce se však mezivýpočty stíraly. Výpočty se prováděly od vyšších řádů.

[18] **Severus Seboght** (7. st.), syrský vědec, biskup v severní Mezopotamii.

Al-Chorezmi uvádí nejprve pravidla pro sčítání a odčítání, objasňuje je velmi dlouze a mnohoslovně:

Chceš-li přidat číslo k číslu nebo odejmout číslo od čísla, postav obě čísla do dvou řad, tj. jedno pod druhé, a nechť je skupina jednotek pod skupinou jednotek a skupina desítek pod skupinou desítek. Budeš-li chtít sečíst obě čísla, tj. přidat jedno k druhému, potom přidáš každou skupinu ke skupině stejného druhu, který je nad ním, tj. jednotky k jednotkám, desítky k desítkám. Pokud v nějaké ze skupin, tj. ve skupině jednotek, desítek, nebo nějaké jiné vznikne deset, polož místo nich jednotku a postav ji do vyšší skupiny, tj. máš-li v první skupině, kterou je skupina jednotek, deset, udělej z nich jednotku a zdvihni ji do skupiny desítek, a ona tam bude označovat deset. Jestli z čísla zůstalo něco co je menší než deset, nebo ono samo je menší než deset, nech ho ve stejné skupině. A jestli nic nezůstalo, polož kroužek, aby skupina nebyla prázdná, ale aby v ní byl kroužek, který ji zaplní, aby se nestalo, že jestli bude prázdná, skupiny se zmenší a druhá bude vzata za první a ty se zmýlíš ve svém čísle. To stejné udělej ve všech skupinách.

Po operaci sčítání a odčítání následují zvláštní operace půlení a zdvojení. U půlení doporučuje výjimečně začít od nejnižšího řádu. Dále popisuje pravidla násobení a dělení stejně podrobně jako předchozí. O dělení se říká, že je *podobné násobení, ale opačné k němu.* Je-li násobení možno převést na opakované sčítání, pak dělení je možno převést na opakované odčítání. Al-Chorezmi doporučuje naučit se nazpamět malou násobilku:

Budeš-li chtít vynásobit nějaké číslo jiným pomocí indických písmen, je nutno zapamatovat si násobení čísel mezi jednotkou a devítkou navzájem.

Při výpočtech na desce docházelo, jak již bylo zmíněno, k mazání mezivýsledků a výsledky pak byly velmi těžko kontrolovatelné. Počínaje al-Chorezmim se ve východních učebnicích objevuje pravidlo prověrky pomocí devítky, které již dříve používali Indové. Základem bylo tzv. *merilo* čísla, což je zbytek při dělení ciferného součtu čísla číslem 9 (a zároveň zbytek při dělení daného čísla číslem 9). S *merily* čísel byla provedena stejná operace, jako s původními čísly. Shodovala-li se *merila* výsledků, byl výsledek považován za správný. Například: $5482 + 654 = 6136$. *Merilo* prvního sčítance je 1 (neboť $5 + 4 + 8 + 2 = 19 = 2.9 + 1$), *merilo* druhého sčítance je rovno 6 ($6 + 5 + 4 = 15 = 1.9 + 6$), jejich součet je roven 7. *Merilo* součtu je 7 ($6 + 1 + 3 + 6 = 16 = 1.9 + 7$). Protože se obě získaná čísla rovnají, byl výpočet proveden správně. Jak je vidět, použití této prověrky je velmi jednoduché. Jediným problémem je to, že byla používána jako nutná a dostačující podmínka. Je však velmi snadné nahlédnout, že se sice jedná o podmínku nutnou, ale jistě ne dostačující.

Další oddíl traktátu je věnován aritmetice zlomků. Al-Chorezmi studuje nejprve šedesátinné zlomky a operace s nimi. Zpočátku objasňuje operaci násobení. Každý z násobených zlomků převádí na jednotky nejnižšího šedesátinného řádu, pak násobí čitatele jako obyčejná čísla zapsaná v desítkovém systému. Získaný výsledek pak opět převádí na šedesátinný zlomek. Analogicky provádí operace sčítání, odčítání, zdvojení a půlení. V závěru této části al-Chorezmi přechází k práci s obyčejnými zlomky, zde však rukopis latinského překladu končí.

Al-Chorezmiho traktát o indické aritmetice podstatnou měrou přispěl k rozšíření desítkové poziční soustavy na Blízkém a Středním Východu. Poznamenejme, že nové způsoby zápisů čísel a nové metody výpočtů nenahradily naráz tradiční početní postupy, které se ještě dlouho používaly v praxi všedního života. Na Východě i v Evropě tento traktát stál na počátku nového období vývoje matematiky.

V průběhu 12. století vznikly dvě další práce o indické aritmetice, které vycházejí z al-Chorezmiho. (Na jejich základě můžeme usoudit, že přepis al-Chorezmiho traktátu nebyl ukončen a odhadnout obsah nepřepsané části; pravděpodobně obsahovala pravidlo výpočtu druhé odmocniny celého čísla.) Autorem jedné z nich je magistr **Joannes ze Sevilly**[19] a druhé neznámý **magistr A.** (možná se jedná o Adelharda of Bath).

Nikde v celém traktátu o indické aritmetice nejsou uvedeny všechny indické cifry. V rukopise se vyskytují pouze označení pro $1, 2, 3, 5$. Při výkladu jsou používány většinou římské číslice. Je překvapující, jak se tehdejší učenci v pracích orientovali. V rukopise jsou vynechaná místa, kam zřejmě měly být později vepsány arabské číslice. K tomu však již nedošlo.

Možná, že jedním z důvodů, proč se nezachoval arabský originál, je to, že krátce po al-Chorezmim byly napsány další spisy na stejné téma, které asi lépe odpovídaly potřebám. Autorem jednoho ze spisů o indické aritmetice je al-Chorezmiho žák **Abú Júsuf Jaqúb ibn Isháq al-Kíndi.**[20]

Al-Chorezmiho aritmetice je velmi podobná příručka *Vše potřebné z indické matematiky*, kterou napsal **Abu 'l-Hasan Ali ibn Ahmad an Nasavi.**[21]

Celý proces prosazování desetinné poziční soustavy v islámských zemích byl zdlouhavý. Široké vrstvy obyvatelstva stále používaly čistě slovního vyjadřování čísel a ostatní číselné soustavy. Svědčí o tom např. *Kniha o tom, co potřebují písaři a kupci z aritmetiky*, kterou v letech 961–976 napsal **Abu 'l-Waffa.**[22] Její první dvě části jsou věnovány počítání s celými čísly a zlomky, další část měření rovinných útvarů, těles a vzdáleností. Následující část obsahuje úlohy z praktické aritmetiky (obchodní smlouvy, zdanění, soustavy měr a jejich převody, směna různých druhů obilí, výměna a převody peněz, výdej stravních dávek a žoldu pro vojsko, výpočty při stavbě hrází a budov atd.). V tomto spise zaměřeném speciálně na potřeby praxe není vykládána desetinná poziční soustava, čísla jsou vyjadřována slovy. Tento výklad aritmetiky odpovídal zvyklostem širokých obchodních kruhů a dlouho úspěšně konkuroval novému vyjadřování

---

[19] **Joannes ze Sevilly** (†1153) významný španělský překladatel a matematik.

[20] **Abú Júsuf Jaqúb ibn Isháq al-Kíndi** († r. 873/4), filozof, matematik, astronom, optik, chemik. Pocházel z Basry, působil v Domě moudrosti za **al-Mamúna a al-Mutasila**. V době **al-Mutawakkila** (vládl 847–861) byl pronásledován pro své filozofické názory, v nichž se pokusil spojit islám s Aristotelovou filozofií.

[21] **Abu 'l-Hasan Ali ibn Ahmad an Nasavi**, arabský matematik, původem z Nasy, města poblíž dnešního Aščhabadu. Žil u dvora bujovského sultána Madžd ad-Dauda, zemřel kolem r. 1030.

[22] **Abu 'l-Waffa Muhammad al-Buzdžani** (940–998), íránský matematik a astronom. Pocházel z města Buzdžani v Chorasanu, žil a pracoval v Bagdádu. Je autorem komentářů k Eukleidovi, Diofantovi, al-Chorezmimu. Vynikl hlavně jako astronom a geometr.

čísel, které prosazoval al-Chorezmi. V Evropě byla indická poziční soustava přijata mnohem dříve.

Závěr

Al-Chorezmi patří mezi nejvýznamnější matematiky všech dob. Dal jméno celé jedné větvi matematiky — algebře. Jeho jméno je v latinizované formě součástí všech moderních jazyků jako slovo algoritmus. Jeho traktát o indickém počtu začíná (v latinském překladu) slovy *Dixit Alghorismi* ..., obdobná fráze se objevuje i v některých překladech jeho algebraického spisu. Tak se jeho jméno stalo synonymem pro návod, účelně volený postup vedoucí k vyřešení všech úloh daného typu.

Al-Chorezmiho objevitelský přínos do matematiky přitom není podstatný. Rozhodující je jeho propagace indické poziční desítkové soustavy a systemizace postupů pro řešení lineárních a kvadratických rovnic. V předmluvě ke svému algebraickému traktátu píše, že se snažil o sestavení příručky podle potřeb praxe. Nejde tedy o vědeckou práci, ale o učebnici. A to o velmi dobrou učebnici, která sloužila svému účelu mnoho set let. V knihovně v Drážďanech je zachován přepis al-Chorezmiho algebry ze 14. století. Podle rukopisných poznámek ji používali jako učebnici **Johannes Widmann**[23] a **Adam Riess**.[24]

Práce al-Chorezmiho, které tak výrazně ovlivnily vývoj matematiky, tj. traktát o indické aritmetice a první dvě části jeho algebraického traktátu (další dvě části nebyly do latiny přeloženy), mají překvapivě malý rozsah. Jde o 40 stránek tištěného textu běžného formátu (viz [1], str. 5–44); na indickou aritmetiku připadá 15 stran, na algebru 25. Stopa, kterou tyto stránky zanechaly v historii matematiky, je nepřehlédnutelná.

V úvodu ke svému algebraickému spisu al-Chorezmi píše:

Zatímco jedné části učenců náleží priorita objevu, objasňuje druhá skupina obtížná místa v pracích svých předchůdců a tím ulehčuje jejich pochopení. Jiní učenci se pak zabývají systematizováním již existujících znalostí, přičemž opravují nepřesnosti a zdokonalují myšlenky svých spolupracovníků. A to vše „bez pýchy a hrdosti v duši“.

Al-Chorezmi tedy oceňuje jak tvůrčí vědce — objevitele, tak učitele a autory učebnic, kteří přístupnou formou předávají nové poznatky dalším. I tyto názory zasluhují pozornosti při zamyšlení nad životem a dílem Muhammada ibn Músy al-Chorezmiho.

---

[23]**Johannes Widmann** (1460 – 1. pol. 16. stol.) byl německý matematik pocházející z Chebu, pracoval na Lipské universitě. Byl zřejmě první, kdo začal v Lipsku přednášet algebru. V roce 1489 publikoval v Lipsku svoji učebnici *Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce*, kde jsou poprvé v tisku použity aritmetické symboly „+“ a „−“.

[24]**Adam Riess** (1492–1559), německý počtář, učitel, matematik. Od r. 1515 byl důlním úředníkem v Annabergu v Sasku. Současně vyučoval v městské škole a publikoval učebnice praktické matematiky v němčině. Podílel se na rozvoji algebraické symboliky.

LITERATURA

[1] al-Chorezmi Muhammad ibn Músa, *Matěmatičeskije traktaty*, Taškent, 1983.
[2] Bulgakov P. G., Rozenfeld B. A., Achmedov A. A., *Muchammad al-Chorezmi*, Nauka, Moskva, 1983.
[3] *Encyklopedie antiky*, Academia, Praha, 1974.
[4] Diofant, *Arifmetika*, Moskva, 1974.
[5] Grünebaum G. E. von, *Classical islam. A History 600–1258*, London, 1970.
[6] *Iz istorii sredněvěkovoj vostočnoj matematiky a astronomii*, Taškent, 1983.
[7] *Matěmatičeskaja enciklopedija*, Moskva, 1977–1985.
[8] *Matěmatičeskij enciklopedičeskij slovar*, Moskva, 1988.
[9] *Slovník antické kultury*, Svoboda, Praha, 1974.
[10] Bogoljubov A. N, *Matěmatiki i mechaniki*, Naukova dumka, Kyjev, 1983.
[11] Folta J., Nový O., *Dějiny přírodních věd v datech*, Mladá fronta, Praha, 1979.
[12] Fuchs E. a kol., *Světonázorové problémy matematiky IV.*, SPN, 1987, Skriptum Př. fak. UJEP Brno.
[13] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.
[14] Siraždinov S. Ch., Matvievskaja G. P., *Al-Chorezmi – vydajuščijsja matěmatik i astronom sredněvjekovja*, Prosveščenije, Moskva, 1983.