ČÍSELNÉ ŘADY U BERNOULLIŮ

PAVEL TROJOVSKÝ

I. Životopisné údaje o rodině Bernoulliů

Rodina Bernoulliů od 15. stol. žila v oblasti dnešní Belgie (zpočátku v provincii Flandry a poté v provincii Antverpy), odkud uprchla před náboženským útiskem na území dnešní SRN do Frankfurtu nad Mohanem. Tam se také v roce 1598 narodil budoucí kupec JACOB BERNOULLI (1598 – 1634), který se v roce 1622 přestěhoval do Basileje. Jeho syn, kupec MIKULÁŠ (1623 – 1708), měl 11 dětí, z nichž se stali významnými matematiky JACOB I. (1654 – 1705) a JOHANN I. (1667 – 1748). Z dalších Bernoulliů jsou pro nás nejdůležitější především DANIEL I. (1700 – 1782) a MIKULÁŠ I. (1687 – 1759). Je pozoruhodné a v matematice ojedinělé, že se členové rodiny Bernoulliů střídali ve vedení katedry matematiky na univerzitě v Basileji bez přerušení celých 100 let a profesory zde byli plných 250 let. Pro větší přehlednost si uveďme i rodokmen Bernoulliů; ti o nichž budeme dále hovořit mají před jménem znak •.

- Jacob Bernoulli (1598 – 1634)
  - Mikuláš (1623 – 1708)
    - • Jacob I. (1654 – 1705)
    - Mikuláš (1662 – 1716)
      - • Mikuláš I. (1687 – 1759)
    - • Johann I. (1667 – 1748)
      - Mikuláš II. (1695 – 1726)
      - • Daniel I. (1700 – 1782)
      - Johann II. (1710 – 1790)
        - Jacob II. (1759 – 1789)
        - Johann III. (1744 – 1807)

Jacob I. Bernoulli se měl podle přání otce stát protestantským knězem, proto vystudoval filozofii na Basilejské univerzitě. V roce 1671 však začal samostatně studovat matematiku a postupně se rozhodl, že se jí bude plně věnovat. Velký vliv na jeho matematickou tvorbu měl článek WILHELMA LEIBNIZE (1646 – 1716) *Nova methodus pro maximis et minimus* z roku 1684. Společně s Johannem I. tento článek důkladně prostudovali a začali užívat „počet nekonečně malých" na řešení různých úloh, např. „úlohy o isochroně" nebo „úlohy o brachystochroně", která byla jedním z rozhodujících podnětů pro vznik **variačního počtu**. Jacob se zabýval i diferenciálními rovnicemi a pokusil se sepsat i první učebnici pravděpodobnosti *Ars conjectandi*. Od roku 1687 až do smrti byl profesorem matematiky na Basilejské univerzitě. Roku 1692 těžce onemocněl; podle popisu nemoci šlo pravděpodobně o tuberkulózu. Přesto se nadále až do smrti plně věnoval matematice.

Johann I. Bernoulli se stal na radu bratra Jacoba I. lékařem a matematikem, přestože si otec přál, aby byl kupcem jako on. Byl velice nadaný, během let 1685 – 1687 prostudoval pod vedením Jacoba I. veškerou tehdejší důležitou matematickou literaturu. V roce 1691 odjel do Paříže, kde se seznámil s markýzem DE L'HOSPITALEM (1661 – 1704). Lehce řešil úlohy, které pokládal l'Hospital[1] za velice obtížné či dokonce neřešitelné. L'Hospital ho tedy požádal, aby se stal jeho učitelem. V roce 1696 l'Hospital vydal na základě poznatků z diskusí s Johannem učebnici *Analyse des infiniments petits*. Brzy poté vydal dvě učebnice i Johann Bernoulli (*Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque conscriptae in usum ill. Marchionis Hospitalli* a *Přednášky o výpočtech diferenciálů*). Roku 1694 získal titul doktor medicíny na základě disertace *O pohybu svalů*, která byla spíše matematická, neboť pohyby svalů jsou řešeny na základě „analýzy nekonečně malých veličin". Protože byla katedra matematiky na Basilejské univerzitě obsazena Jacobem I., odešel v roce 1695 na univerzitu do Groningenu. Po smrti Jacoba I. zaujal jeho místo na katedře matematiky v Basileji a působil zde celých 42 let. Jeho žákem byl např. LEONHARD EULER (1707 – 1783). Životopisci o Johannovi shodně uvádějí, že měl špatný charakter. Byl samolibý, nedůvěřivý a závistivý, což se projevovalo ve sporech s různými matematiky. Od roku 1694 až do smrti Jacoba I. trval spor mezi bratry, neboť Johann si stěžoval, že jeho matematické zásluhy na společných výsledcích jsou přehlíženy. V roce 1698 si Johann stěžoval v dopisech Leibnizovi, že veškeré matematické výsledky obsažené v l'Hospitalově práci *Analysa* ..., jsou ve skutečnosti jeho dílem.[2]

Vedl také velký spor o prvenství v čisté matematizaci hydrodynamiky se svým synem Danielem I. Velký význam Johanna spočívá v tom, že podal první systematický výklad diferenciálního a integrálního počtu. Nalezl také nové metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jako první formuloval i řešil úlohu o geodetických křivkách. Jeho podstatné výsledky z oblasti číselných řad jsou velmi úzce propojeny s výsledky jeho bratra Jacoba I.

Mikuláš I. Bernoulli. Syn Mikuláše, bratra Jacoba I. a Johanna I. Stal se právníkem a matematikem. Od roku 1716 byl profesorem matematiky na univerzitě v Padově; od roku 1722 pak působil v Basileji nejprve na katedře logiky a později na katedře práv. Zabýval se kromě jiného pravděpodobností (je např. autorem slavné „petrohradské úlohy" - viz [4], str. 43), diferenciálními rovnicemi a číselnými řadami. Především jeho zásluhou vyšla v roce 1713 práce Jacoba I. *Ars conjectandi*.

Daniel I. Bernoulli byl synem Johanna I. Vystudoval medicínu, ale věnoval se i matematice, přestože si to jeho otec nepřál. V letech 1725 – 1733 působil v Petrohradské akademii věd, na katedře fyziologie. Od roku 1733 až do smrti pak vedl katedru botaniky a anatomie v Basileji. V oblasti matematické se

---

[1] Považovaný již v té době ve Francii za velkého matematika.

[2] S touto stížností vystoupil však na veřejnost až po smrti l'Hospitala.

věnoval např. matematizaci hydrodynamiky, diferenciálním a diferenčním rovnicím, pravděpodobnosti, ale i problematice číselných řad.

II. Práce, zabývající se číselnými řadami

Jacob I. Bernoulli v letech 1689 až 1704 napsal pět prací o řadách, které vyšly pod názvem *Aritmetické věty o nekonečných řadách a jejich konečných součtech* (viz [1]).

V úvodu této knihy vyslovuje následující tři axiomy, které jsou základem manipulace Jacoba i Johanna I. s řadami:

1. axiom: Každou veličinu lze rozdělit na části, které jsou menší než ona sama.
2. axiom: Ke každé konečné veličině lze zvolit veličinu větší.
3. axiom: Odebereme-li od zadané veličiny to co zbude, když odebereme od zadané veličiny jistou její část, pak nám zůstane právě jen tato její část.

Slovní formulaci 3. axiomu můžeme přepsat do této symbolické formy

$$A - (A - B) = (A - A) + B = B\,.$$

V prvním díle této práce nalezl součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,2^{-n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n^3\,2^{-n}$ (viz XIV. věta). Ukažme si, jak například určil součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n}$. Označil

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$$

a užíval řad

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = 1\,,\\ C &= \phantom{\frac{1}{2} + {}} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2}\,,\\ D &= \phantom{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + {}} \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{4}\,,\\ &\ \ \cdots \end{aligned}$$

Po vertikálním sečtení členů těchto řad obdržel $A = B + C + D + \cdots$, tedy

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2\,.$$

Ukažme si dnes používaný způsob určení součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n}$: Budeme uvažovat dokonce obecnější tvar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,b_n$, kde $a_n = a_0 + n\,d$ a $b_n = b_0\,q^n$, $|q| < 1$. Ukažme nejprve, že je tato řada absolutně konvergentní. Použijeme limitní d'Alembertovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_0 + (n+1)d)b_0 q^{n+1}}{(a_0 + nd)b_0 q^n} \right| = |q| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_0 + (n+1)d}{a_0 + nd} \right| = |q| < 1$$

Určíme nyní její součet:

$$
\begin{aligned}
s &= a_0b_0 + (a_0+d)b_0q + (a_0+2d)b_0q^2 + (a_0+3d)b_0q^3 + \cdots\,,\\
sq &= \qquad\quad a_0b_0q + (a_0+\ d)b_0q^2 + (a_0+2d)b_0q^3 + \cdots\,,
\end{aligned}
$$

a po vertikálním odečtení dostáváme

$$s(1-q) = a_0b_0 + \quad db_0q + \quad db_0q^2 + \quad db_0q^3 + \cdots\,.$$

Tedy

$$s = \frac{1}{1-q}[a_0b_0 + db_0q(1+q+q^2+q^3+\cdots)] = \frac{a_0b_0}{1-q} + \frac{db_0q}{(1-q)^2}\,.$$

Pro $a_0 = 0$, $b_0 = d = 1$ a $q = 1/2$, pak získáváme také $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} = 2$.

V XV. větě pak na základě 3. axiomu Jacob počítá součet řady takto:

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \cdots\,,\\
P &= \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} + \cdots = N - \frac{a}{c}\,.
\end{aligned}
$$

Po vertikálním odečtení členů řady P od řady N získal

$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} + \cdots = \frac{a}{c}\,,$$

tedy

$$R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} + \cdots = \frac{2a}{c}\,.$$

Jacob tento výsledek často používá, např. pro součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))^{-1}$, který je získán z řady Q volbou $a = c = 1$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))^{-1} = 1$. Jacob si byl pravděpodobně vědom „ošidnosti" svých manipulací. Podobnou manipulací totiž odvodil

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots = A\,,\\
&\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \cdots = A - 2\,.
\end{aligned}
$$

Po vertikálním odečtení těchto řad tedy získává nesprávný výsledek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots = 2\,.$$

Všiml si však i toho, že v prvním případě pro užívanou řadu platí $a_n = n^{-1} \to 0$ a ve druhém $a_n = (n+1)n^{-1} \to 1 \neq 0$. Uvědomil si dokonce, že pro možnost užívání řady pro tuto manipulaci je právě podmínka $a_n \to 0$ velmi podstatná, jak uvidíme dále.

Podívejme se tedy nyní podrobněji, pro které řady jsou manipulace Bernoulliů přípustné. Uvažujme obecnou řadu tohoto tvaru:

$$\begin{aligned} a_1 &+ a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = A\,, \\ a_2 &+ a_3 + a_4 + a_5 + \cdots = A - a_1. \end{aligned}$$

Po vertikálním odečtení těchto řad získáváme:

$$(a_1 - a_2)+(a_2 - a_3)+(a_3 - a_4)+(a_4 - a_5)+\cdots = a_1\,,$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1\,.$$

Toto je však dobře známá *teleskopická řada*, o níž víme, že pro její součet platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a, \text{ kde } a = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Tedy bernoulliovské manipulace vedou ke správnému výsledku pouze při užívání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro jejíž n-tý člen platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

V XVI. větě Jacob dokazuje, že harmonická řada

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \tag{1}$$

má nekonečný součet. Jacob zde konstatuje, že jako první to dokázal jeho bratr Johann I., ale podává i různé další důkazy.

Johann I. podal nepřímý důkaz; vertikálním sečtením řad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \cdots &= 1\,,\\
\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \cdots &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,\\
\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \cdots &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\,,\\
\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \cdots &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\,,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

získal

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\,.$$

Při označení $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ pak Johann I. říká, že by muselo platit $A = A + 1$, což není pro konečné A možné, a tedy řada (1) musí mít nekonečný součet (diverguje).

Velikost zaujetí Jacoba pro manipulace s řadami je zřejmá i z toho, že se nespokojil s důkazem Johanna I., ža řada (1) je divergentní, nýbrž podává i další dva vlastní důkazy:

V prvním důkazu divergence řady (1), viz XXIV. věta, uvažuje řady

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2\,,\\
B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,,\\
C &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \cdots = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\,,\\
D &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \cdots = 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}\,,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Odtud

$$A + B + C + D + \cdots = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \cdots = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\right)\,,$$

nebo-li

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)\,.$$

Tedy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\,.$$

Zároveň platí, že

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{6}, \cdots\,,$$

tudíž

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots < \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\,.$$

Toto Jacob komentoval následovně: „tyto dva výsledky mohou být splněny zároveň, jen když obě řady mají nekonečný součet a tedy má nekonečný součet i celá harmonická řada."

Poslední část Jacobova důkazu však vyžaduje drobné upřesnění: pro každé $n \in \mathbb{N}$ skutečně platí

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}, \text{ ale } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0\,.$$

Na základě posledních dvou vztahů však jistě platí:

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots \geqq \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\,.$$

Odtud ovšem skutečně

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots .$$

Druhý Jacobův důkaz divergence řady (1) nalézáme v XVI. větě. Uvažoval součet $n^2 - n$ členů, následujících za $1/n$:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$

k čemuž dodává, že každý sčítanec tohoto součtu je větší nebo roven členu $1/n^2$, tedy

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>(n^2-n)\frac{1}{n^2} .$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1-\frac{1}{n} .$$

Přičteme-li k této nerovnosti $1/n$, pak získáme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1 .$$

Získaný vztah komentuje takto: „Můžeme tedy seskupit členy řady do skupin tak, že každá skupina má součet větší než 1. Protože však takto vytvořených skupin je nekonečně mnoho, je i součet vždy větší než libovolné číslo, a tedy je nekonečný!“

Jacob zde v podstatě dokázal divergenci tak, že prokázal neplatnost dnešní Bolzanovy–Cauchyovy podmínky konvergence číselné řady pro řadu harmonickou.

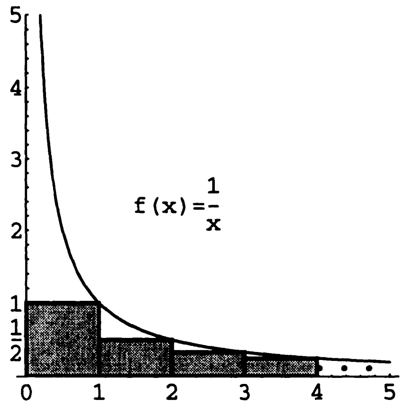
Při studiu harmonické řady si všiml i následujících dvou poznatků.

Nejen řada (1), ale i každá další harmonická řada, např. řada

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}+\frac{1}{5000}+\cdots ,$$

která má jednotlivé členy tisíckrát menší, bude mít nekonečný součet, neboť tisícina nekonečna je také nekonečno. Činí z toho závěr, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je pouze nutnou podmínkou konvergence.

Důsledkem divergence harmonické řady (1) je též nekonečnost „plochy pod hyperbolou $y = 1/x$“:



Na základě této Jacobovy úvahy lze říci, že se již v jeho díle objevují zárodky dnešního ***integrálního kritéria.***

Ve XXIV. větě odvodil vzorec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^m} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = (2^m - 1) : 1 \tag{2}$$

takto

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \cdots, \\ y &= \frac{1}{1^m} \qquad + \frac{1}{3^m} \qquad + \frac{1}{5^m} \qquad + \cdots. \end{aligned}$$

Po vertikálním odečtení získal

$$\begin{aligned} x - y &= \qquad \frac{1}{2^m} \qquad + \frac{1}{4^m} \qquad + \frac{1}{6^m} + \cdots, \\ (x-y)2^m &= \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \cdots = x. \end{aligned}$$

Tedy po úpravě

$$y : (x-y) = \left(x - \frac{x}{2^m}\right) : \frac{x}{2^m} = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) : \frac{1}{2^m} = (2^m - 1) : 1.$$

Jacobova úvaha je samozřejmě správná jen v případě, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}$ je konvergentní, tedy pro $m > 1$. Užíval však vzorec (2) i pro $0 < m < 1$ a došel tak k paradoxům. Např. ho užil pro $m = \frac{1}{2}$, tedy pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ a dochází k závěru, že součet lichých členů ku součtu členů sudých je v poměru $(\sqrt{2} - 1) : 1$. Toto však považuje sám za podivné, protože dodává, že řada

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

musí mít nekonečný součet (diverguje), neboť její členy jsou větší než členy harmonické řady (1) (pro $n > 1$ je $1/\sqrt{n} > 1/n$). Jacob zde tedy používá jako jeden z prvních tzv. *srovnávací kritérium* pro řady.

Ve třetím díle (z roku 1696) odvodil rozvoj výrazu $l/(m-n)$ v řadu na základě opakovaného dělení

$$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \cdots \,. \tag{3}$$

Dosazením $-n$ za n obdržel

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \cdots \,. \tag{4}$$

Volbou $n = m$ pak získal

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \cdots \,, \tag{5}$$

což považoval za paradox. Je zřejmé, že zde obdržený paradox vzniká proto, že vztahy (3) a (4) platí jen pro $n < m$ a Jacob do vztahu (4) dosadil $n = m$.

Dosazením $l = m = 1$ do (5) bychom dospěli k řadě

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \,,$$

ke které dospěl též GUIDO GRANDI (1671 – 1742) (viz [3], str. 445) v roce 1703. Tato řada měla velký vliv na formování pojmů konvergence a divergence řady.

Ve XXI. větě Jacob odvodil vzorec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \,.$$

Postup odvození je založen na manipulaci s řadou A:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \,, \\ B &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = A - 1 \,. \end{aligned}$$

Vertikálním odečtením $A - B$ získal

$$C = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = 1 \,.$$

Tuto řadu dále používal následovně:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = 1 \,, \\ D &= \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = C - \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1\cdot 2} \,, \\ E &= \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = D - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \,, \\ F &= \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = E - \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \,. \\ &\cdots \end{aligned}$$

Vertikálním sečtením již dostal hledaný vzorec:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots$$

V XVII. větě Jacob v podstatě dokázal, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ je konvergentní. Dokázal zde, že řada $\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)^{-1}$ je konvergentní. Její součet odvodil pomocí manipulací s harmonickou řadou A

$$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots .$$

Vytvořil řadu B z A

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots=A-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}.$$

Vertikálním odečtením $A-B$

$$C=\frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Po dělení číslem 2 získáme

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\cdots=\frac{3}{4}.$$

K důkazu konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ by tedy stačilo, aby nyní použil ***srovnávací kritérium***, neboť pro $n>1$ platí $1/n^2<1/(n^2-1)$. Pro součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ odtud získáme dokonce tento odhad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}.$$

Mikuláš I. Bernoulli. Číselnými řadami se zabývala jeho disertační práce *O nekonečných řadách a jejich použití pro výpočet velikostí ploch a délek křivek* (viz [4], str. 42). Mikuláš ostře vystupoval v dopisech Eulerovi proti jeho používání divergentních (rozbíhavých) řad při odvozování různých vztahů. Odmítá definici součtu řady, kterou Euler podal v díle *Institutiones* (viz [3], 463). Euler zde říká: „Problém je v samotném názvu součet. Obvykle rozumíme součtem řady výsledek, který vznikne sečtením všech jejích členů. Pak mají součet jen ty nekonečné řady, které se jeví sbíhavými (konvergentními) a dávají výsledek tím bližší jisté hodnotě, čím větší počet členů vezmeme. Rozbíhavé (divergentní) řady, tedy řady, jejichž členy se nezmenšují, nemohou mít obecně odpovídající součet při tomto pojetí součtu. Jestliže však připíšeme slovům ***součet řady*** jiný význam než je běžný, pak i rozbíhavá řada může mít *součet*. Můžeme součet řady definovat takto: Součtem libovolné nekonečné řady je konečný výraz, jehož rozložením získáme tuto nekonečnou řadu."

Mikuláš namítal, že Eulerova definice ***součtu řady*** je nepřípustná, neboť se může stát, že jedna řada vznikne rozvojem dvou různých konečných výrazů. Žádný konkrétní příklad však nepodal, ale např. v dopise Eulerovi z roku 1743 psal, že při dosazení $x = 2$ do řady

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots ,$$

získáme $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$.

Dosadíme-li podobně $x = 1$ do řady

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots ,$$

obdržíme $-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots$. Skutečnost, že dvě odlišné řady mají součet -1 považoval za neřešitelný problém.

Až o více než 40 let později FRANÇOIS CALLET (1744 – 1799) (viz [3], str. 463) vytvořil protipříklad k Eulerově definici součtu ve tvaru

$$\frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \cdots ,$$

tedy pro $x = 1$ získáme

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ,$$

kde m, n jsou zcela libovolná přirozená čísla ($m < n$).

Daniel I. Bernoulli. V mládí byl Daniel, spolu s Mikulášem I., PIEREM DE VARIGNONEM (1654 – 1722), JEANEM D' ALEMBERTEM (1717 – 1783) a dalšími, odpůrcem užívání divergentních řad ve výpočtech, ale pod vlivem Eulera svůj názor později změnil.

V roce 1772 Daniel vydal práci *O sčítání paradoxně správných řad, jejich vysvětlení a používání* (viz [4], str. 135), kde se zabýval použitím rozbíhavých (divergentních) řad. Například zde uvažuje o řadě

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots .$$

Ukazuje, že integrováním řady člen po členu a následným dosazením $x = 1$ získáme správný výsledek $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$. K čemuž dodává, že pravdivý výsledek nemůžeme přece získat z nepravdivého předpokladu. Vrací se opět k řadě $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, jejíž sudé částečné součty jsou 0 a liché jsou -1. Souhlasí s tím, že její součet je $\frac{1}{2}$, ale nesouhlasí s Leibnizovým „pravděpodobnostním" výpočtem. Zavádí nový způsob sčítání řad $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ s periodicky se střídajícími znaménky, kde při daném p a libovolném n bude platit $u_{n+p} = u_p$ a $u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1} = 0$. Definuje součet s těchto řad takto:

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n},$$

kde $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $\cdots$, $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$. Pro řadu $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ mu pak vychází právě $\frac{1}{2}$.

Je tedy zřejmé, že se tímto Daniel řadí (společně s Eulerem) mezi předchůdce teorie, zabývající se sčítáním divergentních řad, která se rozvinula v 19. století a je užitečná pro aproximace některých funkcí či sčítání Fourierových řad, ale našla dokonce využití i v astronomii. GEORG FROBENIUS (1849 – 1917) definuje odlišný způsob sčítání řad ve smyslu, jak ho zaváděl již Daniel:

$$(F) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}.$$

O zobecnění a další užití této myšlenky se pak zasloužili postupně matematici OTTO HÖLDER (1859 - 1937) a ERNESTO CÉSARE (1859 - 1906) (např. viz [6], 179), který zavedl sčítací metodu (pokud existuje limita vpravo) takto:

$$(C,k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}},$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $t_n^{(1)} = S_0 + S_1 + \cdots + S_n$ a $t_n^{(k)} = t_0^{(k-1)} + t_1^{(k-1)} + \cdots + t_n^{(k-1)}$. Skutečnost, že tento způsob součtu vznikl zobecněním předchozích, je nejlépe patrná již z toho, že pro $k = 1$ obdržíme dříve uvedenou metodu Frobenia.

Na všechny nově definované součty řad se klade podmínka, aby byly *regulární*, tedy musí přiřazovat konvergentním řadám jejich (obyčejný) součet.

Daniel jako první ve svých úvahách dochází i k číslu e. 30. 1. 1729 píše v dopise CHRISTIANU GOLDBACHOVI (1690 – 1764) o čísle, při kterém funkce $x^{1/x}$ nabývá maxima (jde tedy právě o číslo e). Zapsal toto číslo ve tvaru $\left(\frac{A+1}{A}\right)^A$ při $A = \infty$ a následně vyjádřil pomocí řady

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

LITERATURA:

[1] Bernoulli Jacob, *Über unendliche Reihen*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1909.

[1] Bernoulli Johann, *De motu musculorum, de effervescentia et fermentatione*, Venetiis, 1721.

[2] Borodin A.I., Bugaj A. S., *Vydajuščiesja matematiky*, „Radjanska škola“, Kiev, 1987.

[3] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, 1972.

[4] Nikiforovskij V. A., *Velikie matematiky Bernulli*, „Nauka“, Moskva, 1984.

[5] Úlehla J., *Dějiny matematiky II.*, „Dědictví Komenského“, Praha, 1912.

[6] Veselý J., *Sčítání divergentních řad*, Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČSMF, Světonázorová výchova v matematice, Praha, 1987.