Jiří Klaška

Birkhoffův kombinatorický problém počtu uspořádání a jeho historie

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. I. Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1998. pp. 99–112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401612

BIRKHOFFŮV KOMBINATORICKÝ PROBLÉM POČTU USPOŘÁDÁNÍ A JEHO HISTORIE

Jiří Klaška

1. Úvod a formulace problému

Cílem tohoto článku je poskytnout čtenáři základní informace a orientaci v doposud otevřeném kombinatorickém problému nalezení počtu všech konečných uspořádaných množin. Historie tohoto problému je poměrně krátká. Jedná se o jeden z kombinatorických problémů, které přineslo až 20. století. Pojem uspořádání vznikl historicky zobecněním pojmu nerovnosti $\leq$ mezi reálnými čísly. V současné době nejčastěji používaná definice uspořádání využívá základních vlastností nerovnosti $\leq$: reflexivity, antisymetrie a tranzitivity. Pojem uspořádané množiny má původ v pracích G. Boola, C. S. Peirce, E. Schrödera a R. Dedekinda. Práce zmíněných autorů pochází z druhé poloviny 19. století, zejména z jeho konce. V kombinatorické teorii uspořádání vzniká celá řada přirozených a lehce formulovatelných problémů, na nichž se naplňuje známá a pro kombinatoriku typická skutečnost, že snadná formulovatelnost problému nemusí zdaleka znamenat snadnost a jednoduchost řešení. Příkladem problému tohoto typu je například prostá otázka, kolik různých uspořádání na dané konečné množině existuje. Historie této problematiky je stará přibližně 50 let a v mnoha směrech je stále otevřená. Výzkum v teorii uspořádaných množin začíná v pravém slova smyslu až v roce 1930 publikováním prací Garretta Birkhoffa, zvláště pak v r. 1940 s prvním vydáním jeho slavné knihy *Teorie svazů* [1]. Právě zde byl zřejmě poprvé formulován (v druhém přepracovaném vydání z r. 1948) kombinatorický problém nalezení počtu všech uspořádání na konečné množině. Uveďme nyní přesnou formulaci tohoto problému a připomeňme některé základní pojmy.

Buď A konečná množina. Binární relací ρ na A rozumíme jako obvykle libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times A$. Zaměřme nyní pozornost na následující čtyři vlastnosti binárních relací. Relace ρ se nazývá:

(1) *reflexivní*, když $\forall x \in A : [x, x] \in \rho$,
(2) *symetrická*, když $\forall x, y \in A : [x, y] \in \rho \Rightarrow [y, x] \in \rho$,
(3) *antisymetrická*, když $\forall x, y \in A : [x, y] \in \rho \wedge [y, x] \in \rho \Rightarrow x = y$,
(4) *tranzitivní*, když $\forall x, y, z \in A : [x, y] \in \rho \wedge [y, z] \in \rho \Rightarrow [x, z] \in \rho$.

V centru pozornosti kombinatoriky se ocitly zejména relace mající současně vlastnosti (1) a (4) (tzv. kvaziuspořádání), (1), (2), (4) (ekvivalence) a (1), (3), (4) (uspořádání). Množina A spolu s relací uspořádání ρ se nazývá ***uspořádaná množina*** nebo též ***indexovaná uspořádaná množina***. Řekneme, že dvě uspořádané množiny (A, ρ) a (B, σ) jsou ***izomorfní***, když existuje bijektivní zobrazení $f : A \to B$, které zachovává uspořádání, tzn. $[x, y] \in \rho \Leftrightarrow [f(x), f(y)] \in \sigma$. Bijekce f se pak nazývá ***izomorfismus***. Množinu všech indexovaných uspořádaných množin, které lze na dané množině definovat, rozkládá izomorfismus na třídy ekvivalence, které se nazývají *neindexované uspořádané množiny* nebo též *neizomorfní uspořádané množiny.*

Centrální problém, který se z různých směrů studuje, lze formulovat následovně. Kolik existuje uspořádání na dané konečné n-prvkové množině, tzn. kolik existuje n-prvkových indexovaných uspořádaných množin (p_n=?) a kolik existuje neizomorfních uspořádaných množin, tj. tříd ekvivalence (P_n=?). Částí tohoto problému je určit hodnoty p_n a P_n pro malá n a nalézt asymptotickou formuli, tj. nalézt jednoduchou funkci, která přibližně popisuje, jak rychle počet těchto kombinatorických konfigurací roste. Do dnešní doby však není známa žádná exaktní ani rekurentní formule, podle které by bylo možno uvedené počty rozumně počítat. Problém byl zkoumán z různých směrů a v průběhu let bylo při jeho řešení dosaženo celé řady významných a mnohdy i překvapivých výsledků. Poměrně brzy se ukázalo, že pozadí celého problému je daleko širší, než by se na první pohled dalo očekávat. Problém totiž zasahuje do celé řady dalších matematických oborů. V následujícím odstavci objasníme základní objevená fakta a souvislosti na názorných příkladech. Zdůrazněme, že veškeré naše úvahy se budou týkat výhradně konečných uspořádaných množin.

2. Reprezentace konečných uspořádání

Cílem následujícího odstavce je ukázat známé souvislosti uspořádaných množin s algebrou matic, teorií grafů a konečnými topologiemi. V obecné rovině má vždy objevení souvislostí nějakého matematického problému s jiným oborem matematiky zásadní význam. Objevení souvislostí totiž umožňuje přeformulovat problém a použít při jeho řešení matematický aparát jiného typu. Tato heuristika často vede k vyřešení původního problému, neboť umožňuje v rámci jiného oboru nový úhel pohledu. Poznamenejme však, že v našem případě tato situace nenastala a žádná z dále uvedených formulací nepřispěla významnějším způsobem k vyřešení problému.

Nejprve uveďme souvislost mezi uspořádanými množinami a maticovou algebrou. Binární relaci ρ na n-prvkové množině $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ lze reprezentovat pomocí matice $M = (m_{i,j})$ typu n/n, jejíž prvky jsou nuly a jedničky (tzv. Booleovská matice). Vzájemně jednoznačná korespondence mezi takovými maticemi a binárními relacemi je dána vztahem

$$m_{i,j} = 1 \Leftrightarrow [x_i, x_j] \in \rho \quad \text{a} \quad m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow [x_i, x_j] \notin \rho.$$

Uvedenou korespondenci lze nalézt např. v článcích [16], [25] a [34] z let 1966 a 1967. Pro pohodlnější sledování textu uveďme názorný příklad.

Příklad 1. Nechť $A = \{1,2,3,4\}$ a $\rho = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,3],[1,4],[2,4]\}$. Pak maticová reprezentace M binární relace ρ je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

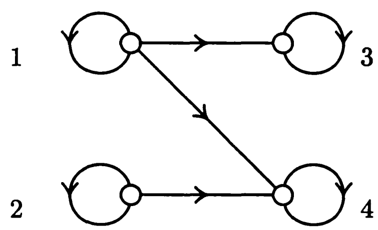
Lze snadno ověřit, že ρ je uspořádání. Podle známé věty z lineární algebry platí, že determinant matice M ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na hlavní diagonále. V našem případě je zřejmé, že $\det(M) = 1$. Je to náhoda nebo zákonitost? V roce 1971 nalezl odpověď na tuto otázku Kim Ki-Hang Butler [8]. (viz také článek [9]). Butler dokázal následující zajímavé tvrzení:

Věta 1. *Booleovská matice M typu n/n je maticovou reprezentací uspořádání na konečné n-prvkové množině, právě když $M^2 = M$ a $\det(M) = 1$, tj. M je nesingulární idempotent.*

Pro úplnost poznamenejme, že maticový součin M^2 ve větě 1 se počítá pomocí obvyklých Booleovských operací $0 + 0 = 0$, $1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $1 \cdot 1 = 1$ a $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$. Problematika nesingulárních idempotentních Booleovských matic vede k zajímavým a obtížným otázkám z teorie pologrup, zejména k teorii Greenových relací. Podrobněji viz [9].

Jiná možnost jak reprezentovat konečné uspořádané množiny souvisí s teorií grafů. Libovolnou binární relaci ρ na n-prvkové množině $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ lze reprezentovat standardním způsobem pomocí orientovaného grafu $G = (V, E)$ s množinou vrcholů V a množinou hran E. Idea reprezentace je následující. Množinu vrcholů V ztotožníme s množinou A, tj. $V = A$ a vrcholy $x_i, x_j \in V$ spojíme orientovanou hranou právě když $[x_i, x_j] \in \rho$. Speciálně pokud $x_i = x_j$ umístíme kolem vrcholu x_i smyčku.

Příklad 2. Reprezentujme binární relaci ρ z příkladu 1 pomocí orientovaného grafu. Viz obr. 1.



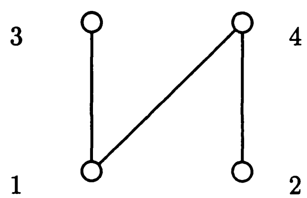
Obr. 1

Uvedeným způsobem lze přiřadit každé binární relaci na n prvcích $x_1, \dots, x_n$ orientovaný graf s n vrcholy. Naopak každému orientovanému grafu s vrcholy $x_1, \dots, x_n$ odpovídá jediná binární relace. Přesto pro reprezentaci uspořádání se používá grafů jiného typu, tzv. hasseovských diagramů. Indexovaný hasseovský diagram vznikne z výše popsaného orientovaného grafu binární relace ρ pomocí následujících úprav. Protože kolem všech vrcholů grafu G uspořádání ρ jsou umístěny smyčky (vlastnost reflexivity), lze je pro zjednodušení odstranit. Dále v orientovaném grafu vynecháme všechny orientované hrany, které vynucuje vlastnost tranzitivity. To znamená, pokud v grafu G vede hrana z vrcholu x do y, a dále hrana z vrcholu y do z, pak jsou nutně vrcholy x a z

spojeny hranou vedoucí z x do z. Proto můžeme hranu vedoucí z x do z vynechat (vlastnost tranzitivity). Konečně změníme umístění vrcholů v rovině. Pokud platí $[x, y] \in \rho$, pak vrcholy x, y umístíme tak, že hrana spojující vrcholy x a y směřuje zdola nahoru. Když nyní víme, že orientace každé hrany směřuje zdola nahoru, můžeme na každé hraně vynechat šipku, která orientaci znázorňuje (vlastnost antisymetrie). Tímto postupem získáme neorientovaný graf, tzv. *indexovaný hasseovský diagram*. Poznamenejme, že název hasseovský není zcela korektní. Již v roce 1895 používal grafy tohoto typu H. Voght a pravděpodobně byly používány ještě dříve. Jiná možnost, jak definovat hasseovský diagram souvisí s pojmem *pokrytí* pocházejícím od R. Dedekinda. Je-li dána uspořádaná množina $(A, \leq)$, pak její hasseovský diagram definujeme jako neorientovaný graf $G = (A, E)$, kde $\{x, y\} \in E$ právě když y pokrývá x, tj. $x < y$ a přitom vztah $x < z < y$ neplatí pro žádné $z \in A$. Platí následující elementární tvrzení.

Věta 2. *Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi množinou všech uspořádání na dané n-prvkové množině a množinou všech indexovaných hasseovských diagramů s n vrcholy.*

Příklad 3. Reprezentujme částečné uspořádání ρ z příkladu 2 pomocí indexovaného hasseovského diagramu. Viz obr. 2.



Obr. 2

Hasseovské diagramy jsou velmi užitečné pro reprezentaci neizomorfních uspořádaných množin. K jejich realizaci stačí totiž vynechat popis vrcholů indexovaného diagramu. Pokud například vynecháme popis vrcholů na obr. 2, získáme neindexovaný diagram, který reprezentuje třídu 24 různých uspořádání na 4-prvkové množině.

Uspořádání na množině A lze rovněž reprezentovat pomocí systému podmnožin τ množiny A. Systém podmnožin τ konečné množiny A se nazývá *topologie na* A, je-li uzavřen vzhledem k operacím průnik, sjednocení a pokud obsahuje množiny $\emptyset$ a A. Prvky systému se pak nazývají *otevřené množiny* a komplementy otevřených množin se nazývají *uzavřené množiny*. *Okolím* $O(a)$ prvku nebo též bodu $a \in A$, rozumíme každou otevřenou množinu, která bod a obsahuje. Dále topologie τ na A se nazývá T_0-*topologie*, když pro všechna $a, b \in A, a \neq b$ existuje okolí $O(a)$ tak, že $b \notin O(a)$ nebo existuje okolí $O(b)$ tak, že $a \notin O(b)$. V roce 1937 P. S. Alexandrov dokázal existenci vzájemně jednoznačné korespondence mezi topologiemi na A a kvaziuspořádáními. G. Birkhoff dokázal tuto skutečnost nezávisle přibližně ve stejné době. Uveďme nyní dobře známé Birkhoffovo tvrzení o reprezentaci uspořádaných množin pomocí topologií (viz [1], str. 117).

Věta 3. *Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi množinou všech uspořádání $\leq$ na n-prvkové množině a množinou všech T_0-topologií na n-prvkové množině. Tato korespondence je dána vztahem*

$$a \leq b \Leftrightarrow cl\{a\} \subseteq cl\{b\},$$

kde $cl\{a\}$ je uzávěr prvku a, tj. nejmenší uzavřená množina, která a obsahuje.

Lze snadno dokázat, že $\mathrm{cl}\{a\} = \{x \in A; x \leq a\}$ a že každá uzavřená množina má tvar konečného sjednocení $\mathrm{cl}\{x_1\} \cup \cdots \cup \mathrm{cl}\{x_k\}$, kde $x_1, \ldots, x_k \in A$.

Příklad 4. Reprezentujme binární relaci ρ z příkladu 1 pomocí T_0-topologie. Předně platí $\mathrm{cl}\{1\} = \{1\}$, $\mathrm{cl}\{2\} = \{2\}$, $\mathrm{cl}\{3\} = \{1,3\}$ a $\mathrm{cl}\{4\} = \{1,2,4\}$. Dále zkonstruujme systém C všech uzavřených množin topologie τ. Zřejmě $C = \{\bigcup_{i\in I} \mathrm{cl}\{i\}; I \in \exp A\}$, přičemž pro $I = \emptyset$ se příslušné sjednocení klade rovno $\emptyset$. V našem případě dostáváme

$$C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

Otevřené množiny topologie τ nyní získáme jako množinové komplementy uzavřených množin, tedy $\tau = \{A - X; X \in C\}$. Odtud plyne, že topologie τ určená uspořádáním ρ je tvaru

$$\tau = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

Po shrnutí základních informací o vztahu konečných uspořádaných množin k jiným oborům matematiky se budeme dále věnovat historii známých enumeračních formulí a dalším teoretickým výsledkům.

3. ZÁKLADNÍ ENUMERAČNÍ VÝSLEDKY A FORMULE.

V úvodní kapitole bylo uvedeno, že není známa žádná „rozumná" exaktní ani rekurentní formule pro výpočet hodnot p_n resp. P_n. To však zdaleka neznamená, že nejsou známy žádné formule. Například explicitní formule pro výpočet hodnot p_n známa je (viz např. práci [15] M. Erného). Erné uvádí exaktní formuli

$$(1)\quad p_n = \sum_{m=0}^{2^{n^2}-1} \prod_{i=0}^{n-1} x^m_{ni+i} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - x^m_{ni+j} x^m_{nj+i}) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x^m_{ni+j} x^m_{nj+k} (1 - x^m_{ni+k})),$$

kde

$$(2)\qquad x_i^m = \lfloor 2^{-i} m \rfloor - 2 \lfloor 2^{-i-1} m \rfloor$$

je i-tá cifra v binárním rozvoji čísla m ($0 \leqq i \leqq n^2$). Každá binární relace na množině $\{0,\dots,n-1\}$ je reprezentována jedním sčítancem, přičemž m probíhá od 0 do $2^{n^2}-1$. Hodnota x^m_{ni+j} je 1, pokud i a j jsou v relaci, 0 v opačném případě. Součin přes index i kóduje reflexivitu, součin přes j antisymetrii a součin přes k tranzitivitu. Tedy celý součin je roven 1, je-li relace uspořádání a 0 v opačném případě. Uvedená formule tedy opravdu určuje počet všech uspořádání p_n na konečné n-prvkové množině. Je však evidentní, že pro praktický výpočet není formule vhodná. Počet aritmetických operací nutných k provedení výpočtu p_n totiž s rostoucím n exponenciálně vzrůstá. Počítat pomocí uvedené formule prakticky znamená vzít postupně všechny binární relace na dané množině a prověřovat příslušné vlastnosti uspořádání. Takovýto výpočet hodnot p_n je i pro nejrychlejší počítače i pro malá n naprosto nemožný. Již pro $n = 20$ by bylo nutno testovat 2^{400} binárních relací. Jak obrovské je to číslo si lze zhruba představit, uvědomíme-li si, že například od vzniku Země, což je asi cca 5 miliard let, neuplynulo ani 2^{70} sekund a počet atomů vodíku, z nichž vznikla celá naše galaxie, je odhadován číslem 2^{240}. Výpočet hodnot p_n podle formule (1) naráží tedy na nepřekonatelné časové bariéry.

Uveďme nyní hlavní známá fakta o formulích pro výpočet p_n. V roce 1966 L. Comtet [11] jako první uvedl důležitou a často citovanou formuli

$$p_n = \sum_{(x_1,\dots,x_m)} \frac{n!}{x_1!\dots x_m!} V(x_1,\dots,x_m), \tag{3}$$

v níž se sčítá přes všechny kompozice čísla n a $V(x_1,\dots,x_m)$ je počet určitých uspořádání speciálního typu závisejících na kompozici $x_1+\dots+x_m=n$.

Pro úplnost připomeňme, že *rozkladem* přirozeného čísla $n \in N$ na sčítance rozumíme posloupnost $(x_1,\dots,x_k) \in N^k$, kde $1 \leqq k \leqq n$, takovou, že $x_1 + \dots + x_k = n$ a $x_1 \geqq \dots \geqq x_k$. *Kompozicí* čísla n pak nazýváme posloupnost $(x_1,\dots,x_k) \in N^k$, $1 \leqq k \leqq n$ s vlastností $x_1+\dots+x_k=n$. Má-li posloupnost $(x_1,\dots,x_k)$ právě k členů, mluvíme o *k-rozkladech*, příp. o *k-kompozicích*.

Formule (3) byla v r. 1979 znovuobjevena Z. I. Borevičem. Nevyřešeným problémem však zůstává určení hodnot $V(x_1,\dots,x_m)$. V článcích [3] a [4], které navazují na práci [2], odvodil Borevič speciální případy $V(x_1,\dots,x_m)$ a pomocí nich určil některé hodnoty p_n. Dokázal také, že všechny hodnoty $V(x_1,\dots,x_m)$ jsou lichá čísla. V původních Borevičových pracích má formule (3) topologickou interpretaci. Podobně je tomu u následující formule (4). Nechť q_n značí počet všech kvaziuspořádání na n-prvkové množině. V roce 1967 Evans, Harary a Lynn odvodili formuli svazující počet všech kvaziuspořádání na n-prvkové množině s počtem všech uspořádání. V [16] dokázali tito autoři následující formuli

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)p_k. \tag{4}$$

Jejich výsledek vyvolal v souvislosti s topologiemi také zvýšený zájem o počet uspořádání na konečné množině. Koeficienty $S(n,k)$, které se ve formuli (4) vyskytují, jsou tzv. *Stirlingova čísla 2. druhu.* Pro počáteční členy této posloupnosti platí $S(n,0) = 0$, $S(n,1) = 1$ a $S(0,0) = 1$. Uveďme nyní několik více či méně známých vztahů, podle nichž lze tato čísla počítat:

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1), \tag{5}$$

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1), \tag{6}$$

$$S(n,k) = (k!)^{-1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n, \tag{7}$$

$$S(n,k) = \sum_{x_1+\cdots+x_k=n} 1^{x_1-1} 2^{x_2-1} \cdots k^{x_k-1}. \tag{8}$$

Součet v poslední uvedené formuli (8) probíhá přes všechny k-kompozice čísla n. Neúspěšné pokusy odvodit formuli vhodnou pro výpočet hodnot p_n přispěly ke zvýšenému zájmu o problém asymptotického chování této posloupnosti. Významný výsledek byl v tomto směru prezentován v roce 1970 D. J. Kleitmanem a B. L. Rothschildem. V [23] tito autoři odvodili formuli

$$\log_2 p_n = \frac{1}{4} n^2 + o(n^2). \tag{9}$$

Dále v práci [24] z roku 1975 dokázali, že platí

$$p_n = (1 + O(\frac{1}{n})) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} (2^i - 1)^j (2^j - 1)^{n-i-j}. \tag{10}$$

Asymptotická formule (10) byla v roce 1981 zjednodušena K. H. Kimem a F. W. Roushem [19]. V souvislosti s asymptotickým chováním p_n je nutno rovněž zmínit výsledek M. Erného z roku 1974, kdy v práci [14] ukázal, že počet kvaziuspořádání je asymptoticky roven počtu uspořádání, tzn.

$$\frac{q_n}{p_n} \to 1 \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

V roce 1987 H. J. Prömel [29] dokázal obecné tvrzení, že počet neindexovaných struktur je asymptoticky roven $1/n!$ násobku své indexované kvantity. Z tohoto výsledku speciálně pro uspořádané množiny plyne:

$$\frac{p_n}{n! P_n} \to 1 \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Problém dokázat tento očekávaný vztah formulovali již v roce 1981 K. H. Kim a F. W. Roush (viz článek [19], problém 3). Problémem vztahu mezi uspořádáními a tranzitivními relacemi se zabýval autor článku v práci [22]. Symbolem t_n označme počet tranzitivních relací na n-prvkové množině. V [22] je dokázáno, že platí

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(n) p_k, \quad \text{kde} \quad \alpha_k(n) = \sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s} S(n-s, k-s). \tag{13}$$

Význam formulí (4) a (13) je analogický. Pomocí (13) určil autor hodnoty t_n pro $n \leqq 14$. Hodnota t_{14} tvoří v současnosti největší známý člen posloupnosti t_n a převyšuje číslo 10^{28}. Z formule (13) lze dále pomocí elementárních úprav odvodit vztah

$$p_n = \frac{1}{2^n}(t_n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(n) p_k). \tag{14}$$

Formule (14) dává návod, jak určovat členy posloupnosti p_n, známe-li členy posloupnosti tranzitivních relací t_n. Na základě formule (13) autor v [22] rovněž dokázal asymptotický vztah

$$\frac{t_n}{2^n p_n} \to 1 \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Ze vztahu (15) zejména plyne, že počet tranzitivních relací roste asymptoticky rychleji, než počet uspořádání. Čtenář nechť pro zajímavost srovná vztahy (11) a (15).

Velmi důležité a svým způsobem ojedinělé výsledky odvodil Z. I. Borevič v období let 1979-1982. V článcích [5], [6] a [7] Borevič postupně dokázal následující tvrzení: Buď $m = \mathfrak{p}$ libovolné prvočíslo. Pak je posloupnost $\{p_n \mod m\}_{n=1}^{\infty}$ periodická a délka periody je rovna $\mathfrak{p} - 1$. Je-li $m = \mathfrak{p}^a$, kde a je libovolné přirozené číslo, pak $\{p_n \mod m\}_{n=1}^{\infty}$ je periodická pro $n \geqq \mathfrak{p}^{a-1}$ a délka periody je rovna $\varphi(\mathfrak{p}^a) = \mathfrak{p}^a - \mathfrak{p}^{a-1}$. Dále pokud $m = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k$, kde $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ jsou různá prvočísla, pak posloupnost $\{p_n \mod m\}_{n=1}^{\infty}$ je periodická a délka její periody je rovna nejmenšímu společnému násobku čísel $\mathfrak{p}_1 - 1, \dots, \mathfrak{p}_k - 1$. Konečně v obecném případě platí: Buď m libovolné přirozené číslo. Pak existuje index n_0, od něhož počínaje je posloupnost $\{p_n \mod m\}_{n=1}^{\infty}$ periodická. V [22] autor upozorňuje na viditelný fakt periodičnosti posloupnosti posledních cifer p_n. Tato skutečnost plyne z obecných Borevičových výsledků, v žádné jeho práci však nebyla explicitně zdůrazněna. Délka periody této posloupnosti je 4 a její členy jsou 1,3,9,9. Tuto pěknou a zajímavou zákonitost lze vidět v tabulce 1.

Po přehledu informací o základních enumeračních formulích přejdeme ke shrnutí poznatků o numerických hodnotách členů posloupností p_n a P_n.

4. NUMERICKÉ HODNOTY

Jak již bylo řečeno, původní podnět pro počítání hodnot p_n pro malá n pochází od G. Birkhoffa z roku 1948. Nalezení hodnot p_2, p_3 a p_4 není obtížné. Spočítat tyto hodnoty se dnes často předkládá čtenáři za cvičení. V roce 1966 L. Comtet nalezl v článku [11] hodnoty p_5 a p_6. Dále v roce 1967 J. W. Evans, F. Harary a M. S. Lynn nalezli v [16] hodnoty p_n pro $n \leqq 7$. Spočítat a ověřit tyto hodnoty předkladá Birkhoff ve třetím vydání své knihy [1]. Výpočet hodnot p_n prováděných na počítačích byl založen většinou na maticové reprezentaci binárních relací. V roce 1974 M. Erné publikoval důležitý článek [14], kde spočítal hodnoty p_n do $n \leqq 9$. Další významný pokrok nastal v roce 1977 publikováním článku [13] S. K. Dase, kde jsou vyčísleny hodnoty p_n až do $n \leqq 11$. Ve své době tvořila tato práce úplný seznam známých hodnot p_n. V našem historickém přehledu je nutno zdůraznit práce sovětských matematiků v období let 1978-1982. V článcích [3] a [4] z let 1978 a 1979 Z. I. Borevich, V. I. Rodionov a jejich spolupracovníci spočetli hodnoty p_9 a p_{10}. V té době však byly tyto hodnoty již známy. Dále v [31] a [32] pokračoval Rodionov v práci samostatně. V roce 1982 spočítal hodnoty p_{11} a p_{12}. Až v roce 1991, po dlouhé odmlce, určili M. Erné a K. Stege v [15] hodnoty p_n až do $n \leqq 14$. V současné době tvoří p_{14} největší známý člen posloupnosti p_n. Přehled všech známých hodnot členů posloupnosti p_n je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1. Numerické hodnoty p_n pro $n \leq 14$.

p_1	:=	1	(folklór)	
p_2	:=	3	(folklór)	
p_3	:=	19	(folklór)	
p_4	:=	219	(folklór)	
p_5	:=	4 231	(1966)	L. Comtet
p_6	:=	130 023	(1966)	L. Comtet
p_7	:=	6 129 859	(1967)	Evans, Harary, Lynn
p_8	:=	431 723 379	(1967)	Evans, Harary, Lynn
p_9	:=	44 511 042 511	(1974)	M. Erné
p_{10}	:=	6 611 065 248 783	(1977)	S. K. Das
p_{11}	:=	1 396 281 677 105 899	(1977)	S. K. Das
p_{12}	:=	414 864 951 055 853 499	(1982)	V. I. Rodionov
p_{13}	:=	171 850 728 381 587 059 351	(1991)	M. Erné, K. Stege
p_{14}	:=	98 484 324 257 128 207 032 183	(1991)	M. Erné, K. Stege

Počet prací, které se zabývají problematikou výpočtu hodnot P_n, je mnohem menší než počet prací zabývajících se výpočtem hodnot p_n. Tento fakt je mimo jiné způsoben i větší obtížností této problematiky. Podle G. Birkhoffa [1] byly hodnoty P_n pro $n \leqq 6$ nalezeny I. Rosem a R. T. Sasakim. V roce 1981 se N.

P. Chaudhuri a A. A. J. Mohammed [10] zabývali nalezením metody, která by ověřila správnost těchto výsledků. V jejich článku se však objevuje verifikace pouze pro $n = 4$. Hodnoty P_n pro $n \leqq 6$ lze také najít v práci [33] R. A. Rozenfelda z roku 1985. Pro $n \leq 7$ byly učiněny pokusy nakreslit všechny hasseovské diagramy příslušných neizomorfních uspořádaných množin a vytvořit jejich katalogy. Jak nesnadný je to úkol lze částečně pochopit například z práce [33]. Hodnotu P_7 objevil v roce 1972 v rámci své disertace J. A. Wright [35]. V roce 1977 S. K. Das nalezl v [13] hodnotu P_8. O sedm let později v roce 1984 R. H. Möhring nalezl hodnotu P_9. K dalšímu pokroku dochází až v roce 1990, kdy J. C. Culberson a G. J. E. Rawlins určili počty neizomorfních uspořádaných množin pro $n \leqq 11$. V roce 1990 se počty P_n zabýval rovněž A. M. Kutin v práci [26]. Konečně C. Chaunier a N. Lygerös nalezli v roce 1991 hodnotu P_{12} a poslední známý výsledek pochází z roku 1992, kdy tito autoři určili v [12] hodnotu P_{13}. Člen P_{13} je tedy v současnosti posledním známým členem posloupnosti P_n. Uveďme nyní přehlednou tabulku známých hodnot P_n.

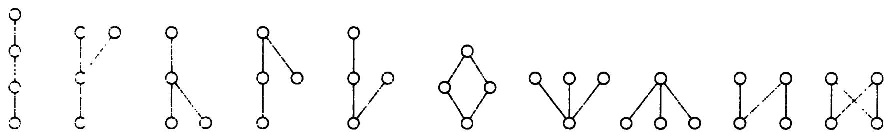
Tabulka 2. Numerické hodnoty P_n pro $n \leqq 13$.

P_1	=	1	(folklór)	
P_2	=	2	(folklór)	
P_3	=	5	(folklór)	
P_4	=	16	(folklór)	
P_5	=	63	(folklór)	
P_6	=	318	(1967)	I. Rose, R. T. Sasaki
P_7	=	2 045	(1972)	J. Wright
P_8	=	16 999	(1977)	S. K. Das
P_9	=	183 231	(1984)	R. H. Möhring
P_{10}	=	2 567 284	(1990)	J. C. Culberson, G. J. E. Rawlins
P_{11}	=	46 749 427	(1990)	J. C. Culberson, G. J. E. Rawlins
P_{12}	=	1 104 891 746	(1991)	C. Chaunier, N. Lygerös
P_{13}	=	33 823 327 452	(1992)	C. Chaunier, N. Lygerös

Na závěr našeho historického informačního přehledu se zmiňme ještě o problematice souvislých uspořádaných množin.

5. Souvislé uspořádané množiny

Buď (A, ρ) uspořádaná množina, $x, y \in A$. Řekneme, že prvky x a y jsou srovnatelné a píšeme $x \frown y$, když $[x, y] \in \rho$ nebo $[y, x] \in \rho$. Pro $x, y \in A$ klademe $x \sim y$ právě, když existuje přirozené číslo k a k prvků $x_1, \dots, x_k \in A$ tak, že $x \frown x_1, \dots, x_k \frown y$. Uspořádaná množina (A, ρ) se nazývá souvislá, když pro libovolné dva prvky $x, y \in A$ platí $x \sim y$. Symbolem c_n označme počet všech souvislých indexovaných uspořádaných množin na n-prvkové množině A. Zřejmě izomorfismus rozkládá množinu všech n-prvkových souvislých uspořádaných množin do bloků, které nazýváme neindexované souvislé uspořádané množiny nebo též neizomorfní souvislé uspořádané množiny. Jejich počet označme C_n. Pro lepší představu a snadnější orientaci v následujícím textu uveďme přehled všech 4-prvkových souvislých neizomorfních uspořádaných množin. Není obtížné ověřit, že $C_4 = 10$. Na následujícím obrázku 3 jsou nakresleny jejich příslušné hasseovské diagramy.



Obr. 3

První zmínka o počtech souvislých uspořádaných množin pochází pravděpodobně od R. A. Rankina [30]. V [30] jsou uvedeny hodnoty c_n pro $n \leqq 4$. Teprve o 11 let později v roce 1974 M. Erné [14] nalezl hodnoty c_n pro $n \leqq 9$. V roce 1991 spolu s K. Stegem [15] určili tyto hodnoty pro $n \leqq 14$. O hodnotách C_n však neexistují téměř žádné reference. Poznamenejme, že G. Birkhoff se v [1] o počtech c_n a C_n nezmiňuje. V roce 1985 R. A. Rozenfeld uvádí v [33] hodnoty C_n pro $n \leqq 6$. Autorovy práce [20] a [21] prokázaly, že problematika určování členů posloupnosti P_n v závislosti na členech posloupnosti C_n souvisí s teorií rozkladů přirozených čísel na sčítance. Podrobnější informace o teorii rozkladů lze získat např. v monografii [28]. Nechť $p(n)$ značí počet všech rozkladů čísla n. V [20] autor uvádí elementární kombinatorický důkaz zapomenuté formule

$$p(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(n-k)p(k). \tag{16}$$

Koeficienty $\sigma(n)$, které ve formuli (16) vystupují, jsou součty všech přirozených dělitelů čísla n. Vztahy pro výpočet koeficientů $\sigma(n)$ lze nalézt v článcích [17] a [18]. Dále je v [21] na základě důkazových metod použitých při odvození (16) dokázána formule

$$P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha(n-k)P_k \quad \text{kde} \quad \alpha(m) = \sum_{k|m} kC_k. \tag{17}$$

Strukturální podobnost formulí (16) a (17) je na první pohled zřejmá. Na základě známých výsledků o P_n a formule (17) autor rovněž nalezl hodnoty C_n pro $n \leq 13$. Viz tabulka 3.

Tabulka 3. Numerické hodnoty c_n a C_n.

$c_1 =$	1	$C_1 =$	1
$c_2 =$	2	$C_2 =$	1
$c_3 =$	12	$C_3 =$	3
$c_4 =$	146	$C_4 =$	10
$c_5 =$	3 060	$C_5 =$	44
$c_6 =$	101 642	$C_6 =$	238
$c_7 =$	5 106 612	$C_7 =$	1 650
$c_8 =$	377 403 266	$C_8 =$	14 512
$c_9 =$	40 299 722 580	$C_9 =$	163 341
$c_{10} =$	6 138 497 261 882	$C_{10} =$	2 360 719
$c_{11} =$	1 320 327 172 853 172	$C_{11} =$	43 944 974
$c_{12} =$	397 571 105 288 091 506	$C_{12} =$	1 055 019 099
$c_{13} =$	166 330 355 795 371 103 700	$C_{13} =$	32 664 484 238
$c_{14} =$	96 036 130 723 851 671 469 482		

V práci [21] lze nalézt také následující formuli

$$P_n = -\sum_{k=0}^{n-1} Q_{n-k}P_k \quad \text{kde} \quad Q_n = \sum_S (-1)^{k_1+\cdots+k_n} \binom{C_1}{k_1} \cdots \binom{C_n}{k_n}. \tag{18}$$

V posledně uvedeném vztahu se sčítá přes množinu S všech řešení $[k_1, \dots, k_n] \in \{0, 1, \dots, n\}^n$ lineární diofantické rovnice $1k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. Základní důkazové prostředky potřebné k důkazu (18) leží v teorii formálních mocninných řad. Viz např. [27]. Lze říci, že problematika souvislých uspořádaných množin není prozatím systematicky zpracována, a lze proto očekávat, že této oblasti bude v budoucnu věnována větší pozornost.

Závěrem článku poznamenejme, že existuje celá řada dalších speciálních problémů kombinatorické teorie uspořádání. Příkladem těchto problémů jsou např. úlohy týkající se počtu uspořádání některých speciálních typů, jako např. svazů, polouspořádání, slabých uspořádání a intervalových uspořádání. Některé z těchto problémů jsou již v současnosti definitivně vyřešeny, jiné zůstanou pravděpodobně, vzhledem ke své složitosti, dlouho nevyřešeny. Protože teorie uspořádání zasahuje ve své obecnosti do řady aplikovaných disciplín, jako např. do sociologie, archeologie, ekonomie, teorie preferencí, computer science a optimalizace, lze očekávat, že zájem o teorii uspořádání nadále poroste.

LITERATURA

1. G. Birkhoff, *Lattice Theory*, vol. 25, Amer. Math. Soc., 1940; 3rd ed.,1967.
2. Z. I. Borevich, *On the question of the enumeration of finite topologies*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Math. Inst. Steklov. **71** (1977), 47–65.
3. Z. I. Borevich, V. Venslav, E. Dobrowolski and V. I. Rodionov, *The number of labeled topologies on nine points*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Math. Inst. Steklov. **75** (1978), 35–42.
4. Z. I. Borevich, V. V. Bumagin and V. I. Rodionov, *The number of labeled topologies on ten points*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Math. Inst. Steklov. **86** (1979), 5–10.
5. Z. I. Borevich, *On the periodicity of the residues of the number of finite labeled topologies*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Math. Inst. Steklov. **103** (1980), 5–12.
6. Z. I. Borevich, *Periodicity of residues of the number of finite labeled T_0-topologies*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Math. Inst. Steklov. **114** (1982), 32–36.
7. Z. I. Borevich, *A comparison for the number of finite labeled T_0-topologies*, Mat. Issled. (1982), 9–16.
8. K. K. H. Butler, *The number of partially ordered sets*, J. Combin. Theory **13** (1972), 276–289.
9. K. K. H. Butler, *New representations of posets*, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai **10** (1973), 241–250.
10. N. P. Chaudhuri and A. A. J. Mohammed, *Representation of a poset of n elements by a matrix of the family $M_p^{(n)}$ and the computation of the number of nonisomorphic posets of n elements*, Libyan J. Sci. **11** (1981), 25–36.
11. L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **262** (1966), A1091–A1094.
12. C. Chaunier and N. Lygerős, *The number of orders with thirteen elements*, Order **9** (1992), no. 3, 203–204.
13. S. K. Das, *A machine representation of finite T_0 topologies*, Journal of the Association for Computing Machinery **24** (1977), 676–692.
14. M. Erné, *Struktur-und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen*, Manuscripta Math. **11** (1974), 221–259.
15. M. Erné and K. Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order **8** (1991), no. 3, 247–265.
16. J. W. Evans, F. Harary and M. S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM **10** (1967), 295–298.
17. J. A. Ewell, *Recurrences for the sum of divisors*, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), no. 2, 214–218.
18. J. A. Ewell, *Recursive determination of the sum-of-divisors function*, Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979), 169–172.
19. K. H. Kim and F. W. Roush, *Posets and finite topologies*, Pure Appl. Math. Sci. **14** (1981), no. 1-2, 9–22.
20. J. Klaška, *Partitions, compositions and divisibility*, Annales UMCS **49** (1995), 117–125.
21. J. Klaška, *Partitions and partially ordered sets*, Acta Math. Inf. Univ. Ostrav. **3** (1995), 45–54.
22. J. Klaška, *Transitivity and partial order*, Math. Bohemica **122** (1997), 75–82.
23. D. Kleitman and B. Rothschild, *The number of finite topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 276–282.
24. D. Kleitman and B. Rothschild, *Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set*, Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975), 205–220.
25. V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), 154–157.
26. A. M. Kutin, *On the enumeration of finite partially ordered sets*, Permanents: theory and applications (1990), Krasnoyarsk. Politekhn. Inst., Krasnoyarsk, 31–38.
27. I. Niven, *Formal power series*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 871–889.

28. I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, New York, 1991.
29. H. J. Prömel, *Counting unlabeled structures*, J. Combin. Theory Ser. **44** (1987), 83–93.
30. R. A. Rankin, *Problem N 5137*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), no. 8, 898–899.
31. V. I. Rodionov, *A relation in finite topologies*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. **103** (1980), 114–116.
32. V. I. Rodionov, *Some recursive relations in finite topologies*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. **114** (1982), 174–179.
33. R. A. Rozenfeld, *The number of partial orderings on a 6-set*, Rostocker Mathematisches Kolloquium **28** (1985), 46–48.
34. H. Sharp Jr., *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 1344–1349.
35. J. A. Wright, *Cycle indices of certain classes of quasiorder types or topologies*, (Ph.D. Diss), University of Rochester, 1972.