Isaac Newton

(1642 – 1727)

DRUHÁ KRIZE MATEMATIKY ANEB POTÍŽE RŮSTU DIFERENCIÁLNÍHO A INTEGRÁLNÍHO POČTU

ŠTEFAN SCHWABIK

ÚVOD

O různých krizích ve vědě se mluví v souvislosti s rozvojem jednotlivých vědních disciplín. Samotné slovo *krize* má poněkud katastrofickou příchuť a užívat takové slovo pro označení nebo charakteristiku etapy vývoje vědy mi nepřipadá příliš šťastné.

Matematika se takovým hodnocením jednotlivých svých oblastí rovněž nevyhnula. Mluví se o třech krizích v jejích dějinách. Úkolem této úvahy je pojednat o tzv. *druhé krizi* matematiky. Ta se týká matematické analýzy ve smyslu diferenciálního a integrálního počtu, jak se tento název u nás vžil a v anglosaské literatuře bývá označován slovem „kalkulus". K pochopení významu zmíněné krize je třeba něco vědět o disciplíně, která se do krize dostala. Proto je nutné zabývat se jejím vznikem a dalším rozvojem. Do krize se lokálně dostane při práci každý vědec, kromě snad několika absolutních géniů. V případě matematické analýzy, která bude předmětem našeho zájmu, by příhodnější bylo užít slov „potíže růstu". Podstata problému je v tom, že teoretické základy prostředků analýzy, které projevily svoji mimořádnou sílu při poznávání přírody, byly dlouho nepevné; přinejmenším se to tak jeví z dnešního pohledu na věc. Potřeba popisovat přírodu exaktním jazykem matematiky vedla k velkému nárůstu poznatků. Kalkulus krátce po svém vzniku připomínal rychlenou rostlinu s poněkud chabou kostrou, to je důvod, proč v této souvislosti se mi zdá být vhodné užít spojení „potíže růstu". Upevnění základů matematické analýzy se stalo věcí cti nejen těch, kdož matematiku pěstovali a prostředky vytvářeli, ale i těch, kteří je používali k jiným účelům.

Tato práce byla zpracována za podpory grantu GA ČR 201/97/0218.

Předmět, který zkoumá diferenciální a integrální počet, je znám už od starověku; do těchto dávných dějin se však pouštět nebudeme. Zůstaneme v novověku zejména proto, že v něm se tato oblast matematiky postupně utvořila.

V období renesance se výrazněji počaly projevovat protischolastické tendence, lidský duch projevil svoji zvídavost, dogmata hlásaná zejména církví byla zpochybňována. Přírodní vědy, založené na pozorování a racionálních úvahách, byly pro „fundovanou" revoltu jako stvořené.[1] 14. – 16. století je možno charakterizovat jako dobu, kdy se vytvářela filosofie přírody; snaha poznat a popsat přírodu vedla k návratu k poznatkům starých Řeků. Myšlenky antiky v evropském prostředí nezůstaly zachovány, do obecného evropského povědomí se vracely přes arabský svět. Projevovaly se snahy popsat přírodní jevy a matematika se stále více stávala vhodným jazykem pro realizaci těchto snah.

V renesanční matematice se postupně vytvářel velmi praktický a pragmatický přístup. Projevovalo se to hledáním jednodušších technik např. pro výpočet obsahů a objemů. Eudoxovské techniky známé z antiky byly dosti únavné a těžkopádné. Obecný přístup se projevoval v zájmu o rychlé získání nových výsledků a metod. Důrazný řecký požadavek rigorózních důkazů matematických tvrzení ustoupil do pozadí. Praktickým potřebám byl na obtíž, zdržoval. Stačí jen připomenout krásné, zato však pracné řecké důkazy pro nekonečné objekty nebo důkazy nesouměřitelnosti úseček (viz např. známý důkaz nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce).

Obecný názor vyslovil zřetelně Christian Huygens, když v r. 1657 napsal:

K získání důvěry odborníků není důležité, zda jim dáme absolutní důkaz, nebo takové základy pro něj, že po nahlédnutí nebudou pochybovat, že dokonalý důkaz je možno provést. Jsem ochoten připustit, že důkaz by měl být podán v jasné, elegantní a prosté podobě jako v pracích Archimedových. Ale prvotní a nejdůležitější je způsob objevu samotného, takového, který vzdělance potěší poznáním. Zdá se proto, že především musíme sledovat tu metodu, pomocí které lze vše pochopit a stručně a jasně vyložit. Sobě ušetříme práci se sepisováním, jiným pak se čtením – těm, kteří nemají čas zaznamenat mimořádné množství geometrických nápadů, které se ze dne na den množí a v tomto učeném století přerostou všechny meze, pokud by měla být užita rozvláčná a dokonalá metoda starověku.

Huygensův názor je pozoruhodný kupř. tím, že se mu zdá zbytečné předkládat přesné a úplné důkazy tvrzení. Jde tedy o přijímání poznatků, u nichž pak postačí, že „odborníci budou věřit tomu, že důkaz je možný". Tomu by se dnes mohlo říkat, že se přejímá „know-how". Má to však – a v dobách počátků matematické analýzy také mělo – jeden háček. Po čase se množství poznatků zvětší a úvahy se stanou složitými do té míry, že odborníci neznalí pozadí (a tedy vlastně důkazů) nejsou už schopni poznatkům porozumět, natož pak jich používat. Zůstane několik geniálních tvůrců, vytvářejících pojmy a metody, kterým rozumí jen oni sami, základy nejsou příliš pevné a je dán dobrý základ pro vznik „krize".

[1] To je jev, který je nám i dnes blízký, ideologických zásahů do oblasti přírodních věd – a sem tradičně patří i matematika – je obecně méně, než do oblasti věd jiných.

Za povšimnutí stojí i Huygensův povzdech nad množstvím informace. To je ve srovnání s jeho dobou dnes překonáno o několik řádů. Citátem Huygense jsme však silně předběhli dobu. Vrátíme se k počátkům vzniku matematické analýzy.

Nová etapa renesanční matematiky spočívala v znovuobjevení Euklida a Archimeda, byly pořízeny překlady jejich děl do latiny (např. Commandinův překlad Archimedových prací (1558), Apolloniových prací (1566), Claviův překlad Euklidových Základů s komentářem (1574), Xylander přeložil Diofanta (1575), atd. - šlo většinou o překlady z arabštiny).

Vedle toho stojí nové úvahy, např. heliocentrický výklad pohybu planet M. Koperníka (*De revolutionibus orbium coelestium* (1543)), četná pozorování hvězd, která potvrzovala Koperníkův názor a pochopitelné odmítání ze strany katolické církve, vše to totiž bylo ve sporu s Písmem. V této souvislosti snad stačí připomenout Galileovo - byť asi legendární - revoltující: „A přece se točí!“.

Zdokonalovaly se přístroje určené k pozorování, zvyšovala se přesnost, hromadila se data. V r. 1576 postavil Tycho Brahe observatoř na tenkrát dánském ostrůvku Hven a pomocí rozměrných a přesných přístrojů zde zaznamenával data svých astronomických pozorování. Posléze se objevil v Čechách ve službě císaře Rudolfa II. a přizval do Prahy Johanna Keplera. Tycho Brahe nebyl zastáncem Koperníkovy heliostatické teorie, doufal, že rozsáhlými pozorováními potvrdí svůj kosmologický model, v němž je Země s Měsícem, který ji obíhá, ve středu univerza a Slunce obíhá kolem Země (planety přitom obíhají kolem Slunce).

KEPLEROVA MATEMATIKA

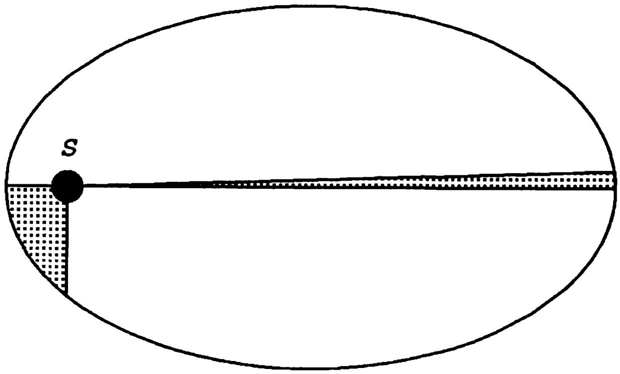
Johannes Kepler (1571 – 1630) se dal do zpracovávání obrovského množství dat, která byla k dispozici od Tycha Brahe. Nesdílel Tychův kosmologický názor, byl zastáncem toho, co hlásal v kosmologii Koperník. Ke zpracování dat bylo třeba mnoho počítat, mít po ruce výpočetní techniky a v neposlední řadě také teoretický aparát.

Kepler jako přesvědčený zastánce Koperníkovy teorie vysvětloval zprvu její správnost pomocí pravidelných platónovských těles v *Mysterium cosmographicum* z roku 1596. Hledal matematické vztahy v pozorovatelném světě. Výsledkem bylo velmi mystické vepisování a opisování pravidelných těles do koulí, po nichž se planety na své pouti kolem Slunce pohybují. V r. 1600 se Kepler dostal do Prahy jako pomocník Tycha Brahe a po jeho smrti v r. 1601 se dal do využívání dat, která pozorováním získal Tycho, přičemž počítal dráhy planet s přesností na tu dobu nevídanou. Je současně třeba připomenout i to, že vzhledem k velkým rozměrům přístrojů a k jejich pečlivé konstrukci byla i data Tycha Brahe velmi přesná.

Zákonitosti pohybu planet formuloval Kepler ve svých známých zákonech:

(1) Planety se pohybují po eliptických drahách, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

(2) Radiusvektor od Slunce k planetě „vymetá“ plochu konstantní rychlostí (nebo jinak: plochy opsané průvodičem planet jsou ve stejných časových intervalech stejné).



1. Ke druhému Keplerovu zákonu

(3) Čtverce period oběhu každých dvou planet jsou úměrné třetí mocnině hlavních poloos jejich drah.

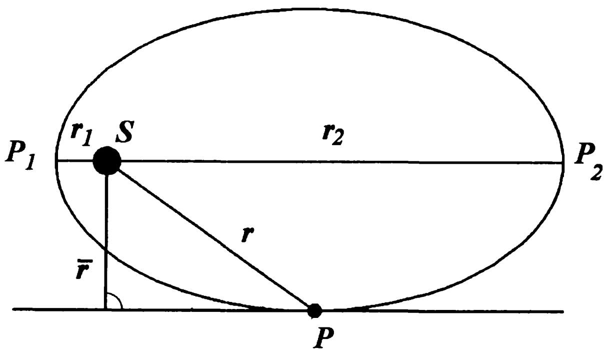
Tyto zákony Kepler odvodil z experimentálních dat, později je Newton odvodil z gravitačního zákona. Newtonův gravitační zákon ovšem byl inspirován právě Keplerovými zákony.

Ukážeme některé Keplerovy úvahy související s jeho druhým zákonem. První zákon formuloval až po něm.

Z pozorovaných dat Kepler usoudil, že když je planeta nejblíže (nejdále) od Slunce na své eliptické dráze, je její rychlost úměrná převrácené hodnotě vzdálenosti od Slunce, tj. je

$$v_1 = \frac{k}{r_1}, \quad v_2 = \frac{k}{r_2}$$

(v_1 je rychlost v P_1, v_2 je rychlost v P_2, k je kladná konstanta).



2. Ke Keplerově úvaze

Odtud – bez odůvodnění – Kepler usoudil, že taková zákonitost platí v každém bodě P dráhy planety, tj. že pro rychlost v v bodě P platí

$$v = \frac{k}{r} \tag{*}$$

(r je vzdálenost bodu P od ohniska elipsy S, ve kterém je Slunce).

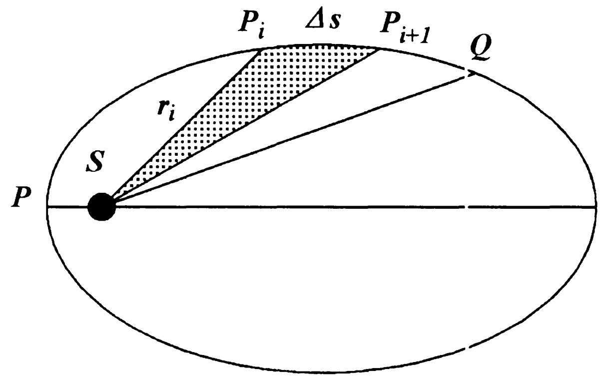
Tato úvaha není správná, platí vztah $v = \frac{k}{\bar{r}}$, kde $\bar{r}$ je vzdálenost S od tečny k elipse v bodě P. K tomu však poznamenejme, že dráha Marsu, pro kterou to Kepler počítal, je „téměř“ kruhová a úvaha je proto „skoro správná“. To je dosti zřejmé, v tomto případě je totiž hodnota r velmi blízká hodnotě $\bar{r}$.

Kepler však dále pokračuje na základě původního vztahu (*) s $r = |PS|$. Otázkou je, jak dlouhý čas t je potřebný pro projití oblouku PQ. Kepler oblouk rozdělí na velký počet podoblouků stejné délky Δs, které spojují po sobě jdoucí body P_i a P_{i+1}, $r_i = |SP_i|$, v_i je rychlost v bodě P_i a t_i je čas potřebný k projití oblouku P_iP_{i+1}.

$$t = \sum t_i \approx \sum \frac{\Delta s}{v_i} = \frac{1}{k} \sum r_i \cdot \Delta s \,.$$

Odtud pak dostane vztah pro celkový čas

$$t = \frac{\Delta s}{k} \sum r_i.$$



3. Ke Keplerově infinitezimální úvaze

Další chybný Keplerův krok spočívá v prohlášení, že „součet“ $\sum r_i$ je úměrný velikosti A plochy SPQ. Zde se projevuje úvaha, kterou bychom mohli nazvat cavalieriovskou: sčítají se úsečky, je jich mnoho a dostane se plošná velikost. Za to se Keplerovi dostalo z různých stran dost kritiky. Je možné, že kritičtí čtenáři i z novějších dob jenom neuměli Keplera náležitě číst. Nedovedli asi oddělit myšlenku od toho, jak byla předložena. Je nabíledni, že způsob prezentace u Keplera není příliš zřetelný, myšlenka však přítomna je a proto můžeme mluvit o „Keplerově matematice“.

Z hledisek analýzy, která později byla rozpracována a provozována v pozdějších pracích i samotným Keplerem, lze uvážit, že v případě hodně (infinitezimálně) malého Δs je oblouk P_iP_{i+1} „skoro“ úsečka a útvar SP_iP_{i+1} „skoro“ trojúhelník, jehož základna je Δs, výška je r_i, protože Δs je malé a rameno r_i

JOHN NAPIER

(1550 – 1617)

onoho „trojúhelníka“ se od výšky liší málo. Z obrázku 3 to sice příliš patrné není, stačí si však představit odpovídající obrázek se skutečně velmi malým Δs, či spíše s navzájem „velmi blízkými“ body P_i a P_{j+1}.

Obsahem útvaru SP_iP_{i+1} proto je $\frac{1}{2}r_i\Delta s$ a součet obsahů takových „skoro“ trojúhelníků dá dost přesně hodnotu A, tj.

$$A \approx \frac{1}{2}\sum r_i\Delta s$$

a z výše uvedeného vztahu pro celkový čas t pak je

$$t = \frac{1}{k}\cdot 2A \text{ neboli } A = \frac{k}{2}t.$$

To ovšem znamená, že plocha A s časem narůstá lineárně, jinými slovy: plocha, kterou „vymetá“ radiusvektor planety se mění s konstantní rychlostí. Přes dvě úvahy, které je třeba prohlásit za chybné, dochází Kepler ke správnému závěru, který lze dnes v rámci analýzy odvodit zcela přesně. Mnoho nejasného je také v tom, že není zřejmé, co přesně je infinitezimální veličina. To v tomto okamžiku pomineme, bude o tom níže řeč. V aritmetizované analýze Weierstrassově, a tedy analýze dnešní doby, je vše upřesněno pomocí pojmu limity.

Vytrhneme-li tuto Keplerovu úvahu z astronomického kontextu, lze obecně k popsanému postupu říci, že Kepler ve své práci *Astronomia nova* z roku 1609 předložil světu způsob integrace (výpočtu plošné velikosti útvaru) tak, že problém převedl k sčítání nekonečně mnoha nekonečně malých veličin, přičemž tyto pojmy nikterak nespecifikoval. Takový „infinitezimální“ přístup k řešení veskrze praktické úlohy je velmi podstatným a důležitým krokem při vzniku matematické analýzy.

O něco později se Kepler k podobným technikám znovu vrátil. Na podzim roku 1613 jej zaujala otázka, kolik vína je ve vinném sudu. Podivil se, když sledoval kupce, který pouhou měřící hůlkou (opatřenou dílky) určil množství vína tak, že hůlku obvyklým nálevním otvorem prostrčil a opřel o spodní okraj dna sudu. Keplerovi se zdálo být záhadné, že je objem sudu určován pomocí délky šikmo do něj vpravené úsečky. Jeho úvahy jsou obsahem spisu *Nova stereometria doliorum vinariorum.*

PROSTŘEDKY K VÝPOČTŮM, NAPIER

Když se pod sebe napíše aritmetická řada přirozených čísel a geometrická řada sestávající z mocnin čísla 2, získá se tabulka

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024 ...

V této tabulce lze pozorovat, že součtům v horní aritmetické řadě odpovídají součiny v dolní geometrické řadě. Kupř. $2 + 7 = 9$ odpovídá součinu $4 \times 128 = 512$.

Takovou konstrukci a úvahu lze nalézt v *Arithmetica integra* od M. Stifela z roku 1544 a možná už i dříve. Z dnešního hlediska jde o evidentní rovnost $2^2 \times 2^7 = 2^{2+7}$ a není o čem mluvit. Z praktického hlediska 16. století ale z uvedené tabulky bylo patrné, že součiny některých čísel vyskytujících se v druhém řádku bylo možno zjistit tím, že se sečetla jim odpovídající čísla v prvním řádku a zjistilo se, co tomuto součtu odpovídá v řádku druhém.

Je pochopitelné, že tímto způsobem bylo snadné násobit, ale vadou Stifelovy tabulky bylo to, že mezery mezi jednotlivými čísly v geometrické řadě s kvocientem 2 byly velké a tím možnosti násobení různých čísel malé.

Myšlenka však byla na světě a tím i inspirace pro to, co udělal **John Napier** (1550 - 1617) v knížce *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Popis podivuhodného kánonu logaritmů) v roce 1614. K tomu, aby mezery mezi po sobě následujícími členy geometrické řady v tabulce byly pokud možno malé, zvolil Napier kvocient $0.9999999 (= 1 - 10^{-7})$ a s tímto kvocientem spočítal svoji první tabulku, která sestávala z prvních 100 členů geometrické řady s prvním členem 10000000 a uvedeným kvocientem. Sepsal tedy posloupnost

$$a_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n \text{ pro } n = 0, 1, \ldots, 100,$$

přičemž uvedl i praktický výpočet jednotlivých členů této posloupnosti. Ten byl založen na vztahu

$$a_{n+1} = a_n(1 - 10^{-7}) = a_n - a_n \cdot 10^{-7},$$

který vede na postupné odčítání.

Pro takto získaná čísla a_n nazval Napier jim odpovídající celé číslo n jejich *logaritmem.* Tak např. dostal poslední číslo své posloupnosti

$$a_{100} = 9999900.0004950$$

a logaritmem tohoto čísla tedy bylo číslo 100, zatímco logaritmem čísla 10^7 byla 0.

Původní Napierovou myšlenkou bylo toto:

logaritmus čísla x, které je nejvýše rovno 10^7, je nezbytný počet násobení čísla 10^7 číslem $1 - 10^{-7}$, aby se získalo číslo x.

Když tedy napíšeme $y = \mathrm{N}\ \mathit{log} a$ (N *log* zde v roli Napierova logaritmu), pak $a = 10^7(1 - 10^{-7})^y$ a pro $z = \mathrm{N}\ \mathit{log} b$, pak je $b = 10^7(1 - 10^{-7})^z$. Pro podíl $\frac{a}{b}$ dostaneme

$$\frac{a}{b} = (1 - 10^{-7})^{y-z}$$

a odtud je patrné, že rozdíl Napierových logaritmů čísel a a b, tj. rozdíl $y - z$ závisí jenom na podílu a a b.

Poznamenejme, že kdyby Napier měl ve své tabulce pokračovat tak, aby postupně ve výpočtech klesl např. k hodnotě 5000000, musel by pracovat tak, aby bylo $(1 - 10^{-7})^n = \frac{1}{2}$. Jednoduchým výpočtem se lze přesvědčit, že tomu odpovídající počet kroků n má hodnotu 6931472, a to je dost vysoké číslo na to, aby se tabulka v historicky krátké době vyrobila.

Ve své druhé tabulce Napier spočítal prvních 50 členů geometrické řady s prvním členem 10000000 a kvocientem 0.99999$(= 1 - 10^{-5})$, t.j. geometrickou posloupnost

$$10^7(1 - 10^{-5})^p \text{ pro } p = 0, 1, \ldots, 50.$$

Obě tyto tabulky Napierovi ovšem posloužily pouze jako nástroj k interpolaci ve třetí tabulce, která má 21 řádek a 69 sloupců a sestává v r-tém řádku a q-tém sloupci z čísla

$$c_{r,q} = 10^7(1 - \frac{1}{2000})^{r-1}(1 - \frac{1}{100})^{q-1}.$$

Každý řádek této tabulky tedy je geometrická posloupnost o 69 členech s kvocientem $1 - \frac{1}{100} = 0.99$ a každý sloupec tabulky je geometrická posloupnost o 21 členech s kvocientem $1 - \frac{1}{2000} = 0.9995$. Vše je uděláno tak, že poslední číslo v každém sloupci je přibližně rovno prvnímu číslu ve sloupci následujícím. Tabulka tedy obsahuje $21 \cdot 69 = 1449$ čísel od 10000000 v prvním řádku a prvním sloupci do 4998609.4034 v posledním řádku posledního sloupce.

V prvním sloupci druhého řádku tabulky je číslo $c_{2,1} = 10^7(1 - \frac{1}{2000}) = 9995000$, ve druhém sloupci prvního řádku pak je číslo $c_{1,2} = 10^7(1 - \frac{1}{100}) = 9900000$. Na základě toho, že prvky tabulky jsou tvořeny geometrickými posloupnostmi, je Napierův logaritmus prvku v r-tém řádku a q-tém sloupci třetí Napierovy tabulky dán číslem

$$(r - 1)\mathrm{N}\ log 9995000 + (q - 1)\mathrm{N}\ log 9900000.$$

K určení Napierových logaritmů N log9995000 a N log9900000 poslouží jeho první a druhá tabulka. Lineární extrapolací se dojde k hodnotám

$$\mathrm{N}\ log 9995000 \approxeq 5001.24506 \text{ a } \mathrm{N}\ log 9900000 \approxeq 100503.36$$

a odtud pak už k hodnotě logaritmu prvku v r-tém řádku a q-tém sloupci třetí tabulky

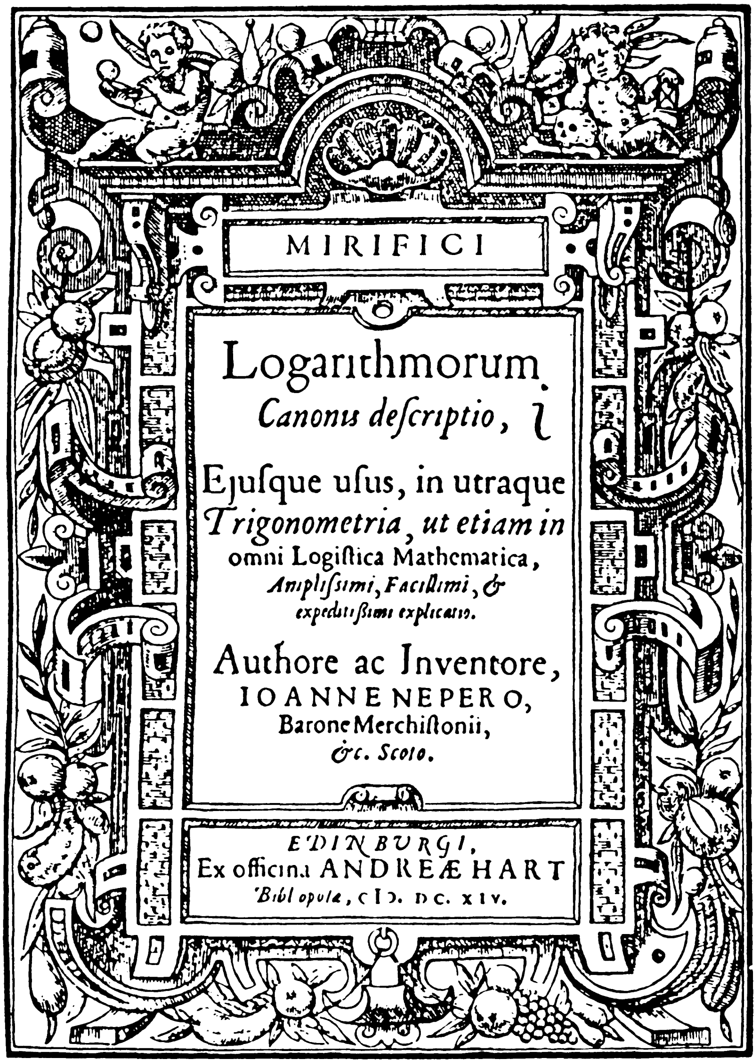
$$\mathrm{N}\ log c_{r,q} = (r - 1) \cdot 5001.24506 + (q - 1) \cdot 100503.36.$$

Odtud pro poslední dva členy v 69 sloupci dostaneme

$$\mathrm{N}\ log c_{20,69} = \mathrm{N}\ log 5001109.96 \approxeq 19 \cdot 5001.24506 + 68 \cdot 100503.36 \approxeq 6929252.14$$

a

$$\mathrm{N}\ log c_{21,69} = \mathrm{N}\ log 4998609.4 \approxeq 20 \cdot 5001.24506 + 68 \cdot 100503.36 \approxeq 6934253.38$$



MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria, ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſsimi, Facillimi, &
expeditiſsimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Titulní list Napierova díla

Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Lineární aproximací mezi těmito dvěma hodnotami se lze dostat k hodnotě

$$N\ log 5000000 \approxeq 6931472.12,$$

která se od skutečné hodnoty

$$N\ log 5000000 = 6931471.81$$

liší až na sedmém místě.

Napier svých výpočtů použil ke zpracování své hlavní tabulky, tzv. kánonu logaritmů sinů úhlů od 0 do 90 stupňů po minutách. Je třeba poznamenat, že pro Napiera sinus úhlu byla délka protilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou $10000000 = 10^7$. Jeho siny tedy nabývaly hodnot mezi 0 a 10000000. Sinus 90 stupňů se tedy rovnal 10000000, sinus 45 stupňů byl $10000000/\sqrt{2} = 7071067.8$. Dnešní pojetí sinu – a vůbec trigonometrických funkcí – založené na *poměrech* stran pravoúhlého trojúhelníka je poněkud pozdějšího data, pochází od L. Eulera.

Vytrženo z kontextu by se mohlo takové úsilí zdát samoúčelným. Je ale nasnadě, že šlo o výpočty, převedení složitého a pracného násobení na jednodušší a rychlejší sčítání. Logaritmy trigonometrických funkcí pak byly určeny k vyhodnocení astronomických pozorování, která polohu např. planet udávala pomocí dvou úhlů, a proto bylo zapotřebí provádět trigonometrické výpočty (do podrobností se zde nebudeme pouštět). K tomu bylo nutno mj. i násobit hodnoty trigonometrických funkcí naměřených úhlů. Místo násobení se tedy sčítalo a pohledem do Napierova kánonu bylo možno odečíst výsledek s potřebnou přesností. Této techniky se chytili vyhodnocovatelé astronomických pozorování s velkou a pochopitelnou chutí. Patřil mezi ně i velký počtář J. Kepler.

LEIBNIZ A JEHO NOVÁ ANALÝZA

Napišme si pod sebe posloupnost přirozených čísel, posloupnost jejich diferencí, posloupnost diferencí diferencí:

N	0	1	2	3	4	5	6	...		
1. dif.		1	1	1	1	1	1	1	...	
2. dif.			0	0	0	0	0	0	0	...

Učiňme totéž pro posloupnost druhých mocnin přirozených čísel:

N^2	0	1	4	9	16	25	36	...			
1. dif.		1	3	5	7	9	11	13	...		
2. dif.			2	2	2	2	2	2	2	...	
3. dif.				0	0	0	0	0	0	0	...

a zopakujme celou proceduru pro třetí mocniny přirozených čísel

N^3	0	1	8	27	64	125	216	...

1. dif.	1	7	19	37	61	91	127	...			
2. dif.		6	12	18	24	30	36	42	...		
3. dif.			6	6	6	6	6	6	6	...	
4. dif.				0	0	0	0	0	0	0	....

Pohledem na takové tabulky **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) postřehl, že druhé diference pro přirozená čísla jsou 0, že pro čtverce přirozených čísel jsou třetí diference nulové, že čtvrté diference pro třetí mocniny se rovněž nulují a současně také to, že pro k–té mocniny se podle stejné zákonitosti nulují vždy diference řádu $k+1$. Také je vidět, že součet n po sobě následujících prvních diferencí dá $n+1$–tý člen posloupnosti, z níž posloupnost diferencí vznikla. Jinými slovy: z posloupnosti po sobě následujících (celkem libovolných) hodnot lze vytvořit posloupnost diferencí a z posloupnosti diferencí lze sčítáním získat původní posloupnost. Toto pozorování je u Leibnize počátkem úvah o tom, že diferencování a sumace jsou vzájemně inverzní operace.

Z uvedené tabulky pro druhé mocniny je patrné, že 1. diference sestávají z lichých čísel. Z toho, co jsme řekli plyne, že je např.

$$1+3+5=9$$

a obecně pro součet prvních n lichých čísel platí zajímavý vztah

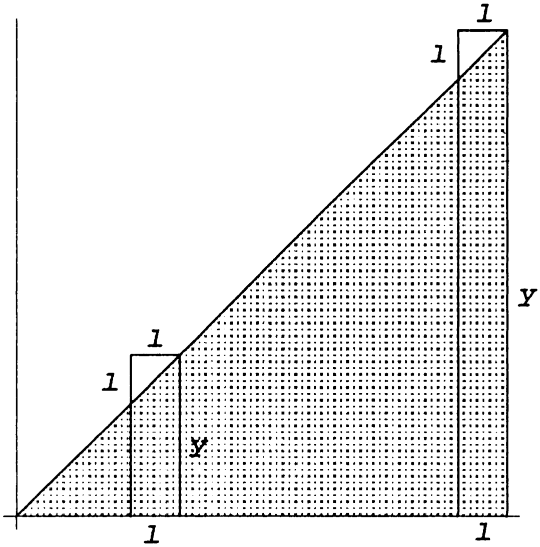
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Úvahy o diferencích tohoto druhu vedly Leibnize k odvození mnoha jiných zajímavých vztahů. Tyto postupy pocházejí z Leibnizova raného mládí.

V prvním období svých úvah Leibniz pohlížel na funkci jako na posloupnost hodnot po sobě následujících veličin, které odpovídají „po sobě následujícím hodnotám nezávisle proměnné“, na „po sobě následující hodnoty nezávisle proměnné“ pohlížel jako na hodnoty, které se od sebe liší o *infinitezimální* veličinu dx, kterou (pracovně) považoval za 1 a pro „diferenci po sobě jdoucích funkčních hodnot“ užíval označení dy a místo toho často psal l (tj. d$y = l$).

Jak bylo řečeno úvodem, z uvedených tabulek usoudil, že součet prvních diferencí „funkce“ je její funkční hodnota, a tuto skutečnost zapsal ve tvaru $omn.l = y$, přičemž *omn.* je jeho zkratka pro *omnia,* tj. pro „veškerenstvo“ neboli součet. Pozorování o diferencích posloupností mocnin přirozených čísel tak přenesl do oblasti funkcí.

Nový problém pro Leibnize představuje „součet“ $omn.yl$. Dochází k tomu, že je $omn.yl = \frac{y^2}{2}$ a má přitom na mysli funkci $y = x$. Z obrázku 4 je vidět, jak Leibniz počítá v tomto případě součet po sobě jdoucích obdélníků o základně l a výšce y, pro „malé“ l je tento součet obsahem trojúhelníka ABC, tj. hodnota $\frac{y^2}{2}$. Pochopitelně zde z našeho hlediska můžeme vidět mnoho formálních nedostatků. Co je vlastně y, které hodnoty se berou, ... ? Nicméně je možno vztah, ke kterému Leibniz došel, interpretovat v dnešní podobě tak, že vlastně získal vztah $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$ nebo jinak $\int x dx = \frac{x^2}{2}$.



4. K Leibnizově úvaze

V říjnu 1675 se Leibniz rozhodl psát znak $\int$ (jakési protáhlé S jako vyjádření toho, že jde o sumu) místo *omn.* a tento jeho znak nás provází matematickou analýzou dodnes.

Trochu jiné postupy užité Leibnizem souvisejí s tzv. metodou charakteristického trojúhelníka. Jde o metodu, kterou ve speciálním případě užil B. Pascal. Je-li dána křivka (funkce $y = f(x)$), zvolí se na ní bod P a utvoří pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách dx, dy a o přeponě ds, která je kusem oblouku, ale z infinitezimálních představ je vlastně tak rovný, až je úsečkou, protože dx a dy jsou malé. Bodem P se vede kolmice k úsečce ds (jakápak úsečka, jakápak kolmice, když jde o něco nekonečně malého?) a rovnoběžka s osou y spolu s osou x tyto přímky utvoří trojúhelník s přeponou n a odvěsnami y (ta je hodnotou funkce v bodě x) a ν, ta se nazývá *subnormálou* křivky. Z podobnosti trojúhelníků pak Leibniz usoudí např. že je

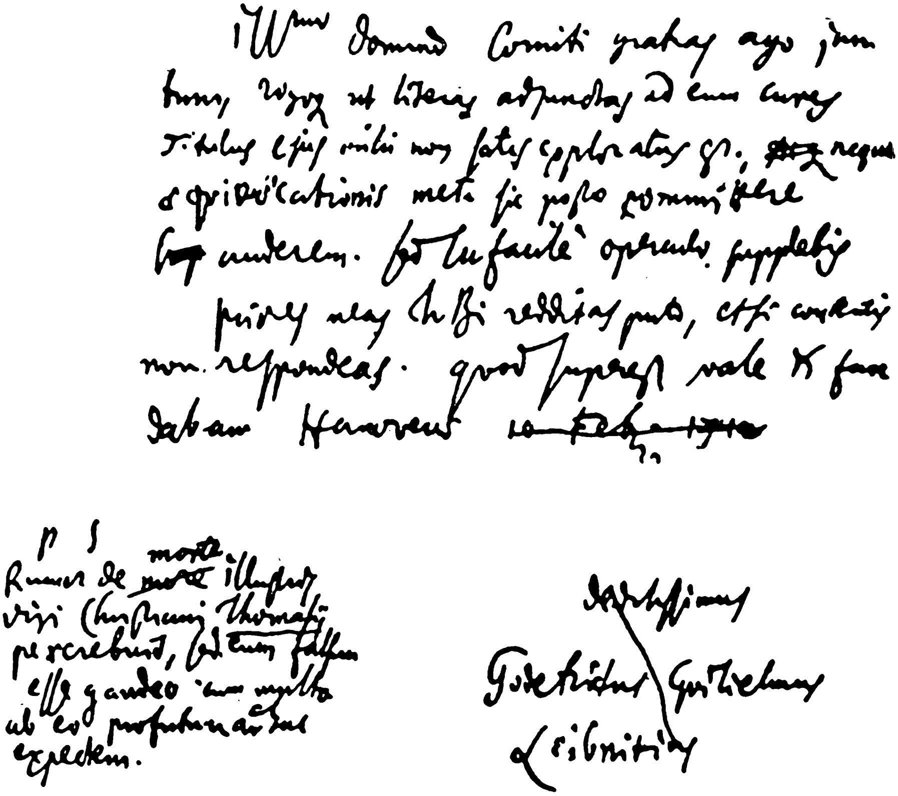
$$\frac{\nu}{y} = \frac{dy}{dx}, \text{ tj. } \nu = y\frac{dy}{dx} \text{ a také } \nu dx = y dy.$$

Po „sumaci“ pak

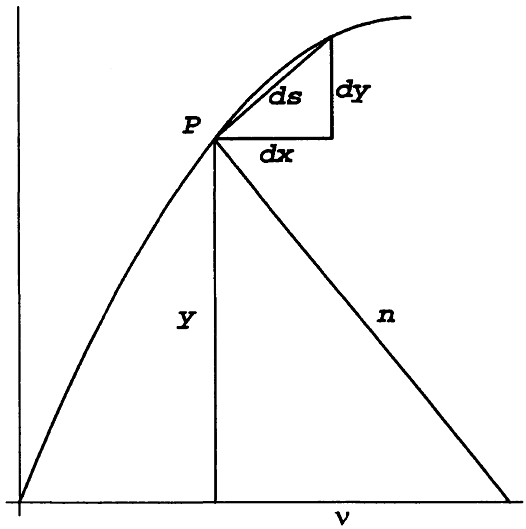
$$\int \nu dx = \int y dy \text{ a též } \int y\frac{dy}{dx}dx = \int y dy.$$

Na první pohled ovšem není patrné, jak prvního z těchto vztahů použít. Ukážeme postup, který zde (v jiné podobě) Leibniz použil pro výpočet $\int_0^a x^n dx$. Předpokládal, že najde funkci $y = f(x)$ tak, že pro subnormálu křivky, kterou tato funkce určuje, platí $\nu = x^n$. Pak

$$\int_0^a x^n dx = \int y dy = \frac{1}{2}y^2|_0^a = \frac{1}{2}[(f(a))^2 - (f(0))^2].$$



Leibnizův rukopis



5. Metoda charakteristického trojúhelníka

Zkusíme položit $y = f(x) = bx^k$. Odtud $\nu = y\dfrac{dy}{dx} = b^2kx^{2k-1}$ a má-li toto se rovnat x^n musí být $k = \dfrac{n+1}{2}$ a $b = \sqrt{\dfrac{2}{n+1}}$, tj. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{n+1}}x^{\frac{n+1}{2}}$. Proto je $\dfrac{1}{2}[(f(a))^2 - (f(0))^2] = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{n+1}a^{n+1} = \dfrac{1}{n+1}a^{n+1}$, a tedy platí

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1},$$

nebo jinak

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Postup je náležitě šroubovaný, ale na světě je formulka pro integrování n–té mocniny. Pozornosti hodná je snad úvaha, kterou se tvar funkce $f(x)$ nejdříve předpoví (= uhodne) a pak konkrétně spočítá.

V roce 1676 Leibniz tuto poslední formulku pro integraci mocniny uvedl i pro případ, že je n racionální. Ve stejném spise pak diferencoval výraz $\sqrt{a + bz + cz^2}$ tak, že psal $x = a + bz + cz^2$ a

$$\frac{d\sqrt{a+bz+cz^2}}{dz} = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot b + 2cz = \frac{b+2cz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}.$$

Předvedl tak – řečeno dnešními slovy – derivování složené funkce. Derivováním obecných výrazů se zabýval Leibniz i jinak, v roce 1675 např. došel k tomu, že je $d(u \cdot v) = du \cdot dv$. To je samozřejmě nesprávný výsledek.

V červenci 1677 ale už uvádí (bez dokazování) správné formulky pro $d(u+v)$, $d(u \cdot v)$ a $d(\frac{u}{v})$.

K Leibnizovu přístupu se objevilo mnoho kritiky zejména poté, co soustavněji v *Acta Eruditorum* v roce 1686 vyložil principy nového kalkulu (analýzy, diferenciálního a integrálního počtu). Tam explicitně pro funkce předpokládal spojitost (co tím asi měl na mysli?) a užíval infinitezimály místo dnešních limit. Stížnosti (např. B. Nieuwentijt, 1694) se zaměřily na to, že v případě infinitezimál je veličina $\frac{dy}{dx}$ nesmyslná, protože je to vlastně $\frac{0}{0}$. Narážely na způsob, jakým se s infinitezimálami při početních manipulacích zacházelo. Leibniz na to odpověděl (stejně jako dříve Barrow), že na hodnotu $\frac{dy}{dx}$ v geometrii nutno nahlížet jako na poměr dvou konečných veličin. Leibnizova snaha vyjasnit objekty a užívané metody pro infinitezimály je trochu obskurní; usiloval postavit vše na metafyzickém základě a to k vyjasnění rozhodně nesměřovalo. Ale skutečnost, že většinu výsledků dnešní analýzy lze vyjádřit jazykem, který Leibniz zavedl, mu postavila pomník.

NEWTONOVA ANALÝZA

V roce 1669 napsal **Isaac Newton** (1643 – 1727) spis *De analysi per equationes numero terminorum infinitas* (O analýze pomocí rovnic s nekonečným počtem členů), který koloval mezi jeho přáteli, publikován ale byl až v roce 1711.

Uveďme v modernějším převleku několik úvah, které v tomto spise Newton provedl.

Buď dána křivka a plocha z pod touto křivkou nechť je dána ve tvaru

$$(*) \qquad z = ax^m,$$

kde a je konstanta a m je buď celočíselné nebo racionální.

Infinitezimální přírůstek veličiny x (Newton jej nazývá „moment“ x) označil Newton znakem o. Plochu (resp. její velikost) oblasti vymezené křivkou, osou x, osou y a ordinátou $x+o$ (tj. rovnoběžkou s osou y vedenou bodem $(x+o,0)$) označil $z+oy$, oy je „moment“ plochy (= infinitezimální přírůstek plochy). Pak

$$(**) \qquad z + oy = a\,(x+o)^m.$$

Na pravou stranu vztahu (**) použil binomickou větu a dostal nekonečnou řadu v případě racionálního m, odečtením (*) od (**) pak získá

$$z + oy - z = oy = a(x+o)^m - ax^m;$$

dělením číslem o se získá

$$y = m \cdot a \cdot x^{m-1} + \dots,$$

kde $+\ldots$ znamená členy, ve kterých se ještě vyskytne o, ty Newton ovšem „zanedbá" (tj. vynechá tím, že položí $o = 0$) a dospívá ke vztahu

$$y = m \cdot a \cdot x^{m-1}.$$

Řečeno dnešními slovy jde vlastně o

$$\lim_{o \to 0} \frac{a(x+o)^m - ax^m}{o} = \lim_{o \to 0} m \cdot a \cdot x^{m-1} + \ldots$$

$$= m \cdot a \cdot x^{m-1} = \frac{d}{dx}(ax^m) = a \cdot m \cdot x^{m-1}.$$

Ze souvislostí je vcelku zřejmé, že Newton měl na mysli právě toto; pojem limity ale neznal, intuitivně jej však v nějaké formě cítil.

Když naopak je křivka dána rovnicí $y = a \cdot m \cdot x^{m-1}$, je plocha pod ní (ve výše uvedeném smyslu) dána rovnicí $z = a \cdot x^m$.

V uvedeném spise se však Newton zaměřil hlavně na užití nekonečných řad. Uvedeme jeho postup např. pro integraci funkce $y = \dfrac{a^2}{b+x}$. Po formálním (tzv. dlouhém) dělení se v tomto případě dostane

$$y = a^2 : (b+x) = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \ldots.$$

Je-li nyní k dispozici tato nekonečná řada, lze ji dle Newtona integrovat člen po členu a pro „plochu" určenou touto funkcí, tj. pro neurčitý integrál, Newton tak dostává řadu

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \ldots.$$

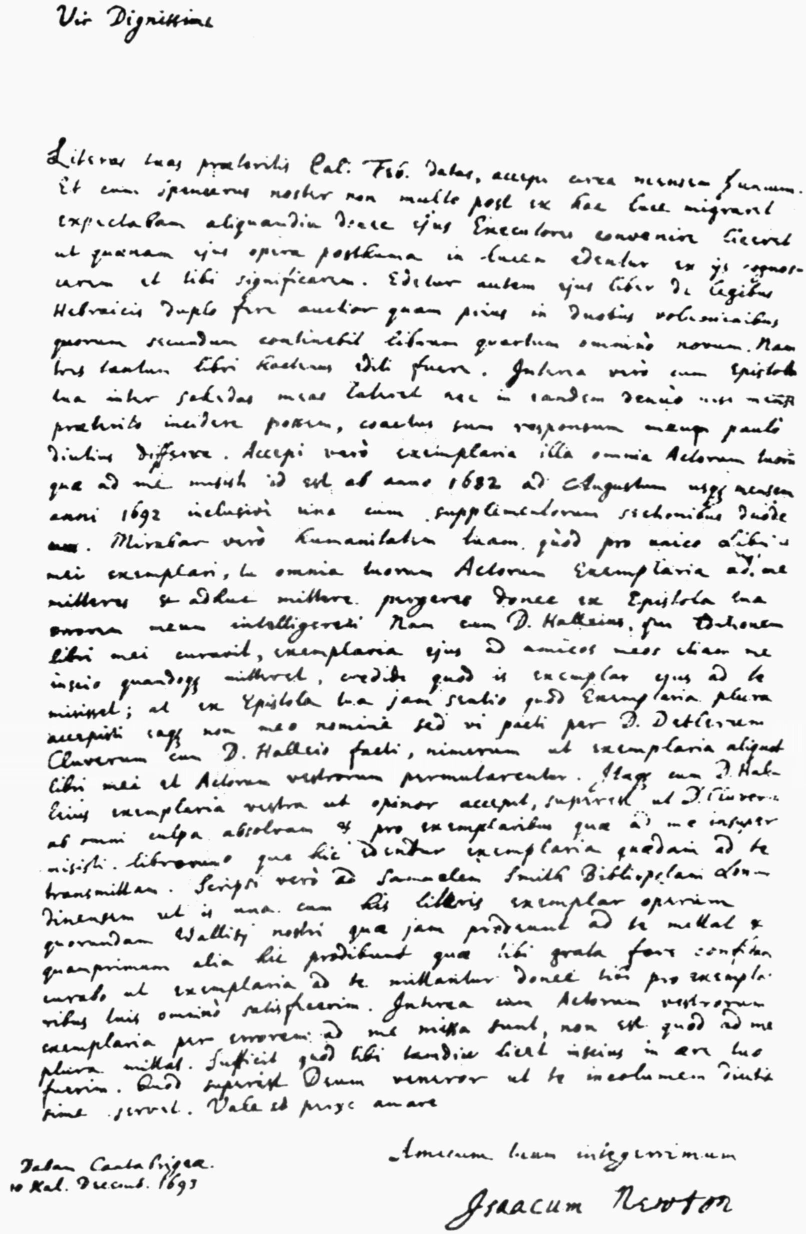
Podobně Newton pracuje např. s funkcí $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, pro kterou z binomického rozvoje dostane řadu

$$y = 1 : (1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

a tu integruje člen po členu. Současně též poznamenává, že když bude $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, pak binomický rozvoj dá

$$y = 1 : (x^2+1) = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \ldots$$

a zase se dá integrovat člen po členu. Oba výrazy pro y Newton vlastně získal formálním dělením, výrazy vpravo se ovšem od sebe liší. K tomu všemu ještě poznamenává, že když je x dost „malé", užije se první řada, ale když je x



Vir Dignissime

Literas tuas praeteriti Cal. Feb. datas, accepi circa mensem Junium. Et cum Spencerus noster non multo post ex hac luce migrarit expectabam aliquandiu donec ejus Executores convenire liceret ut quaenam ejus opera posthuma in lucem ederentur ex ijs cognoscerem et tibi significarem. Edetur autem ejus liber de Legibus Hebraicis duplo fere auctior quam prius in duobus voluminibus, quorum secundum continebit librum quartum omnino novum. Nam tres tantum libri hactenus editi fuere. Interea vero cum Epistola tua inter schedas meas latuerit nec in eandem denuo nisi mense praeterito incidere potuerim, coactus sum responsum meum paulo diutius differre. Accepi vero exemplaria illa omnia Actorum tuorum quae ad me missa id est ab anno 1682 ad Augustum usque mensem anni 1692 inclusive una cum supplementorum sectionibus duodecim. Miratus vero humanitatem tuam, quod pro unico Libri mei exemplari, tu omnia tuorum Actorum Exemplaria ad me mitteres et adhuc mittere pergeres donec ex Epistola tua errorem meum intelligerem. Nam cum D. Halleius, qui Editionem libri mei curavit, exemplaria ejus ad amicos meos etiam me inscio quandoque mitteret, credidi quod is exemplar ejus ad te miserit; at ex Epistola tua jam scio quod Exemplaria plura accepisti eaque non meo nomine sed vi pacti per D. Detlevum Claverum cum D. Halleio facti, nimirum ut exemplaria aliquot libri mei et Actorum vestrorum permutarentur. Itaque cum D. Halleius exemplaria vestra ut opinor acceperit, superest ut D. Claverum ab omni culpa absolvam & pro exemplaribus quae ad me insuper misisti librorum quae hic edentur exemplaria quaedam ad te transmittam. Scripsi vero ad Samuelem Smith Bibliopolam Londinensem ut is una cum his litteris exemplar operum quorundam Wallisij nostri quae jam prodierunt ad te mittat & quamprimum alia hic prodibunt quae tibi grata fore confido curabo ut exemplaria ad te mittantur donec tuis pro exemplaribus tuis omnino satisfecerim. Interea cum Actorum vestrorum exemplaria per errorem ad me missa sunt, non est quod ad me plura mittas. Sufficit quod tibi tandem liceat ipsius in aere tuo fuerim. Quod superest Deum veneror ut te incolumem diutissime servet. Vale et perge amare

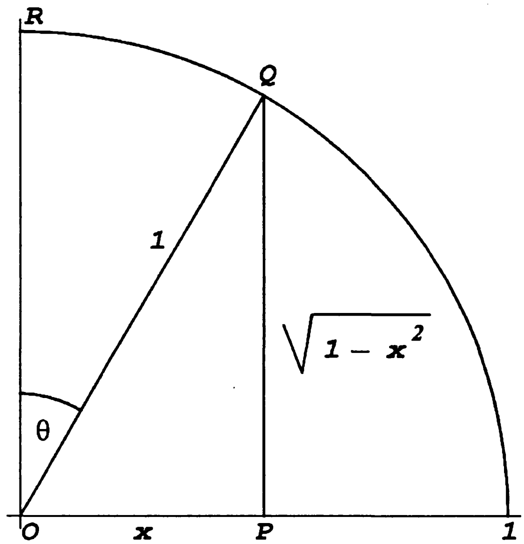
Amicum tuum integerrimum

Isaacum Newton

Datam Cantabrigiae
10 Kal. Decemb. 1693

Newtonův dopis Menckemu

„velké", je třeba užít druhý rozvoj. Tedy na tomto místě si Newton do jisté míry uvědomil, že je důležitá konvergence řady. Přesný pojem o tom, o co z dnešního pohledu jde, však patrně neměl.



6. K Newtonově řadě pro sinus

V souvislosti s těmito metodami obraťme pozornost k ještě jedné věci, kterou se Newton zabýval. Podívejme se na kružnici $x^2+y^2=1$, jak je namalována na obrázku 6. Kruhová výseč ORQ buď dána úhlem θ. Potom pro první souřadnici x bodu P platí $x=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ a je $\theta=\arcsin x$. Měříme-li úhly v radiánech, je plošná velikost kruhové výseče ORQ dána vztahem $\mathcal{A}\,(ORQ)\frac{1}{2}\theta$, tj. je

$$\theta = 2\cdot\mathcal{A}\,(ORQ).$$

Ale je (viz obrázek 6.)

$$\mathcal{A}\,(ORQ) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt - \mathcal{A}\,(\Delta OPQ) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt - \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2},$$

tj.

$$\theta = 2\cdot\mathcal{A}\,(ORQ) = 2\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt - x\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

Z binomické formule $(1-x^2)^m = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{m}{k}x^{2k}$ máme

$$\sqrt{1-x^2} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}x^{2k} = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{5}{128}x^8-\dots$$

a po integraci člen po členu

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt = x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5}{1152}x^9 - \dots,$$

takže

$$\theta = 2(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5}{1152}x^9 - \dots) - x \cdot \sqrt{1-x^2} =$$

$$= 2(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5}{1152}x^9 - \dots) - x \cdot (1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5}{128}x^8 - \dots) =$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \dots.$$

Z takové řady dovedl Newton vyjádřit x pomocí θ. Podívejme se na jeho postup v tomto konkrétním případě. První rozhodnutí spočívá v tom, že se použije jen několik prvních členů řady, např. užijme mocniny až do páté včetně, tj. prvních 5 členů (některé mají nulový koeficient) a napišme

$$\theta = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5,$$

tj.

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \theta = 0.$$

První aproximaci Newton dostává zanedbáním členů vyššího řádu, tj. má $x \approxeq \theta$. Provedeme-li substituci $x = \theta + p$, dostaneme

$$\theta + p + \frac{1}{6}(\theta + p)^3 + \frac{3}{40}(\theta + p)^5 - \theta = 0,$$

tj.

$$p + \frac{1}{6}(\theta + p)^3 + \frac{3}{40}(\theta + p)^5 = 0.$$

Provedením příslušných mocnin pak je

$$(+) \qquad \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{3}{40}\theta^5 + p(1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{3}{8}\theta^4) + p^2(\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{40}\theta^3) + \dots = 0.$$

Zanedbáním vyšších mocnin p potom

$$p = -\frac{\frac{1}{6}\theta^3 + \frac{3}{40}\theta^5}{1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{3}{8}\theta^4} \approxeq -\frac{1}{6}\theta^3$$

a tím se dostaneme ke druhé aproximaci

$$x = \theta - \frac{1}{6}\theta^3.$$

Další substitucí $p = -\frac{1}{6}\theta^3 + q$, kterou dosadíme do (+), se získá

$$\frac{1}{6}\theta^3 + \frac{3}{40}\theta^5 + (-\frac{1}{6}\theta^3 + q)(1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{3}{8}\theta^4) + (-\frac{1}{6}\theta^3 + q)^2(\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{40}\theta^3) + \cdots = 0,$$

a po úpravách

$$\frac{3}{40}\theta^5 - \frac{1}{12}\theta^5 - \frac{3}{48}\theta^7 + q(1 - \frac{1}{6}\theta^4 + \frac{1}{4}\theta^6) + \cdots = 0.$$

Zanedbáním vyšších mocnin q se dojde k

$$q = -\frac{-\frac{1}{120}\theta^5 - \frac{3}{48}\theta^7}{1 - \frac{1}{6}\theta^4 + \frac{1}{4}\theta^6} = \frac{1}{120}\theta^5 + \ldots$$

a odtud pak

$$x = \theta + p = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + q = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5.$$

Pokračováním této procedury lze Newtonovým postupem dospět k řadě

$$\sin\theta = x = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \cdots =$$

$$= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\theta^{2k+1} + \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\theta^{2k+1},$$

která je mocninnou řadou pro funkci sin.

Newton si byl vědom toho, že rozšířil integrování člen po členu z případu mnohočlenu na řadu, ale současně si byl vědom obtíží z toho plynoucích. Uveďme ve volném překladu to, co v *De analysi per equationes numero terminorum infinitas* k tomu napsal:

A cokoli obecná analýza dokáže pro rovnice s konečným počtem členů (jestliže se to udělat dá), dokáže totéž i pro rovnice s nekonečným počtem členů, takže jsem se nerozpakoval tomu rovněž říkat analýza. Úvahy v tomto případě nejsou méně určité než v případě prvním; ani rovnice nejsou méně přesné, ačkoliv my smrtelníci, jejichž síla uvažování je sevřena v malých mezích, nemůžeme vyjádřit, ani si představit všechny členy těchto rovnic, natož odtud znát přesně hodnoty, které potřebujeme.

Tím Newton vyjádřil svoji ideu o manipulacích s mocninnou řadou, které se neliší od stejných manipulací s polynomem. Obava z nekonečnosti řady je přítomna, současně však také pocit, že stejně se potřebuje výsledek jen s určitou přesností, které lze v případě konvergentní řady dosáhnout tím, že se vezme v úvahu jen konečný, byť značně velký, počet jejích členů.

Předvedené druhy Newtonových úvah jsou zhruba tím, co lze nazvat „metodou infinitezimál“. Jeho momenty jsou nekonečně malé veličiny, nedělitelné nebo infinitezimály. Logika toho, co Newton dělal z dnešního pohledu příliš jasná není mnohdy také proto, že jsme vedeni aritmetizovanou a více méně definitivní podobou weierstrassovské analýzy. Ke způsobu svého výkladu sám Newton řekl, že je „spíše krátce vyložena než přesně dokázána“ (shortly explained rather than accurately demonstrated).

Druhý obšírnější a definitivnější výklad svých myšlenek podal Newton v knížce *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (knížka byla napsána v roce 1671 a publikována v roce 1736 po Newtonově smrti). Zde Newton říká, že jeho proměnné jsou vytvořeny jako *spojité* pohyby bodů, přímek a rovin spíše než statická seskupení infinitezimálních prvků, jak tomu bylo v první práci.

Proměnnou veličinu nazývá *fluentou* a veličinu popisující její změnu *fluxí.* Symboly $\dot{x}$ a $\dot{y}$ označují fluxe fluent x a y. Fluxí fluxe $\dot{x}$ je $\ddot{x}$; fluenta, jejíž fluxe je x, je označena x', fluenta s fluxí x' je označena x''.

Zřetelněji zde Newton formuluje základní úlohu analýzy:

Je-li dán vztah mezi dvěmi fluentami, má se určit vztah mezi jejich fluxemi a naopak.

Newtonova představa je taková, že jeho veličiny se mění s časem; považuje to za užitečnou představu, současně však praví, že to není nutné; vše může záviset i na něčem jiném, než na čase.

Když je o „nekonečně malý časový úsek“, pak jsou $\dot{x}o$ a $\dot{y}o$ neurčitě malé přírůstky x a y, neboli „momenty x a y“. Buď kupř. vztah mezi fluentami x a y dán ve tvaru

$$y = x^n.$$

Newton z tohoto nejdříve vytvoří

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

a pak postupuje jako dříve: pravou stranu rozvine dle binomické věty, odečte $y = x^n$, dělí o, zanedbá členy obsahující o a dostane

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x};$$

v Leibnizově symbolice to je

$$\frac{dy}{dt} = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}$$

a protože $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, nalézá Newton znovu

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Newtonův nový pohled zde je dynamický (= pohybový) a sleduje v podstatě dynamický způsob uvažování pocházející od Galilea. Starší Newtonův přístup byl poplatný spíše statickým nedělitelným částem jak byly pojaty u B. Cavalieriho. Newton se zřejmě snažil zmírnit tvrdou doktrínu nedělitelných částí, nicméně $\dot{x}o$ a $\dot{y}o$ jsou stále nekonečně malé veličiny. Navíc fluxe $\dot{x}$ a $\dot{y}$ fluent x a y nejsou ve skutečnosti vůbec definovány; základnímu problému se tedy Newton obratně vyhnul. Je ale celkem jasné, že fluxe $\dot{x}$ a $\dot{y}$ mají pro něj význam okamžitých rychlostí, jakými se mění fluenty x a y.

Je-li dán vztah mezi $\dot{x}$ a $\dot{y}$, je určení vztahu mezi fluentami x a y obtížnější. Podstata věci je v tom, že jde o integrování funkce proměnné x.

Newton rozlišuje jednotlivé případy:

(1) ve vztahu se vyskytuje $\dot{x}$, $\dot{y}$ a x nebo y,

(2) ve vztahu se vyskytuje $\dot{x}$, $\dot{y}$ a x a y,

(3) ve vztahu se vyskytuje $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ a také x, y a z .

První případ je docela jednoduchý, jde vlastně o řešení rovnice $\frac{dy}{dx} = f(x)$ a to vede, při snaze vyjádřit y v závislosti na x, k integraci $y(x) = \int f(x)dx$.

Ve druhém případě se zabývá Newton vztahem

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$$

(jedná se tedy v dnešní řeči o diferenciální rovnici $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy$) a řeší jej postupně (aproximacemi); začne s

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + x^2,$$

dostane y jako funkci x, dosadí do původní rovnice a pokračuje dál. Udává popis svého postupu, zdůvodnění (důkaz) ovšem chybí.

Třetí případ rozebírá opět na příkladě

$$2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0.$$

Předpokládá vztah mezi x a y, např. $x = y^2$, takže $\dot{x} = 2\dot{y}y$; pak původní rovnice přejde do rovnice

$$4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}y^2 = 0,$$

ze které se získá

$$z = 2y^2 + \frac{y^3}{3}.$$

Když se na původní rovnici podíváme jako na parciální diferenciální rovnici

$$2 - \frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

dostal Newton její „partikulární integrál". Obecné postupy tedy popsal na konkrétních případech.

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMUS PRIMUS.

GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXXXIX.

Titulní list Newtonových *Principií* z roku 1739

V *Tractatus de quadratura curvarum* (Traktát o kvadratuře křivek - napsáno 1676, publikováno 1704) Newton praví, že vyloučil infinitezimály čili nekonečně malé veličiny a kritizuje to, jak dříve zanedbával členy obsahující o. Nové pojetí je založeno na „metodě prvních a posledních poměrů": Newton vyšetřuje funkci $y = x^n$: k nalezení fluxe y nebo x^n nechť x „tokem" přejde v $x + o$. Potom x^n přejde v

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \dots,$$

přírůstky veličin x a y, tj. hodnoty o a $nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$ se k sobě mají jako

$$1 \quad \text{ku} \quad nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o x^{n-2} + \dots$$

Závěr je: *jestliže nyní přírůstky vymizí, potom se veličiny k sobě mají jako*

$$1 \quad \text{ku} \quad nx^{n-1}.$$

Je to jinak slovně popsaný postup pro určení známé derivace funkce x^n; snad je zde méně metafyziky než dříve, podstata problému ovšem je stejná – nekonečně malá veličina se nakonec promění v 0. Výhoda, kterou zde Newton pravděpodobně spatřuje, je v tom, že „poslední poměr" už neobsahuje dělení, při kterém by dělení nulou vadilo; odstranil to slovním vyjádřením poměru, ve kterém ovšem ke krácení veličinou o už došlo.

Newtonovo mistrovské dílo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické základy filozofie přírody) bylo poprvé publikováno v roce 1687. Jde o obsáhlou Newtonovu knihu, ve které veřejně předložil svou analýzu. Dříve sepsané práce oficiálně zveřejnil později nebo je nezveřejnil vůbec; ty kolovaly v opisech mezi jeho přáteli a spolupracovníky. Pokud jde o Newtonův základní pojem, tj. o fluxi (nebo jinak řečeno derivaci), o tom v Principiích učinil několikero prohlášení. Odmítl infinitezimály a nedělitelné veličiny ve formě, ve které se objevily v jeho dřívějších pracích a dal přednost veličinám, které lze libovolně zmenšovat. O posledních poměrech, o kterých jsme se zmínili výše, psal:

Poslední poměry, v nichž veličiny vymizí, nejsou přesně řečeno poměry konečných veličin, jsou to mezní hodnoty, ke kterým se poměry těchto neomezeně klesajících hodnot přibližují ...

V tomto Newtonově vyjádření už lze tušit předzvěst pojmu limity, kterým se kritická nejasnost a neupřesněnost pojmu infinitezimální veličiny nakonec vysvětlila a přivedla do dodnes přijatelné podoby.

V Principiích se Newton věnoval základům analýzy jen v malé míře. Dílo bylo hlavně zaměřeno na upřesnění základních pojmů mechaniky (setrvačnost, moment, síla) a na odvození základních zákonů (newtonovské) mechaniky. Připomeneme jen slavné Newtonovy pohybové zákony. Newton v knize pojednal o centrálních silách, gravitačním zákonu a mnohých dalších věcech a jedním z jeho cílů bylo odvození základních poznatků o pohybu planet a jiných těles ve sluneční soustavě.

Velmi jasně nesrovnalosti matematické analýzy v její rané fázi představil **George Berkeley** (1685 – 1753) ve spise *The analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician* (Analytik, neboli rozprava určená nevěřícímu matematikovi) z roku 1734. Oním matematickým bezvěrcem byl Newtonův žák, astronom Edmund Halley (1656 – 1742). Anglikánský biskup Berkeley se pustil do diskuse o tom, zda jsou základy matematiky pevnější než základy náboženství. Celkem s porozuměním pro podstatu věci pochyboval o podílech Newtonových fluxí nebo diferenciálů u Leibnize. Ty byly dle potřeby nenulové (pokud jimi bylo třeba dělit) anebo pak byly nulové, když to bylo vhodné pro zjednodušení výrazů. Přidal se tak k dřívějším kritikům pojmů nové analýzy a způsobů, jak se s nimi zacházelo. Berkeley usuzoval, že když výsledky získané prostředky náležitě neupřesněných pojmů dají skutečně použít a vedou ke správným poznatkům, muselo se postupovat tak, že se prohřešky vzájemně kompenzovaly.

Podívejme se pro ilustraci na jedno místo Berkeleyova spisu, v němž kritizuje Newtonovy vývody v Principiích. Newton v Lemmatu II. pojednává o momentech „vytvořeností“ (momentum genitae) a uvažuje např. o „vytvořenosti“ AB, když se faktor A změní o a a faktor B o b. Uvažuje o tom, jaká je změna (dnes diferenciál) součinu AB a říká, že tento moment je dán vztahem $aB + bA$. Pro důkaz nejdříve A zmenší o $\frac{1}{2}a$ a B zmenší o $\frac{1}{2}b$ a dostane výsledek $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$.Pak A zvětší o $\frac{1}{2}a$ a B zvětší o $\frac{1}{2}b$ a dostane $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Odečtením prvního výsledku od druhého usoudí, že změna součinu AB při změně A o a a B o b je právě $aB + bA$. Je to samozřejmě provedeno velmi účelově, aby nebylo třeba mluvit o tom, proč je součin ab tak malý, že se položí rovným nule, zatímco je aB a bA rovněž sice malé, ale vynechat se nemůže.

Berkeley k tomu namítá, že správně se má provést součin $(A + a)(B + b)$, který vede k „proměně“ $AB + aB + bA + ab$ a celkový přírůstek je $aB + bA + ab$. A říká … *a to platí ať už jsou veličiny a, b jakékoli, malé či velké. Nedovoluje to ani říci, že ab je mimořádně malé, poněvadž víme, že v otázkách matematických chyby, ať jsou jakkoli malé, nelze pominout.*

Newton se samozřejmě uchýlil k celkem průhlednému aritmetickému triku a kritikům, kteří s nejasně popsanými infinitezimálními veličinami pracovali dle pravidel normální aritmetiky, poskytl tučné a snadno dosažitelné sousto.

Analýza v 18. století

Matematická analýza vstupovala do osmnáctého století s velmi účinným a silným aparátem. Jeho nejpodstatnějším znakem bylo to, že zakladatelé nové vědy spojili navzájem dva dosti nesourodé a na první pohled cizí věci: integrování (výpočet plošných obsahů, objemů) a derivování (určování tečen ke křivkám). Formální postupy Newtona a Leibnize otevřely dříve netušené možnosti výpočtů, k dispozici byly algoritmy obecné povahy, které daly možnost zpracování nejrůznějších přírodovědných problémů jednotnou technologií. Základ všech úvah však byl víc než chatrný. Tím byl pojem infinitezimální veličiny

NEWTONOVA POSMRTNÁ MASKA

a zejména způsob, jakým se s ní manipulovalo. Naplnilo se to, co psal Huygens a co jsme na počátku tohoto pojednání citovali. Tvůrci nepochybně věděli o čem je řeč, nedali však věci v obecnou známost, *ušetřili si práci se sepisováním,* a věnovali se hlavně objevování. K tomu dlužno také říci, že např. Newton byl co do sdělování svých myšlenek velmi skoupý a mnohdy tajnůstkářský. Anagramy jeho objevů spíše zdržovaly, než sdělovaly. Ke všemu pak přistoupil ještě Newtonův známý prioritní spor s Leibnizem, který snad dodnes, ke škodě diferenciálního a integrálního počtu, ještě úplně neodzněl.

K vývoji analýzy v osmnáctém století přispělo mnoho matematiků, ale z hlediska matematiky je to století, které bývá označováno jako „století Eulerovo“. Věnujme proto pozornost hlavně této postavě.

Leonhard Euler se narodil v Basileji 15. dubna 1707 a zemřel v Petrohradě 7. září 1783. Byl vychován a vzděláván ve své rodném městě ve Švýcarsku pod vedením Johanna Bernoulliho, s jehož syny Danielem a Nicholasem jej pojilo celoživotní přátelství. Když v roce 1725 mladší z Bernoulliů odjel do Ruska na pozvání carevny, zařídil tam místo pro Eulera, který jej posléze v roce 1733 vystřídal na stolici matematiky. Nepřízeň klimatu v Rusku působila na Eulerův zesláblý zrak do té míry, že v roce 1735 zcela přestal vidět na jedno oko. V roce 1741 se přestěhoval do Berlína na žádost, či spíše příkaz Bedřicha Velikého a setrval zde do roku 1766. Poté, co jej v Berlíně vystřídal Lagrange, se vrátil do Ruska. Dva či tři roky po návratu do Petrohradu oslepl zcela. Navíc v roce 1771 zničil požár jeho dům včetně jeho rukopisů. Měl 13 dětí, 5 z nich se dožilo dospělosti. Říkával, že své největší objevy udělal, když měl v náručí nemluvně a u jeho nohou si hrály ostatní děti. Byl dvakrát ženat a v roce 1783 po mrtvici zemřel.[2]

Euler napsal mimořádně velké množství prací k nejrůznějším matematickým tématům, jeho produkce čítá 886 pojednání (včetně knih). O jeho hlavních pracech týkajících se matematické analýzy nyní pojednáme trochu podrobněji.

---

[2]Tyto stručné životopisné údaje uvádím dle knížky W. W. Rouse Balla *A Short Account of the History of Mathematics* (4th edition, 1908)

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS

LAUSANNÆ.

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

Titulní list Eulerovy knihy
Introductio in Analysin Infinitorum

V první řadě napsal v roce 1748 *Introductio in Analysin Infinitorum,* byla to kniha která měla sloužit jako úvod do čisté matematické analýzy. Je rozdělena do dvou částí.

První část *Analysis Infinitorum* obsahuje většinu informací, které dnes nalezneme v klasických učebnicích algebry, teorie rovnic a trigonometrie. V algebraické části Euler věnoval pozornost rozvoji různých funkcí do řad a sčítání řad. Zřetelně vyjádřil to, že nekonečné řady nelze zcela bezstarostně užít, pokud nejsou konvergentní. Pokud se jedná o trigonometrické funkce, rozvinul Euler myšlenku Johanna Bernoulliho, podle které tato věc je část analýzy a ne jenom dodatek k astronomii nebo geometrii. Zavedl rovněž trigonometrické funkce pomocí obecných definic, tak jak je známe i dnes.

Euler se v knize věnoval nekonečným řadám, součinům, řetězovým zlomkům. Kupř. zde nalezneme součty řady

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = s(k)$$

pro sudá k od 2 do 26. Dlužno zde poznamenat, že pro $k = 2$ objevil Euler součet této řady v roce 1736. Dokázal, že je $s(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

V knize se poprvé objevuje to, že pojem *funkce* je ústředním pojmem matematické analýzy. Euler uvádí, že „funkce proměnné veličiny je analytický výraz, který lze nějakým způsobem sestavit z proměnné veličiny, čísel a konstantních veličin.“ Podobnou definici udal už Johann Bernoulli, Euler ji ale uvedl v obecné povědomí ve své knize, která velmi dlouho udávala v analýze tón. Euler rovněž poprvé zavedl označení $f(x)$ pro obecnou funkci, která vyhovuje jeho definici.

V *Introductio* ... Euler poprvé obrací pozornost k číslu e a k funkci e^x. Uvádí definici, která je nezávislá na logaritmu. Do té doby byla exponenciální funkce funkcí inverzní k logaritmu (pochopitelně v dobové interpretaci a symbolice).

Euler přichází k tomu, že je

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \text{ a } \ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1).$$

To, že takto definované funkce jsou navzájem inverzní, odvodil z toho, že když je dán vztah

$$y = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N,$$

potom z něj lze určit x, tj. psát

$$x = N\left(y^{\frac{1}{N}} - 1\right)$$

a tím vyjádřit inverzní funkci. Euler v těchto vztazích písmenem N označuje nekonečně velkou veličinu.

Obtíž z dnešního pohledu je jen v tom, že pro limity (v tomto eulerovském označení pro $N \to \infty$) není zřejmé, zda jsou také navzájem inverzní. Subtilnost takového limitního přechodu je v tomto případě nahrazena dobovou velkorysostí a věc se má za jasnou.

Uveďme krátkou ukázku toho, jak Euler zacházel s nekonečně malými, resp. velkými veličinami. Byl si vědom (to je zřetelné z toho, jak s nimi zacházel), že převrácená hodnota nekonečně velké veličiny je nekonečně malá, a naopak.

Vyslovil kupř. definici logaritmu čísla x o základu a tak, že to je exponent y, pro který platí $a^y = x$ a poznamenal, že je $a^0 = 1$ pro jakékoliv a, to jest logaritmus čísla 1 je vždy roven nule.

Užijme zde označení ε pro nekonečně malou veličinu. Potom Euler předpokládá, že je

$$a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$$

a k je neznámá hodnota. Jinak řečeno, hodnota a^ε se od hodnoty $a^0 = 1$ liší málo a to „málo“ Euler předpokládá ve tvaru $k\varepsilon$.

Když bude x konečné číslo, potom je $N = \dfrac{x}{\varepsilon}$ nekonečně velká veličina.

Pišme

$$a^x = a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N = (1+k\varepsilon)^N = \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N =$$

$$= 1 + N\frac{kx}{N} + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \cdots =$$

$$= 1 + kx + \frac{1}{2!}\frac{N(N-1)}{N^2}(kx)^2 + \frac{1}{3!}\frac{N(N-1)(N-2)}{N^3}(kx)^3 + \ldots.$$

Jelikož je N nekonečně velké, je

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \ldots$$

(tím Euler říká v dnešní řeči, že $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n-l}{n} = 1$ pro konečné l), a proto

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots.$$

Pro $x = 1$ je

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \ldots$$

a pro $k = 1$ Euler zavedl označení

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Udal pro hodnotu e desetinný rozvoj $e = 2.71828\ldots$ na 23 desetinných míst.

S touto hodnotou e pak je

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

a to dnes (vzhledem k tomu, že N je dle Eulera nekonečně velké) můžeme psát jako

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n;$$

na druhé straně ze součtového vyjádření pak Euler dostane

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

V dalším výkladu Euler rychle přejde k logaritmům: položí

$$1 + y = a^x = a^{N\varepsilon} = (1+k\varepsilon)^N,$$

tj. $\log_a(1+y) = N\varepsilon$. Odtud dostane

$$1 + k\varepsilon = (1+y)^{\frac{1}{N}},$$

a proto

$$\varepsilon = \frac{(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1}{k}.$$

Dále pak

$$\log_a(1+y) = N\varepsilon = N\frac{(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1}{k} = \frac{N}{k}[(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1].$$

Položíme-li $a = e$ a $k = 1$, dostaneme podle výše uvedených úvah pro přirozený logaritmus (při základě e) rovnost

$$\ln(1+y) = N[(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1]$$

a tento vztah lze - s licencí o nekonečně velkém N - chápat v dnešním způsobu zápisu jako

$$\ln(1+y) = \lim_{n\to\infty} n[(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1].$$

Binomickým rozvojem pro $(1+y)^{\frac{1}{N}}$ se získá

$$(1-y)^{\frac{1}{N}} = 1 + \frac{1}{N}y + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)}{2!}y^2 + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)(\frac{1}{N}-2)}{3!}y^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{N}y - \frac{1}{2!}\frac{N-1}{N^2}y^2 + \frac{1}{3!}\frac{(N-1)(2N-1)}{N^3}y^3 - \dots.$$

Z toho, že pro nekonečně velké N je $\frac{N-1}{N} = 1$, $\frac{2N-1}{N} = 2, \dots$ (to znamená, že je $\lim_{n\to\infty}\frac{k.n-1}{n} = k$) pak dostaneme

$$\ln(1+y) = N[(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1] =$$

$$= N\left[1+\frac{1}{N}y-\frac{1}{2!}\frac{N-1}{N^2}y^2+\frac{1}{3!}\frac{(N-1)(2N-1)}{N^3}y^3-\dots-1\right]$$

$$= y-\frac{1}{2!}\frac{N-1}{N}y^2+\frac{1}{3!}\frac{(N-1)(2N-1)}{N^2}y^3-$$

$$-\frac{1}{4!}\frac{(N-1)(2N-1)(3N-1)}{N^3}y^3\dots=$$

$$= y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5\dots$$

a to je vyjádření funkce $\ln(1+y)$ ve tvaru nekonečné řady.

Řetězové zlomky Euler pojednal např. takto:

$$\frac{13}{8}=1+\frac{5}{8}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Ukázal, že racionální číslo lze psát ve tvaru *konečného* zlomku, iracionální číslo pak dá *nekonečný* řetězový zlomek, např.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}.$$

Euler se z hlediska matematiky, kterou vykládal v polovině 18. století, jeví jako velký experimentátor (skoro se chce říci „hračička") s formulemi. Svědčí o tom jeho knihy a toho druhu je i jeden z jeho největších objevů. Věnujme se mu chvíli.

V řadě $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$, kterou Euler získal výše uvedeným postupem pro exponenciální funkci, nahradil x výrazem ix, kde $i=\sqrt{-1}$. Všude dříve pracoval s reálnými hodnotami, zde se náhle, bez jakéhokoli blíže popsaného cíle, provede taková „schválnost". Euler dostane

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\dots$$

a využije to, co o mocninách $i=\sqrt{-1}$ ví, tj. že $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, ... a že se cyklus s periodou 4 opakuje. Dospěje k

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

a dopouští se dalšího „hříchu“: zamění pořadí členů v řadě tak, že oddělí reálné a imaginární členy (dnes víme, že tímto „přerovnáním“ lze obecně z konvergentní řady vytvořit řadu divergentní, zde tomu tak však naštěstí není). Výsledkem je

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots)$$

přičemž už od Newtona bylo známo, že

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \cos x$$

a

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x.$$

Konečně pak se dostane

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x. \tag{*}$$

Tím Euler spojil exponenciální funkci (byť s imaginárním argumentem) s trigonometrickými funkcemi. Jestliže se nyní v posledním vztahu nahradí ix výrazem $-ix$, dostane se na základě vlastností funkce sin a cos, že je

$$e^{-ix} = \cos x - i\ \sin x.$$

a pak už se také snadno dostanou vztahy pro funkce sin a cos:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ a } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Euler neodvodil své formulky z dnešního pohledu zcela rigorózně; přesto jeho vzorce obstály ve zkoušce času, jsou slavné a dodnes v hojné míře užívané. Přesné a správné odvození Euler přenechal nové generaci matematiků (Jean d'Alembert, Joseph L. Lagrange, A.-L. Cauchy, atd.).

Položíme-li např. v Eulerově formuli (*) $x = \pi$, dostaneme

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{nebo jinak též} \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

a to je formule považovaná za „nejkrásnější formuli matematiky“. Svazuje 5 nejdůležitějších matematických konstant, tj. $0, 1, i, \pi$ a e. Však také byla předmětem mnoha filozoficky zaměřených úvah matematiků.[3]

[3]Čísla e a π jsou velmi zvláštní, v matematické analýze by se objevila, ať už se k ní přistoupí z kterékoliv strany. Číslo π mimo jiné představuje poměr obvodu kružnice k jejímu průměru, je ale víceméně náhodné, že se definuje právě takto. De Morgan ve své knížce *Budget of Paradoxes* uvádí anekdotu, která ukazuje, jak málo takováto jednoduchá definice vypovídá o pravé podstatě čísla π. Vykládal jistému pojistnému matematikovi, jaká je naděje, že na konci nějakého časového úseku nějaká část dané skupiny lidí ještě bude naživu. A odvolal se přitom na statistický vzorec, v němž π vystupuje. Na otázku, která se právě π týkala, odvětil, že to je poměr obvodu kružnice k jejímu průměru. Jeho známý, který do toho okamžiku jeho výkladu pozorně naslouchal, jej přerušil a prohlásil „ Milý příteli, to musí být podvod; co může kružnice mít společného s počtem lidí, kteří na konci nějakého časového úseku jsou ještě naživu?“

Druhá část *Analysis Infinitorum* se týká analytické geometrie. Euler tuto partii zahájil klasifikací křivek na křivky algebraické a transcendentní a uvedl soustavu tvrzení platných pro všechny algebraické křivky. Užil jich pak pro obecnou rovnici druhého stupně ve dvou dimenzích. Předvedl, že reprezentuje různé kuželosečky a z obecné rovnice odvodil jejich vlastnosti. Uvedl rovněž klasifikaci kubických, kvartických a dalších algebraických křivek. Pak se zabýval otázkou, jaké plochy jsou popsány obecnou rovnicí druhého stupně ve třech dimenzích a jak je lze od sebe odlišit.

Po *Analysis Infinitorum* v roce 1755 následovala kniha *Institutiones Calculi Differentialis.* Toto je první učebnice diferenciálního počtu, kterou lze považovat za úplnou, i když ne vše co v ní je obsaženo lze považovat za přesné a dobře vyložené z dnešního pohledu.

Tyto knihy byly zúplněny publikací třídílné knihy *Institutiones Calculi Integralis* z let 1768 až 1770. Tam Euler zařadil výsledky ze svých dřívějších prací o integrálním počtu a také o diferenciálních rovnicích. Dílo shrnulo vše známé o předmětu, mnohá tvrzení však byla upravena a důkazy vylepšeny. Euler zde zavedl funkce Beta a Gama a diskutoval jejich vlastnosti, vše v rámci metod redukce a integrování. Eulerovy spisy měly četná další vydání a po velmi dlouhou dobu udávaly tón v matematice.

Klasické úlohy o izoperimetrických křivkách, brachystochroně v nehomogenním prostředí a teorie geodetik byly ve středu Eulerova zájmu hned zpočátku jeho matematické práce; šlo u úlohy, ke kterým jej přivedl jeho učitel Johann Bernoulli. Při jejich řešení se dostal k variačnímu počtu. Základní myšlenku v této oblasti formuloval v práci *Curvarum Maximi Minimive Proprietate Gaudentium Inventio Nova ac Facilis,* kterou publikoval v roce 1744. Úplný výklad pak podal v roce 1759 J. L. Lagrange.

V roce 1770 Euler publikoval svou *Anleitung zur Algebra* ve dvou dílech. Francouzské vydání s četnými dodatky Lagrangea vyšlo v roce 1794. Zde lze nalézt také binomickou větu pro reálný exponent, Euler se však nepokusil vyšetřit konvergenci příslušné řady, přestože sám rozeznal už dříve, že to je nezbytné.

Uvedená čtyři Eulerova díla shrnují většinu toho, co Euler vykonal na poli čisté matematiky. Napsal však také mnoho pojednání z matematické fyziky a aplikované matematiky své doby. Dotkl se téměř všech oblastí, které se tenkrát zkoumaly.

V mechanice pevných bodů určil obecné pohybové rovnice tělesa kolem pevného bodu. Uvedl obecné rovnice pohybu volného tělesa.

Obhajoval a rozpracovával také teorii „nejmenší akce“ pocházející od Maupertuise z roku 1751 v jeho *Essai de cosmologie.*

V hydrodynamice Euler rovněž uvedl obecné rovnice pohybu.

Těsně před smrtí se zabýval sepisováním pojednání o hydromechanice, v němž hodlal své dřívější výklady zcela předělat.

Jeho nejdůležitější práce z astronomie jsou *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum* z roku 1744, *Theoria Motus Lunaris* (1753) a *Theoria Motuum Lunae* (1772). Tam se zabýval problémem tří těles. Předpokládal, že vyšetřované těleso (kupř. Měsíc) s sebou „nese“ tři pravoúhlé souřadnicové osy, vzhledem k nimž se vztahují všechny zkoumané pohyby.

Zabýval se také optikou, v letech 1770–71 zveřejnil výsledky svých optických výzkumů ve třech svazcích s titulem *Dioptrica*.

Napsal též elementární práci o fyzice a základech matematické filozofie. Ta měla svůj původ v pozvání k přednáškám pro princeznu z Anhalt-Dessau. Přednášky byly zveřejněny v letech 1768–1772 ve třech svazcích s názvem *Lettres ... sur quelques sujets de physique ...* (známé jsou také pod názvem „Dopisy německé princezně") a staly se po dobu půldruha století standardním pojednáním o těchto věcech.

Euler je nejvíce znám svým vkladem do matematiky; zabýval se vším, co bylo důležité. Jeho srdci však byla blízká i filozofie. V době, kdy byl v Berlíně, účastnil se stále filozofických rozprav, zejména s Voltairem. Filozofická zdatnost Eulerova měla však své hranice, často se mýlil k zábavě ostatních. Příjemné pocity přitom asi neprožíval - Voltaire byl proslulý škodolibou ostrostí svého jazyka. Když se vrátil do Ruska, dostalo se mu jistého zadostiučinění. Kateřina Velká pozvala na svůj dvůr pověstného francouzského filozofa D. Diderota, který se k carevnině vzteku pokoušel přivést ji k ateizmu. Carevna požádala Eulera, aby jej umlčel. Jednoho dne se francouzský filozof, který neměl matematické znalosti, dozvěděl, že kdosi matematicky dokázal, že Bůh existuje. Euler předstoupil a řekl „Pane, je $e^{i\pi} = -1$, a proto Bůh existuje; co vy na to?" Diderot neměl ani potuchy o čem Euler mluví, pochopil však velký smích, který potom následoval a brzy poté se vrátil do Francie.

Eulerův spis *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748 je prvním a základním odůvodněním moderní analýzy po fundamentálních objevech Newtona a Leibnize. Euler se v této knize vypořádal svým způsobem s novým kalkulem tak, aby byl použitelný v ostatních vědách.

V náznaku jsme viděli, že Euler připustil komplexní čísla v rovnocenné poloze s reálnými čísly, jako argumenty, resp. hodnoty, funkcí. To byl velmi významný Eulerův krok z hlediska dalšího vývoje matematiky. Už na začátku 18. století vedl Leibniz s Johannem Bernoullim diskusi o smyslu a existenci logaritmů záporných či komplexních čísel. Euler se do této problematiky pustil v roce 1749 a např. tvrdil, že každé číslo má nekonečně mnoho logaritmů. Jeho úvahy byly velmi blízké dnešním úvahám o logaritmu komplexního čísla.

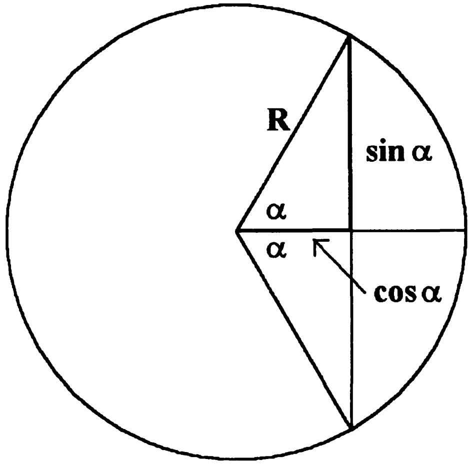
Připomeňme, že Euler také provedl standardizaci trigonometrických funkcí. Před ním byly funkce sin a cos úhlu α vztažené vždy ke konkrétní kružnici o poloměru R tak, že $\sin\alpha$ bylo dáno jako polovina tětivy, která odpovídá středovému úhlu 2α a $\cos\alpha$ bylo dáno jako vzdálenost středu kružnice od této tětivy.

Eulerova standardizace spočívala v tom, že tyto definice vztáhl ke kružnici s $R = 1$. Tím podal definice funkcí sin a cos v té podobě, jak je známe dnes.

PROJEVY KRIZE ANALÝZY

Matematická analýza vkročila do osmnáctého století se značnými nejistotami, pokud jde o její logické základy. Tyto nejistoty se v průběhu století neodstranily, nebránily však přitom velmi rychlému rozvoji nových metod výpočtů, které slavily velké úspěchy v oblasti přírodních věd a v matematickém způsobu vysvětlování a klasifikování jevů např. ve fyzice, astronomii a technice.

JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT
(1717 – 1783)



7. K definici funkcí sin a cos.

Po celé 18. století se na integrování hledělo jako na operaci opačnou k derivování, jak to odhalili Newton s Leibnizem. Integrování bylo pojednáno jako zcela formální početní manipulování s výrazy. Zdokonalení a leckdy velmi důvtipné užívání technik pro formální výpočty je pro Eulerovu dobu příznačné.

Prvním krokem k odstranění potíží, na které poukázal už Berkeley, byla explicitní definice derivace jako limity podílu přírůstků. K tomuto kroku se odhodlal **Jean d'Alembert** (1717 – 1783) v článku *Différentiel* ve čtvrtém svazku slavné francouzské *Encyclopédie.* D'Alembert zde mimo jiné napsal:

Newtonova metafyzika v kalkulu fluxí je velmi přesná a průhledná přesto, že nám umožnil do svých úvah nahlédnout jen velmi zběžně ... diferenciální počet (tj. matematická analýza) *nepředpokládá nutně existenci nekonečně malých veličin, ty slouží jen ke zkrácení a zjednodušení úvah, analýza ve skutečnosti spočívá v algebraickém určení limity podílu, pro který vždy máme vyjádření pomocí úseček ... diferenciály jsou limity podílu dvou konečných veličin.*

D'Alembert ve svém encyklopedickém článku tedy představuje derivaci ve tvaru, který bychom v podobě dnes přijatelnější mohli jednoduše psát jako

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

kde Δx a Δy znamenají přírůstky nezávisle a závisle proměnných veličin daných vyšetřovanou funkcí.

D'Alembert pro Encyklopedii rovněž napsal článek *Limite,* kde se věnoval pojmu limity, který už v té době mezi matematiky latentně koloval. V d'Alembertově článku se setkáváme s touto formulací:

Říkáme, že jedna veličina je limitou jiné veličiny, když se druhá veličina může přiblížit k první natolik, že se od ní bude lišit méně než o libovolně předem danou a jak jen třeba malou veličinu, i když veličina, která se k jiné přibližuje, ji nikdy nemůže překročit ... V tomto slovním vyjádření limitního přechodu je vtělena jistá představa, která je z dnešního pohledu pochopitelně velmi nepřesná a nejasná. Není např. zřejmé, co se myslí tím, že ***veličina, která se k jiné přibližuje, ji nikdy nemůže překročit.*** Může se na to např. hledět jako na jednostrannou limitu v reálném oboru?

Pojem limity d'Alembert nepopsal s tou přesností, jaká se objevila později v 19. století, nicméně dost zřetelně definoval derivaci jako limitu podílu přírůstků a ne jako podíl fluxí či diferenciálů. Podal tím vysvětlení Newtonových a Leibnizových zkratek pro totéž. D'Alembertův náhled na věc však neměl okamžitý vliv na výklad základů matematické analýzy. Většina knih a učebnic setrvala hlavně na Leibnizově přístupu s celým bludištěm diferenciálů a jim příslušnou nejasnou metafyzikou.

Jinou velmi výraznou osobností matematiky 18. století, **Joseph Louis Lagrange** (1736 – 1813). Předložil souvislý výklad matematické analýzy, který byl zamýšlen tak, aby byly odstraněny veškeré odkazy na diferenciály, infinitezimální veličiny a limity. Lagrangeova kniha z roku 1797 měla název *Théorie des Fonctions Analytiques.* Lagrange prezentoval přístup založený na rozvoji funkce $f(x)$ do mocninné řady. Jestliže nezávisle proměnnou x nahradí hodnotou $x + i$ (zde je i něco jiného než imaginární jednotka), pak z „teorie řad“ dostane

$$(*) \qquad f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots,$$

přičemž koeficienty $p, q, r, \dots$ jsou nové funkce proměnné x, odvozené (derivé) z původní funkce $f(x)$. Lagrange usiloval o důkaz toho, že s výjimkou několika speciálních hodnot x, lze pro *každou funkci* psát $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 \dots$, kde se vyskytují jenom přirozené mocniny veličiny i. Jde tedy z dnešního pohledu o funkci, která je v bodě x *analytická.* Když se na to podíváme z hlediska dnešní matematiky, jde skutečně o teorii analytických funkcí, nejsou to ale *libovolné* funkce. Cauchy velmi brzy poznamenal, že existují jednoduché funkce, např. funkce $e^{-\frac{1}{x^2}}$, které v Lagrangeově smyslu analytické nejsou.

První koeficient p v řadě (*) Lagrange označil $p(x) = f'(x)$ a nazval první funkcí odvozenou (derivé) z funkce $f(x)$. Pochopitelně se ukázalo, že tato funkce $f'(x)$ je derivací funkce f v bodě x, máme-li to říci v dnešní řeči a symbolice. Lagrangeova kniha je ovšem zdrojem označení $f'(x)$ pro derivaci funkce $f(x)$ stejně tak, jako zdrojem pro název *derivace.*

K určení dalších koeficientů pak Lagrange ve vztahu (*) nahradil i výrazem $i + o$ a dostal

$$f(x+i+o) = f(x) + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \dots$$

a

$$f(x+i+o) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots + po + 2pio + 3ri^2o + \dots.$$

Dále pak v (*) nahradil x výrazem $x + o$ a dostal trochu jiný vztah

$$f(x+i+o) = f(x+o) + p(x+o)i + q(x+o)i^2 + r(x+o)i^3 + \dots =$$

$$= f(x) = f'(x)o + \cdots + [p(x) + p'(x)o + \ldots]i + [q(x) + q'(x)o + \ldots]i^2,$$

tj.

$$f(x+i+o) = f(x)+p(x)i+q(x)i^2+r(x)i^3+\ldots p'(x)io+q'(x)i^2o+r'(x)i^3o+\ldots.$$

Srovnáním koeficientů v těchto dvou různých vyjádřeních pro $f(x+i+o)$ dostal

$$q(x) = \frac{1}{2}p'(x) = \frac{1}{2!}f''(x),$$

$$r(x) = \frac{1}{3}q'(x) = \frac{1}{3!}f'''(x),$$

$$s(x) = \frac{1}{4}r'(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(x), \text{ atd.}$$

Přitom $f''(x)$ označuje první funkci „odvozenou“ z funkce $f'(x)$, tj. derivaci derivace $f'(x)$, atd. Odtud pak se ihned dostane – zcela formálně – vztah

$$f(x+i) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}i + \frac{f''(x)}{2!}i^2 + \frac{f'''(x)}{3!}i^3 + \ldots,$$

a to není nic jiného, než Taylorova řada pro funkci $f(x)$.

Nakonec pak Lagrange uvedl, že pouze málo znalostí z diferenciálního počtu je potřeba k tomu, aby se rozeznalo, že „odvozené“ funkce, tj. derivace $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... jsou postupné derivace funkce $f(x)$ ve smyslu starších definic.

Lagrangeův pokus vytěsnit všechny infinitezimální a limitní úvahy z analýzy nebyl úspěšný. Byl to projev jistého purismu, na který dnes musíme hledět tak, že základní problém obešel jenom formálně. Infinitezimální a limitní úvahy jsou přítomné, zůstávají ovšem nevysloveny v pozadí. Lagrangeova kniha ale obsahuje velké množství podstatných příspěvků k analýze. Toho druhu je kupř. vyjádření zbytku pro Taylorovu řadu, kterému se dnes říká Lagrangeův zbytek. Odvození jeho tvaru v dnešních učebnicích diferenciálního počtu je přesnou kopií Lagrangeova postupu.

Celé osmnácté století v základech matematické analýzy nepřineslo podstatný pokrok, který by v učebnicích a jim podobných základních textech vyložil přesnější zdůvodnění Newtonova a Leibnizova postupu založeném na infinitezimálních veličinách. Na druhé straně toto století přineslo mimořádně velký nárůst poznatků v analýze, o nichž jsem se zde nezmínil skoro vůbec. Šlo o poznatky, které velmi obohatily přírodovědné poznání a ve srovnání s počátky u Newtona a Leibnize šly do subtilnějších detailů – toho druhu jsou např. základy variačního počtu pocházející od Eulera.

Vedle toho však v obecné povědomí vešlo to, že stav matematické analýzy není uspokojivý.

Eulerovy knihy rovněž uvedly pojem funkce do role centrálního pojmu a objektu vyšetřování v matematické analýze. D'Alembertův příspěvek do francouzské encyklopedie naznačil první krok k upřesňování analýzy, ukázal, že problém lze řešit pomocí (z dnešního hlediska) ne zcela upřesněného pojmu limity. Ale základní představy byly na světě, směr byl vytyčen.

Otázkou je, co vlastně mělo být oním upřesňováním pojmů. Od renesančních dob a přístupů (viz Huygensovo vyjádření citované v úvodu) lze sledovat více méně heuristický (nebo metafyzický) přístup, věci jsou takové, jaké jsou, je třeba jich užívat a o fundamenty se příliš nestarat. Důkazy jsou zbytečné zdržování na cestě k novým poznatkům. Konec osmnáctého století však už dává znát, kudy matematická analýza bude dále postupovat. Je nutno upřesnit pojmy, tj. uvést *definice*. Další věci pak z definicí *odvozovat*. V tom lze spatřit snahu navrátit se ke starým řeckým postupům: z definicí logicky odvozovat vlastnosti objektů, o kterých definice mluví. Dlouhý čas, který uplynul od počátků daných Leibnizem a Newtonem, přinesl velmi velké množství nových a efektivně použitelných postupů. Bylo jasné, že všem z nich je třeba dát jasný a dokonale logický základ. Všeho bylo moc. Úkol pro nadcházející epochu byl velmi velký a náročný.

K POJMU FUNKCE

Výše jsme se zmínili o tom, že Eulerovou zásluhou se pojem funkce stal ústředním objektem diferenciálního a integrálního počtu. Podívejme se stručně na chronologický vývoj tohoto pojmu.

Definice pocházející od Johanna Bernoulliho z počátku 18. století:

Funkcí proměnné veličiny se nazývá kvantita sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a z konstant.

Neupřesněná Bernoulliova „kvantita“ se s postupem doby upřesňovala.

Euler v *Introductio in analysin infinitorum* v roce 1748 říká:

Funkce proměnné veličiny je analytický výraz, který lze nějakým způsobem sestavit z proměnné veličiny, čísel a konstantních veličin.

Nedlouho potom Euler v roce 1755 v *Institutiones Calculi Differentialis* uvádí:

Když nějaké kvantity závisejí na jiných tak, že při změně posledních se samy také mění, pak se první nazývají funkcemi druhých. Toto pojmenování má mimořádně širokou povahu, zahrne v sobě všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných.

Co vlastně měl Euler na mysli, když psal *všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných,* je trochu nejasné. Na druhé straně lze však odsud vyčíst definici funkce skoro ve stejné podobě, v jaké ji podal Dirichlet v 19. století.

S. F. Lacroix (1765 – 1843) v dvoudílném *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* z let 1797 – 1798:

Staří analytici obecně pod názvem funkce nějaké veličiny chápali všechny mocniny této veličiny. V dalším pak rozšířili smysl tohoto slova tak, že jej užili na výsledky algebraických operací: funkcí jedné nebo několika veličin nazvali též libovolný algebraický výraz, sestavený nějakým způsobem ze součtů, součinů, mocnin a odmocnin těchto veličin. Konečně nové myšlenky, které vznikly díky rozvoji analýzy, vedou k následující definici funkce:

Každá veličina, která závisí od jedné nebo několika jiných veličin, se nazývá funkcí těch posledně jmenovaných, když známe nebo neznáme, jaké je nutno provést operace, abychom z nich první veličinu dostali.

Jde o novou formulaci Eulerovy definice s tím, že operace, které s nezávislými veličinami nutno provádět pro získání „funkční hodnoty", nemusí vlastně ani být známé.

M.J.A.N. Condorcet (1743 –1794) v roce 1779 (v nezveřejněném druhém vydání učebnice):

Předpokládám, že je dán jistý počet veličin $x, y, z, \ldots, F$ a že pro každé určené hodnoty x, y, z atd. má F jednu nebo několik určených hodnot, které jim odpovídají; říkám pak, že F je funkcí $x, y, z, \ldots$.

Condorcet pak ještě dodal, že funkční závislost F na $x, y, z, \ldots$ existuje i v tom případě, že *neznám ani způsob vyjádření F a neznám ani rovnici, kterou je dána.* (V prvním případě se u něj jedná o matematický předpis analytickým vzorcem pro funkční hodnotu a ve druhém případě má zřejmě na mysli implicitní vyjádření funkce.)

I když v Eulerově formulaci z roku 1755 lze vytušit pojem funkce jako obecného předpisu, který hodnotám nezávisle proměnné přiřadí libovolným způsobem hodnotu závisle proměnné a v Lacroixových a Condorcetových formulacích to je patrné ještě více, stále setrvával stav mysli, dle kterého bylo možné metody diferenciálního a integrálního počtu oprávněně užít jen tehdy, když funkce je vyjádřena všude pomocí jedné a téže algebraické či transcendentní rovnice. Požadavek na funkce tohoto druhu byl popsán slovy, že „funkce se chová dle zákona spojitosti formy". Ale Euler sám už rozeznal tu skutečnost, že požadavek je nerealistický ve vztahu k užití metod matematické analýzy. Kupříkladu pro kmity struny, které lze popsat parciální diferenciální rovnicí a počáteční podmínkou, je vhodné udat tuto podmínku pomocí různých (např. lineárních) funkcí na různých intervalech. A taková funkce se evidentně nemusí chovat „dle zákona spojitosti formy". Euler z tohoto důvodu připouštěl do matematické analýzy funkce, kterým bychom dnes mohli říkat po částech hladké.

Obecně vzato přijatelné a pro matematickou analýzu vhodné byly funkce „spojité" v tom smyslu, že pro jejich zadání sloužil stálý analytický výraz. V protikladu k tomu stála moderní varianta pojmu, jehož intuitivním pozadím je „souvislost" grafu funkce, k níž se za chvíli dostaneme. Nespojitost tedy byla koncem 18. století chápána jako jistá nestálost popisu funkce vzorcem, „spojitost" mohla být porušena v některých bodech, kde se změnil analytický tvar výrazu, kterým byla funkce určena. Toto pojetí se na přelomu 18. a 19. století zcela proměnilo.

Z počátku 19. století pocházejí základní výsledky **J. B. Fouriera** (1768 - 1830), ke kterým dospěl při zkoumání rovnice pro vedení tepla. Slavná Fourierova kniha *Theorie analytique de la chaleur* vyšla v roce 1822, počátky Fourierova výzkumu se však datují rokem 1807.

Typickou Fourierovou úlohou je určení funkce $u(x, y)$, která udává ustálenou teplotu v nekonečném pásu $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$ a je dána rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0$$

a

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

přičemž $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ udává teplotu na základně popsaného nekonečného pásu. Fourier podotkl, že funkce

$$e^{-ny} \sin nx \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

splňují Laplaceovu rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a též okrajovou podmínku $u(0,y) = u(\pi, y) = 0$. Zjišťuje, že

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx$$

tuto vlastnost rovněž má a zkoumá, jak naplnit volbou vhodných konstant $b_1, b_2, \dots$ v tomto posledním vztahu podmínku $u(x,0) = \varphi(x)$. Touto úvahou dospívá ke vztahu

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Po dosti zdlouhavém výpočtu pak Fourier přišel na to, že musí být

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx,$$

tzn. určil dnes dobře známou formulku pro Fourierovy koeficienty sinové Fourierovy řady pro funkci φ.

Dospěl také k tomu, že pro jeho postup je zcela nevýznamné, jaká je funkce φ. Důležitá v této souvislosti je jenom to, aby (řečeno dnešními slovy) existoval integrál $\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx$. Fourierovy formulace jsou pochopitelně trochu jiné, přiměřené době, kdy o tom psal. Zdůrazňuje však také, že není nutné, aby funkce $\varphi(x) \sin nx$ měly primitivní funkce, které případně umožní výpočet integrálu na Eulerův (Newtonův) způsob, stačí existence „plochy“ vymezené těmito funkcemi.

O něco později pak Fourier užívá pojem „libovolné“ funkce a dle toho, jak s ním pracuje, je zřejmé, že jej chápe v Dirichletově smyslu. Ve své knize o tom píše:

Obecně vzato funkce $f(x)$ představuje posloupnost hodnot nebo ordinát, z nichž každá je libovolná ... .

Vůbec se nepředpokládá, že se tyto ordináty podřizují obecné zákonitosti; mohou následovat zcela libovolně a každou z nich lze zadat jako by to byla jediná veličina.

Z povahy problému (jde o reprezentaci funkce Fourierovým integrálem) *a z použité analýzy by se mohlo zdát, že přechod od jedné ordináty ke druhé se uskutečňuje spojitým způsobem. Pak ale jde o speciální podmínky ... . Postup lze oprávněně použít i v případě nespojitých funkcí.* (Co Fourier má na mysli, když mluví o „nespojitých funkcích“, není zřejmé.)

Trigonometrické řady ve Fourierově pojetí vzbudily velkou pozornost u matematiků. Poznalo se, že trigonometrická řada daná jednotným předpisem (tj. chová se „dle zákona spojitosti formy“) může představovat funkci, která v různých intervalech dá „různé“ funkce. Kupř. součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

má pro $0 < x < \pi$ hodnotu $\frac{\pi}{4}$, pro $\pi < x < 2\pi$ hodnotu $-\frac{\pi}{4}$ a pro $x = \pi$ má hodnotu 0. Tím se definitivně narušila od Eulerových dob vžitá představa.

Jasné a v jistém smyslu konečné slovo o představách o pojmu funkce udal v roce 1837 **P. G. Lejeune Dirichlet** (1805 - 1859):

Pod a a b budeme rozumět dvě pevné hodnoty a pod x proměnnou veličinu nabývající všech hodnot mezi a a b. Jestliže každému x odpovídá jedno jediné konečné y a přitom tak, že když x spojitě probíhá interval od a do b, pak se $y = f(x)$ mění rovněž spojitě, pak se y nazývá spojitou funkcí x pro tento interval.

Dirichlet tímto definuje sice spojitou funkci, současně ale zřetelně určuje pojem funkce jako přiřazení jediné hodnoty y hodnotě x, která leží v intervalu mezi a a b. To je základ pro určení funkce v dnešní podobě. Definice se sice dle potřeb a oblastí, ve kterých se funkce vyšetřují, různě může obměňovat, podstata ale je více méně stejná.

19. STOLETÍ

Vraťme se však na počátek 19. století a k dalšímu vývoji představ o základních pojmech matematické analýzy. Věnujme se aktivitám na našem území, které prezentoval na počátku 19. století **B. Bolzano** (1781 - 1848). Ve spise *Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgroessen dienen, genauer als bisher erwiesen* (uvedu překlad celého titulu: Binomická věta a jako její důsledek věta polynomická jakož i řady, které slouží k výpočtu logaritmů a exponenciálních veličin, vyložené přesněji než doposud Bernardem Bolzanem, doktorem filozofie, c. k. profesorem náboženské vědy na Karlo - Ferdinandově universitě a řádným členem král. společnosti věd v Praze) z roku 1816 v úvodní partii vysvětluje svůj přístup k nekonečně malým veličinám:

... nejenom v tomto spise, ale i všude jinde jsem si stanovil zákon, podle nějž mi místo takzvaných nekonečně malých veličin všude stejně úspěšně poslouží **veličiny, které mohou být menší než každá daná** (veličina), *nebo (jak je, abych se vyhnul monotónnosti výkladu, i když už méně přesně rovněž pojmenovávám) veličiny, které mohou být tak malé, jak právě chceme. Doufám, že rozdíl mezi veličinami tohoto druhu a tím, co si jinak představujeme pod názvem nekonečně malého, nebude pominut. Požadavek, představovat si veličinu (myslím tím* (veličinu) *proměnnou), která může být vždy menší, než jak už jsme ji zvolili a vůbec může být menší než každá daná* (veličina), *neobsahuje přece skutečně nic, co by někoho mohlo zarážet. ... Naproti tomu představa veličiny, o které nelze předpokládat, že ji lze vzít menší, nýbrž tato už* (rovnou) *má být*

menší než nejenom daná, ale jenom údajná, tj. myslitelná veličina, neměla by ta být sporná? Nicméně takto zní obvyklé vysvětlení nekonečně malého.

Do vývoje matematické analýzy se velmi výrazně zapsal další Bolzanův spis *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die entgegengesetztes Resultat gewähre, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Ryze analytický důkaz poučky, že mezi každými dvěma hodnotami, které dávají opačný výsledek, leží aspoň jeden reálný kořen rovnice) z roku 1817. Jde o práci, ve které Bolzano dokázal tvrzení uvedené v jejím názvu. Řečeno jinak: jde o tvrzení, dle kterého spojitá funkce na intervalu nabývá všech hodnot, které leží mezi funkčními hodnotami v krajních bodech onoho intervalu.

Je to nevelký dokument o 60 stranách malého formátu, mnohé obecné názory elitních matematiků oné doby však ilustruje velmi názorně.

Uvedeme z něj několik citací. Nejprve něco obecného:

Skutečně, kdokoli když uváží, že důkazy ve vědě nikterak nejsou pouhými ujištěními, ale daleko více mají být odůvodněním, tj. předložením onoho objektivního důvodu, který je příčinou dokazované pravdy, tomu se samo od sebe ujasní, že pravý vědecký důkaz nebo objektivní důvod nějaké pravdy, která platí pro všechny veličiny, lhostejno, zda jsou v prostoru či nikoli, nemůže spočívat na pravdě, která jednoduše platí jen o veličinách, které jsou v prostoru. Pokud se přijme tento názor, lze daleko více pochopit, že tohoto druhu geometrický důkaz, s jakými se setkáváme ve většině případů, a tak je tomu i v našem případě, je ve skutečnosti kruhem (důkazem v kruhu). *Je-li totiž geometrická pravda, které se zde dovoláváme (jak jsme to už zde uznali) nanejvýše evidentní, a jako ujištění nepotřebuje důkazu, potřebuje nicméně odůvodnění.*

Na tomto místě je u Bolzana zřetelně cítit konflikt mezi „ujištěním" a „odůvodněním" *(Gewißmachung* a *Begründung)*. Svým názorům, které se týkaly vědeckých metod a způsobů uvažování Bolzano věnoval velkou pozornost a napsal o těchto věcech nesrovnatelně více než o matematice, a zejména o analýze. Jde o jeho rozsáhlé dílo *Wissenschaftslehre.*

Obraťme ale pozornost k Bolzanovým postupům v analýze tak, jak se jeví v jeho výše citovaném spise. Poté co rozebral tvorbu pojmů a způsoby uvažování dřívějších matematiků, dostává se k tomuto:

... poznamenejme nejdříve, že základem úvah je nesprávný pojem spojitosti. Po řádném výkladu se totiž rčením, že funkce fx se pro všechny hodnoty x, které jsou v rámci nebo mimo rámec jistých omezení,[4] *mění podle zákona spojitosti, rozumí jen to, že když je x taková hodnota, lze rozdíl $f(x+\omega) - fx$ udělat menším než je každá daná veličina, když lze ω vzít tak malé, jak jen si přejeme.*

Poznamenejme, že v uvedených dvou spisech B. Bolzana o analýze není zmínka o tom, co rozumí pod pojmem funkce. Na jeho představu nebo lépe řešeno definici lze soudit jen na základě kontextu. A ten napovídá, že pojem funkce byl pro Bolzana dostatečně obecný, pravděpodobně to byl obecnější

[4] *Existují funkce, které se pro všechny hodnoty svého kořene mění spojitě, např. $\alpha x + \beta x$. Jsou ale i jiné, které se mění podle zákona spojitosti jenom v rámci nebo mimo rámec jistých hraničních hodnot svého kořene. Tak se mění $x + \sqrt{(1-x)(2-x)}$ spojitě jen pro všechny hodnoty x, které jsou $< +1$, nebo $> +2$; nikoliv ale pro hodnoty, které leží mezi $+1$ a $+2$.* (Tato poznámka pod čarou je Bolzanova.)

Eulerův pojem z roku 1755. Nicméně jak je vidět z uvedeného citátu, udává na tomto místě i dnes přijatelnou definici spojitosti funkce v bodě.

V kritice prací starších autorů Bolzano pokračuje:

Ale to, že se v důkazu říká, že spojitá funkce se nikdy nedostane k vyšší hodnotě, aniž by předtím prošla všemi nižšími hodnotami, tj. že $f(x + n\Delta x)$ *může nabýt všech hodnot ležících mezi* fx *a* $f(x + \Delta x)$, *když se* n *vezme libovolně mezi* 0 *a* $+1$, *to je sice velmi pravdivé tvrzení, nelze je však považovat za vysvětlení pojmu spojitosti, je daleko více poučkou o něm, a sice takovou, kterou lze dokázat předpokládáním* (platnosti) *samotné věty, k jejímuž důkazu by zde měla být použita.*

Bolzano zde dosti výrazně varuje a upozorňuje na důkaz kruhem u dřívějších autorů. To mohlo například být způsobeno i tím, že nebyla dána jasná definice spojitosti funkce. Bolzano ji udal a pokračoval z ní dále logickými dedukcemi.

Samotnou větu, o kterou v práci jde, Bolzano formuluje takto:

Jestliže se dvě funkce fx *a* φx (proměnné) x *mění buďto pro všechny hodnoty* x, *nebo pro ty, které leží mezi* α *a* β *dle zákona spojitosti; a je-li dále* $f\alpha < \varphi\alpha$ *a* $f\beta > \varphi\beta$, *pak existuje vždy jistá hodnota* (proměnné) x *ležící mezi* α *a* β, *pro kterou je* $fx = \varphi x$.

Dnes víme, že jde o jednu z hlubších vět matematické analýzy, která vyžaduje dobrou znalost struktury reálných čísel. K tomu problému se obrací i Bolzano a v této souvislosti formuluje v §7. citované práce poučku:

Má-li řada veličin

$$\overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}, \ldots, \overset{n}{F}, \ldots, \overset{n+r}{F}, \ldots$$

tu vlastnost, že rozdíl mezi jejím n*-tým členem* $\overset{n}{F}$ *a každým pozdějším* $\overset{n+r}{F}$, *ať je jakkoli od něj vzdálen, zůstane menší než každá daná veličina, když bylo zvoleno* n *dosti velké, pak existuje vždy jistá stálá veličina, a sice jenom jedna, jíž se členy této řady stále více blíží, a jíž se mohou přiblížit tak, jak jenom chceme, budeme-li v řadů pokračovat dost daleko.*

Jde samozřejmě o dost šroubovaně podanou tzv. Bolzanovu - Cauchyovu podmínku pro existenci limity $\lim_{n\to\infty} \overset{n}{F}$ posloupnosti hodnot

$$\overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}, \ldots, \overset{n}{F}, \ldots, \overset{n+r}{F}, \ldots,$$

neboli, řečeno v dnešní řeči ještě jinak, jde o úplnost množiny reálných čísel.

Jinou věc nalezneme v poučce v §12.

Když vlastnost M *nepřísluší všem hodnotám proměnné veličiny* x, *když ji však mají všechny hodnoty, které jsou menší než jisté* u, *pak vždy existuje veličina* U, *která je největší z těch, o nichž lze tvrdit, že všechna menší* x *vlastnost* M *mají.*

Pozornějším přečtením se dostaneme k poznatku, že Bolzano tvrdí, že existuje infimum (ona veličina U) množiny všech reálných čísel u takových, že všechna $x < u$ mají vlastnost M. Jedná se tedy také o zcela fundamentální poznatky související s pojmem reálného čísla, které zde Bolzano předkládá.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY
(1789 – 1857)

Další z matematiků počátku 19. století **A.-L. Cauchy** (1789 - 1857) poprvé v ucelené podobě pojednal matematickou analýzu na základě poměrně jasného vymezení pojmu limity. Ve své učebnici *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* z roku 1821 kupř. říká:

Když se postupné hodnoty přiřazené k nějaké proměnné neurčitým způsobem přibližují k pevné hodnotě tak, že se nakonec od ní odlišují tak málo, jak si jen lze přát, je tato (pevná) hodnota nazvána limitou těch ostatních. Proto je, například, iracionální číslo limitou různých zlomků, které se stále více a více přibližují k jeho hodnotě.

Prostředek, kterým Cauchy „usmířil přesnost s infinitezimálami“, byla nová definice infinitezimálně malých veličin, jež se vyhnula pevně daným infinitezimálně malým veličinám. Cauchy definoval infinitezimálu („nekonečně malou“) nebo nekonečně malou veličinu jednoduše jako proměnnou veličinu s nulovou limitou:

Říkáme, že proměnná veličina se stává nekonečně malou, když její číselná hodnota klesá tím způsobem, že konverguje k hodnotě nulové.

I pro Cauchyho, stejně jako pro Bolzana, „infinitezimály“ přestávají být nekonečně malými pevnými čísly, která dříve způsobila tolik sporů, neporozumění a nesrovnalostí. Stávají se „potenciálně“ malými veličinami.

Pokud jde o pojem spojitosti, zavádí jej Cauchy skoro stejně jako to udělal Bolzano:

... *přidejme proměnné x nekonečně malý přírůstek α, funkce samotná zaznamená jako přírůstek rozdíl*

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

který bude záviset jak na nové proměnné α, tak i na hodnotě x. Je-li tomu tak, funkce $f(x)$ bude spojitou funkcí proměnné mezi hranicemi určenými pro proměnnou x, když pro každou hodnotu x mezi těmito hranicemi, číselná hodnota $f(x+\alpha) - f(x)$ bude nekonečně klesat s klesajícím α.

Jinými slovy, funkce $f(x)$ bude spojitá vzhledem k x v daných mezích, když v rámci těchto mezí nekonečně malý přírůstek proměnné vždy vytvoří nekonečně malý přírůstek funkce samotné.

K slovnímu popisu, který uvádí Bolzano i Cauchy, se dnes můžeme tvářit velmi skepticky, příliš mnoho slov popisuje celkem jednoduchou skutečnost. Jejich práce však byla pionýrská a naše případná skepse může pramenit jen z toho, že už víme jak během 19. století byly pojmy zjednodušeny do aritmetické podoby. Porovnáme-li Cauchyovo vyjádření s Bolzanovým, musíme konstatovat, že ze současného pohledu byl Bolzano stručnější a přesnější než Cauchy. Cauchy ale tím, že působil v Paříži, centru tehdejší matematiky, a tím jak udával tón matematice, rozhodně ovlivnil rozvoj matematické analýzy více než Bolzano.

K derivaci (Cauchy v *Résumé des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique*):

Když je funkce $y = f(x)$ spojitá mezi dvěmi hraničními hodnotami proměnné x a když takové proměnné přisoudíme hodnotu mezi dvěma zpočátku zadanými hodnotami, potom infinitezimálně malý přírůstek pro proměnnou vytvoří nekonečně malý přírůstek ve funkci samotné. Proto, když položíme $\Delta x = i$, oba *členy poměru diferencí*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

budou nekonečně malé veličiny. Přestože tyto dva členy dosahují limitu nula neurčitě a současně, jejich poměr může konvergovat k jiné limitě, kladné nebo záporné. Tato limita, když existuje, má určitou hodnotu pro každou partikulární hodnotu x; ale ta se mění v závislosti na x ...

Tvar nové funkce, která je limitou podílu $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, závisí na tvaru výchozí funkce $y = f(x)$. Abychom tuto závislost vzali v úvahu, nazveme tuto novou funkci odvozenou (derivovanou) funkcí a označíme ji, užitím čárky, znakem y' nebo $f'(x)$.

Zde už je zcela zřetelně naznačeno, jak se na derivaci má pohlížet. Zapíšeme-li Cauchyho poněkud komplikované tvrzení v dnešní symbolice, dostaneme definici

$$f'(x) = \lim_{i \to 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

pro derivaci funkce f v bodě x. Tím z hlediska dnešní analýzy končí nejasnosti kolem definice derivace a také všechny spory kolem Newtonova nebo Leibnizova kalkulu. Ústředním pojmem je **limita.** Podíl dvou (dle Berkeleye) „umírajících veličin“, tj. podíl $f(x+i) - f(x)$ a i buďto má pro $i \to 0$ smysl (když existuje limita), nebo jej nemá. V prvním případě lze mluvit o derivaci jako o limitě tohoto podílu, ve druhém není vůbec o čem mluvit. Toho se týkaly Newtonovy a Leibnizovy úvahy a ničeho jiného. Jejich úvahy byly v zásadě správné, jiná byla jenom jejich řeč nebo představy.

Ve vztahu k tomu, co biskup Berkeley vyčítal Newtonovi a jeho následovníkům, by bylo možné v tomto okamžiku udělat tečku. Nejasnosti se v daném okamžiku vyjasnily a jsou plně srozumitelné i matematikům, kteří své vzdělání získávají na univerzitách dnes.

„Potíže růstu“ tím ale zdaleka nekončí.

V učebnici *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* z roku 1821 mimo jiné Cauchy též předložil první soustavný výklad konvergence nekonečných (zejména mocninných) řad včetně formulace a důkazu známých kritérií (podílového a odmocninového). Zde rovněž uvádí své slavné nesprávné tvrzení o tom, že součet konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce. Tak se to jeví z dnešního hlediska, když sledujeme Cauchyův text v zorném úhlu pojmů dnešní doby. Jeho představy mohly být i jiné, jen je jasně nepopsal.

K té věci v roce 1826 N.H. Abel opatrně poznamenal, že „tato věta má ovšem jisté výjimky“ a uvedl příklad řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n},$$

která konverguje pro každé x, je řadou spojitých funkcí $\frac{\sin nx}{n}$, ale její součet je funkce, která v bodech tvaru $x = (2k+1)\pi$ není spojitá.

Dnes víme, že součet konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce pokud je konvergence řady stejnoměrná. Pojem stejnoměrné konvergence však znám nebyl a v první polovině 19. století se teprve postupně rozvíjel (např. Ph. L. Seidel: *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen* (1847) nebo G. Stokes: *On the critical values of the sums of periodic series* (1848)) a do povědomí matematiků se dostával pomalu. Pozornosti unikla i Cauchyova práce *Note sur les séries convergentes dont les divers membres sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire entre des limites données* (1853), kde svůj omyl z roku 1821 napravil a vyslovil a dokázal správnou větu dokonce pro funkce komplexní proměnné spolu s tím, že přesně popsal pojem stejnoměrné konvergence řady. Všechna tato „přehlédnutí" vedla k tomu, že se pojem **stejnoměrné konvergence** řady nebo posloupnosti funkcí do obecně známé a přednášené matematiky propracoval až s osobou K. Weierstrasse.

V roce 1875 uveřejnil **G. Darboux** (1842 - 1917) práci *Mémoire sur les fonctions discontinues,* kde znovu důkladně dokázal tvrzení o tom, že součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce a na příkladě řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n^2x^2e^{-n^2x^2} - (n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2}] = x^2e^{-x^2}$$

předvedl, že stejnoměrná konvergence řady pro spojitost jejího součtu není nutná. Tato řada spojitých funkcí stejnoměrně konvergentní není, a přesto je její součet $x^2e^{-x^2}$ spojitá funkce. V téže práci pak ještě ukázal, že např. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}] = -2xe^{-x^2}$$

má tu vlastnost, že každý její člen má Riemannův integrál, že její součet má rovněž Riemannův integrál, ale

$$\int\sum_{n=1}^{\infty}[-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}]dx = \int -2xe^{-x^2}dx \neq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int[-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}]dx$$

přestože členy řady i její součet jsou spojité funkce. To je varovný příklad ukazující, že ne vždy lze $\sum$ a $\int$ zaměnit.

Předtím ovšem Darboux dokázal, že stejnoměrně konvergentní řadu funkcí, které jsou integrovatelné v Riemannově smyslu, lze integrovat člen po členu a dostat tak integrál jejího součtu.

Pojem stejnoměrné konvergence řady funkcí se tak stal pojmem, který v 19. století byl příčinou jistých nesrovnalostí, jež bylo posléze nutno napravovat.

Do této kategorie patří i další jevy v analýze. Zastavíme se u jednoho z nich. Na francouzskou matematiku konce 18. a počátku 19. století měl velký vliv

J. L. Lagrange a zejména pak jeho kniha *Théorie des fonctions analytiques,* která vyšla v roce 1797 a pak ještě v roce 1813 ve druhém vydání. Jak už bylo dříve podotknuto, šlo skutečně o teorii analytických funkcí v dnešním smyslu slova. Zavádějící byly ovšem představy o tom, že každá (libovolná) funkce je analytická v Lagrangeově smyslu, a že je tedy

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

přičemž je vhodné připomenout, že koeficienty $\frac{f'(x)}{1!}, \frac{f''(x)}{2!}, \dots$ u mocnin h Lagrange určoval a takto označil. Bylo sice známo, že ne každá funkce je v tomto smyslu analytická, ale to veřejné mínění příliš neovlivnilo v přesvědčení, že tomu je naopak. V této situaci přichází se svou prací *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions derivées qui conduissent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque* v roce 1806 A.M. Ampère, v níž vychází z toho, že derivace je limitou výrazu

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

pro i jdoucí k nule a analytickým postupem ukazuje, že každá funkce tuto derivaci musí mít. Je vcelku z kontextu zřejmé, že Ampère měl na mysli funkce, o kterých pojednával Lagrange, tj. funkce analytické, které tuto vlastnost skutečně mají. Přesvědčení, že každá funkce je analytická, pak vedlo zkratem k tomu, že se mělo za to, že na základě Ampèrovy věty má každá funkce derivaci, a aby se evidentní nesrovnalosti daly do pořádku, oslabilo se tvrzení v tom smyslu, že každá spojitá funkce má derivaci ve všech bodech snad jen s výjimkou nějakého konečného počtu bodů. Vzhledem k tomu, že se představy o spojitosti funkce v dnešním způsobu chápání teprve formovaly, je i toto pochopitelné, ale v jednom okamžiku se Ampèrovo tvrzení formulovalo pro spojitou funkci v dnešním smyslu (nebo lépe řečeno v tom smyslu, jak spojitost chápal Cauchy či Bolzano) a stalo se tak nesprávným. Není jasné, komu patří prvenství v této záležitosti. Například J. L. Raabe ve své knize *Die Differential- und Integralrechnung mit Functionen einer Variabeln* z roku 1839 tak učinil zcela zřetelně a Ampèrovu „větu" prohlásil za základ celého diferenciálního počtu. Nebyl s tímto názorem osamocen, mnoho matematiků prohlašovalo totéž. Občas se objevovala jistá omezení, ale obecné přesvědčení o správnosti Ampèrovy „věty" bylo dosti pevné.

Tento stav věci trval po celou první polovinu 19. století. Postupně se však počaly objevovat pochybnosti. K tomu znovu musíme připomenout osobu B. Bolzana. Ten kolem roku 1830 psal knihu *Functionenlehre.* Bolzanova kniha, jako i mnoho dalších jeho prací, zůstala rukopisem, který se s jeho pozůstalostí dostal do Vídně. Rukopisy byly prozkoumány až na konci první světové války a veliké bylo překvapení, když v nich byl nalezen Bolzanův příklad spojité funkce, o níž on sám dokázal, že nemá derivaci v husté spočetné množině bodů. (Řečeno přesněji, Bolzano ukázal, že pro jeho funkci platí, že když ve dvou různých bodech nemá derivaci, existuje mezi nimi další bod, v němž funkce derivaci rovněž nemá.) Posléze se průzkumu Bolzanovy funkce věnovali čeští matematikové (K. Rychlík, K. Petr, V. Jarník, ...) a V. Jarník v práci *O funkci Bolzanově* v roce 1922 dokázal, že Bolzanova funkce nemá derivaci v žádném bodě svého definičního intervalu $[0,1]$, v němž je ovšem spojitá. Už i ten samotný fakt, který o své funkci dokázal Bolzano, tj. že spojitá funkce nemusí mít derivaci v husté spočetné množině bodů, mohl v době svého vzniku narušit představy o derivovatelnosti spojité funkce. Nevydaný rukopis spolu s Bolzanovou izolovaností v prostředí ne příliš chápajícím jeho matematické úvahy však na rozvoj matematiky v 19. století neměly žádný vliv.

V roce 1854 ve svých berlínských přednáškách Dirichlet poznamenal, že obecně nelze dokázat existenci derivace pro libovolnou spojitou funkci a dodal, že lze čistě graficky udat spojitou funkci, která nemá nikde derivaci.

Složitý osud měla funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

o níž B. Riemann tvrdil, že je protipříkladem k tvrzení, že spojitá funkce má derivaci všude až na možný konečný počet bodů. Riemann to nepublikoval a o věci nebylo nalezeno nic ani v jeho pozůstalosti. Touto funkcí se zabývalo mnoho matematiků (Hardy, Littlewood) a až v roce 1971 byla konečně J. Gerverem popsána množina bodů, v níž uvedená Riemannova funkce derivaci má.

V sedmdesátých letech 19. století se H. Hankel zabýval metodou zahušťování singularit a dospěl tak ke spojitým funkcím, které neměly derivaci v husté množině racionálních bodů. Příkladem je funkce f daná řadou

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sin n\pi x \sin(\frac{1}{\sin n\pi x})$$

pro $s > 1$.

Konečný verdikt nad představami o derivovatelnosti spojitých funkcí vynesl **Karl Weierstrass** (1815 - 1897). V roce 1872 přednesl v berlínské akademii příklad spojité funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x),$$

kde b je liché celé číslo, $a \in (0,1)$, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Ukázal, že tato funkce nemá v žádném bodě derivaci. Příkladů toho typu se posléze objevilo mnohem víc. Matematická komunita, která žila v krásném světě funkcí, které lze všude, až snad na konečný počet bodů, hezky derivovat, byla pochopitelně zklamána. Funkce toho typu jako Weierstrassova funkce byly v představách mnoha lidí zrůdami a je možné, že měl pravdu E. Picard, když v roce 1905 prohlásil, že „kdyby Newton a Leibniz věděli, že spojité funkce nemusejí mít nikde derivaci, diferenciální počet by nikdy nevznikl“.

Poznamenejme k tomu ještě, že moderní teorie reálných funkcí pochází právě z těchto příkladů. K novému směru výzkumu se však vyvinula velká nedůvěra často i ze strany vedoucích matematických autorit. H. Poincaré se např. vyjádřil takto:

Dříve, když byla objevena nová funkce, stalo se tak z praktických důvodů; dnes se objevují nové funkce vysloveně kvůli tomu, aby popřely vývody našich předchůdců a nikdy se k ničemu jinému nepoužijí.

Ch. Hermite pak napsal v dopise T. J. Stieltjesovi:

S hrůzou a odporem se odvracím od tohoto ubohého vředu; od funkcí, které nemají nikde derivaci.

Na výzkum orientovaný tímto směrem se pohlíželo jako na šíření anarchie a chaosu tam, kde dřívější generace hledaly harmonii a řád. Kritika základů matematické analýzy v tomto směru ale v zájmu dalšího rozvoje byla zcela nezbytná. Je nepochybné, že i tento jev patřil ve své době do kategorie jevu „krizového".

O pojmu reálného čísla

Další mezera analýzy byla v tom, že představy o tom, co je reálné číslo, byly velmi intuitivní a postrádaly teoretický základ.

Matematická analýza ve svých počátcích z dob Newtona a Leibnize měla výrazně geometrickou povahu. Veličiny byly zřetelně svázány s geometrickými objekty (křivkami, plochami) a rovněž většina matematických úvah závisela na geometrické intuici a představě. Tento jev si lze vysvětlit snad i tím, že obecná představa byla vedena absolutní přesností starověkých geometrických úvah a snahou se jí přiblížit i s novými koncepcemi. Od dob Eulera a Lagrangea však je patrná snaha nahradit v základních pojmech matematické analýzy geometrickou intuici aritmetikou. To se v 19. století hned zpočátku velmi zvýraznilo; připomeňme jen Bolzanuv protest proti geometrickým pohledům při důkazu věty o mezihodnotách spojité funkce. Pokusy o aritmetizaci analýzy jsou velmi patrné např. i v učebnicích Cauchyových. Nenalezneme v nich ani jeden obrázek, který by eventuálně mohl svádět ke geometrickému názoru. Ale pokus o aritmetizaci analýzy zůstal až do konce 19. století na půli cesty; důvodem bylo intuitivní a neupřesněné chápání pojmu reálného čísla. Chyběla přesnost ve stanovení pojmu.

Bylo vcelku jasné, co je racionální číslo, iracionální čísla jako $\sqrt{3}$ však byla užívána, aniž se vědělo něco o jejich povaze. Pro účely výpočtů se pak užilo toho, že se k iracionálnímu číslu lze libovolně přiblížit číslem racionálním. Automaticky se užívalo toho, že iracionální čísla existují a že se podřizují stejným pravidlům aritmetiky, jako čísla racionální. Je nasnadě, že bez pochopení systému reálných čísel a vybudování pevného systému bylo obtížné položit pevný základ pro diferenciální a integrální počet.

Matematici o těchto otázkách a o problémech spojených s přesným zavedením reálných čísel přemýšleli. V tomto směru lze jisté pokusy zaznamenat už u B. Bolzana. Podrobně příslušné části z jeho nepublikované pozůstalosti vydal a rozebral K. Rychlík ve spise *Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse* z roku 1962. Nepublikovaný rukopis pochopitelně na cesty matematiky vliv neměl, svědčí však o Bolzanově skvělé intuici a erudici.

K vlastnímu výsledku ve směru zavedení reálných čísel došlo zhruba v období 1860 – 1872. K. Weierstrass o něm přednášel od r. 1860, Ch. Méray přispěl v r. 1869 a konečné kroky v r. 1872 udělali G. Cantor a R. Dedekind. Přístupy obou posledně jmenovaných jsou dodnes běžné a je třeba konstatovat, že oba, Cantor i Dedekind, dospěli k cíli zcela rozdílnými prostředky.

Dedekindův postup byl založen na teorii ***řezů***, dnes jim říkáme ***Dedekindovy řezy***. Vychází z toho, že množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ lze rozdělit do dvou disjunktních množin D a H tak, že každý prvek D je menší než libovolný prvek z H. Libovolné racionální číslo určí takový disjunktní rozklad $\mathbb{Q}$. Dedekindovy řezy množiny racionálních čísel pak tvoří základ teorie reálných čísel; jsou někdy určené racionálním číslem, někdy ovšem tomu tak není. Kupř. řez, pro který je v D množina všech nekladných racionálních čísel a všech kladných $x \in \mathbb{Q}$ takových, že $x^2 < 2$ a v H jsou všechna ostatní racionální čísla, neurčuje racionální číslo; tento řez lze „intuitivně" považovat za řez určující reálné číslo $\sqrt{2}$. Podle Dedekindovy teorie pak množina ***všech*** řezů množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je prohlášena množinou reálných čísel. Tento pojem pak je pro Dedekinda východiskem pro důkaz platnosti všech potřebných vlastností reálných čísel, souvisejících s aritmetikou.

Jiný je postup, který se připisuje G. Cantorovi. Východiskem pro Cantora je představa, že reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel. Můžeme si představit kupř. že reálné číslo π je limitou posloupnosti

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\},$$

která je vytvořena přibíráním vždy dalších cifer desetinného rozvoje π.

Cantor reálná čísla identifikuje s cauchyovskými posloupnostmi racionálních čísel. Přitom se tyto posloupnosti rozpadají do ekvivalentních tříd: dvě posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ jsou ekvivalentní, když $\lim_{i\to\infty}(a_i - b_i) = 0$. Dnes bychom řekli, že množina reálných čísel je zúplněním množiny racionálních čísel. K tomu je třeba poznamenat, že rukopisný pokus Bolzanův směřující k vybudování teorie reálných čísel je založen na myšlence, kterou nakonec použil i G. Cantor.

Vybudováním logicky dokonalé teorie reálných čísel byl dán pevný základ pro důležitý objekt, kterým se matematická analýza zabývá a v jehož rámci se pohybuje. Tím objektem je reálné číslo, resp., reálná osa a vše, co s tím souvisí. Současně byla otevřena i cesta vedoucí k aritmetizaci matematické analýzy v té podobě, jak ji do všech detailů provedl K. Weierstrass.

Základní pojmy Weierstrass prezentoval ve statické, aritmetické podobě. Odstranil dřívější „dynamické" popisy pojmů. Abychom toto ilustrovali a současně ukázali počáteční a koncový stav matematické analýzy v 19. století, konfrontujme např. pojem spojitosti u Bolzana a u Weierstrasse.

Bolzano o spojitosti funkce f v bodě x říká, že

... funkce se mění podle zákona spojitosti ... když lze rozdíl $f(x+\omega) - f(x)$ udělat menším než je každá daná veličina, jestliže lze ω vzít tak malé, jak jen si přejeme.

Naproti tomu pro Weierstrasse je

funkce $f(x)$ *spojitá v bodě* c, *když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že je* $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ *pokud je* $|x - c| < \delta$.

Podobné to je i s pojmem limity funkce a dalšími typy limit. Matematická analýza přeformulovaná v řeči $\varepsilon - \delta$ je její aritmetizovanou podobou. V té je známa dodnes. „Krize matematiky", o které jsme zde pojednali a která nastala v podstatě na samotném počátku vzniku analýzy byla tímto způsobem napravena.

Náprava se má dodnes za definitivní. Pevně aritmetizovaný Weierstrassův systém účinně odstranil všechny pochyby, diferenciální a integrální počet lze dobře a pohodlně přednášet, lze se mu dobře naučit, spokojenost by mohla být všude. Potíže byly „růstem" vědní disciplíny postupně odstraněny, dnešní rigidní systém se vydává za upřesnění představ Newtona, Leibnize a všech jejich přemýšlivých předchůdců.

Je věcí názoru, jak na současný stav nahlížet. Systém, který se ustálil je relativně pevný, umožňuje provést všechny výpočty, které byly po dobu více než 300 let prováděny leckdy s „nejasným" základem. To jsou pozitiva současného stavu.

Z matematické analýzy (diferenciálního a integrálního počtu) se však v průběhu onoho růstu a napravování postupně vytratila geometrie a posléze i fyzika. Pro fyzikální problém se dnes hledají prostředky analýzy, vývoj přestal být souběžný. Leckdy se prostředky hledají obtížně, o analýze bylo přece už tolik napsáno, že „není možné, aby to už někde nebylo". Situace, kdy poznávání přírody šlo s matematikou ruku v ruce, je pryč. Vazby jsou zpřetrhány, pokusy o nové propojení jsou mnohdy násilné a marné. K tomu všemu přistupuje dnes stále více dostupná a velmi výkonná výpočetní technika. Jaká je budoucnost diferenciálního a integrálního počtu? Je matematika ještě přírodní vědou, jak se to snažily evokovat donedávna udělované akademické tituly matematikům? Jsme před novou krizí? Jaká je její podstata, kdy a jak bude překonána?

I v domněle konsolidované oblasti matematiky lze klást mnohé obecné otázky, na něž jsou odpovědi nejasné. Je to projev krize matematiky? Nebo to jsou jen běžné „potíže růstu"?

A nakonec ještě zdroje, ze kterých jsem čerpal rozumy:

C.H. Edwards, Jr.: The Historical Development of the Calculus. Springer Verlag 1979,

H.G. Zeuthen: Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert, B.G. Teubner, Leipzig 1903.