Jiří Veselý
Cena jednoho příkladu

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. III. (Czech). Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. pp. 235–241.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401602

Cena jednoho příkladu

Jiří Veselý

Pokud někdy otevřete skripta [7] na str. 316, najdete tam krátkou poznámku o neabsolutně konvergentních řadách. Vztahuje se mimo jiné k jedné takové řadě použité jako ilustrativní příklad. Zalistuje-li čtenář ve své paměti a pokusí se vybavit si příklad neabsolutně konvergentní řady, je veliká pravděpodobnost, že to bude rovněž řada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}. \tag{1}$$

Pokusím se ukázat, že je to do jisté míry přirozené a popsat, odkud se v učebnicích podobné příklady berou. „Opisování“ je zavrženíhodná věc, avšak každé pravidlo mívá jisté výjimky.

Hlásím se vždy s pýchou a úctou k učiteli, který vychoval několik generací našich matematiků, k Vojtěchu Jarníkovi (1897–1970). Otevřete-li jeho populární „Dé dvojku“ [2], naleznete tento příklad v Kap. III za § 2 *Přerovnávání řad* ve cvičení 5. Tento paragraf obsahuje (jak jinak) i důkaz tzv. Riemannovy věty. Ta pochází z r. 1854, ale byla publikována až po Riemannově smrti. Bernhard Riemann (1826–1866) totiž dokázal, že *každou neabsolutně konvergentní řadu s reálnými členy lze přerovnat tak, aby přerovnaná řada měla libovolný předem určený součet.* Dnes se v této souvislosti dokazuje více, např. možnost takového přerovnání, že přerovnaná řada má součet $+\infty$ nebo $-\infty$ apod., ale to jsou již jen „kosmetické“ úpravy.

Nabízí se tedy myšlenka, že jsem příklad převzal z [2]; není to tak daleko od pravdy, neboť jsem se s tímto příkladem při četbě [2] *poprvé* seznámil, aniž bych tušil, jaká je jeho historie a jak je důležitý. Jarník nastoupil po ročním pobytu v Brně do Prahy jako asistent Karla Petra (1868–1950) a tak není na škodu nahlédnout do Petrovy učebnice [6]. Tam tentýž příklad najdeme v odst. 48 *Řady alternující* a v odstavcích následujících. Petr napsal nejprve učebnici integrálního počtu jako pokračování učebnice [8], kterou později nahradila učebnice [6]. Náhledem do [8] zjistíme, že tam je řada (1) vyšetřována v odst. 23 *Přemístění členů řady konvergující.* Poznamenejme, že jsme se dostali již o sto let zpět, učebnice [8] vyšla v r. 1902.

Proč se objevuje stále stejný příklad již alespoň sto let? A je to špatně, nevadí to, nebo je to vlastně dobře? Vypůjčme si citát z projevu ANDRÉ WEILA (1906–1998), který v referátu na Mezinárodním matematickém kongresu v Helsinkách (1978) *Historie matematiky: proč a jak* užil stejnou metodu argumentace jako já a uchýlil se také k citátu klasika. Cituje výrok GOTTFRIEDA W. LEIBNIZE (1646–1716), který o historii matematiky řekl: *Její užitečnost netkví jen v tom, že odhaluje zásluhy jednotlivců a motivuje ostatní k získání takového ocenění, ale i v tom, že umění objevovat a poznávat jeho metody lze rozvíjet výstižnými příklady.* A ať již chápeme tento výrok v širším či užším smyslu, vystihuje na historii matematiky patrně to nejpodstatnější.

Teorii konvergence řad rozvinul v dostatečné hloubce již AUGUSTIN L. CAUCHY (1789–1857). Ten také jako první popsal r. 1833 fakt, že *řada změnou pořadí členů může změnit součet.* Další takové příklady publikovali PIERRE G. L. DIRICHLET (1805–1859) r. 1837 a MARTIN OHM (1792–1872) r. 1839; viz [5]. Ten také již, patrně jako první, prozkoumal podrobněji chování speciálních přerovnání řady (1). K přiblížení jeho výsledku však zvolíme dnes běžnou cestu, vedoucí jistou oklikou.

Divergenci harmonické řady lze dokázat snadno mnoha způsoby. Připomeňme, že při „klasickém seskupení" dostaneme pro částečné součty odhad

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}\,.$$

Ten nám poskytne pesimistický odhad, zaručující, že sečtením 2^{19} prvních členů dostaneme částečný součet > 10. Jiný analogický trik dává

$$\Big(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9}\Big) + \Big(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{99}\Big) + \Big(\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{999}\Big) + \cdots >$$
$$> \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \cdots\,, \qquad (2)$$

tedy

$$s_{10^n-1} = \sum_{k=1}^{10^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{9}{10}\frac{1-(9/10)^n}{1-9/10}\,.$$

Odtud snadno zjistíme, že stačí sečíst „jen" 10^{12} členů, čímž jsme sice dostali snad trochu přehlednější výsledek, ale moc si nepomohli. Podobně trik JACOBA BERNOULLI (1654–1705), popsaný např. v [7], Příklad 2.2.16, dává stejný kvalitativní výsledek (divergenci řady) a srovnatelný kvantitativní výsledek.

Na poněkud vyšší úrovni lze též odhadnout „rychlost divergence" harmonické řady. Také následující úvahy jsou velmi staré (z r. 1740) a jsou spojeny s LEONHARDEM EULEREM (1707–1783). Jednoduchou aplikací Lagrangeovy věty o přírůstku funkce dostaneme

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Jestliže nyní označíme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n\,, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n\,,$$

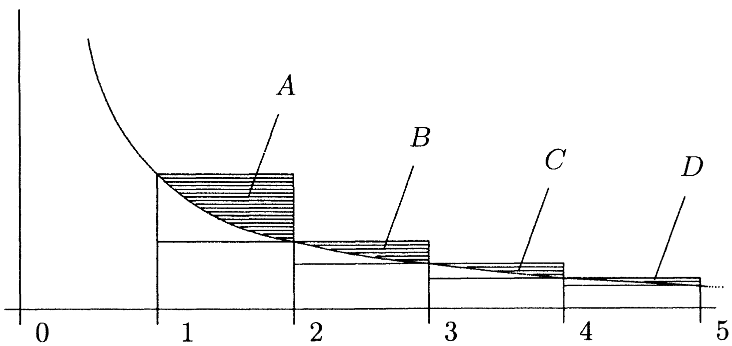
dostaneme využitím nerovností (3) snadno

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} > 0\,, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log\frac{n+1}{n} < 0\,.$$

Protože dále platí $b_n - a_n = 1/n$, můžeme např. uplatnit princip vložených intervalů a definovat

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[\,a_n, b_n\,]\,. \tag{4}$$

Číslo γ se nazývá *Eulerova konstanta*. Uvědomíme-li si geometrický význam integrálu, lze tuto konstantu i krásně zviditelnit; viz Obr. 1. Konstanta γ dává součet obsahů „křivočarých trojúhelníků“ $A, B, C, D, \ldots$. Snadno pak nahlédneme, že platí $\gamma \in [\,1/2, 1\,]$. Skutečně, přesnější *výpočet* dává $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$.



Obr. 1.

Všimněme si ještě rozdílu

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\ ,$$

který si lze znázornit jako součet obsahů konečně mnoha „křivočarých trojúhelníčků", které při vhodném umístění vyplňují část jednotkového čtverce. I žáci střední školy budou ochotni patrně akceptovat myšlenku, že se vzrůstajícím n se čísla γ_n udávající velikost těchto obsahů blíží k nějakému číslu γ. Obrázek má v tomto případě značnou ilustrační hodnotu.

Trocha experimentů s počítačem dá představu, jak rychle se ke konstantě γ přibližujeme. Snadno zjistíme, že aby částečný součet s_n byl větší než 10, stačí vzít $n > 12\,367$. Za zmínku stojí, že dodnes nevíme, zda je to číslo racionální nebo iracionální.

Víme tedy, že n-tý částečný součet harmonické řady „roste jako $\log n$" a jak se od něj liší. Tudy vede tedy cesta k přesnějšímu výsledku. To zdánlivě nesouvisí s příkladem, který chceme blíže prozkoumat, ale ve skutečnosti nám to podstatným způsobem pomůže. Vraťme se nyní zpět ke zkoumanému příkladu.

Chceme-li pouze demonstrovat závislost součtu členů řady (1) na jejich pořadí, užijeme opět dnes již standardní trik: řada (1) je např. podle Leibnizova kritéria konvergentní; označme její součet s; vzhledem k možnosti odhadu s libovolnými dvěma po sobě následujícími částečnými součty řady platí $s \in [1/2, 1]$. Dále je (použijeme opět schematický zápis)

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots, \tag{3}$$

$$s/2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots. \tag{4}$$

Připomeňme, že vložení nulových členů neovlivní konvergenci ani součet řady. Z předchozího vyplývá sečtením obou konvergentních řad člen po členu

$$3s/2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Vzhledem k tomu, že je $s \neq 0$, změnil se „přeskupením členů" (neabsolutně konvergentní) řady její součet. Poznamenejme, že postup lze modifikovat. Tak např. ve Weyrově učebnici [8] je vyšetřována řada

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

a je tam také dokázáno, že konverguje při zavedeném označení k hodnotě $s/2$.

Zkoumejme nyní konvergenci řady, která vznikne z (1) následujícím přerovnáním: jsou-li p, q přirozená čísla, sečteme nejprve prvních p

kladných členů, potom prvních q *záporných* členů, pak následujících p kladných a následujících q záporných, atd. Takto vzniklou řadu označme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a určeme její součet.

S ohledem na (4) pro částečné součty harmonické řady H_n platí

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \alpha_n\,,$$

kde $\alpha_n \to 0$. Je tedy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{H_n}{2} = \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha_n\,.$$

Snadno nahlédneme, že platí

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2q-1} = H_{2q} - \frac{1}{2}H_q = \tag{5}$$

$$= \log 2q + \gamma + \alpha_{2q} - \frac{1}{2}\log q - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\alpha_q = \tag{6}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log q + \frac{1}{2}\gamma + \beta_q\,, \tag{7}$$

kde opět $\beta_q \to 0$. Sečtením celkem m kladných a m záporných skupin dostaneme:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2mq}\right) = \tag{8}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log mp + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\log mq - \frac{\gamma}{2} + \delta_m\,, \tag{9}$$

kde také $\delta_m \to 0$. Odtud dostaneme úpravou a limitním přechodem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \log\sqrt{\frac{4p}{q}}\,.$$

Pozor, uvědomte si, že jsme dokázali pouze konvergenci *vybrané posloupnosti* $\{t_m\} = \{s_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ z posloupnosti všech částečných součtů $\{s_n\}$ přerovnané řady. Platí $t_m = s_{m(p+q)}$, $m \in \mathbb{N}$. Lze však odhadnout zbytek: Označíme-li součet přerovnané řady s, je pro všechna $n \geq m(p+q)$

$$|s_n - s| \leq |s_{m(p+q)} - s| \leq \frac{p}{2mp+1} + \frac{q}{2mq+2} \to 0 \text{ pro } m \to \infty\,,$$

z čehož dostáváme výsledek, tj. je $s_n \to s$.

Snadno nahlédneme, že již všechna taková velmi „pravidelná“ přerovnání řady (1) (tj. s přirozenými p, q) dávají jako součty čísla, která tvoří hustou podmnožinu $\mathbb{R}$. Z tohoto pohledu již není na začátku uvedená Riemannova věta tak překvapující. Můžeme však již jen hádat, zda to byl právě Ohmův výsledek, který Riemanna k větě o přerovnávání dovedl. Pokud jako autor mohu vydat svědectví o skutečném „inspiračním zdroji", který mne dovedl k rozhodnutí tento příklad do textu [7] *zařadit*, byla jím krásná knížka [3]. Je to ale, jak jsem se snažil ukázat, málo zajímavé svědectví: stejný příklad naleznete téměř v každé (podrobnější) učebnici matematické analýzy.

Na začátku jsme při našem „stopování" původu užití řady (1)dospěli o 100 let zpět. Chceme-li získat další informace, lze se obrátit ke klasické monografii [4], dodnes patrně jedné z nejlepších z těch, které o řadách existují. Tak např. zde nalezneme i výše uvedený příklad na přerovnání (s $3s/2$) spolu s informací, že pochází z Dirichletovy práce z r. 1837. Ohmův výsledek lze ještě trochu zobecnit; platí následující tvrzení, které dokázal r. 1873 OSCAR XAVIER SCHLÖMILCH (1823–1901): *Pokud posloupnost $\{a_k\}$ nezáporných čísel konverguje monotónně k* 0, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = s$ *a existuje-li vlastní* $\lim_{k\to\infty} k a_k$, *pak pokud tuto řadu přerovnáme „ohmovským způsobem" (střídáme vždy p nezáporných a q záporných členů), bude součet s' takto přerovnané řady dán vzorcem*

$$s' = s + \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} k a_k \cdot \log \frac{p}{q}\,.$$

Je již patrně méně podstatné vystopovat, kdo další a čím k vyšetřování různých přerovnání řady (1) přispěl. Podstatné je to, že přispěla od samého začátku vyšetřování konvergence řad k jejímu hlubšímu poznání. Proto by tento příklad neměl v každé trochu „hlubší" učebnici chybět[1]. Bylo by však krajně nevhodné neříci alespoň pár poznámek o Martinu Ohmovi, který v tomto směru vykonal nemalý kus průkopnické práce. Narodil se rodičům, kteří neměli formálně vyšší vzdělání: jeho otec JOHANN WOLFGANG OHM (1753–1822) byl zámečník, jeho matka pocházela z rodiny krejčího. Otec se však vzdělával z knih a svoje syny GEORGA SIMONA OHMA (1789–1854) a MARTINA OHMA (1792–1872) naučil základům vyššího vzdělání v přírodních vědách. Ze zbývajících 5 sourozenců se pouze jedna sestra (Elizabeth) dožila vyššího věku. Georga Simona proslavil objev tzv. *Ohmova zákona*. Martin byl 19 let soukromým docentem matematiky v Erlangen. R. 1824 byl jmenován v Berlíně mimořádným profesorem a r. 1839 řádným profesorem matematiky. K nejznámějším z jeho žáků patřili Heinrich Heine, Lazarus

[1] Jiným závažným příkladem je tzv. Leibnizova řada. Ta se také často uvádí v souvislosti s Leibnizovýn konvergenčním kritériem (1714).

Fuchs, Rudolf Lipschitz a Friedrich Prym. Méně se ví, že u něj studoval i Werner von Siemens. Martin Ohm byl členem anglické Královské vědecké společnosti a členem Akademie v Turíně, Mnichově a Berlíně.

Vraťme se však zpět k matematice a k Riemannově větě, která patrně inspirovala další výzkum. Tak např. EMILE BOREL (1871–1956) vyšetřoval obecnější přerovnání, která *nevedou* ke změně součtu neabsolutně konvergentní řady. Jarníka Riemannův výsledek inspiroval k vyšetřování neabsolutně konvergentních řad *komplexních čísel*. Výsledek publikoval r. 1927: *součty všech přerovnání konvergentní řady komplexních čísel tvoří v* $\mathbb{C}$ *jednobodovou množinu, nebo vyplní přímku nebo celou komplexní rovinu.* Výsledek lze možná uhádnout, ale rozhodně je ve srovnání s důkazem Riemannovy věty podstatně obtížnější ho dokázat. Pokud ho známe, není složité uhádnout analogický výsledek např. pro řady v $\mathbb{R}^m$. Při dalším zobecňování však musíme být opatrní: např. přechod k obecnému metrickému lineárnímu prostoru přináší mnoho nových problémů, to však je již úplně jiná historie.

Literatura

[1] Edwards CH: The historical development of the calculus, Springer, New York, 1979

[2] Jarník V: Diferenciální počet II, Academia, Praha, 1984

[3] Klambauer G: Aspects of calculus, Springer-Verlag, New York, 1986

[4] Knopp K: Theorie und Anvendung der unendlichen Reihen, Springer-Verlag, New York, 1924, (2. rozšířené vydání)

[5] Ohm M: De nonnullis seriebus summandis, Antr.-Programm, Berlin, 1839

[6] Petr K: Počet diferenciální, Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, 1923

[7] Veselý J: Matematická analýza pro učitele, Matfzypress, Praha, 2001

[8] Weyr E: Počet differenciálný, Jednota českých mathematiků, Praha, 1902

[9] Wilansky A: Functional analysis, Blaisdel Publishing Comp., New York, 1964

Jiří Veselý,
MFF UK Praha
e-mail: Jiri.Vesely@mff.cuni.cz