Antonín Slavík

Origin of product integration

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. III. (English).
Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. pp. 156–205.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401600

Počátky součinové integrace

ANTONÍN SLAVÍK

Kapitola 1: Úvod

Kořeny teorie součinového integrálu sahají do roku 1887, kdy italský matematik Vito Volterra definoval tento integrál v souvislosti s řešením lineárních diferenciálních rovnic. Volterrovy první práce se patrně nesetkaly s širším ohlasem – snad i proto, že vyšly pouze v italštině. K oživení zájmu o součinový integrál dochází až ve 20. století spolu s teorií Lebesgueova integrálu a s rozvojem funkcionální analýzy. Na Volterrovy myšlenky navázal matematik Ludwig Schlesinger, který zpřesnil původní výsledky a rozpracoval lebesgueovský přístup k součinovému integrálu. Volterrovou teorií se inspiroval i český matematik a fyzik Bohuslav Hostinský. Ten se zabýval integrálními operátory, pro které zavedl analogii součinového integrálu.

Další vývoj teorie je spjat se jmény G. Rasche, G. Birkhoffa, P. Masaniho a jiných matematiků. Součinový integrál pronikl i do jiných odvětví, jako je teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Čtenáři, který by se rád seznámil i s novějšími výsledky, doporučujeme monografii [12], kde najde i podrobný seznam další literatury.

1.1 Motivace k zavedení součinového integrálu

Vzhledem k tomu, že teorie součinového integrálu není mezi matematiky příliš známa, uvedeme pro lepší pochopení dalšího textu krátkou motivaci. Uvažujme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(a) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

na intervalu $I = [a, b]$, kde $t \in I$, $x : I \to \mathbf{R}^n$ a $f : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Tuto rovnici (resp. soustavu rovnic) lze přibližně řešit tzv. Eulerovou metodou: Zvolíme dělení $D : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ intervalu $[a, b]$ a položíme

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x(t_0) + f(t_0, x(t_0))\Delta t_1 \\ x(t_2) &= x(t_1) + f(t_1, x(t_1))\Delta t_2 \\ &\dots \\ x(t_k) &= x(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, x(t_{k-1}))\Delta t_k \end{aligned}$$

kde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Je-li funkce f „rozumná“, očekáváme, že zjemňováním dělení D se budeme blížit ke skutečnému řešení rovnice (1.1.1).

Uvažujme nyní speciální případ $f(t, x(t)) = A(t)x(t)$, kde $A(t)$ je matice typu $n \times n$ pro každé $t \in I$. Řešíme-li rovnici

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) \\ x(a) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Eulerovou metodou, dostaneme

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= x_0 \\
x(t_1) &= (I + A(t_0)\Delta t_1)x(t_0) = (I + A(t_0)\Delta t_1)x_0 \\
x(t_2) &= (I + A(t_1)\Delta t_2)x(t_1) = (I + A(t_1)\Delta t_2)(I + A(t_0)\Delta t_1)x_0 \\
&\dots \\
x(t_k) &= (I + A(t_{k-1})\Delta t_k) \cdots (I + A(t_1)\Delta t_2)(I + A(t_0)\Delta t_1)x_0
\end{aligned}$$

Označme

$$S(D) = (I + A(t_{k-1})\Delta t_k) \cdots (I + A(t_1)\Delta t_2)(I + A(t_0)\Delta t_1).$$

Jsou-li složky matice A „rozumné“ (např. spojité) funkce, lze dokázat, že pro $\nu(D) \to 0$ (kde $\nu(D) = \max\{\Delta t_i, i = 1, \dots, k\}$) konverguje $S(D)$ k jisté matici, kterou označíme symbolem

$$\prod_a^b (I + A(t)\,dt)$$

a nazveme ji součinovým integrálem maticové funkce A na intervalu $[a, b]$. Maticová funkce

$$X(t) = \prod_a^t (I + A(u)\,du)$$

vyhovuje vztahům

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X'(a) &= I \end{aligned}$$

(kde I je jednotková matice). Odsud plyne, že vektorová funkce

$$x(t) = \prod_a^t (I + A(u)\,du) \cdot x_0$$

je řešením úlohy (1.1.2).

1.2 Fyzikální interpretace

Abychom viděli, že součinový integrál nachází aplikace i mimo matematickou analýzu, uvedeme pro ilustraci příklad z fyziky (viz [12]). Uvažujme tekoucí kapalinu a nechť $S(t)(x)$ je poloha té částice kapaliny v čase $t \geq 0$, která se v čase $t = 0$ nacházela v bodě x. Přitom x je prvek nějakého vektorového prostoru X, takže $S(t)$ je pro každé $t \geq 0$ operátor na X.

Částice, která se v čase t nacházela v bodě x, se v čase $t+h$ dostane do bodu $S(t+h) \circ S(t)^{-1}(x)$. Její rychlost je proto

$$
\begin{aligned}
V(t)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) \circ S(t)^{-1}(x) - x}{h} = \\
= \left[\lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) \circ S(t)^{-1} - I}{h} \right] (x).
\end{aligned}
$$

Rychlost $V(t)$ je opět pro každé $t \geq 0$ operátor na X. Později budeme psát $V = \frac{dS}{dt}$ a operátor V nazveme levou derivací operátoru S.

Umíme z operátoru rychlosti V zpět zrekonstruovat operátor polohy S? Pro malé h můžeme odhadnout

$$S(t+h)(x) \doteq (I + h \cdot V(t)) \circ S(t)(x).$$

Je-li tedy $D : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ dělení intervalu $[0, t]$, potom

$$S(t)(x) \doteq (I + (t_k - t_{k-1}) \cdot V(t_{k-1})) \cdots (I + (t_1 - t_0) \cdot V(t_0))(x)$$

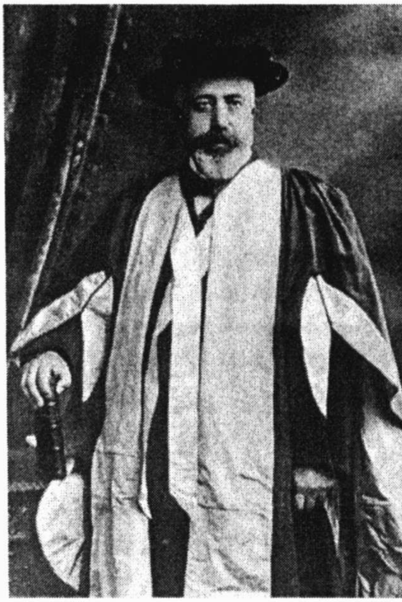
(protože $S(0)(x) = x$). Zjemňováním dělení D pak zjistíme, že S není nic jiného než levý součinový integrál operátoru V:

$$S(t) = \prod_0^t (I + V(u)\,du).$$

Kapitola 2: Vito Volterra a vznik teorie

V této kapitole se budeme zabývat teorií součinového integrálu tak, jak ji vymyslel Vito Volterra, a jak byla publikována v knize [4]. Začněme proto alespoň krátkým ohlédnutím za životem tohoto význačného matematika.

Vito Volterra se narodil 3. května 1860 v italské Anconě. Byl jedináček, jeho otec brzy umřel a malý Vito se s matkou odstěhoval k jejímu bratrovi. Nějaký čas strávili v Turíně, větší část dětství však Vito prožil ve Florencii. V jedenácti letech přečetl Bertrandovu Aritmetiku a Legendreovu Geometrii, ve čtrnácti se pustil do Bertrandova Diferenciálního počtu. Když přemýšlel o těžištích různých těles, „objevil" integrování jako inverzní operaci k derivování.



Obrázek 1: Vito Volterra

Zatímco Vito toužil stát se vědcem, jeho matka se strýcem z něj chtěli mít obchodníka. Požádali proto o pomoc vzdáleného příbuzného – inženýra a finančníka, aby chlapci domluvil. Ten byl ovšem Vitovými schopnostmi tak nadšen, že se jej zastal a Vito začal studovat na fakultě přírodních věd ve Florencii. Později přestoupil na univerzitu v Pise, kde se stal roku 1882 doktorem fyziky. Rok poté, ve svých třiadvaceti letech, byl jmenován profesorem mechaniky. V roce 1900 už přednášel matematickou fyziku v Římě, a také se oženil s Virginií Almagià – dcerou inženýra, který se za něj kdysi přimluvil.

Volterra se zapojil i do politického života: roku 1905 byl zvolen senátorem, v parlamentu se účastnil mnoha debat o podpoře vědy a vysokých škol. V červenci 1914, právě když Volterra pobýval na venkově v Ariccii, vypukla válka. Volterra prosazoval, aby se Itálie přidala na stranu spojenců. O rok později se tak stalo a pětapadesátiletý Volterra nastoupil jako plukovník k letectvu. Po skončení války se opět vrátil k vědě a k přednáškám na univerzitě.

Závěr Volterrova života nebyl příliš šťastný. V roce 1931 se dostali k moci fašisté. Volterra pocházel ze židovské rodiny a odsuzoval jejich praktiky. Musel proto odejít z univerzity v Římě, o rok později opustil i místa v italských akademiích věd. Hodně času trávil v zahraničí (nějakou dobu pobýval i v Praze a v Brně), občas navštívil svůj venkovský domek v Ariccii. V prosinci 1938 onemocněl zánětem žil, zůstal však duševně svěží a dále se věnoval matematice. 11. října 1940 umírá doma v Římě; pochován je na návrší venkovského hřbitova v Ariccii – na místě, které měl tak rád, a kde strávil nemalou část svého života.

Přestože je dnes Volterra znám jako matematik, zabýval se též fyzikou, chemií, biologií a ekonomií. I jeho matematické práce mají často fyzikální motivaci.

Při studiu variačního počtu zavedl Volterra pojem funkcionálu, tj. zobrazení, které funkcím přiřazuje čísla. Pomocí variačního principu odvodil Maxwellovy rovnice a na toto téma přednášel i během pobytu v Československu (viz [5]). Volterrovo jméno je spjato s integrálními rovnicemi, k jejichž studiu jej přivedla opět fyzika. Všiml si analogie mezi integrálními rovnicemi a soustavami algebraických lineárních rovnic a na jeho výsledky později navázal Ivar Fredholm.

Volterra je také jedním ze zakladatelů matematické biologie. Jeho zeť Umberto D'Ancona studoval statistiky rybářů od Jaderského moře a obrátil se na Volterru s problémem, jak matematicky vysvětlit relativní nárůst počtu dravých ryb na úkor ostatních v období první světové války. Volterra poté navrhl řadu modelů popisujících vzájemný boj živočichů o přežití; po matematické stránce jde o soustavy diferenciálních či integro-diferenciálních rovnic. Modely navíc ukazují, že v průběhu času může docházet k pravidelným fluktuacím počtu jednotlivých druhů ryb – tento jev znali biologové již dříve, vysvětlovali jej však působením vnějších vlivů. Volterrova korespondence s ostatními matematiky i s biology na toto téma vyšla v knize [8].

Volterra je autorem řady dalších prací z oblasti parciálních diferenciálních rovnic, teorie pružnosti atd. Podrobnější Volterrovy životopisy lze najít např. v [6], [7], [8], [9].

2.1 Okolnosti vzniku knihy

Zatímco první Volterrovy práce o součinové integraci (viz [1], [2], [3]) vyšly v italštině již roku 1887, kniha *Opérations infinitésimales linéaires* [4], kterou sepsal spolu s Bohuslavem Hostinským, byla vytištěna v Paříži až roku 1938. Émile Borel ji tehdy zařadil do série monografií věnovaných teorii funkcí.

Volterra v úvodu píše, že k vydání knihy jej přimělo několik okolností. Především to, že teorie matic byla v poslední době v popředí zájmu matematiků a našla uplatnění i ve fyzice. Navíc jej potěšily výsledky B. Hostinského, který rozšířil teorii matic i na obecnější operátory, všiml si souvislosti s integrálními rovnicemi a aplikoval výsledky v teorii pravděpodobnosti.

Více než dvousetstránková kniha je rozdělena do osmnácti kapitol. Prvních patnáct kapitol tvoří francouzský překlad dvoudílné Volterrovy práce [1] s několika opravami a doplňky. Zbylé tři kapitoly jsou dílem B. Hostinského; je zde v analogii s předcházejícími kapitolami rozebrán součinový integrál pro jistou třídu operátorů.

V Časopise pro pěstování matematiky a fysiky [16] vyšla recenze Otakara Borůvky, ve které na závěr píše: „Domnívám se, že bohatost výsledků, přehled o literatuře podaný v této knize a soustavný výklad povzbudí odborníky k pracem v tomto směru, v němž jsou nepochybně ještě velké možnosti.“

2.2 Základní pojmy z teorie matic

V prvních čtyřech kapitolách připomíná Volterra známé i méně známé výsledky z teorie matic, které bude potřebovat v dalším textu. Maticím zde říká substituce, neboť představují přechod od jedné soustavy proměnných k druhé.

Je-li $x_i' = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ a $x_i'' = \sum_{k=1}^n b_{ik} x_k'$, pak $x_i'' = \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k$ pro $c_{ik} = \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{jk}$, což je motivací pro definici násobení matic.

Nechť $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$, pak prvky inverzní matice značí $\{A_{ki}\}_{i,k=1}^n$, tj.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \sum_{j=1}^n A_{ji} a_{jk} = \delta_{ik},$$

kde $\delta_{ii} = 1$ a $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$.

Je-li S libovolná matice a T regulární matice, pak matici $T^{-1}ST$ nazývá Volterra transformací matice S maticí T a matici TST^{-1} inverzní transformací matice S maticí T. Je-li S matice nějakého lineárního zobrazení a T matice přechodu mezi dvěma bázemi, pak TST^{-1} je matice stejného lineárního zobrazení vzhledem k nové bázi. V dnešní terminologii bychom řekli, že matice S a TST^{-1} jsou podobné.

Pro blokovou matici

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

sestavenou z čtvercových matic $A_1, A_2, \ldots, A_p$ se v celé knize používá označení $\left\{\overline{A_1 \cdot A_2 \cdots A_p}\right\}$, případně $\left\{\overline{\prod_{i=1}^{p} A_i}\right\}$.

Indukcí vzhledem k řádu matice dokazuje Volterra větu o převedení matice do normálního (Jordanova) tvaru:

Věta. *Pro každou matici S s nenulovým determinantem existují matice U a T takové, že $S = T^{-1}UT$ a U je v normálním tvaru, tj. existují přirozená čísla $p, r_1, \ldots, r_p$ taková, že*

$$U = \left\{\overline{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}}\right\}, \text{ kde } S_i^{(k)} = \begin{pmatrix} \omega_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \omega_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \omega_i \end{pmatrix}$$

je k-tá Jordanova buňka příslušná k vlastnímu číslu ω_i. Pro násobení blokových matic platí

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{pmatrix},$$

kde $C_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk}$.

Odsud se snadno odvodí následující tvrzení, které budeme potřebovat v kapitole o integrování komplexních matic:

Tvrzení. *Jestliže*

$$S(x) = \left\{\overline{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(x)}\right\},$$

potom platí

$$S'(x)S^{-1}(x) = \left\{\overline{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)\prime}(x){S_i^{(k)}}^{-1}(x)}\right\}. \tag{2.2.1}$$

2.3 Derivace a diferenciál maticové funkce

Základními dvěma operacemi ve Volterrově maticovém kalkulu jsou derivace a integrál maticové funkce. Jde přitom o něco jiného než o derivování a integrování po složkách.

Nechť A je maticová funkce proměnné x s nenulovým determinantem, jejíž složky jsou diferencovatelné funkce. Potom levá derivace A je matice

$$A'(x)\cdot A^{-1}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}\cdot A^{-1}(x) = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)\cdot A^{-1}(x)-I}{\Delta x}$$

a pravá derivace A je matice

$$A^{-1}(x)\cdot A'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} A^{-1}(x)\cdot\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^{-1}(x)\cdot A(x+\Delta x)-I}{\Delta x}.$$

Volterra nepoužívá maticový zápis, ale rozepisuje vše do složek:

Tvrzení. *Maticové funkce*

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x+\Delta x)-a_{ij}(x)}{\Delta x}A_{kj}(x)\right\}$$

a

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}A_{ji}(x)\frac{a_{jk}(x+\Delta x)-a_{jk}(x)}{\Delta x}\right\}$$

mají limitu pro $\Delta x\to 0$, právě když a_{ik} jsou diferencovatelné funkce proměnné x. První limitu (levou derivaci) značí $\frac{d}{dx}\{a_{ik}\}$, druhou (pravou derivaci) symbolem $\{a_{ik}\}\frac{d}{dx}$. Abychom nemuseli všechna tvrzení rozepisovat jako Volterra po složkách, domluvíme se, že $\frac{dA}{dx}$ bude znamenat levou derivaci, zatímco derivaci po složkách, tj. matici $\{\frac{da_{ik}}{dx}\}$, budeme značit A'.

Volterra dále definuje levý diferenciál matice předpisem

$$d\{a_{ik}\} = \{a_{ik}(x+dx)\}\cdot\{a_{ik}(x)\}^{-1} = \left\{\delta_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\frac{da_{ij}}{dx}(x)A_{kj}(x)\,dx\right\}$$

a pravý diferenciál matice vztahem

$$\{a_{ik}\}d = \{a_{ik}(x)\}^{-1} \cdot \{a_{ik}(x+dx)\} = \left\{ \delta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} A_{ji}(x) \frac{da_{jk}}{dx}(x)\, dx \right\},$$

kde dx je podle Volterry infinitezimální veličina a oba diferenciály jsou matice, které se infinitezimálně liší od jednotkové matice. Dnes bychom diferenciál interpretovali spíše jako zobrazení definované předpisem

$$dA(u) = I + \frac{dA}{dx} \cdot u \text{ pro } u \in \mathbf{R}\,.$$

Následuje několik tvrzení o vlastnostech derivací, mimo jiné základní věta o derivaci matic:

Věta. *Je-li C konstantní matice, pak* $\frac{d}{dx}(AC) = \frac{dA}{dx}$ *a* $(CA)\frac{d}{dx} = \frac{dA}{dx}$.
Důkaz.

$$\frac{d}{dx}(AC) = (AC)' \cdot (AC)^{-1} = A'CC^{-1}A^{-1} = A'A^{-1} = \frac{dA}{dx},$$

druhá rovnost se dokáže analogicky.

První část základní věty o derivaci můžeme slovně vyjádřit takto: *Levá derivace matice se nezmění, vynásobíme-li tuto matici zprava konstantní maticí.* Záměnou slova „levý" za „pravý" dostaneme duální tvrzení – druhou část základní věty o derivaci.

Platí také opačná implikace:

Věta. *Jestliže* $\frac{dS}{dx} = \frac{dT}{dx}$ *na nějakém intervalu I, pak existuje konstantní matice V taková, že $T = SV$ na I. Důkaz.*

$$\frac{dS^{-1}T}{dx} = (S^{-1}T)'(S^{-1}T)^{-1} = ((S^{-1})'T + S^{-1}T')T^{-1}S =$$
$$= (S^{-1})'S + S^{-1}T'T^{-1}S = S^{-1}S(S^{-1})'S + S^{-1}T'T^{-1}S =$$
$$= S^{-1}(S(S^{-1})' + T'T^{-1})S = S^{-1}(-S'S^{-1} + T'T^{-1})S =$$
$$= S^{-1}\left(\frac{dT}{dx} - \frac{dS}{dx}\right) S = 0$$

(rovnost $S(S^{-1})' = -S'S^{-1}$ získáme derivováním $SS^{-1} = I$). Je-li však $0 = \frac{dA}{dx} = A'A^{-1}$ pro nějakou matici A na I, pak také $0 = A'$ a matice A je konstantní. Dokázali jsme, že matice $V = S^{-1}T$ je konstantní, čímž jsme hotovi. Myšlenka Volterrova důkazu je stejná, jednotlivé kroky však dokazuje rozepsáním do složek.

Důsledek. *Dvě matice mají shodné levé derivace, právě když se liší o pravý násobek konstantní maticí.* Duální věta zní: *Dvě matice mají shodné pravé derivace, právě když se liší o levý násobek konstantní maticí.* Obě věty jsou zřejmě součinovou analogií známého tvrzení: *Dvě funkce mají shodné derivace, právě když se liší o aditivní konstantu.*

Na závěr ještě odvodíme jednoduché tvrzení, které budeme potřebovat později: *Je-li C konstantní matice, pak*

$$\frac{d}{dx}(CA) = (CA)' \cdot (CA)^{-1} = CA'A^{-1}C^{-1} = C\frac{dA}{dx}C^{-1}. \qquad (2.3.1)$$

2.4 Integrál maticové funkce

Nechť $A = \{a_{ik}\}$ je maticová funkce proměnné x definovaná na intervalu $[p, q]$. Zvolme dělení tohoto intervalu $D : p = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = q$ s vyznačenými body $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Označme $h_i = t_i - t_{i-1}$, $T_i = I + h_i A(x_i)$ a utvořme součiny $S(D) = T_m T_{m-1} \cdots T_1$, $S(D)' = T_1 T_2 \cdots T_m$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[p, q]$ s vyznačenými body a nechť $\nu(D_n) \to 0$. Jestliže existuje limita $S(D_n)$ nezávislá na volbě posloupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, nazveme ji levým integrálem matice A na intervalu $[p, q]$. Podobně limitu výrazu $S(D_n)'$ nazveme pravým integrálem matice A.

Volterra značí tyto integrály symboly $\int_p^q \{a_{ik}\}\,dx$ a $\{a_{ik}\}\,dx \int_p^q$. V dalším textu budeme používat označení $\prod_p^q (I + A(t)\,dt)$ a $(I + A(t)\,dt) \prod_p^q$, které je běžné v novějších textech. Naproti tomu symbol $\int_p^q A(t)\,dt$ rezervujeme pro integrál matice po složkách, tj. pro matici $\{\int_p^q a_{ik}(t)\,dt\}$.

Volterra dokazuje následující větu: *Jsou-li a_{ik} omezené riemannovsky integrovatelné funkce na intervalu $[p, q]$, potom oba součinové integrály existují.* Zde je idea Volterrova důkazu:

$$S(D) = (I + h_m A(x_m)) \cdots (I + h_1 A(x_1)) = I + \sum_{\alpha_1} h_{\alpha_1} A(x_{\alpha_1}) +$$

$$+ \sum_{\alpha_1 > \alpha_2} h_{\alpha_1} h_{\alpha_2} A(x_{\alpha_1}) A(x_{\alpha_2}) + \cdots ,$$

kde s-tá suma, $s \le m$, je rovna $\displaystyle\sum_{\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s} h_{\alpha_1} \cdots h_{\alpha_s} A(x_{\alpha_1}) \cdots A(x_{\alpha_s})$.

Označíme-li $S(D) = \{\alpha_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$, pak předchozí rovnice znamená

$$\alpha_{ik} = \delta_{ik} + \sum_{\alpha_1} h_{\alpha_1} a_{ik}(x_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_1 > \alpha_2} \sum_{\beta_1 = 1}^{n} h_{\alpha_1} h_{\alpha_2} a_{i\beta_1}(x_{\alpha_1}) a_{\beta_1 k}(x_{\alpha_2}) + \cdots ,$$

kde s-tá suma je

$$\sum_{\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_s}\ \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}=1}^{n} h_{\alpha_1}\cdots h_{\alpha_s} a_{i\beta_1}(x_{\alpha_1})\cdots a_{\beta_{s-1}k}(x_{\alpha_s}).$$

Jestliže nyní $\nu(D)\to 0$, potom (protože a_{ik} jsou integrovatelné) platí

$$\sum_{\alpha_1} h_{\alpha_1} a_{ik}(x_{\alpha_1}) \to \int_p^q a_{ik}(x_1)\,dx_1,$$

$$\sum_{\beta_1=1}^{n}\sum_{\alpha_1>\alpha_2} h_{\alpha_1}h_{\alpha_2} a_{i\beta_1}(x_{\alpha_1})a_{\beta_1 k}(x_{\alpha_2}) \to$$

$$\to \sum_{\beta_1=1}^{n}\int_p^q\int_p^{x_1} a_{i\beta_1}(x_1)a_{\beta_1 k}(x_2)\,dx_2\,dx_1$$

a obecně

$$\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}=1}^{n}\ \sum_{\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_s} h_{\alpha_1}\cdots h_{\alpha_s} a_{i\beta_1}(x_{\alpha_1})\cdots a_{\beta_{s-1}k}(x_{\alpha_s}) \to$$

$$\to \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}=1}^{n}\int_p^q\int_p^{x_1}\cdots\int_p^{x_{s-1}} a_{i\beta_1}(x_1)\cdots a_{\beta_{s-1}k}(x_s)\,dx_s\cdots dx_1.$$

Zavedeme-li označení $\prod_p^q(I+A(t)\,dt)=\Phi(p,q)=\{\delta_{ik}+\Psi_{ik}(p,q)\}$, pak jsme odvodili

$$\Psi_{ik}(p,q)=\sum_{s=1}^{\infty}\ \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}=1}^{n}\int_p^q\int_p^{x_1}\cdots\int_p^{x_{s-1}} a_{i\beta_1}(x_1)\cdots a_{\beta_{s-1}k}(x_s)\,dx_s\cdots dx_1$$

Funkce a_{ik} jsou omezené, proto $|a_{ik}(x)|\le M$ pro nějaké M; s-tý člen předchozí sumy pak můžeme shora odhadnout výrazem

$$n^{s-1}M^s\int_p^q\int_p^{x_1}\cdots\int_p^{x_{s-1}} dx_s\cdots dx_1=\frac{1}{n}\frac{[nM(q-p)]^s}{s!}, \qquad (2.4.1)$$

a tedy řada $\Psi_{ik}(p,q)$ konverguje absolutně a stejnoměrně. (Rovnice (2.4.1) se dokáže matematickou indukcí podle s, při indukčním kroku derivujeme levou stranu podle q a využijeme indukční předpoklad.)

Poznámka. Rozvoj $\Psi_{ik}(p,q)$ do řady je ekvivalentní s maticovým zápisem

$$\prod_p^q (I+A(x)\,dx) = I + \int_p^q A(x_1)\,dx_1 + \int_p^q \int_p^{x_1} A(x_1)A(x_2)\,dx_2\,dx_1 + \cdots,$$

který dnes nazýváme Peanovou řadou. Je-li $A(x)$ matice typu 1×1, tj. $A = \{a(x)\}$, kde a je reálná funkce, dostaneme

$$\int_p^q \int_p^{x_1} \cdots \int_p^{x_{s-1}} a(x_1)\cdots a(x_s)\,dx_s \cdots dx_1 = \frac{1}{s!}\left(\int_p^q a(x)\,dx\right)^s$$

(dokáže se opět indukcí podle s), a tedy

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \left\{e^{\int_p^q a(x)\,dx}\right\}.$$

Pro pravý integrál $(I + A(x)\,dx)\prod_p^q = \phi(p,q) = \{\delta_{ik} + \psi_{ik}(p,q)\}$ se analogicky odvodí rozvoj

$$\psi_{ik}(p,q) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}=1}^{n} \int_p^q \int_p^{x_1} \cdots \int_p^{x_{s-1}} a_{i\beta_1}(x_s)\cdots a_{\beta_{s-1}k}(x_1)\,dx_s \cdots dx_1.$$

Volterra dále uvádí vztah

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \prod_r^q (I + A(x)\,dx) \cdot \prod_p^r (I + A(x)\,dx)$$

a píše, že pro $p < r < q$ snadno plyne z asociativity maticového násobení. Pravděpodobně měl na mysli to, že v definici integrálu můžeme vzít posloupnost takových dělení intervalu $[p,q]$, která vždy obsahují i dělicí bod r. Tak dostaneme posloupnost dělení intervalů $[p,r]$ a $[r,q]$. Součin $S(D) = T_m T_{m-1} \cdots T_1$ pak zapíšeme ve tvaru $S(D) = (T_m \cdots T_{j+1})(T_j \cdots T_1)$, kde první závorka přísluší k dělení intervalu $[r,q]$ a druhá k dělení $[p,r]$. Limitním přechodem dostaneme požadované tvrzení. Tento důkaz funguje jen pro $p < r < q$. Definujeme-li však $\Psi_{ik}(p,q)$ výše uvedenou řadou pro libovolná čísla p a q, potom

$$\Phi_{ik}(p,q) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(r,q)\Phi_{jk}(p,r)$$

(Volterra to dokazuje pomocí řady pro Ψ_{ik}), což je ekvivalentní vyjádření našeho tvrzení. Speciálně pro $q = p$

$$\prod_r^p (I + A(x)\,dx) = \left(\prod_p^r (I + A(x)\,dx)\right)^{-1}.$$

Pro pravý integrál se analogicky odvodí rovnost

$$(I + A(x)\,dx)\prod_p^q = (I + A(x)\,dx)\prod_p^r \cdot (I + A(x)\,dx)\prod_r^q$$

2.5 Derivace integrálu podle horní meze

Volterra se dále zabývá spojitými maticovými funkcemi A (tj. maticemi, jejichž složky a_{ij} jsou spojité funkce). Následující tvrzení se týká derivace součinového integrálu podle horní meze.

Věta. *Nechť A je spojitá maticová funkce. Potom $\frac{\partial\Phi}{\partial q}(p,q) = A(q)\Phi(p,q)$, tj.*

$$\frac{\partial\Phi_{ik}}{\partial q}(p,q) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q)\Phi_{jk}(p,q) \tag{2.6.1}$$

pro každé $i, k = 1, \ldots, n$. *Důkaz.* Z rozvoje $\Phi(p,q)$ do Peanovy řady plyne $\Phi(p,q) = I + \int_p^q A(x)\Phi(p,x)\,dx$ a derivováním rovnosti podle q dostaneme tvrzení věty.

Označíme-li $y^{(l)}(x) = [\Phi_{1l}(p,x), \ldots, \Phi_{nl}(p,x)]$ (l-tý sloupec matice Φ), potom podle (2.6.1) je každá z vektorových funkcí $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ řešením soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Jelikož $\Phi(p,p) = I$, splňují tato řešení počáteční podmínku $y_i^{(l)}(p) = \delta_{li}$, tj. $y^{(l)}(p)$ je l-tý vektor kanonické báze euklidovského prostoru $\mathbf{R}^n$. Protože jsou funkce $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení uvedené soustavy a Φ je její fundamentální matice.

Pro pravý integrál analogicky odvodíme, že $\frac{\partial\phi}{\partial q}(p,q) = \phi(p,q)A(q)$, a tedy ϕ je fundamentální matice soustavy

$$(y_1', \cdots, y_n') = (y_1, \cdots y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kromě souvislosti s diferenciálními rovnicemi je zajímavé i to, že $\frac{d}{dx}\Phi(x) = A(x)$ a $\phi(x)\frac{d}{dx} = A(x)$, tj. levá derivace levého integrálu podle horní meze je původní matice a totéž platí i pro pravou derivaci pravého integrálu. Integrování a derivování jsou tedy v jistém smyslu inverzní operace.

Obyčejné integrály počítáme zpravidla podle základní věty kalkulu

$$\int_p^q f'(x)\,dx = f(q) - f(p).$$

Její součinová analogie pro matice zní:

Věta. *Nechť S je diferencovatelná maticová funkce na intervalu $[p,q]$. Potom*

$$\prod_p^q \left(I + \frac{dS}{dx}(x)\,dx\right) = S(q)S(p)^{-1}.$$

Důkaz. Považujeme-li výrazy na obou stranách dokazované rovnosti za funkce q, pak jejich levá derivace je v obou případech rovna $\frac{d}{dq}S(q)$. Platí tedy $\prod_p^q(I + \frac{dS}{dx}(x)\,dx) = S(q)C$ pro nějakou konstantní matici C. Dosazením $q = p$ dostaneme $C = S(p)^{-1}$.

Lze definovat i analogii k pojmu primitivní funkce: *Maticovou funkci $S(x)$ nazveme levým neurčitým integrálem maticové funkce $T(x)$ na intervalu $[a,b]$, jestliže pro libovolná dvě čísla $p,q \in [a,b]$ platí*

$$\prod_p^q (I + T(x)\,dx) = S(q)S(p)^{-1}.$$

Snadno se dokáže, že to je ekvivalentní s podmínkou

$$S(x) = \left(\prod_p^x (I + T(u)\,du)\right) C,$$

kde $p \in [a,b]$ a C je libovolná konstantní matice.

Volterra dále ukazuje, že pomocí integrálu matice lze vyřešit lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)}(x) = p_1(x)y^{n-1}(x) + p_2(x)y^{n-2}(x) + \cdots + p_n(x)y(x).$$

Definujeme-li funkce $z_0 = y$, $z_1 = z_0'$, $z_2 = z_1', \ldots, z_{n-1} = z_{n-2}'$, potom uvedená rovnice n-tého řádu je ekvivalentní soustavě

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ z_1' \\ \vdots \\ z_{n-2}' \\ z_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$$

lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Fundamentální matici této soustavy spočteme pomocí levého integrálu. Řešení původní rovnice pak odpovídá funkci z_0, tj. prvnímu řádku fundamentální matice (dostaneme n lineárně nezávislých řešení).

Dalším speciálním případem je soustava lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

kde $A = \{a_{ik}\}$ je konstantní matice. Fundamentální matice soustavy je samozřejmě $\Phi(p, q)$, tentokrát však můžeme spočítat integrály z rozvoje Φ do Peanovy řady. Vyjde

$$\Phi(p,q) = I + \frac{A}{1!}(q-p) + \frac{A^2}{2!}(q-p)^2 + \cdots$$

Tuto řadu nazýváme maticová exponenciála a značíme ji $e^{A(q-p)}$; Volterra ji zapisuje ve tvaru

$$\Phi_{ik}(p,q) = \delta_{ik} + \frac{a_{ik}}{1!}(q-p) + \frac{a_{ik}^{(2)}}{2!}(q-p)^2 + \cdots$$

Zcela stejný rozvoj však dostaneme i pro pravý integrál $\phi(p,q)$. Je-li tedy A konstantní matice, pak

$$\prod_q^p (I + A(x)\,dx) = (I + A(x)\,dx)\prod_p^q = e^{A(q-p)}.$$

Známe-li řadu pro $e^{A(q-p)}$, můžeme toto tvrzení ověřit i přímo derivováním člen po členu. Vyjde

$$\frac{\partial e^{A(q-p)}}{\partial q} = Ae^{A(q-p)} = e^{A(q-p)}A,$$

tj.

$$\frac{d}{dq}e^{A(q-p)} = e^{A(q-p)}\frac{d}{dq} = A.$$

2.6 Maticové funkce více proměnných

Nechť A je maticová funkce proměnných $x_1,\dots,x_m$. Matice $\frac{\partial A}{\partial x_s}A^{-1}$ se nazývá (pokud existuje) levá parciální derivace matice A podle x_s a budeme ji značit $\frac{dA}{dx_s}$ – narozdíl od parciální derivace matice po složkách, kterou označíme $\frac{\partial A}{\partial x_s}$.

Levý diferenciál A definuje Volterra jako matici

$$dA = A(x_1 + dx_1,\dots,x_m + dx_m)A^{-1}(x_1,\dots,x_m) = I + \sum_{s=1}^{m}\frac{dA}{dx_s}dx_s,$$

která se infinitezimálně liší od jednotkové matice; my můžeme diferenciál opět chápat jako zobrazení $dA(u_1,\dots,u_m) = I + \sum_s \frac{dA}{dx_s}u_s$. Analogicky se definují pravé parciální derivace a pravý diferenciál.

V analýze funkcí více proměnných se dokazuje následující tvrzení:

Věta. *Nechť funkce $f_1,\dots,f_m : \Omega \to \mathbf{R}$ mají spojité parciální derivace v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:* (1) Existuje $F : \Omega \to \mathbf{R}$ taková, že $\nabla F = [f_1,\dots,f_m]$, tj. $f_1dx_1 + \dots + f_mdx_m$ je diferenciál funkce F.
(2) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$ pro $i,j = 1,\dots,m$.
(3) Je-li $\varphi : [a,b] \to \Omega$ spojitě diferencovatelná křivka, pak $\int_\varphi f_1dx_1 + \dots + f_mdx_m = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$, tj. křivkový integrál vektorového pole $[f_1,\dots,f_m]$ nezávisí na cestě.

Pokusíme se zformulovat maticovou analogii předchozí věty. Implikace (1) $\Rightarrow$ (2) se dokazuje ze záměnnosti parciálních derivací:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Jestliže nyní $I+\sum_{s=1}^m B_s dx_s$ je levý diferenciál nějaké matice A, potom $B_s=\frac{\partial A}{\partial x_s}A^{-1}$, takže

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_j}-\frac{\partial B_j}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}A^{-1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A}{\partial x_j}A^{-1}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)A^{-1}+\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)A^{-1}-\frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_j}-\frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_i}=$$

$$=-\frac{\partial A}{\partial x_i}A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x_j}A^{-1}+\frac{\partial A}{\partial x_j}A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x_i}A^{-1}=B_jB_i-B_iB_j$$

(kde vztah $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_j}=-A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x_j}A^{-1}$ získáme derivováním $AA^{-1}=I$ podle x_j). Označíme-li podle Volterry

$$\Delta(X,Y)_{x_i,x_j}=\frac{\partial Y}{\partial x_i}-\frac{\partial X}{\partial x_j}+YX-XY,$$

pak jsme dokázali $\Delta(B_i,B_j)_{x_i,x_j}=0$ pro $i,j=1,\dots,m$.

Je-li $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}^m$ spojitě diferencovatelná křivka, definujeme křivkový součinový integrál matic $[B_1,\dots,B_m]$ podél φ předpisem

$$\prod_{\varphi}(I+B_1\,dx_1+\cdots+B_m\,dx_m)=$$

$$=\prod_a^b(I+B_1(\varphi(t))\varphi_1'(t)+\cdots+B_m(\varphi(t))\varphi_m'(t)\,dt).$$

(Volterra píše $\int_\varphi B_1\,dx_1\cdots B_m\,dx_m$ místo $\prod_\varphi(I+B_1\,dx_1+\cdots+B_m\,dx_m)$).

Nyní již můžeme zformulovat maticovou analogii dříve uvedené věty.

Věta. *Nechť matice $B_1,\dots,B_m$ mají spojité parciální derivace v jednoduše souvislé oblasti $\Omega\subseteq\mathbf{R}^m$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:* (1) Existuje maticová funkce A taková, že $dA=I+\sum_{s=1}^m B_s dx_s$ v Ω.
(2) $\Delta(B_i,B_j)_{x_i,x_j}=0$ v Ω pro $i,j=1,\dots,m$.
(3) Je-li $\varphi:[a,b]\to\Omega$ spojitě diferencovatelná křivka, pak součinový křivkový integrál $[B_1,\dots,B_m]$ nezávisí na cestě a platí $\prod_\varphi(I+B_1\,dx_1+\cdots+B_m\,dx_m)=A(\varphi(b))A^{-1}(\varphi(a))$.

Volterra nejprve dokazuje tvrzení (1) $\Rightarrow$ (2). Postupuje podobně jako my, jen místo $I+\sum_{s=1}^m B_s dx_s$ píše $\prod_{s=1}^m(I+B_s dx_s)$ s tím, že nekonečně malé veličiny druhého řádu lze zanedbat.

Implikaci (2) $\Rightarrow$ (1) dokazuje pro speciální případ $\Omega = \mathbf{R}^m$ a začíná s důkazem pro $m = 2$: Zvolí $[x_0, y_0] \in \mathbf{R}^2$ a hledá matici A splňující podmínku (1). Definujeme-li $S_1(x,y) = \prod_{x_0}^{x}(I + B_1(t,y)\,dt)$, pak

$$\frac{dS_1}{dx} = B_1 = \frac{dA}{dx},$$

a tedy existuje maticová funkce T taková, že $A(x,y) = S_1(x,y)T(y)$ (tj. T nezávisí na x). Platí

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy}(S_1^{-1}A) = S_1^{-1}\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dS_1}{dy}\right)S_1 = S_1^{-1}\left(B_2 - \frac{dS_1}{dy}\right)S_1.$$

Položíme proto

$$T(y) = \prod_{y_0}^{y}\left(I + S_1^{-1}(x,t)\left(B_2(x,t) - \frac{dS_1}{dy}(x,t)\right)S_1(x,t)\,dt\right).$$

Nyní stačí ověřit, že tato matice T nezávisí na x, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S_1^{-1}\left(B_2 - \frac{dS_1}{dy}\right)S_1\right) = S_1^{-1}\Delta(B_1,B_2)_{x,y}S_1 = 0$$

(odvození této rovnosti zabere trochu času, ale jde jen o elementární úpravy). Pro $m > 2$ dokáže Volterra implikaci (2) $\Rightarrow$ (1) matematickou indukcí.

V následující kapitole definuje Volterra dvourozměrný součinový integrál $\prod_\sigma(I + S(x,y)\,dx\,dy)$ matice $S(x,y)$ přes oblast σ. Dokáže pro něj analogii Greenovy věty:

$$\prod_\varphi(I + B_1\,dx + B_2\,dy) = \prod_\sigma(I + S_1^{-1}\Delta(B_1,B_2)_{x,y}S_1\,dx\,dy), \qquad (2.6.1)$$

kde křivka φ je hranicí oblasti σ a S_1 je jistá maticová funkce. (O dvourozměrném integrálu a o Greenově větě se ještě zmíníme v kapitole 4.) Jestliže $\Delta(B_1,B_2)_{x,y} = 0$ v Ω, pak $\prod_\varphi(I + B_1\,dx + B_2\,dy) = I$ pro každou uzavřenou křivku v Ω, a tedy křivkový součinový integrál nezávisí na cestě. Toto tvrzení bude Volterra potřebovat při vyšetřování křivkového integrálu matic komplexní proměnné.

Poznámka. Uvedený postup kopíruje důkaz nezávislosti křivkového integrálu na cestě z klasické analýzy pomocí Greenovy věty. Víme-li, že tvrzení (1) a (2) jsou ekvivalentní, můžeme místo (2) $\Rightarrow$ (3) dokázat implikaci (1) $\Rightarrow$ (3) takto:

$$\prod_\varphi(I + B_1\,dx + B_2\,dy) = \prod_\varphi\left(I + \frac{dA}{dx}\,dx + \frac{dA}{dy}\,dy\right) =$$

$$= \prod_a^b \left(I + \left[\frac{\partial A}{\partial x}(\varphi(t))A^{-1}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial A}{\partial y}(\varphi(t))A^{-1}(\varphi(t))\varphi_2'(t) \right] dt \right) =$$

$$= \prod_a^b \left(I + \frac{d}{dt}(A \circ \varphi)(t)\, dt \right) = A(\varphi(b))A^{-1}(\varphi(a)).$$

Tento důkaz se snadno zobecní i pro křivky v $\mathbf{R}^m$, $m > 2$.

Myšlenku důkazu implikace (3) $\Rightarrow$ (1) nastíníme v části (4.7).

2.7 Maticové funkce komplexní proměnné

Doposud jsme se zabývali maticemi, jejichž prvky byly reálné nebo komplexní funkce reálné proměnné. (Skutečně, i když jsme to nezdůraznili, všechny dosud uvedené definice a věty platí i pro komplexní matice reálné proměnné.) Nyní obrátíme pozornost ke komplexním maticím komplexní proměnné.

Nechť $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$, kde a_{ik} jsou holomorfní funkce komplexní proměnné z. Občas budeme ztotožňovat $a_{ik}(z)$ s $a_{ik}(x + iy)$ jakožto komplexní funkcí dvou reálných proměnných x, y. Je známo, že platí

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial y} = i\frac{\partial a_{ik}}{\partial x}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = i\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Levou derivaci matice A podle komplexní proměnné z definujeme předpisem $\frac{dA}{dz}(z) = A'(z)A^{-1}(z)$. Platí

$$\frac{dA}{dz} = \frac{dA}{dx} = \frac{1}{i}\frac{dA}{dy}.$$

Levý diferenciál matice A podle komplexní proměnné z je matice

$$dA = A(z + dz)A^{-1}(z) = I + \frac{dA}{dz}dz.$$

Analogicky definujeme pravou derivaci a pravý diferenciál.

Motivací pro definici levého integrálu reálné matice byla diferenciální rovnice $y'(x) = A(x)y(x)$; nyní nás bude zajímat řešitelnost rovnice

$$y'(z) = A(z)y(z),$$

kde y, A jsou funkce komplexní proměnné.

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbf{C}$ je křivka v komplexní rovině, A je maticová funkce proměnné z definovaná na $\varphi([a, b])$. Zvolme dělení $D : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. Definujme matice $T_i = I + A(\varphi(u_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$, kde $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$, a utvořme součin $S(D) = T_m T_{m-1} \cdots T_1$. Jestliže existuje limita $S(D_n)$ pro $\nu(D_n) \to 0$ nezávislá na volbě posloupnosti dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, nazveme ji levým součinovým integrálem matice A podél křivky φ a označíme $\prod_{\varphi}(I + A(z)\,dz)$.

Není těžké dokázat, že je-li φ po částech spojitě diferencovatelná, pak

$$\prod_{\varphi}(I + A(z)\,dz) = \prod_{a}^{b}(I + A(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt) \tag{2.7.1}$$

(levý integrál komplexní matice reálné proměnné). Levý křivkový integrál má následující vlastnosti:

(1) *Vznikne-li křivka $\varphi_1 + \varphi_2$ spojením křivek φ_1 a φ_2 (v tomto pořadí), pak*

$$\prod_{\varphi_1+\varphi_2}(I + A(z)\,dz) = \prod_{\varphi_2}(I + A(z)\,dz) \cdot \prod_{\varphi_1}(I + A(z)\,dz).$$

(2) *Je-li $-\varphi$ křivka, která vznikne obrácením orientace φ, pak*

$$\prod_{-\varphi}(I + A(z)\,dz) = \left(\prod_{\varphi}(I + A(z)\,dz)\right)^{-1}.$$

Volterra pouze píše, že důkaz těchto tvrzení je snadný. Obě plynou např. ze vztahu (2.7.1), který však neuvádí. Nezmiňuje se ani o vyjádření levého integrálu Peanovou řadou

$$\prod_{\varphi}(I + A(z)\,dz) = I + \int_{\varphi} A(z)\,dz + \int_{\varphi} A(z)\left(\int_{\varphi_z} A(\xi)\,d\xi\right)dz + \cdots,$$

kde vpravo integrujeme matice po složkách a φ_z je restrikce křivky φ na interval $[a,t]$, $\varphi(t) = z$. Peanovu řadu lze odvodit buď stejným postupem jako u levého integrálu reálné matice, nebo použitím vztahu (2.7.1) a rozvoje do Peanovy řady pro integrál maticové funkce reálné proměnné.

Tvrzení. *Nechť $\varphi_1 + \varphi_2$ je uzavřená křivka. Potom $\prod_{\varphi_1+\varphi_2}(I + A(z)\,dz)$ a $\prod_{\varphi_2+\varphi_1}(I + A(z)\,dz)$ jsou podobné matice (tj. změníme-li počátek při integrování přes uzavřenou křivku, dostaneme podobnou matici). Důkaz.*

Protože $\varphi_2 + \varphi_1 = -\varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1$, platí

$$\prod_{\varphi_2+\varphi_1}(I+A(z)\,dz) = \prod_{\varphi_1}(I+A(z)\,dz) \cdot \prod_{\varphi_1+\varphi_2}(I+A(z)\,dz) \cdot \prod_{-\varphi_1}(I+A(z)\,dz) =$$

$$= \prod_{\varphi_1}(I + A(z)\,dz) \cdot \prod_{\varphi_1+\varphi_2}(I + A(z)\,dz) \cdot \left(\prod_{\varphi_1}(I + A(z)\,dz)\right)^{-1}.$$

Důsledek. *Pokud* $\prod_{\varphi_1+\varphi_2}(I + A(z)\,dz) = I$, *pak také* $\prod_{\varphi_2+\varphi_1}(I + A(z)\,dz) = I$.

Hodnota levého integrálu matice A přes uzavřenou křivku φ tedy závisí na volbě počátku (narozdíl od křivkového integrálu funkce komplexní proměnné); všechny takové matice jsou však podobné. Jsou tedy také podobné jisté Jordanově matici, kterou Volterra nazývá levou charakteristikou matice T vzhledem ke křivce φ.

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbf{C}$ je pevně zvolená prostá křivka. Očekáváme, že vztah

$$y(z) = \left(\prod_{\varphi_z}(I + A(w)\,dw)\right) y_0$$

bude udávat řešení rovnice $y'(z) = A(z)y(z)$ podél křivky φ s počáteční podmínkou $y(\varphi(a)) = y_0$. Má-li rovnice řešení v nějaké oblasti Ω, potom by křivkový integrál neměl záviset na cestě (jinak bychom dostali víceznačnou analytickou funkci).

Věta. *Nechť* $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ *je jednoduše souvislá oblast,* A *je holomorfní matice v* Ω. *Potom*

$$\prod_{\varphi}(I + A(z)\,dz) = I$$

pro každou uzavřenou křivku φ *v* Ω. *Důkaz.* Snadno si rozmyslíme, že

$$\prod_{\varphi}(I + A(z)\,dz) = \prod_{\tilde{\varphi}}(I + A_1(x, y)\,dx + A_2(x, y)\,dy),$$

kde $A_1(x, y) = A(x + iy)$, $A_2(x, y) = iA(x + iy)$ a $\tilde{\varphi}$ je křivka v $\mathbf{R}^2$ s parametrizací $[\mathrm{Re}\,\varphi(t), \mathrm{Im}\,\varphi(t)]$, $t \in [a, b]$. Dále platí

$$\Delta(A_1, A_2)_{x,y} = \frac{\partial iA}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} + iAA - AiA = 0,$$

a tedy podle maticové Greenovy věty jsou oba křivkové integrály rovny jednotkové matici.

Poznámka. Právě uvedený důkaz odpovídá Volterrovu postupu. Analogii Greenovy věty dokazoval právě proto, aby ji zde mohl použít. Pokud bychom ji neměli k dispozici, dá se tvrzení jednoduše dokázat i rozvinutím křivkového součinového integrálu do Peanovy řady a použitím Cauchyovy věty pro funkce komplexní proměnné.

Volterra se dále věnuje maticím A holomorfním v oblasti $\Omega\backslash\{z_0\}$, kde $z_0 \in \Omega$ a $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ je jednoduše souvislá oblast. Zajímá nás hodnota integrálu $\prod_\varphi(I + A(z)\,dz)$, kde φ je uzavřená křivka v Ω s jednotkovým indexem vzhledem k bodu z_0 (tj. φ obíhá kolem z_0 právě jednou, a to proti směru hodinových ručiček). Jsou-li $\varphi_1 : [a,b] \to \Omega\backslash\{z_0\}$ a $\varphi_2 : [a,b] \to \Omega\backslash\{z_0\}$ dvě takové křivky, pak $\prod_{\varphi_1}(I + A(z)\,dz)$ a $\prod_{\varphi_2}(I + A(z)\,dz)$ jsou podobné matice. Skutečně, spojme body $\varphi_1(a)$ a $\varphi_2(a)$ (v tomto pořadí) libovolnou křivkou ψ uvnitř $\Omega\backslash\{z_0\}$. Potom je A holomorfní uvnitř uzavřené křivky $\psi + \varphi_2 - \psi - \varphi_1$, a proto

$$\left(\prod_\psi(I + A(z)\,dz)\right)^{-1} \cdot \prod_{\varphi_2}(I+A(z)\,dz) \cdot \prod_\psi(I+A(z)\,dz) = \prod_{\varphi_1}(I+A(z)\,dz),$$

což jsme měli dokázat.

Levý integrál je tedy matice závislá na volbě křivky φ, ale všechny takové matice jsou navzájem podobné. Proto jsou všechny podobné stejné Jordanově matici, kterou Volterra nazývá reziduum matice A v bodě z_0.

Spočtěme reziduum maticové funkce

$$T(z) = \frac{A}{z - z_0} + B(z)$$

v bodě z_0, kde A je konstantní a B je holomorfní matice. Budeme integrovat přes kružnici $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Podle (2.7.1)

$$\prod_{\varphi_r}(I + T(z)\,dz) = \prod_0^{2\pi}(I + iA + ire^{it}B(z_0 + re^{it})\,dt).$$

Volterra navrhuje následující postup: Protože $iA+ire^{it}B(z_0+re^{it}) \to iA$ pro $r \to 0$, platí $\prod_{\varphi_r}(I+T(z)\,dz) \to \prod_0^{2\pi}(I+iA\,dt)$. Jelikož všechny integrály $\prod_{\varphi_r}(I+T(z)\,dz)$ mají stejné reziduum, bude mít totéž reziduum i jejich limita. (Tato úvaha je chybná, viz komentář na konci podkapitoly.) Stačí tedy najít Jordanův tvar matice $\prod_0^{2\pi}(I + iA\,dt)$. (Mimochodem tento integrál z konstantní matice je roven $e^{2\pi iA}$, takže máme pěknou analogii reziduové věty: Integrál $\prod_{\varphi_r}(I + T(z)\,dz)$ je podobný matici $e^{2\pi iA}$.) Nechť

$$iA = C^{-1}\left\{\overline{\underline{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} T_i^{(k)}}}\right\} C \ , \text{ kde } T_i^{(k)} = \begin{pmatrix} \omega_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \omega_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \omega_i \end{pmatrix},$$

je Jordanův tvar matice iA. Označíme-li

$$S_i^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} e^{\omega_i x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{x^1}{1!}e^{\omega_i x} & e^{\omega_i x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!}e^{\omega_i x} & \frac{x^1}{1!}e^{\omega_i x} & e^{\omega_i x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

kde $S_i^{(k)}$ je čtvercová matice stejného řádu jako $T_i^{(k)}$, pak platí $\frac{dS_i^{(k)}}{dx} = T_i^{(k)}$. Odtud podle (2.2.1)

$$\frac{d}{dx}\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(x)\right\} = \left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} T_i^{(k)}\right\},$$

a tedy podle (2.3.1)

$$\frac{d}{dx}\left(C^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(x)\right\}\right) = C^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} T_i^{(k)}\right\}C = iA.$$

Proto

$$\prod_{0}^{2\pi}(I + iA\,dt) =$$

$$= \left(C^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(2\pi)\right\}\right)\left(C^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(0)\right\}\right)^{-1} =$$

$$= C^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(2\pi)\right\}C.$$

Nyní stačí najít Jordanovu matici podobnou

$$\left\{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} S_i^{(k)}(2\pi)\right\}.$$

Výsledkem, tj. hledaným reziduem, je matice

$$\left\{\overline{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_i} V_i^{(k)}}\right\}, \text{ kde } V_i^{(k)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi\omega_i} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & e^{2\pi\omega_i} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & e^{2\pi\omega_i} \end{pmatrix}.$$

Právě uvedený postup bohužel není zcela korektní. Volterra na začátku používá toto tvrzení: *Jestliže matice $S(r)$ jsou pro všechna $r > 0$ podobné jisté Jordanově matici J, je i $\lim_{r\to 0} S(r)$ podobná J.* Uvážíme-li např.

$$S(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

vidíme, že toto tvrzení je chybné, neboť pro $r > 0$ je $S(r)$ podobná Jordanově matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

zatímco

$$S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

této matici podobná není. Tvrzení lze dokázat za jistých dodatečných předpokladů na $S(r)$. Mají-li např. $S(r)$, $r > 0$, n různých vlastních čísel $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (n je řád matice $S(r)$), pak má stejná vlastní čísla i matice $S(0) = \lim_{r\to 0} S(r)$, neboť

$$\det(S(0) - \omega I) = \lim_{r\to 0} \det(S(r) - \omega I) = (\omega - \omega_1)\cdots(\omega - \omega_n).$$

Proto jsou všechny matice $S(r)$, $r \geq 0$, podobné stejné Jordanově matici

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_n \end{pmatrix}$$

a Volterrův další postup je v pořádku. Podrobnější diskusi o analogii reziduové věty pro součinový integál lze najít v [12].

Integrály maticových funkcí se singularitami vedou na (víceznačné) analytické funkce na Riemannových plochách. Volterra se jim věnuje v dalších kapitolách, které zde nebudeme rozebírat.

Kapitola 3: Součinový integrál operátoru u Bohuslava Hostinského

V úvodu jsme se zmínili o tom, že poslední tři kapitoly knihy [4] jsou dílem Bohuslava Hostinského. Studuje zde lineární operátory na prostoru reálných funkcí (používá termín lineární funkcionální tranformace) a definuje pro ně derivaci a integrál jako analogie k pojmům, které Volterra zavedl pro matice. Hostinský si představuje funkci jako vektor s nekonečně mnoha souřadnicemi, operátor je pak matice nekonečného řádu. Uvidíme, že mnoho vlastností součinového integrálu matice se přenese i na součinový integrál operátoru.

Obrázek 2: Bohuslav Hostinský

Bohuslav Hostinský se narodil 5. prosince 1884 v Praze. Vystudoval matematiku a fyziku na filozofické fakultě, kde roku 1907 získal i doktorát. Po studiu v Paříži vyučoval na gymnáziu, od roku 1912 přednášel jako docent matematiku na pražské univerzitě. Roku 1920 byl jmenován řádným profesorem teoretické fyziky na brněnské Masarykově univerzitě, v letech 1929–1930 zastával funkci rektora. V Brně působil až do své smrti roku 1951.

Hostinský se zabýval teoretickou fyzikou – vlněním a kmitáním, kinetickou teorií plynů, zářením černého tělesa. Tyto problémy ho vedly i ke studiu některých partií matematiky, např. geometrie, diferenciálních a integrálních rovnic, teorie pravděpodobnosti (zejména Markovových řetězců a procesů) či matematické statistiky. Podrobnější životopis i seznam publikací B. Hostinského lze najít např. v [15].

3.1 Lineární operátory

Hostinský se zabývá operátory na prostoru spojitých funkcí. Operátor S je zobrazení, které funkci f přiřadí funkci $g = S(f)$. S je lineární, jestliže platí

$$S(af_1 + bf_2) = aS(f_1) + bS(f_2)$$

pro libovolné funkce f_1, f_2 a konstanty $a, b \in \mathbf{R}$. Operátor S^{-1} je inverzní k S, jestliže

$$S^{-1}(S(f)) = S(S^{-1}(f)) = f$$

pro každou funkci f.

V dalším textu se Hostinský zaměřuje především na integrální operátory 1. druhu

$$g(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$$

a operátory 2. druhu

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

Funkce $K(x,y)$ se nazývá jádro integrálního operátoru; dále budeme předpokládat, že jádro je spojité na intervalu $[a,b] \times [a,b]$. Je-li $f \in C([a,b])$, pak $g \in C([a,b])$ v případě operátorů 1. i 2. druhu. K operátoru 1. druhu obecně neexistuje inverzní operátor. Je-li S operátor 2. druhu, pak Fredholm dokázal, že k němu existuje inverzní operátor ve tvaru

$$f(x) = g(x) + \int_a^b N(x,y)g(y)\,dy,$$

tj. je to opět operátor 2. druhu s jádrem $N(x,y)$ (tzv. rezolventní jádro). Splňuje princip reciprocity

$$K(x,y) + N(x,y) = -\int_a^b K(x,z)N(z,y)\,dz = -\int_a^b N(x,z)K(z,y)\,dz.$$

Jestliže $\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\,dx\,dy < 1$, potom platí $N(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(i)}(x,y)$, kde

$$K^{(1)}(x,y) = -K(x,y),$$
$$K^{(i+1)}(x,y) = \int_a^b K^{(i)}(x,z)K^{(1)}(z,y)\,dz.$$

Jde o speciální případ obecnější věty z funkcionální analýzy:

Pro každý lineární operátor T, $\|T\| < 1$, *platí* $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. (V našem případě $T(f) = -\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$.)

Pokud $K(x,y) = 0$ pro $y > x$, dostaneme tzv. Volterrův operátor

$$g(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)f(y)\,dy.$$

Skládání operátorů definujeme předpisem $(S_2 \cdot S_1)(f) = S_2(S_1(f))$. Je-li například

$$S_1(f)(x) = f(x) + \int_a^b K_1(x,y)f(y)\,dy,$$

$$S_2(g)(z) = g(z) + \int_a^b K_2(z,x)g(x)\,dx,$$

pak složením těchto dvou operátorů vznikne operátor 2. druhu

$$(S_2 \circ S_1)(f)(z) = f(z) + \int_a^b L(z,y)f(y)\,dy,$$

kde

$$L(z,y) = K_1(z,y) + K_2(z,y) + \int_a^b K_2(z,x)K_1(x,y)\,dx.$$

3.2 Derivace a integrál operátoru

Předpokládejme, že operátor $S(u)$ závisí na parametru $u \in \mathbf{R}$. Hostinský píše, že derivaci a integrál operátoru lze definovat stejně jako pro matice, následující definice však v knize neuvádí:

Existuje-li

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{S(u+\Delta u)\cdot S^{-1}(u) - I}{\Delta u} \quad \left(\text{resp. } \lim_{\Delta u \to 0} \frac{S^{-1}(u)\cdot S(u+\Delta u) - I}{\Delta u}\right),$$

(kde I je identita), nazveme tento operátor levou (resp. pravou) derivací $S(u)$ podle u.

Poznámka. Je třeba definovat, jak budeme chápat konvergenci operátorů. Hostinský se o tom nikde nezmiňuje, z dalšího výkladu však vyplyne, že pracuje s konvergencí $S(x) \to S_0$ pro $x \to x_0$, jestliže $S(x)(f) \to S_0(f)$ (bodová konvergence) pro libovolnou spojitou funkci f.

Spočtěme levou derivaci operátoru 2. druhu. Označme $K(x,y,u)$ jádro operátoru $S(u)$. Víme, že $S(u+\Delta u)\cdot S^{-1}(u)$ je operátor 2. druhu s jádrem

$$K(x,y,u+\Delta u)+N(x,y,u)+\int_a^b K(x,z,u+\Delta u)N(z,y,u)\,dz=$$
$$=K(x,y,u+\Delta u)-K(x,y,u)+$$
$$+\int_a^b \left[K(x,z,u+\Delta u)-K(x,z,u)\right]N(z,y,u)\,dz$$

(použili jsme princip reciprocity). Tedy $S(u+\Delta u)\cdot S^{-1}(u)-I$ je operátor 1. druhu se stejným jádrem a $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{S(u+\Delta u)\cdot S^{-1}(u)-I}{\Delta u}$ je operátor 1. druhu s jádrem

$$\frac{\partial K}{\partial u}(x,y,u)+\int_a^b \frac{\partial K}{\partial u}(x,z,u)N(z,y,u)\,dz.$$

Nechť $S(u)$ je operátor definovaný pro $u\in[p,q]$. Zvolme dělení $D:$ $p=t_0<t_1<\cdots<t_m=q$ s vyznačenými body $u_i\in[t_{i-1},t_i]$ a označme $h_i=t_i-t_{i-1}$. Definujme operátory $T_i=I+h_iS(u_i)$ a označme $P(D)=T_mT_{m-1}\cdots T_1$, $P(D)'=T_1T_2\cdots T_m$. V případě, že existuje limita $P(D_n)$ pro $\nu(D_n)\to 0$ nezávislá na volbě posloupnosti dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, nazveme ji levým integrálem operátoru S na intervalu $[p,q]$ a tento operátor označíme $\prod_p^q(I+S(u)\,du)$. Podobně bychom mohli definovat pravý integrál operátoru S jako limitu operátorů $P(D_n)'$.

Spočtěme levý integrál operátoru 1. druhu. Můžeme téměř beze změny zopakovat postup z důkazu existence součinového integrálu matice. Víme, že složením operátorů 2. druhu $P(D)=T_mT_{m-1}\cdots T_1$ vznikne opět operátor 2. druhu s jádrem

$$\sum_{\alpha_1}h_{\alpha_1}K(x,y,\alpha_1)+\sum_{\alpha_1>\alpha_2}\int_a^b h_{\alpha_1}h_{\alpha_2}K(x,z_1,u_{\alpha_1})K(z_1,y,u_{\alpha_2})\,dz_1+\cdots$$

Jestliže $\nu(D)\to 0$, dostaneme v limitě operátor 2. druhu s jádrem

$$\Psi(x,y,p,q)=\int_p^q K(x,y,u_1)\,du_1+$$
$$+\int_a^b\int_p^q\int_p^{u_1}K(x,z_1,u_1)K(z_1,y,u_2)\,du_2\,du_1\,dz_1+\cdots$$

Tento rozvoj je téměř shodný s řadou $\Psi_{ik}(p,q)$ pro matice, pouze místo sčítání přes indexy $\beta_1,\dots\beta_{s-1}$ integrujeme přes proměnné $z_1,\dots,z_{s-1}$. Pro jádro pravého integrálu bychom stejným postupem dostali rozvoj

$$\psi(x,y,p,q)=\sum_{s=1}^{\infty}\int_a^b\cdots\int_a^b\int_p^q\int_p^{u_1}\cdots\int_p^{u_{s-1}}\Big[K(x,z_1,u_s)\cdots$$

$$\cdots K(z_{s-1},y,u_1)\,du_s\cdots du_1\,dz_1\cdots dz_{s-1}\Big].$$

Poznámka. Jak již bylo řečeno, Hostinský nikde přímo neuvádí definici derivace a integrálu operátoru. Místo výpočtu levé derivace operátoru 2. druhu počítá levý diferenciál tohoto operátoru, tj. operátor $S(u+du)\cdot S^{-1}(u)$ a dostane operátor 2. druhu s jádrem

$$\left[\frac{\partial K}{\partial u}(x,y,u)+\int_a^b\frac{\partial K}{\partial u}(x,z,u)N(z,y,u)\,dz\right]du.$$

Potom prohlásí, že levá derivace je operátor 2. druhu se stejným jádrem (my jsme dostali operátor 1. druhu, neboť v definici odečítáme operátor identity). Podobně při výpočtu levého integrálu tvrdí, že integruje operátor 2. druhu s jádrem $K(x,y)$, dostane však stejný výsledek jako my při integrování operátoru 1. druhu (protože při výpočtu nepřičítá identické operátory).

Nezávisí-li jádro $K(x,y)$ na u, potom

$$\Psi(x,y,p,q)=\psi(x,y,p,q)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(q-p)^s}{s!}K^s(x,y)$$

(exponenciála operátoru), kde

$$K^s(x,y)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_{s-1},y)\,dz_1\cdots dz_{s-1}.$$

Díky tomu, že definice integrálu operátoru je formálně shodná s definicí integrálu matice, zůstává v platnosti řada dříve odvozených tvrzení, například

$$\prod_p^q(I+S(u)\,du)=\prod_r^q(I+S(u)\,du)\cdot\prod_p^r(I+S(u)\,du).$$

V maticovém kalkulu bylo toto tvrzení ekvivalentní se vztahem

$$\Phi_{ik}(p,q) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(r,q)\Phi_{jk}(p,r)$$

nebo ($\Phi = I + \Psi$)

$$\Psi_{ik}(p,q) = \Psi_{ik}(p,r) + \Psi_{ik}(r,q) + \sum_{j=1}^{n} \Psi_{ij}(r,q)\Psi_{jk}(p,r).$$

V případě integrálu operátoru 1. druhu je tvrzení ekvivalentní s analogickým vztahem pro jádra

$$\Psi(x,y,p,q) = \Psi(x,y,p,r) + \Psi(x,y,r,q) + \int_a^b \Psi(x,z,r,q)\Psi(z,y,p,r)\,dz.$$

Pro pravé integrály platí

$$(I + S(u)\,du)\prod_p^q = (I + S(u)\,du)\prod_p^r \cdot (I + S(u)\,du)\prod_r^q,$$

tj. jádra vyhovují rovnici

$$\psi(x,y,p,q) = \psi(x,y,p,r) + \psi(x,y,r,q) + \int_a^b \psi(x,z,p,r)\psi(z,y,r,q)\,dz,$$

což je analogie k maticovému vztahu

$$\psi_{ik}(p,q) = \psi_{ik}(p,r) + \psi_{ik}(r,q) + \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(p,r)\psi_{jk}(r,q).$$

3.3 Shrnutí

Hostinský dále uvádí různé aplikace součinového integrálu operátoru (např. v teorii parciálních diferenciálních rovnic či při řešení Chapmanovy rovnice), kterými se zde nebudeme zabývat.

Viděli jsme, že součinový integrál operátoru má podobné vlastnosti jako součinový integrál matice. Důležitou roli hrálo to, že definice obou integrálů jsou téměř shodné, a že skládání operátorů má stejné vlastnosti jako násobení matic. Přestože se Hostinský zabývá především (Fredholmovými) operátory 1. a 2. druhu na prostoru spojitých funkcí $C([a,b])$, definice součinového integrálu je zcela obecná.

Je možné integrovat nejen operátory na $C([a,b])$, ale i na libovolném Banachově prostoru (viz např. [12]); taková teorie pak v sobě zahrnuje jako speciální případy Volterrův součinový integrál matice i Hostinského integrál operátoru. Lze jít ještě dále a místo operátorů integrovat prvky Banachových algeber, tj. Banachových prostorů rozšířených o operaci násobení. Tuto cestu však nebudeme sledovat a místo toho se v další kapitole vrátíme k součinovému integrálu matice.

Kapitola 4: Součinová integrace u Ludwiga Schlesingera

Poslední kapitolu naší exkurze do historie součinového integrálu věnujeme Ludwigu Schlesingerovi. Jeho hlavní zásluhou je vybudování lebesgueovského přístupu k součinové integraci. Zajímavé je i porovnání Volterrových a Schlesingerových prací po formální stránce. Ve Volterrových textech se to hemží diferenciály a není vždy snadné přeložit jeho tvrzení do jazyka dnešní matematiky. Schlesingerovy důkazy jsou oproti tomu velmi přesné; je to způsobeno jednak tím, že ve 30. letech 20. století spočívala matematická analýza na pevnějších základech než v roce 1887, jednak tím, že Schlesinger byl spíše teoretický matematik, narozdíl od Volterry, který měl velmi blízko k aplikacím.

Obrázek 3: Ludwig Schlesinger

Stručný Schlesingerův životopis lze najít v encyklopedii [17]: Ludwig (Lajos) Schlesinger se narodil 1. listopadu 1864 v tehdy ještě uherské Trnavě (Nagyszombat). Studoval (stejně jako řada dalších významných maďarských matematiků židovského původu) na univerzitách v Heidelbergu a v Berlíně, kde roku 1887 získal doktorát. Vedoucími jeho disertace o lineárních diferenciálních rovnicích čtvrtého řádu byli známí matematici Lazarus Fuchs a Leopold Kronecker. O dva roky později se v Berlíně habilitoval, v roce 1897 se stal mimořádným profesorem v Bonnu. V letech 1897 až 1911 působil jako řádný profesor a vedoucí katedry matematiky na univerzitě v Kolozsváru (dnes Cluj v Rumunsku), kde jej po odchodu do Budapešti vystřídal Lipót Fejér. V tomtéž roce dostal pozvání na univerzitu v německém Giessenu, kam se přestěhoval. Roku 1930 tam byl penzionován, 16. prosince 1933 zemřel. Schlesinger se zabýval především teorií funkcí komplexní proměnné a lineárními diferenciálními rovnicemi. Cenné jsou i jeho výzkumy z dějin matematiky. Zasloužil se o zhodnocení vědeckého díla Jánose Bolyaiho, průkopníka neeuklidovské geometrie. Mezi nejdůležitější Schlesingerovy práce patří *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (1895–98), *J. Bolyai in Memoriam* (1902), *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (1908) a *Raum, Zeit und Relativitätstheorie* (1920).

Schlesingerův článek o součinové integraci *Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkul der Matrizen* [10] byl publikován roku 1931. Autor v něm volně navazuje na Volterrovu teorii součinového integrálu. Začíná s riemannovskou definicí a odvozuje základní vlastnosti integrálu, jeho důkazy jsou však původní (zatímco Volterra dokazuje většinu tvrzení pomocí Peanovy řady, Schlesinger upřednostňuje „$\varepsilon - \delta$ aritmetiku“). Poté definuje Lebesgueův součinový integrál jako limitu součinových integrálů po částech konstantních matic a studuje jeho vlastnosti.

Roku 1932 vyšlo pokračování článku pod názvem *Weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkul der Matrizen* [11]. Schlesinger zde uvádí další vlastnosti lebesgueovsky integrovatelných matic, zabývá se také křivkovým součinovým integrálem pro křivky v $\mathbf{R}^2$ a v $\mathbf{C}$.

V dalším textu shrneme nejdůležitější výsledky z obou článků.

4.1 Součinový integrál, riemannovsky integrovatelné matice

K zavedení součinového integrálu potřebujeme pojem konvergence posloupnosti matic. Zatímco Volterra bez dalšího komentáře pracuje s konvergencí po složkách, Schlesinger nejprve definuje normu matice A typu $n \times n$ předpisem $[A] = n \cdot \max |a_{ik}|$. Zmiňuje se také o normě $\Omega_A = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ je vlastní číslo } A\}$ a uvádí vztah

$$\Omega_A \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \leq [A].$$

Druhá nerovnost je zřejmá, první je v článku dokázána. Volba konkrétní normy není většinou podstatná, neboť jsou navzájem ekvivalentní. V dalším textu budeme místo $[A]$ používat standardní označení $\|A\|$.

Máme-li definovánu normu matice, je možno zavést obvyklým způsobem konvergenci posloupnosti matic a limitu maticové funkce.

Následující definice je totožná s Volterrovou definicí pravého součinového integrálu.

Definice. *Nechť A je maticová funkce definovaná na intervalu $[p,q]$. Je-li $D: p = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = q$ dělení intervalu $[p,q]$ s vyznačenými body $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, definujeme*

$$Y(D) = \prod_{k=1}^{m} (I + (x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})).$$

Jestliže existuje matice L taková, že $\lim_{n\to\infty} Y(D_n) = L$ pro každou posloupnost dělení $\{D_n\}$, pro kterou $\nu(D_n) \to 0$, nazveme ji součinovým integrálem matice A na intervalu $[p,q]$ a označíme ji $\prod_p^q (I + A(x)\,dx)$.
Poznámka. Schlesinger ve skutečnosti píše definici ve tvaru

$$Y(D) = Y^0 \prod_{k=1}^{m} (I + (x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})),$$

kde Y^0 je libovolná konstantní matice, která hraje roli jakési integrační konstanty. V dalším budeme pro jednoduchost předpokládat, že $Y^0 = I$. Místo Schlesingerova symbolu $\int_p^q (I + A(x)\,dx)$ budeme pro pravý integrál používat znak $\prod_p^q (I + A(x)\,dx)$. (Takto jsme v kapitole 2 značili levý integrál. Schlesinger však levý integrál nikde nepoužívá, nedojde proto k nedorozumění.)

Lemma. *Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jsou libovolné matice. Potom*

$$\|(I + A_1)(I + A_2)\cdots(I + A_m)\| \le e^{\sum_{i=1}^{m} \|A_i\|}. \tag{4.1.1}$$

Tvrzení plyne z vlastností normy.

Důsledek. *Je-li $\|A(x)\| \le G$ pro každé $x \in [p,q]$ a D je dělení tohoto intervalu, pak*

$$\|Y(D)\| \le e^{G(q-p)}.$$

Schlesingerovým cílem je dokázat existenci součinového integrálu pro matice A, jejichž složky a_{ij} jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[p,q]$ (budeme zkráceně říkat, že A je R-integrovatelná). Používá přitom následující charakterizaci riemannovsky integrovatelných funkcí f: *Nechť D je dělení intervalu $[p,q]$. Označme*

$$S(D) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \sup\{|f(\xi_1) - f(\xi_2)|;\ \xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Jestliže posloupnost dělení $\{D_n\}$ splňuje $\nu(D_n) \to 0$, potom $S(D_n) \to 0$.

Tato charakterizace snadno plyne z Darbouxovy definice Riemannova integrálu (pomocí horních a dolních součtů); je s ní dokonce ekvivalentní.

Lemma. *Nechť $A = \{a_{ij}\}$ je R-integrovatelná matice na $[p, q]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení tohoto intervalu s vyznačenými body. Potom*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \nu(D_1) < \delta,\ \nu(D_2) < \delta \Rightarrow \|Y(D_1) - Y(D_2)\| < \varepsilon$$

Důkaz lemmatu je spíše technický. Schlesinger nejprve dokáže tvrzení pro dělení D_1 a D_2, která se liší pouze volbou vyznačených bodů ξ_i, a poté pro případ, kdy dělení D_2 je zjemněním dělení D_1. V důkazu používá nerovnost (4.1.1) a výše uvedenou charakterizaci riemannovsky integrovatelných funkcí.

Důsledek. *Nechť A je R-integrovatelná matice na $[p, q]$ a nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $[p, q]$ taková, že $\nu(D_n) \to 0$. Potom z předchozího lemmatu plyne, že posloupnost $Y(D_n)$ je cauchyovská, takže $\lim_{n\to\infty} Y(D_n)$ existuje a nezávisí na volbě posloupnosti $\{D_n\}$, tj. existuje $\prod_p^q (I + A(x)\,dx)$.* **Věta.** *Nechť A je R-integrovatelná matice na $[p, q]$. Potom je maticová funkce $Y(x) = \prod_p^x (I + A(z)\,dz)$ spojitá na $[p, q]$.* **Věta.** *Nechť A je R-integrovatelná matice na $[p, q]$. Pak pro každé $x \in [p, q]$ platí*

$$Y(x) = Y^0 + \int_p^x Y(z)A(z)\,dz,$$

kde $Y(x) = Y^0 \prod_p^x (I + A(z)\,dz)$ a Y^0 je libovolná konstantní matice.

Idea důkazu je následující: Nechť D je zvolené dělení intervalu $[p, x]$. Definujme

$$Y^j = Y^0 \prod_{k=1}^{j} (I + (x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})).$$

Potom $Y(D) = Y^m$ a platí

$$Y^k - Y^{k-1} = (x_k - x_{k-1})Y^{k-1}A(\xi_{k-1}).$$

Sečtením těchto rovností pro $k = 1, \ldots, m$ vyjde

$$Y(D) - Y^0 = \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1})Y^{k-1}A(\xi_{k-1}).$$

Nyní stačí ověřit, že součet vpravo konverguje k $\int_p^x Y(z)A(z)\,dz$ pro $\nu(D) \to 0$. Schlesinger dokáže

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) Y^{k-1} A(\xi_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) Y(\xi_{k-1}) A(\xi_{k-1}) \right\| < \varepsilon$$

pro dostatečně jemné dělení D; součet vpravo však konverguje k požadovanému integrálu.

Důsledek. *Nechť A je spojitá na intervalu $[p,q]$. Potom je funkce $Y(x) = Y^0 \prod_p^x (I + A(z)\,dz)$ řešením diferenciální rovnice $Y'(x) = Y(x)A(x)$ na intervalu $[p,q]$ a splňuje počáteční podmínku $Y(p) = Y^0$ (kde $Y^0 \in \mathbf{R}^n$ je libovolný vektor).* Schlesinger zapisuje tvrzení ve tvaru $D_x Y(x) = A(x)$, kde

$$D_x Y(x) = Y^{-1}(x) Y'(x).$$

D_x je tedy Volterrova pravá derivace matice.

4.2 Maticová exponenciála, adjungovaná rovnice.

Nechť A je konstantní matice na $[p,q]$. Je-li D_m dělení tohoto intervalu na m stejně dlouhých podintervalů, pak

$$Y(D_m) = \left(I + \frac{q-p}{m} A \right)^m .$$

Protože $\nu(D_m) \to 0$ pro $m \to \infty$, platí

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{m\to\infty} \left(I + \frac{q-p}{m} A \right)^m .$$

Limita vpravo se podobá definici exponenciální funkce; budeme ji nazývat maticová exponenciála a značit $e^{(q-p)A}$. Následující věta je vlastně ekvivalentní definicí součinového integrálu:

Věta. *Nechť A je maticová funkce definovaná na $[p,q]$. Pro libovolné dělení D tohoto intervalu označme*

$$Z(D) = \prod_{k=1}^{m} e^{(x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})}.$$

Buď $\{D_n\}$ posloupnost dělení intervalu $[p,q]$ taková, že $\nu(D_n) \to 0$. Potom existuje $\lim_{n\to\infty} Z(D_n)$ právě tehdy, když existuje $\lim_{n\to\infty} Y(D_n)$; v tom případě se obě limity rovnají. Nová definice je při dokazování vět často výhodnější. V některých textech se tato definice uvádí jako první a součinový integrál se pak značí symbolem $\prod_p^q e^{A(x)\,dx}$.

Je-li $A = \{a_{ij}\}$, označme $\operatorname{Tr} A = \sum_i a_{ii}$ (stopa matice A).

Věta. *Nechť A je R-integrovatelná matice na $[p,q]$. Potom*

$$\det \prod_p^q (I + A(x)\,dx) = e^{\int_p^q \operatorname{Tr} A(x)\,dx}.$$

Důkaz.

$$\det \prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^m \det e^{(x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})} =$$

$$= \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^m e^{(x_k - x_{k-1}) \operatorname{Tr} A(\xi_{k-1})} = e^{\int_p^q \operatorname{Tr} A(x)\,dx}$$

(použili jsme tvrzení z lineární algebry: $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$).

Důsledek. *Matice $\prod_p^q (I + A(x)\,dx)$ je vždy regulární.* Schlesinger dále ukazuje, že pro maticovou exponenciálu platí

$$e^{(x-p)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-p)^n A^n}{n!}. \tag{4.2.1}$$

Nejprve ověří, že řada vpravo konverguje. Jejím derivováním člen po členu jakožto funkce x zjistí, že její pravá derivace D_x je rovna A (A je zde konstantní matice). Z toho, že matice na obou stranách (4.2.1) mají shodné pravé derivace a stejné hodnoty pro $x = p$ již plyne, že se rovnají.

Pomocí rozvoje exponenciály do řady se snadno dokáže následující tvrzení.

Věta. *Nechť $AB = BA$. Potom $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.* Označme nyní opět $Y(x) = \prod_p^x (I + A(z)\,dz)$. Definujeme-li pro $p < q$

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=m}^1 e^{(x_{k-1} - x_k)A(\xi_{k-1})},$$

pak snadno ověříme, že pro libovolná p, q platí

$$\left(\prod_p^q (I + A(x)\,dx) \right)^{-1} = \prod_q^p (I + A(x)\,dx).$$

Nechť A^T značí transponovanou matici k A. Zřejmě platí $(AB)^T = B^T A^T$, $(e^A)^T = e^{(A^T)}$. Definujeme-li

$$Z(q) = \left[\left(\prod_p^q (I + A(z)\,dz)\right)^{-1}\right]^T,$$

potom

$$Z(q) = \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^m e^{(x_{k-1}-x_k)A^T(\xi_{k-1})} = \prod_p^q (I - A^T(z)\,dz).$$

Je-li A spojitá, je Z řešením rovnice $D_x Z = -A^T$, což je tzv. adjungovaná rovnice k $D_x Y = A$.

4.3 Integrální odhady

Z nerovnosti (4.1.1) plyne odhad

$$\|Y(D)\| \le e^{\sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1})\|A(\xi_{k-1})\|}.$$

Limitním přechodem pak dostaneme následující větu.

Věta. *Nechť A je R-integrovatelná matice. Potom*

$$\left\|\prod_p^q (I + A(x)\,dx)\right\| \le e^{\int_p^q \|A(x)\|\,dx}. \tag{4.3.1}$$

Věta. *Nechť A, B jsou R-integrovatelné matice. Potom*

$$\left\|\prod_p^q (I + B(x)\,dx) - \prod_p^q (I + A(x)\,dx)\right\| \le$$

$$\le e^{\int_p^q \|A(x)\|\,dx}\left(e^{\int_p^q \|B(x)-A(x)\|\,dx} - 1\right). \tag{4.3.2}$$

4.4 Lebesgueovsky integrovatelné matice

Největším přínosem Schlesingerova článku je zobecnění definice součinového integrálu pro matice s lebesgueovsky integrovatelnými složkami. Takové zobecnění není zcela přímočaré – původní Lebesgueova definice integrálu funkce f je totiž založena na součtech tvaru

$$\sum_i \xi_i \cdot \mu(f^{-1}([y_i, y_{i+1}])),$$

kde μ je Lebesgueova míra, $\xi_i \in [y_i, y_{i+1}]$ a systém intervalů $\{[y_i, y_{i+1}]\}$ tvoří dělení oboru hodnot funkce f. Pro matice ovšem nemáme definováno uspořádání a je třeba volit jiný postup.

Schlesinger se inspiroval ekvivalentní definicí Lebesgueova integrálu pocházející od Friedricha Riesze, který aproximoval měřitelnou funkci f posloupností po částech konstantních funkcí $\{f_n\}$ takovou, že $f_n \to f$ skoro všude. Poznamenejme, že princip aproximace funkce posloupností po částech konstantních funkcí je zcela obecný a je na něm založena i definice Bochnerova integrálu funkce s hodnotami v Banachově prostoru.

Připomeňme si ještě jednou riemannovskou definici součinového integrálu:

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^m e^{(x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})}$$

Výraz vpravo můžeme interpretovat jako limitu součinových integrálů schodovitých (tj. po částech konstantních) matic A_m, kde $A_m(x) = A(\xi_{k-1})$ pro x z intervalu (x_{k-1}, x_k). Snadno se dokáže, že každá taková posloupnost A_m konverguje k A ve všech bodech, ve kterých je A spojitá. Z teorie integrálu je přitom známo, že riemannovsky integrovatelné funkce jsou skoro všude spojité, a proto $A_m \to A$ skoro všude na $[p, q]$. Nabízí se tedy následující zobecnění definice součinového integrálu:

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\,dx),$$

kde A_n je vhodně zvolená posloupnost schodovitých matic, které konvergují k A skoro všude.

Definice. *Řekneme, že posloupnost matic $\{A_n\}$ je stejnoměrně omezená na $[p, q]$, pokud existuje číslo $G \in \mathbf{R}$ takové, že $\|A_n(x)\| \le G$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každé $x \in [p, q]$.*

Věta. *Nechť $\{A_n\}$ je stejnoměrně omezená posloupnost schodovitých matic, $A_n \to A$ skoro všude na $[p, q]$. Potom existuje $\lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\,dx)$ a nezávisí na volbě posloupnosti $\{A_n\}$.* *Důkaz.* Potřebujeme ověřit, že posloupnost $\prod_p^q (I + A_n(x)\,dx)$ je cauchyovská. Podle odhadu (4.3.2) platí

$$\left\| \prod_p^q (I + A_m(x)\,dx) - \prod_p^q (I + A_n(x)\,dx) \right\| \le$$

$$\le e^{\int_p^q \|A_n(x)\|\,dx} \left(e^{\int_p^q \|A_m(x) - A_n(x)\|\,dx} - 1 \right).$$

Protože $\|A_n(x)\| \leq G$, Schlesinger může odhadnout

$$\int_p^q \|A_m(x) - A_n(x)\| \, dx \leq \varepsilon(q-p) + 2G\mu(\{x; \|A_m(x) - A_n(x)\| \geq \varepsilon\}).$$

Z teorie míry je však známo, že konvergence $A_n \to A$ skoro všude implikuje konvergenci v míře, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\{x; \|A(x) - A_n(x)\| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Odtud pro zadané $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall m, n \geq n_0 \quad \mu(\{x; \|A_m(x) - A_n(x)\| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon,$$

čímž je důkaz existence limity hotov.

Jednoznačnost ověříme známým postupem: Uvažme dvě stejnoměrně omezené posloupnosti $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, které konvergují k A skoro všude. Sestavíme-li z nich posloupnost $\{C_n\}$, kde $C_{2n-1} = A_n$ a $C_{2n} = B_n$, platí rovněž $C_n \to A$ skoro všude. Existuje tedy $\lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + C_n(x)\, dx)$. Stejnou limitu však musí mít i každá vybraná posloupnost, a proto $\lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\, dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + B_n(x)\, dx)$.

Definice. *Jsou-li A_n, A matice z předcházející věty, řekneme, že A je součinově lebesgueovsky integrovatelná (zkráceně L-integrovatelná) a definujeme*

$$\prod_p^q (I + A(x)\, dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\, dx).$$

Poznámka. Schodovité funkce jsou měřitelné, tedy i limita stejnoměrně omezené posloupnosti schodovitých funkcí je omezená a měřitelná. Obráceně, ke každé omezené měřitelné funkci f lze najít stejnoměrně omezenou posloupnost schodovitých funkcí f_n, $f_n \to f$ skoro všude. Uvedená definice integrálu má tedy smysl právě pro ty matice, jejichž složky jsou omezené a měřitelné funkce na $[p, q]$. Schlesinger poznamenává, že definici lze dále rozšířit na matice s lebesgueovsky integrovatelnými (ne nutně omezenými) složkami. Můžeme např. matici A aproximovat posloupností schodovitých matic $\{A_n\}$ takovou, že $A_n \to A$ v normě prostoru L^1 (výše uvedený důkaz existence $\lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\, dx)$ se tím dokonce zjednoduší).

4.5 Vlastnosti L-integrovatelných matic

Lemma. *Nechť $\{A_n\}$ je stejnoměrně omezená posloupnost L-integrovatelných matic, $A_n \to A$ skoro všude na $[p, q]$. Potom*

$$\int_p^q \|A(x)\| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_p^q \|A_n(x)\| \, dx.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \|A_n\| = \|A\|$, stačí pro důkaz použít Lebesgueovu větu o záměně pořadí limity a integrálu.

Důsledek. *Nerovnosti* (4.3.1) *a* (4.3.2) *platí pro schodovité matice. Pomocí předchozího lemmatu dostaneme jejich platnost i pro libovolné L-integrovatelné matice.* Následující tvrzení je analogií Lebesgueovy věty pro součinový integrál.

Věta. *Nechť* $\{A_n\}$ *je stejnoměrně omezená posloupnost L-integrovatelných matic,* $A_n \to A$ *skoro všude na* $[p, q]$. *Potom*

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\,dx).$$

Důkaz. Podle Lebesgueovy věty je matice A integrovatelná. Pro důkaz pak stačí použít nerovnost (4.3.2) ve tvaru

$$\left\| \prod_p^q (I + A(x)\,dx) - \prod_p^q (I + A_n(x)\,dx) \right\| \leq$$

$$\leq e^{\int_p^q \|A_n(x)\|\,dx} \left(e^{\int_p^q \|A_n(x) - A(x)\|\,dx} - 1 \right).$$

Schlesinger poznamenává, že právě uvedená věta zůstane v platnosti, i když nahradíme Lebesgueův integrál Riemannovým. Musíme ovšem navíc předpokládat, že limitní matice A je také riemannovsky integrovatelná.

Definice. *Nechť* M *je měřitelná podmnožina* $[p, q]$. *Je-li* A *L-integrovatelná, definujeme*

$$\prod_M (I + A(x)\,dx) = \prod_p^q (I + \chi_M(x)A(x)\,dx).$$

Z teorie Lebesgueova integrálu je známa následující elementární věta: *Je-li* $f \in L^1([p, q])$, *pak*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall M \subseteq [p, q] \quad \mu(M) < \delta \Rightarrow \left| \int_M f \right| < \varepsilon. \qquad (4.5.1)$$

Schlesinger uvádí její analogii pro součinový integrál (nazývá ji totální spojitostí).

Věta.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall M \subseteq [p, q] \quad \mu(M) < \delta \Rightarrow \left\| \prod_M (I + A(x)\,dx) - I \right\| < \varepsilon.$$

Pro důkaz stačí použít nerovnost (4.3.2) s $A = 0$ a tvrzení (4.5.1).

Schlesinger se nyní vrací k souvislosti součinového integrálu s diferenciální rovnicí $D_xY = A$. Připomeňme poměrně hlubokou větu z teorie Lebesgueova integrálu: *Nechť* $f \in L^1([p,q])$. *Označíme-li* $F(x) = \int_p^x f$, *pak* $F' = f$ *skoro všude na* $[p,q]$. Platí dokonce silnější tvrzení, které dokázal Lebesgue:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0$$

pro skoro všechna $x \in [p,q]$; každé takové x se nazývá Lebesgueův bod funkce f a platí $F'(x) = f(x)$. Pomocí tohoto tvrzení dostane Schlesinger poměrně snadno následující větu.

Věta. *Nechť A je L-integrovatelná matice. Označme* $Y(x) = \prod_p^x (I + A(z)\,dz)$. *Potom* $D_xY(x) = A(x)$ *pro skoro všechna* $x \in [p,q]$.

Důsledek. *Nechť A je L-integrovatelná matice a* $Y^0 \in \mathbf{R}^n$ *je pevně zvolený vektor. Potom je vektorová funkce* $Y(x) = Y^0 \prod_p^x (I + A(z)\,dz)$ *řešením soustavy diferenciálních rovnic* $Y'(x) = Y(x)A(x)$ *skoro všude na intervalu* $[p,q]$ *a splňuje počáteční podmínku* $Y(p) = Y^0$. Připomeňme, že v prvním Schlesingerově článku se objevují celkem tři definice součinového integrálu. První definici pro riemannovsky integrovatelné matice A můžeme stručně zapsat ve tvaru

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^{m} (I + (x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})).$$

Schlesinger dokázal, že toto je ekvivalentní s definicí

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^{m} e^{(x_k - x_{k-1})A(\xi_{k-1})}.$$

Dále zavedl integrál pro lebesgueovsky integrovatelné matice předpisem

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_p^q (I + A_n(x)\,dx),$$

kde $\{A_n\}$ je stejnoměrně omezená posloupnost schodovitých matic, které konvergují k A skoro všude. Předpokládejme, že matice A_n je konstantní na podintervalech (x_{k-1}^n, x_k^n), $k = 1, \dots, m_n$, a nabývá zde hodnoty L_k^n. Potom

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} e^{(x_k^n - x_{k-1}^n)L_k^n}.$$

Naskýtá se přirozeně otázka, zda platí také

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (I + (x_k^n - x_{k-1}^n)L_k^n). \tag{4.5.2}$$

Schlesinger na začátku druhého článku tuto rovnost dokazuje za dodatečného předpokladu $\nu(D_n) \to 0$, kde $\nu(D_n) = \max\{(x_k^n - x_{k-1}^n), k = 1,\ldots,m_n\}$. Bez tohoto předpokladu věta neplatí – mohli bychom vzít např. $A = A_n = L_k^n = I$, $m_n = 1$, $x_0^n = p$, $x_1^n = q$, avšak

$$\prod_p^q (I + I\,dx) = e^{(q-p)I} \neq I + (q-p)I.$$

Z tvrzení (4.5.2) odvodí Schlesinger rozvoj součinového integrálu do Peanovy řady:

$$\prod_{k=1}^{m_n} (I + (x_k^n - x_{k-1}^n)L_k^n) = I + \sum_{i_1} (x_{i_1}^n - x_{i_1-1}^n)L_{i_1}^n +$$

$$+ \sum_{i_1<i_2} (x_{i_1}^n - x_{i_1-1}^n)L_{i_1}^n (x_{i_2}^n - x_{i_2-1}^n)L_{i_2}^n + \cdots,$$

odkud pro $n \to \infty$

$$\prod_p^q (I + A(x)\,dx) = I + \int_p^q A(x_1)\,dx_1 + \int_p^q \int_p^{x_1} A(x_2)A(x_1)\,dx_2\,dx_1 + \cdots$$

Postup je stejný jako u Volterry, pouze integrály jsou nyní Lebesgueovy.

Lemma. *Nechť A, B jsou L-integrovatelné matice. Definujeme-li maticovou funkci $S(x) = \prod_q^x (I + A(z)\,dz)$, pak*

$$\prod_q^p (I + A(x)\,dx) \prod_p^q (I + B(x)\,dx) = \prod_p^q (I + S(x)(B(x) - A(x))S^{-1}(x)\,dx). \tag{4.5.3}$$

Tvrzení podobného typu pro Riemannův integrál se objevují již u Volterry; jak poznamenává Schlesinger, omezíme-li se na A, B spojité, můžeme lemma ověřit derivováním. Ze vztahů

$$D_x(PQ) = Q^{-1}(D_x P)Q + D_x Q,$$

$$D_x(Q^{-1}) = -Q(D_x Q)Q^{-1}$$

získáme

$$D_x(PQ^{-1}) = Q(D_xP - D_xQ)Q^{-1},$$

odkud

$$D_p\left[\prod_q^p(I+B(x)\,dx)\prod_p^q(I+A(x)\,dx)\right](x) = S(x)(B(x)-A(x))S^{-1}(x),$$

a proto

$$\prod_q^p(I+B(x)\,dx)\prod_p^q(I+A(x)\,dx) = \prod_q^p(I+S(x)(B(x)-A(x))S^{-1}(x)\,dx).$$

Tvrzení lemmatu pak dostaneme invertováním matic na obou stranách rovnice. Jsou-li A, B pouze L-integrovatelné, postupuje Schlesinger zhruba řečeno tak, že dokáže lemma pro schodovité matice, a pak provede limitní přechod.

Právě uvedené lemma nyní použijeme při důkazu tvrzení o derivaci integrálu podle parametru.

Věta. *Nechť $A(x,t)$ je maticová funkce dvou proměnných. Jestliže A je L-integrovatelná pro každé pevné $t \in \mathbf{R}$ a její derivace $\frac{\partial A}{\partial t}(x,t)$ existuje a je omezená jakožto funkce x pro každé $t \in \mathbf{R}$, pak*

$$D_t\prod_p^q(I+A(x,t)\,dx) = \int_p^q S(x)\frac{\partial A}{\partial t}(x,t)S^{-1}(x)\,dx,$$

kde opět $S(x) = \prod_q^x(I+A(z,t)\,dz)$. Myšlenka Schlesingerova důkazu:

$$D_t\prod_p^q(I+A(x,t)\,dx) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\prod_q^p(I+A(x,t)\,dx)\prod_p^q(I+A(x,t+\Delta t)\,dx) - I\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\prod_p^q(I+S(x)(A(x,t+\Delta t)-A(x,t))S^{-1}(x)\,dx) - I\right].$$

Poslední integrál rozvine Schlesinger do Peanovy řady a po záměně pořadí limity, sumy a integrálu dostane požadovaný výsledek.

4.6 Dvojný integrál a Greenova věta

Definice. *Řekneme, že maticová funkce $A(x,y)$ dvou proměnných x, y definovaná na $[a,b]\times[c,d]$ je schodovitá, jestliže existují dělení $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ a $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_l = d$ taková, že A je konstantní na každém obdélníku $(x_i,x_{i+1})\times(y_j,y_{j+1})$.* Nechť $P(x,y)$ je L-integrovatelná maticová funkce dvou proměnných x, y na intervalu $R = [x_0,x_1]\times[y_0,y_1]\subset\mathbf{R}^2$ (tj. P je skoro všude limitou posloupnosti stejnoměrně omezených schodovitých matic). Potom lze snadno ukázat, že pro pevné y jsou složky matice $P(x,y)$ lebesgueovsky integrovatelné funkce proměnné x, a že $A(y) = \int_{x_0}^{x_1} P(x,y)\,dx$ je L-integrovatelná maticová funkce proměnné y. Následující Schlesingerova definice dvojného součinového integrálu přes obdélník R je tedy korektní:

$$\prod_R (I + P(x,y)\,dx\,dy) = \prod_{y_0}^{y_1}\left[I + \left(\int_{x_0}^{x_1} P(x,y)\,dx\right)dy\right].$$

Pro dvojný integrál platí následující analogie Lebesgueovy věty:

Věta. *Nechť $\{P_n\}$ jsou stejnoměrně omezené L-integrovatelné matice definované na obdélníku R, $P_n\to P$ skoro všude na R. Pak*

$$\prod_R (I + P(x,y)\,dx\,dy) = \lim_{n\to\infty}\prod_R (I + P_n(x,y)\,dx\,dy).$$

Jsou-li $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ dvě maticové funkce definované na $R = [x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$, označíme

$$U(x,y) = \prod_{x_0}^{x}(I + P(t,y_0)\,dt)\prod_{y_0}^{y}(I + Q(x,t)\,dt),$$

$$T(x,y) = \prod_{y_0}^{y}(I + Q(x_0,t)\,dt)\prod_{x_0}^{x}(I + P(t,y)\,dt).$$

Pro matice $U(x_1,y_1)$ a $T(x_1,y_1)$ používá Schlesinger celkem přiléhavé názvy – integrál přes dolní schod a přes horní schod obdélníka R z dvojice matic P, Q. Křivkový integrál přes kladně orientovanou hranici obdélníka R pak definuje předpisem

$$\prod_{\partial R}(I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = U(x_1,y_1)T^{-1}(x_1,y_1).$$

Vztah mezi dvojným integrálem přes R a křivkovým integrálem přes hranici R udává následující analogie Greenovy věty:

Věta. *Nechť P, Q jsou spojité a $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ omezené na R. Potom*

$$\prod_{\partial R}(I+P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy) = \prod_{R}(I+T(x,y)P_{12}(x,y)T^{-1}(x,y)\,dx\,dy), \tag{4.6.1}$$

kde

$$P_{12}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + PQ - QP. \tag{4.6.2}$$

Důkaz probíhá zhruba následovně: Elementárními úpravami se dokáže, že

$$T(x,y)P_{12}(x,y)T^{-1}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,y)(Q(x,y) - D_yT(x,y))T^{-1}(x,y)\right].$$

Integrováním přes obdélník R dostaneme

$$\prod_{R}(I + T(x,y)P_{12}(x,y)T^{-1}(x,y)\,dx\,dy) =$$
$$= \prod_{y_0}^{y_1}\left(I + \left[T(x,y)(Q(x,y) - D_yT(x,y))T^{-1}(x,y)\right]_{x_0}^{x_1} dy\right).$$

Platí

$$D_yT(x,y) = \prod_{x}^{x_0}(I + P(t,y)\,dt) \cdot Q(x_0,y) \cdot \prod_{x_0}^{x}(I + P(t,y)\,dt) +$$
$$+ D_y \prod_{x_0}^{x}(I + P(t,y)\,dt)$$

Použijeme-li na poslední sčítanec větu o derivování integrálu podle parametru, vyjde

$$\lim_{x\to x_0}(Q(x,y) - D_yT(x,y)) = 0,$$

odkud

$$\prod_{R}(I + T(x,y)P_{12}(x,y)T^{-1}(x,y)\,dx\,dy) =$$
$$= \prod_{y_0}^{y_1}\left(I + \lim_{x\to x_1}\left[T(x,y)(Q(x,y) - D_yT(x,y))T^{-1}(x,y)\right] dy\right).$$

Pomocí vztahu (4.5.3) a elementárních úprav lze spočítat

$$\prod_{y_0}^{y_1} \left(I + T(x,y)(Q(x,y) - D_y T(x,y))\, T^{-1}(x,y)\, dy\right) =$$

$$= T(x,y_0) \cdot \prod_{y_0}^{y_1} (I + Q(x,y)\, dy) \cdot T^{-1}(x,y_1).$$

Z analogie Lebesgueovy věty pro součinový integrál nyní plyne

$$\prod_{y_0}^{y_1} \left(I + \lim_{x \to x_1} \left[T(x,y)(Q(x,y) - D_y T(x,y))T^{-1}(x,y)\right] dy\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_1} \prod_{y_0}^{y_1} \left(I + T(x,y)(Q(x,y) - D_y T(x,y))T^{-1}(x,y)\, dy\right) =$$

$$= T(x_1,y_0) \cdot \prod_{y_0}^{y_1} (I + Q(x_1,y)\, dy) \cdot T^{-1}(x_1,y_1) = U(x_1,y_1) \cdot T^{-1}(x_1,y_1),$$

což jsme měli dokázat.

S analogií Greenovy věty jsme se setkali již u Volterry. Jeho verze je obecnější, neboť uvažuje dvojné integrály přes jisté oblasti v $\mathbf{R}^2$ (ne pouze přes obdélníky). Schlesingerův důkaz je ovšem po formální stránce přesnější a také čitelnější – nevyskytují se zde diferenciály ani nekonečně malé veličiny. Dále je zajímavé, že součinová analogie operátoru rotace z klasické Greenovy věty má u Schlesingera výše uvedenou podobu (4.6.2), zatímco u Volterry je to

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + QP - PQ$$

(viz (2.6.1) – Volterrova matice S_1 se rovněž liší od Schlesingerovy T v (4.6.1)). Důležité je, že pro případ $P(x,y) = A(x+iy)$, $Q(x,y) = iA(x+iy)$, kde A je holomorfní maticová funkce, vyjdou obě „rotace" nulové (viz další odstavec).

4.7 Křivkový integrál, maticové funkce komplexní proměnné

Splňují-li funkce P, Q předpoklady Greenovy věty z předchozího odstavce a platí-li navíc $P_{12}(x,y) = 0$ na $R = [x_0,x_1] \times [y_0,y_1]$, potom

$$\prod_{\partial R} (I + P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy) = I,$$

což můžeme interpretovat tak, že křivkový integrál z bodu (x_0,y_0) do bodu (x_1,y_1) nezávisí na tom, integrujeme-li přes dolní nebo přes horní schod. Tvrzení zůstane v platnosti, nahradíme-li bod (x_1, y_1) libovolným bodem (x, y) z R. Schlesinger pak značí společnou hodnotu matic $U(x, y)$ a $T(x, y)$ symbolem

$$\prod_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy).$$

Z definice plynou následující vlastnosti:

$$D_x \left[\prod_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) \right] = D_x T(x,y) = P(x,y),$$

$$D_y \left[\prod_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) \right] = D_y U(x,y) = Q(x,y),$$

$$\det \left[\prod_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) \right] = e^{\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \operatorname{Tr} P(x,y)\,dx + \operatorname{Tr} Q(x,y)\,dy}$$

Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ parametrizace křivky, můžeme definovat integrál matic P, Q podél φ předpisem

$$\prod_{\varphi} (I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) =$$

$$= \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{i=1}^{m} (I + P(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + Q(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_i)),$$

kde $D : a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b$ je dělení intervalu $[a, b]$ a $(x_i, y_i) = \varphi(t_i)$.

Schlesinger nyní tvrdí, že integrál přes φ můžeme aproximovat integrálem přes „schodovitou“ křivku složenou z úseček. Je-li tedy $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ jednoduše souvislá oblast a φ je uzavřená křivka v Ω, pak

$$\prod_{\varphi} (I + P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = I,$$

neboli křivkový integrál nezávisí v Ω na cestě.

Na závěr článku [11] se Schlesinger zabývá maticovými funkcemi A komplexní proměnné z a rekapituluje Volterrovy výsledky. Nechť φ je křivka v komplexní rovině s počátečním bodem $z_0 = x_0 + iy_0$ a s koncovým bodem $z_1 = x_1 + iy_1$. Ztotožníme-li funkce dvou reálných proměnných x, y s funkcemi jedné komplexní proměnné $z = x + iy$, můžeme definovat křivkový součinový integrál z A podél φ vztahem

$$\prod_{\varphi} (I + A(z)\,dz) = \prod_{\varphi} (I + A(x,y)\,dx + iA(x,y)\,dy) =$$

$$= \lim_{\nu(D)\to 0} \prod_{k=1}^{m} (I + A(z_k)(z_{k+1} - z_k)).$$

Pro matice A holomorfní v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbf{C}$ platí $P_{12} = 0$, a tedy podle Greenovy věty nezávisí integrál na cestě (resp. integrál přes uzavřenou křivku je jednotková matice). Proto můžeme používat označení

$$\prod_{z_0}^{z_1} (I + A(z)\,dz) = \prod_{\varphi} (I + A(z)\,dz).$$

Schlesinger pouze konstatuje, že pro křivkový integrál platí např. vztahy

$$\det \left[\prod_{z_0}^{z} (I + A(w)\,dw) \right] = e^{\int_{z_0}^{z} \operatorname{Tr} A(w)\,dw},$$

$$D_z \left[\prod_{z_0}^{z} (I + A(w)\,dw) \right] = A(z).$$

Zmiňuje se také o integrálu přes uzavřenou křivku, která obíhá nějakou singularitu matice A. Lze dokázat, že integrály přes takovéto křivky jsou podobné matice (obecně různé od jednotkové matice) – toto tvrzení známe již od Volterry.

Kapitola 5: Závěr

V předchozích kapitolách jsme sledovali vývoj pojmu součinového integrálu. Začali jsme na sklonku 19. století u Vita Volterry, který vybudoval součinovou analogii Riemannova integrálu. Známe-li vlastnosti „součtového" Riemannova integrálu, můžeme z nich často odhadnout vlastnosti součinového integrálu tak, že sčítání nahradíme násobením. Naopak rozdíly pramení z toho, že násobení matic (resp. skládání operátorů) není komutativní; proto se součinovému integrálu někdy říká „nekomutativní integrál".

Další vývoj teorie se ubíral dvěma směry: *1) Rozšíření pojmu součinového integrálu na matice, jejichž složky nemusejí být riemannovsky integrovatelné funkce. 2) Integrování obecnějších objektů než jsou matice, např. operátorů na Banachově prostoru.*

Například Schlesinger pracoval s lebesgueovsky integrovatelnými složkami, zatímco Hostinský integroval operátory na prostoru spojitých funkcí.

S tím, jak se v matematice objevovaly nové přístupy k integrování, vznikaly i analogické teorie součinového integrálu. Demonstrujme tento fakt ještě na jednom příkladu. V 50. letech 20. století přišel český matematik Jaroslav Kurzweil s novou definicí integrálu, který zahrnuje Riemannův, Newtonův i Lebesgueův integrál. (Pro podrobnější seznámení s Kurzweilovým integrálem doporučujeme knihu [13]).

Mějme interval $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, a funkci $\Delta : I \to (0, \infty)$ (tzv. kalibr). Je-li dáno dělení $D : a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_k = b$ s vyznačenými body $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, řekneme, že toto dělení je Δ-jemné, pokud

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [\xi_i - \Delta(\xi_i), \xi_i + \Delta(\xi_i)]$$

pro každé i. Označme

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $\int_a^b f(x)\,dx$ nazveme Kurzweilovým integrálem funkce f na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr Δ takový, že

$$\left| S(f, D) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

pro každé Δ-jemné dělení D.

Snadno zformulujeme součinovou analogii této definice (viz [14]): Nechť A je maticová funkce definovaná na $I = [a, b]$. Pro zadané dělení D s vyznačenými body označme

$$P(f, D) = \prod_{i=1}^{k} (I + A(\xi_i)(x_i - x_{i-1})).$$

Matici $\prod_a^b (I + A(x)\,dx)$ nazveme (pravým) Kurzweilovým součinovým integrálem A na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr Δ takový, že

$$\left\| P(f, D) - \prod_a^b (I + A(x)\,dx) \right\| < \varepsilon$$

pro každé Δ-jemné dělení D.

Právě uvedená definice se snadno zobecní pro operátory na libovolném Banachově prostoru.

Součinový integrál má aplikace v teorii diferenciálních rovnic, ve fyzice, v teorii pravděpodobnosti i v matematické statistice. Jde o elegantní a poměrně snadno přístupnou teorii, která však mezi matematiky není příliš známa. Věřím, že tento článek (pravděpodobně první text o součinovém integrálu v češtině) přispěje k jejímu rozšíření.

Literatura

[1] Volterra V.: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Memorie della Società Italiana della Scienze, 1887 (parte prima), 1902 (parte seconda).

[2] Volterra V.: *Sulle equazioni differenziali lineari.* Rendiconti dell' Academia dei Lincei 3, 393–396, 1887.

[3] Volterra V.: *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 2, 69–75, 1888.

[4] Volterra V., Hostinský B.: *Opérations infinitésimales linéaires.* Gauthier-Villars, 1938.

[5] Volterra V.: *Variační počet, jeho vývoj, jeho pokroky a jeho úloha v matematické fysice.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 62, 93–116, 1933.

[6] Allen E. S.: *The scientific work of Vito Volterra.* American Mathematical Monthly 48, 516–519, 1941.

[7] Whittaker E. T.: *Vito Volterra 1860–1940.* Journal of the London Mathematical Society 16, 131–139, 1941.

[8] Israel G., Gasca A. M.: *The Biology of Numbers.* Birkhäuser Verlag, 2002.

[9] Hostinský B.: *Vito Volterra zemřel.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 70, D138-D139, 1940–41.

[10] Schlesinger L.: *Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkul der Matrizen.* Mathematische Zeitschrift 33, 33–61, 1931.

[11] Schlesinger L.: *Weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkul der Matrizen.* Mathematische Zeitschrift 35, 485–501, 1932.

[12] Dollard J. D., Friedman C. N.: *Product Integration with Applications to Differential Equations.* Addison–Wesley Publishing Company, 1979.

[13] Schwabik Š.: *Integrace v* **R** *(Kurzweilova teorie).* Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 1999.

[14] Jarník J., Kurzweil J.: *A general form of the product integral and linear ordinary differential equations.* Czechoslovak Mathematical Journal 37, 1987.

[15] Mazanec P.: *Historie fyziky na Masarykově univerzitě v Brně* (diplomová práce), 2003. `http://www.physics.muni.cz/~mazy/index.html`

[16] Borůvka O.: *V. Volterra–B. Hostinský.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 68, D31-D33, 1939.

[17] *Magyar Életrajzi Lexikon 1000-1990.*
`http://www.mek.iif.hu/porta/szint/egyeb/lexikon/eletrajz/html`

Antonín Slavík
Matematický ústav AV ČR Praha
e-mail: slavik@math.cas.cz