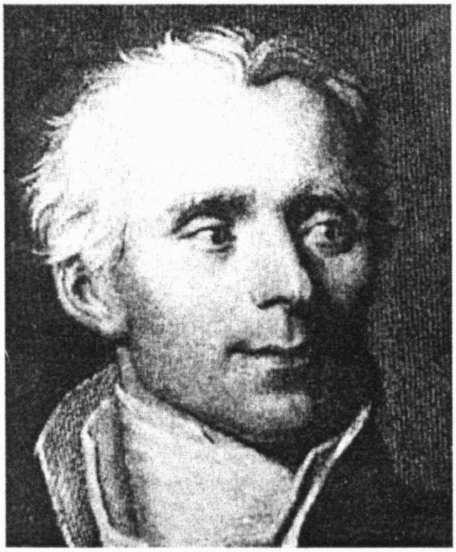
FILOSOFICKÉ INTERPRETACE PRAVDĚPODOBNOSTI

IVAN SAXL

Formální matematický aparát počtu pravděpodobnosti je dnes axiomatickou Kolmogorovou teorií jednotně zformulován a obecně přijat, zahrnuje konečné, spočetné i nespočetné systémy jevů a pevně se opírá o množinovou algebru. Interpretace pojmu pravděpodobnosti však zdaleka není jednotná a odpověď na dětskou otázku *„A co je to ta pravděpodobnost?"* je velmi mnohoznačná. V tomto příspěvku budou nejprve stručně uvedeny hlavní interpretační směry, a poté vybrané z nich budou rozebrány podrobněji.



Obrázek 1: Pierre-Simon Laplace

1. Epistemologická a objektivní (fyzikální) interpretace

Na formulaci klasické teorie pravděpodobnosti se podíleli (v uvedeném pořadí) P. Fermat, B. Pascal, Ch. Huyghens, J. Bernoulli,[1] P. de Mont-

[1]Jakob Bernoulli (1654–1705), rodák basilejský, od roku 1687 do smrti profesor na basilejské univesitě. Jeho charakteristika v Dictionary of Scientific Biography, New York, Scribner 1970–1990, stojí za doslovné a nepřeložené uvedení: „Bernoulli was one of the most significant promoters of the formal methods of higher analysis. Astuteness and elegance are seldom found in his method of presentation and expression, but there is a maximum of integrity. Bernoulli greatly advanced algebra, the infinitesimal calculus, the calculus of variations, mechanics, the theory of series, and the theory of probability. He was self-willed, obstinate, aggressive, vindictive, beset by feelings of inferiority, and yet firmly convinced of his own abilities." Jeho hlavní dílo v oboru pravděpodobnosti *Ars Conjectandi* shrnuje vše do té doby známé a obsahuje první důkaz konvergence podle pravděpodobnosti relativní četnosti jevu k jeho teoretické pravděpodobnosti. Vyšlo však až po jeho smrti (1813) a jeho okamžitý vliv neodpovídal jeho historickému významu.

mort,[2] A. de Moivre[3] a T. Bayes,[4] její syntézu provedl P.-S. Laplace.

Připomeňme definici podanou J. Bernoulli v jeho *Ars conjectandi* (1713): „Pravděpodobnost je stupeň jistoty a liší se od úplné jistoty tak, jako se část liší od celku." Bernoulli ještě připouští, že jistotu může charakterizovat číselná hodnota různá od jedné, ale v dalším období se ustálilo pojetí, v němž pravděpodobnost nabývá číselných hodnot z intervalu $[0, 1]$. Zároveň má na mysli širší pojetí pravděpodobnosti s možností jejího využití pro rozhodování i v občanských záležitostech a jinde. De Moivreova definice z roku 1738, vztahující se především ke hrám, je proto podrobnější: „Relativní počet příznivých případů k celkovému počtu všech příznivých i nepříznivých případů je míra pravděpodobnosti."

Nejčastěji je uváděna definice, kterou podal Laplace a která explicitně vyslovuje u de Moivrea implicitně zahrnutý předpoklad, že všechny uvažované případy jsou stejně možné:

> „Teorie náhodných jevů spočívá v redukci všech jevů stejného druhu k jistému počtu případů stejně možných, to je takových, že jsou stejně nejisté pokud se jedná o jejich uskutečnění, a v určení počtu příznivých případů jevu, jehož pravděpodobnost hledáme. Poměr tohoto čísla k počtu všech možných případů je míra pravděpodobnosti" (*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814).

---

[2] Pierre Rémond de Montmort (1678–1719), francouzský matematik, známá je jeho kniha *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1708, rozšířené vydání 1713), v níž řeší řadu kombinatorických a pravděpodobnostních úloh.

[3] Abraham de Moivre (1667–1754), význačný francouzský matematik, žijící v Anglii, kam odchází v roce 1688 po tříleté internaci, aby unikl náboženskému pronásledování (odvolání ediktu nanteského 1685). Jako cizinci se mu nepodařilo získat katedru na universitě ani žádné jiné stálé zaměstnání. Živil se soukromým vyučováním a jako poradce hráčů v hernách, zemřel v naprosté bídě. Objevil Stirlingovu formuli pro odhad hodnoty n! pro velká n, jeho další práce jsou z teorie řad a z trigonometrie (Moivreova věta $(\cos x + i\ \sin x)^n = \cos nx + i\ \sin nx$), zavedl charakteristické funkce náhodných rozdělení a aproximaci binomického rozdělení limitním rozdělením dnes známým jako (Gaussovo) normální rozdělení. Hlavní dílo je *The Doctrine of Chances* (1718, 1738, 1756).

[4] Thomas Bayes (1701?–1761), presbyteriánský duchovní v Tunbridge Wells (lázeňské městečko asi 60 km od Londýna) a matematik. Patřil k okruhu přátel lorda Stanhopa, který se amatérsky zabýval matematikou. Kromě posmrtně vydané základní práce o podmíněné pravděpodobnosti a jejím posteriorním odhadu publikoval známý traktát náboženského obsahu (polemika s biskupem Berkeleyem o infinitesimálním počtu) a těšil se pověsti vynikajícího matematika. Posmrtně byl vydán také jeho krátký příspěvek věnovaný nekonečným řadám a známy jsou ještě jeho další dva dopisy fyzikovi a členu Royal Society Johnu Cantonovi. Teprve v poslední době bylo v archívu lorda Stanhopa objeveno několik Bayesových rukopisů s matematickým obsahem. Vyplývá z nich, že Bayes byl kritikem a komentátorem některých prací vědců v kroužku kolem lorda Stanhopa. Bayesův jediný známý a běžně reprodukovaný portrét je velmi sporný.

Proti této definici je někdy vznášena námitka, že se jedná o tautologii, protože „stejně možné" je totéž jako stejně pravděpodobné. Spíše se však jedná o dědictví původu pravděpodobnosti v hrách, kde různé hody či volby karet jsou u korektních kostek a balíčků skutečně a zcela zřejmě stejně možné. V důsledku pevného přesvědčení o obecně deterministické povaze světa, vycházejícího z osvícenských idejí a upevněného Newtonovou mechanikou, byla pravděpodobností pojednávaná nejistota považována za nedostatek lidského poznání. Laplace si představoval universální bytost nevyčerpatelné inteligence, která o Vesmíru ví v každém okamžiku vše (tzv. Laplaceův Démon).

„Taková bytost by počet pravděpodobnosti nepotřebovala, pro nás je však nutný zčásti díky nevědomosti, zčásti díky znalosti. Víme, že ze tří či více jevů by se měl státi pouze jediný, z ničeho však nemůžeme usoudit, který z nich to bude. V tomto stavu nerozhodnosti je nemožné ohlásit výsledek s jistotou."

Podobný názor najdeme i u Spinozy, který v roce 1677 píše, že „událost může být považována za náhodnou jedině ve vztahu k našim nedostatečným znalostem".Také u d'Alemberta v textu z roku 1750 čteme: „Přesně vzato neexistuje žádná náhoda, jedině její ekvivalent: naše nevědomost, díky níž my sami jsme její příčinou."

Zdá se, že nejistota dělá větší potíže přísně racionálním myslitelům, než přísně věřícím křesťanům, přestože podle jejich věrouky je všechno dění v rukou Božích. S protiargumentem, že pak by vymizely hry i náhoda a štěstí, se vyrovnal sv. Tomáš Akvinský tvrzením, že existují zákony univerzální a zákony dílčí, a že se sice nic nemůže vymknout ze zákona universálního, ale u zákonu dílčího se to stát může, a pak mluvíme o náhodnosti. A v de Moivreově *The Doctrine of Chances* se pravděpodobnost stává přímo projevem Boží vůle a prozřetelnosti:

„Stejně jako lze ukázat, že z povahy věcí vyplývají jisté zákony, podle nichž se události dějí, tak z pozorování také vyplývá, že tyto zákony slouží moudrým a prospěšným cílům: zachovat pevný řád vesmíru, rozmnožovat některé druhy bytostí a dát jim tolik pocitu štěstí, kolik je pro jejich stav vhodné. Tyto zákony stejně jako jejich původní návrh a záměr musejí přicházet z vnějšku: setrvačnost věcí a povaha všeho stvoření znemožňují, aby cokoliv bylo samo schopno změnit svou vlastní podstatu. ... A odtud, pokud se nedáme oslepit metafyzickým prachem, jsme vedeni krátkou a zřejmou cestou k uznání velkého Tvůrce a Vladaře všeho, vševědoucího, všemohoucího a dobrého."

Klasická definice pravděpodobnosti plně vyhovovala, pokud středem zájmu byly pouze hry. Při jejím použití na jiné jevy však vznikají vážné potíže. Jakmile „stejné možnosti", tj. symetrie jevu, přestane být bezprostředně zřejmá, což nastane při snaze o aplikaci pravděpodobnosti na širší pole jevů, vyvstanou principiální obtíže.

Laplaceova interpretace i celá klasická pravděpodobnost spadají do třídy *epistemologických interpretací*, v nichž je pravděpodobnost mírou stupně znalosti či racionálního přesvědčení lidského subjektu o nějakém jevu. *Bez člověka by nebylo třeba pravděpodobnosti*; míní Laplace ve výše citovaném úryvku. Údajně správný postup uvažování demonstruje Laplace na příkladu nekorektní (vychýlené) mince. Víme-li to o ní, avšak nevíme, kterým směrem je vychýlená, musíme odpovědět, že pravděpodobnosti pádu orla i panny jsou $p_o = p_p = 1/2$ (podle Laplaceova pravidla jsou dva jevy stejně pravděpodobné, neznáme-li důvod, pro nějž bychom dali přednost jednomu před druhým), i když objektivně platí $p_o \neq 1/2$, $p_p \neq 1/2$. Dva hlavní směry epistemologické interpretace pravděpodobnosti jsou *interpretace logická*, začínající pracemi W. E. Johnsona,[5] který podstatně ovlivnil především J. M. Keynese,[6] a která pokračuje v dílech H. Jeffreyse[7] a R. Carnapa,[8] a dále *subjektivní interpretace*, jejímiž předními zastánci byli F. P. Ramsay[9] a B. de Finetti.[10]

[5]William Ernst Johnson (1858–1931), anglický logik; jeho hlavní dílo je *Logic*, jehož nedokončený čtvrtý díl věnovaný pravděpodobnosti byl publikován posmrtně pod názvem *Mind*. Odmítal četnostní interpretaci pravděpodobnosti, kterou považoval za logickou relaci se zřejmým a hypotetickým tvrzením. Ovlivnil Keynese a řadu dalších logiků.

[6]John Maynard Keynes (1883–1946), anglický ekonom a matematik. Kniha *Treatise on Probability* (1921) je jeho rozšířenou a po řadě let vydanou disertací. Některé jeho závěry byly kritizovány F. P. Ramseyem. V posledních letech života se věnoval výhradně ekonomii ve státních službách.

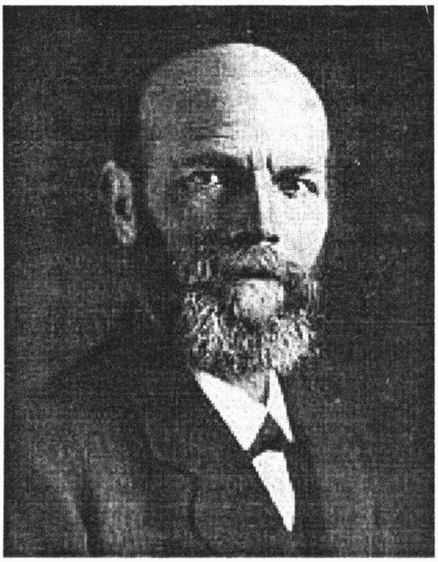
[7]Harold Jeffreys (1891–1989), anglický matematik, astronom, geofyzik. Názvy jeho knih demonstrují šíři jeho zájmů: *The Earth: Its Origin, History and Physical Constitution* (1924), *Earthquake and Mountains* (1935), *Theory of Probability* (1939), *Methods of Mathematical Physics* (1946).

[8]Rudolph Carnap (1891–1970), německý filosof a logik, zabývající se nejprve základy fyziky (kauzalita v prostoročase), poté člen Vídeňského kroužku (H. Hahn, O. Neurath, K. Gödel, L. Wittgenstein), zastánce logického positivismu. Formální verse empirismu je rozvinuta v *Logical structure of World* (1928). Od r. 1931 profesorem filosofie v Praze, 1935 odchází do USA, zabývá se sémantikou, formální a induktivní logikou (*Logical Foundation of Probability*, 1950).

[9]Frank Plumpton Ramsey (1903–1930), anglický matematik a filosof, matematiku považoval za část logiky – podrobně v *The Foundation of Mathematics* (1925). *On a problem of formal logic* (1928, publikováno posmrtně 1930) obsahuje Ramseyovu teorii, která dnes představuje součást kombinatoriky a teorie grafů. *Truth and Probability* (1926) polemizuje s Keynesovou myšlenkou apriorní induktivní logiky v pravděpodobnosti a zavádí míry síly přání (subjektivní užitky) a přesvědčení (subjektivní pravděpodobnosti). Umírá na žloutenku.

[10]Bruno de Finetti (1906–1985), italský matematik a statistik, vedle pravděpodobnosti a statistiky se věnoval ekonomii a pojišťovnictví, intenzivně se zajímal i o didaktiku matematiky.

a) V rámci *subjektivní interpretace* je pravděpodobnost stupeň osobního přesvědčení či víry v jednu či druhou možnost. To je jistě zcela reálný přístup, protože pracuje s reálnými pojmy – subjektivním přijímáním či odmítáním hypotéz. Reprezentuje naše každodenní pravděpodobnostní uvažování nad možnými skutky typu „v tuto pozdní hodinu je tato ulice *pravděpodobně* bezpečnější než jedna či více jiných“ či „tudy se tam dostanu *pravděpodobně* rychleji“. Velkou roli v subjektivní pravděpodobnosti hrají podmíněné pravděpodobnosti. Pravděpodobnost $P(H|S)$ je stupeň přesvědčení o hypotéze H za situace (okolností, podpůrného svědectví) S. Tato posteriorní pravděpodobnost $P(H|S)$ je podle Bayesovy věty součinem apriorní pravděpodobnosti $P(H)$ a věrohodnosti $P(S|H)$ ve srovnání s $P(S)$, tj. $P(H)P(S|H)/P(S)$. Problém představuje numerické vyjádření těchto subjektivních přesvědčení a soudů, pro něž bylo navrženo několik řešení, z nichž se nakonec převážně uplatnila myšlená analogie sázkového systému.



Obrázek 2: Johann von Kries

Obrázek 3: Frank Plumpton Ramsey

b) Logická pravděpodobnost vychází z představy, že teorie pravděpodobnosti je rozšířením postupů deduktivní logiky. Podle Keynese (*Treatise on probability*, kap. 4) je „teorie pravděpodobnosti logická ... protože se zabývá stupněm přesvědčení, který je *rozumné* mít za daných podmínek, a ne pouze okamžitými přesvědčeními jednotlivců, které mohou nebo nemusí být rozumné“.

Ideu lze snadno ilustrovat na následujícím příkladu. Nechť Z označuje zákon 'Všichni havrani jsou černí'. Nechť dále je T_0 tvrzení, že Jiří je havran a C_0 tvrzení, že Jiří je černý. Zřejmě $T_0\&Z$ implikuje C_0. Nechť nyní T je tvrzení, že až dosud byli všichni pozorovaní havrani černí. David Hume si jako první všiml, že z T logicky neplyne Z. Nicméně lze říci, že T implikuje Z v jistém stupni, řekněme p. Pak řekneme, že existuje logická pravděpodobnost p platnosti Z, platí-li T. Tuto logickou pravděpodobnost nyní ztotožníme se stupněm *rozumného přesvědčení* Z (rozumné víry v Z) za předpokladu platnosti T. Situaci zobecňujeme jako pravděpodobnost hypotézy h na základě evidence e a značíme $p = P(h|e)$.

Otázkou zůstává, jak tuto logickou pravděpodobnost, pokud existuje, zjistíme, abychom na ní pak mohli založit své přesvědčení. Podle Keynese existuje schopnost logické intuice, pomocí níž alespoň někdy nebo někteří z nás dokážeme logickou pravděpodobnost vnímat. Podle výše citované knihy: „Od znalosti tvrzení a přejdeme ke znalosti tvrzení b postřehnutím logického vztahu mezi nimi.“ Dále ovšem připouští: „Někteří lidé – tak tomu zřejmě je – mohou mít větší schopnost logické intuice, než ostatní.“

Ovšem právě tuto schopnost silně zpochybnil Ramsey ve své práci *Truth and Probability* (vydáno posmrtně 1931), kde píše:

> „Ve skutečnosti se nezdá, že by existovaly takové pravděpodobnostní relace, které [*Keynes*] popisuje. Předpokládá, že alespoň v některých případech existují a mohou být vnímány, ale pokud se jedná o mne, jsem přesvědčen, že to není pravda. Sám je nevnímám, … a navíc ve mně bují podezření, že ostatní taky ne.“

Dalším podstatným Keynesovým tvrzením je, že pravděpodobnost představuje jen částečně uspořádaný soubor, v němž dvě pravděpodobnosti nemusejí být srovnatelné. Logická interpretace pravděpodobnosti na čas vyklidila pole, především díky rozvoji interpretace subjektivní. V poslední době se však opět, v poněkud pozměněné formě, vrací, jak bude ukázáno níže.

c) Poznatky moderní vědy, kvantové fyziky i biologie, speciálně zákony genetického výběru variacemi DNA, však přinášejí podstatně složitější a zdaleka ne hypotetické příklady náhodných jevů na lidském poznání a lidské existenci zcela nezávislých. Rozpad radioaktivního atomu stejně jako transformace DNA jsou zcela objektivní a přitom náhodné rysy vnějšího světa. Od těchto jevů se odvíjejí větve *objektivní interpretace* pravděpodobnosti (v poslední době se často používá termínu *fyzikální pravděpodobnost*), tj. jednak *četnostní pravděpodobnost*, jejímiž zakladateli byli zejména R. L. Ellis, J. Venn[11] a R. von Mises,[12] jednak *propensitní pravděpodobnost* K. Poppera, který zpočátku vycházel z teorie četnostní, ale posléze, ve snaze vysvětlit některé fyzikální jevy, ji opustil a vytvořil svou vlastní teorii. Vrátíme-li se k Laplaceovu příkladu vychýlené mince, v rámci četnostní interpretace jej formálně vyřešíme, jestliže prohlásíme, že pravděpodobnosti p_o, p_p *jsou limitami relativních četností* obou možných pádů pro počet pokusů blížících se nekonečnu. Tento přístup byl poprvé navržen R. L. Ellisem v roce 1843 a podrobně rozpracován J. Vennem v jeho knize *Logika náhody* publikované v roce 1866. Charles S. Peirce[13] definoval pravděpodobnost důkazu (anglicky „argument") tvrzení jako pravdivostní četnost, tj. relativní četnost případů, kdy tvrzení vede od pravdivého předpokladu k pravdivému závěru. Zásadním technickým problémem četnostní teorie je výběr náhodných posloupností – „kolektivů", vzhledem k nimž jsou limity relativních četností stabilní. Jednou z námitek je, že podle zákona velkých čísel rovnost pravděpodobnosti a limitní četnosti platí pouze téměř jistě, tj. s pravděpodobností 1, takže nemá analytickou platnost. Je známo, že vynecháním libovolně vysokého konečného počtu počátečních členů posloupnosti nezměníme její limitu, avšak právě pouze tyto

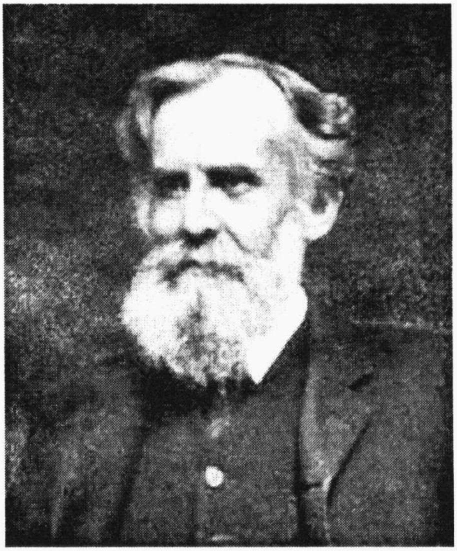
[11]John Venn (1834–1923), anglický filosof, matematik a historik, původně duchovní. Autor knihy *„Logic of chance"* (1866) obsahující formulaci četnostního přístupu k pravděpodobnosti. Věnoval se též matematické logice (rozvíjel Booleův formalismus) a teorii množin.

[12]Richard von Mises (1883–1953), rakouský (rodem ze Lvova) matematik, zabývající se hlavně mechanikou a pravděpodobností se statistikou, numerickou analýzou a filosofií vědy (v letech 1919 až 1933 na Berlínské universitě, 1944–1953 Harvard University). Hlavní díla z oboru pravděpodobnosti jsou *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* (1931) a *Mathematical theory of probability and statistics* (1964).

[13]Charles Sanders Peirce (1839–1914), americký logik, matematik a filosof, původním povoláním a vzděláním chemik a geodet, mimořádně plodný autor v mnoha oborech. Ve filosofii ovlivněn Kantem a Dunsem Scotem. Zdůrazňoval důležitost náhody jako významného evolučního prvku (tychismus od $\tau\upsilon\chi\eta$ – náhoda, osud). Odpůrce subjektivní interpretace pravděpodobnosti. Pozoruhodná osobnost po mnoha stránkách, jak dokumentuje jeho charakteristika (T. S. Fiske, The beginnings of the American Mathematical Society: Reminiscences of Thomas Scott Fiske, *Historia Math.* **1**(1) (1988), 13–17.): „Conspicuous among those who in the early nineties attended the monthly meetings ... was the famous logician, Charles S Peirce. His dramatic manner, his reckless disregard of accuracy in what he termed 'unimportant details', his clever newspaper articles describing the meetings of our young Society interested and amused us all. ... He was always hard up, living partly on what he could borrow from friends, and partly on what he got from odd jobs such as writing book reviews. ... He was equally brilliant, whether under the influence of liquor or otherwise, and his company was prized by the various organisations to which he belonged; and he was never dropped from any of them even though he was unable to pay his dues."

„zbytečné“ členy posloupnosti, z nichž se o limitě přísně vzato nic nedovíme, jsme schopni opakováním pokusu zjistit. Podstatnou námitkou je, že četnostní interpretace pojem pravděpodobnosti vztahuje pouze na opakovatelné jevy a ten pak ztrácí smysl pro konkrétní neopakovatelné jevy (pravděpodobnost, že se zítra zlepší počasí) nebo domněnky (pravděpodobnost platnosti určité teorie). Četnostní interpretace byla přijímána a prosazována anglickou biometrickou školou a je na ní založena řada dnes široce využívaných statistických metod, konkrétně např. intervaly spolehlivosti odhadu střední hodnoty náhodné veličiny aj.

Obrázek 4: Richard von Mises



Obrázek 5: John Venn

d) Propenzitní interpretace oživuje myšlenky Ch. S. Peirce a A. A. Cournota,[14] vyslovené v 19. stol. Pravděpodobnost má být podle Peirce[15] chápána jako jistý druh dispozice produkovat posloupnost dějů

[14] Antoine Augustin Cournot (1801–1877), francouzský matematik. Zabýval se mechanikou (*Le mouvement d'un corps rigide soutenu par un plan fixe*, 1829), pravděpodobností a ekonomií (*Recherches sur les principes de la théorie des richesses*, 1838).

[15] Ve starších pracích zastává Peirce interpretaci podobnou četnostní, podle níž však pravděpodobnost není připisována jevům ani tvrzením (proposition), nýbrž výrokům (argument) sestávajícím z předpokladu (premise) a jeho důsledku (conclusion). Pozorovatel registruje situace, v nichž je předpoklad splněn a zjišťuje, zda důsledek nastane. Průběžně sleduje řadu těchto situací a zapisuje počet uskutečněných důsledků dělený počtem výchozích situací. Limitou tohoto podílu pro neomezeně rostoucí počet situací je pravděpodobnost výroku. Rozdíl od běžné četnostní interpretace je, že pravděpodobnost se vztahuje k výroku; teprve později Peirce zavádí propensitu jako sklon „situace“ přejít v jistý důsledek.

s charakteristickou četností. Případ jednoho takového děje je chápán opět jako sklon náhody produkovat za určitých okolností jistý výsledek právě jedenkrát. Tento sklon – propensita – kvantifikovaný stupnicí mezi nulou a jedničkou, charakterizuje stupeň možnosti jevu, který není plně určen tím, co mu předchází. Tento typ děje můžeme sledovat, jestliže se nám podaří shromáždit dostatečný počet podobných „okolností", např. radioaktivních atomů uskutečňujících nezávisle svůj jediný děj – rozpad. Kolmogorovova[16] teorie pravděpodobnosti jako míry v pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) patří rovněž mezi objektivní přístupy. To plyne ze zcela formálního axiomatického zavedení pravděpodobnosti, v němž pro subjektivní názor či přesvědčení není žádné místo. Jevu je jednoznačně přiřazena „pravděpodobnost", ale není vysvětleno, co to znamená, jaký má význam či interpretaci. Takové otázky nedávají smysl či jsou nepřípadné. V žádném případě z hodnoty pravděpodobnosti hypotézy neplyne návod pro naše chování v konkrétním případě, avšak teprve díky této axiomatické výstavbě byla teorie pravděpodobnosti přijata do matematiky jako její součást rovnocenná s ostatními obory. V rámci filosofické interpretace je však její postavení poněkud nejasné. Jako aparát je tato teorie obecně přijímána, přesně řečeno, je to jediná část teorie, na níž se zastánci subjektivní i objektivní interpretace shodnou a kterou obě strany využívají jako nástroj. Zajímavým rysem této teorie je však explicitní formulace jedné do té doby ne zcela vyjasněné záležitosti, totiž podmíněné pravděpodobnosti. Od samého začátku budování teorie bylo zřejmé, že pravděpodobnost jevu závisí na okolnostech, resp. na omezujících hypotézách, avšak teprve u Kolmogorova se okolnosti a hypotézy stávají stejně jako jev samotný podmnožinami pravděpodobnostního prostoru. Naopak jev se může stát hypotézou či okolností pro jevy ostatní. To je pak podmíněná pravděpodobnost $P_B(A)$ jevu A za předpo-

Obrázek 6: A. N. Kolmogorov

[16] A. N. Kolmogorov (1903 – 1987), jeden z nejvýznačnějších ruských matematiků 20. stol., podstatně přispěl k teorii množin, funkcionální analýze, geometrii, teorii tryskového proudění, teorii pohybu planet a teorii pravděpodobnosti, pro niž zformuloval axiomatickou teorii *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1933).

kladu výskytu jevu B. Myšlenka sama se objevuje, jak zjistil G. Shafer, poprvé poněkud nejasně a také s nevhodným značením u Ch. S. Peirce, v jasné formulaci včetně symbolu $P_B(A)$ u Felixe Hausdorffa v r. 1900.

2. Subjektivní pravděpodobnost u Bruna de Finetti

B. de Finetti vychází jednak z matematické logiky C. Burali-Forti,[17] jednak z positivistické kritiky empirického vnímání světa obsažené v díle Ernsta Macha. K nim pak přidal své vlastní radikální pravděpodobnostní uvažování, které nazývá „probabilismo“ (v dalším používám termín probabilismus). De Finetti píše (v monografii *Probabilismo*): „Již jako chlapec jsem počal chápat, že pojem „pravda“ je nepochopitelný.“

Mnoho výroků de Finetti má záměrně provokativní charakter, který nás má přimět k hlubšímu zamyšlení typu „co je špatného na mém resp. běžném myšlení, že se o něm někdo (tj. např. de Finetti) může takto vyjádřit?“ Svůj probabilismus nazývá de Finetti subjektivním a iracionálním a o pravděpodobnosti prohlašuje, že jako taková neexistuje. Tento výrok jeho spolupracovník J. Savage upřesňuje takto: „pravděpodobnosti jsou stavy mysli, nikoliv stavy přírody“. De Finetti očekává, že logika bude ve vědě nahrazena počtem pravděpodobnosti a racionalistickou vědu nahradí věda pravděpodobnostní, v níž jedny pravděpodobnosti budou vyvozovány z pravděpodobností jiných. Naopak determinismus považuje za jeden ze stavů naší mysli, který se přírodě pokoušíme vnutit. Cituje zde Machův výrok z *Mechanik in Ihrer Entwicklung* (1883): „In der Natur gibt es keine Ursache und keine Wirkung. Die Natur ist nur einmal da.“ De Finetti konstatuje, že vědecké zákony nejsou hypotézy o možných stavech přírody, ale hypotézy o našich názorech na ni. A jestliže je třeba experimentálního důkazu této hypotézy, pak odpovídající experiment musí být psychologický a ne např. fyzikální, neboť experiment v reálném světě nemůže ukázat, co si myslíme. Jeho výsledkem může být nanejvýš změna našeho názoru.

Carnap ovšem takový probabilismus považuje za krok zpět i od prostého dvouhodnotového racionalismu opírajícího se jen o pozorování. V jeho interpretaci se pravděpodobnost $p = P(h|e)$ hypotézy h podmíněné empirickými poznatky e může lišit jenom v poznatcích, neboť racionálně uvažující individuum nemůže dojít ke dvěma hodnotám p při stejném e. Probabilismus se mu pak jeví jako iracionální, protože popírá

[17]Cesare Burali-Forti (1861–1931), italský matematik a logik, celý život učil projektivní geometrii na Vojenské akademii v Turině. Na turinské universitě měl v letech 1893–1894 cyklus přednášek o matematické logice, které posléze shrnul v knihu *Logica Mathematica* (1894). Velmi plodný autor v matematice (vektorový počet, diferenciální geometrie, teorie množin).

možnost separace hypotézy a evidence v podmíněné pravděpodobnosti $P(h|e)$. De Finetti se však především snaží popřít základní racionální dogma. V již zmíněném *Probabilismo* píše o osobě věřící, že zatmění vyvolávají války:

„Nazývám jej pověrčivým, protože jeho myšlení je jiné než moje a společnosti, k níž náležím, protože se střetává s koncepcí světa, která je nejvnitřnější částí představ mých a mého století. Jestliže se však na okamžik odpoutám od části svých myšlenek, která je mým vlastním dílem, jestliže z nich chci oddělit jejich objektivní část, tj. tu, která je čistě logická nebo čistě empirická, pak musím uznat, že nemám žádný důvod dát přednost svému myšlení před myšlením pověrčivé osoby kromě toho, že mé myšlení je mým vlastním, zatím co to pověrčivé se mi příčí."

A o něco dále tamtéž:

„Kdokoliv uvažuje o uzavření kauzálního svazku a chce přitom nalézt pravdu skrze fyzikální experiment a logickou dedukcí, vrhá svůj šíp do temnot. Nemáme hledat pravdu, ale poznání o svém vlastním názoru. Nemáme klást otázky přírodě, ale svému svědomí. Nanejvýš mohu žádat přírodu o data jako podklady mého úsudku, ale odpověď na položenou otázku nespočívá ve faktech; ta spočívá v mém stavu mysli, který fakta nemohou k ničemu nutit, ale který se nicméně může spontánně cítit jimi ovlivněn."

Jestliže pravděpodobnost je subjektivní přesvědčení o možnosti nějakého jevu, je ovšem třeba nejprve objasnit, co je považováno za jev. Podle B. de Finneti není jev kolektivem opakovaných jevů, jako je tomu v četnostní interpretaci, nýbrž pouze jeden jediný jev, přesněji logická entita nabývající hodnot *pravdivá* nebo *nepravdivá* (stala se nebo se stane či nestala se a nestane). Odpovídající informace je, že je buď jistá, nemožná nebo – v případě, že výsledek neznáme – možná. Pravděpodobnost pak nemůže mít objektivní charakter a je prostě subjektivním odhadem možností, při čemž subjektivní neznamená „bezdůvodná, improvizovaná, uspěchaná". Žádné vedlejší okolnosti (zda se jev již stal nebo teprve stane, zda se domníváme, že plyne z fyzikálních deterministických zákonů či z jiných explicitně na náhodě závislých nebo je naopak plně determinován lidským rozhodnutím) nejsou při definování pravděpodobnosti relevantní. Zapojení vedlejších okolností a úvah (zda kostka má dokonalý tvar a mince je vyvážená) má pouze povahu vedlejších zjištění, asi jako posudek znalce u soudu, který je sice uvážen, ale rozhodnutí je plně v rukou soudu. Proto tyto vedlejší okolnosti nemohou konstituovat pravděpodobnost jevu. Stejně tak nelze říci, že zkušenost něco potvrzuje nebo zamítá. To de Finetti dokumentuje následujícím příkladem. Konstatujeme, že mince je dokonalá. Poté provedeme 1000 pokusů, 900krát padne orel a my prohlásíme, že premisu měníme na „mince není dokonalá". Ale protože víme, že tento výsledek *je* možný, změna premisy pouze říká, že jsme vlastně od začátku minci za dokonalou nepovažovali.

Je třeba uvést, že mnoho názorů de Finetti je dobově podmíněných dvěma okolnostmi. První z nich je vznik kvantové teorie stavů a její pravděpodobnostní formulace založená na Schrödingerově rovnici, Heisenbergovu principu neurčitosti a dalších zákonech kvantové fyziky. Druhá již byla zmíněna, totiž vytvoření Kolmogorovovy axiomatické teorie pravděpodobnosti. Především v pojetí jevu jako události, která se stala nebo teprve stane nebo se o to vůbec nepokusí, se de Finetti blíží Kolmogorovovi, v jehož pravděpodobnostním prostoru jevy přebývají v bezčasí a realizaci ke své existenci vůbec nepotřebují. Přitom de Finetti matematický přístup vyjadřující explicitně objektivní interpretaci pravděpodobnosti vždy silně kritizoval především z toho hlediska, že matematika má do pravděpodobnosti vstoupit až při posuzování možností různých od 0 a 1. Konkrétně jako subjektivní cena, vyjadřující ochotu individua něco zaplatit či vsadit, což je chápáno jako vnější kvantitativní projev jeho pravděpodobnostního přesvědčení. Přiřazení číselné hodnoty subjektivní pravděpodobnosti se řeší následujícím postupem.[18] Zjišťujeme subjektivní pravděpodobnosti, že (1) na Marsu byl někdy život, (2) pokud ano, zda organizmy (tvorové) byli inteligentní. Sázkou 1 : 9 na první otázku vyjadřujeme ochotu zaplatit 1 Kč s perspektivou výhry 9 Kč, pokud se hypotéza někdy (během našeho života) potvrdí. Pravděpodobnost hypotézy (1) tedy subjektivně určujeme rovnou jako $p_{(1)} = 1/(1+9) = 0.1$. Druhá hypotéza je méně pravděpodobná a proto vsadíme pouze 1 proti 999, tj. $p_{(2)} = 1/(1+999) = 0.001$. Při uzavírání sázky mohu využít také svých předběžně získaných znalostí. Např. sázím-li při vrhu mincí na to, že padne orel, budu sázet 1 : 1, pokud o minci nic nevím. Jestliže však vím, že někdo házel dvacetkrát a panna padla pouze šestkrát, mohu uzavřít sázku 2 : 1, tj. s $p = 2/3$, jakkoliv dobře vím, že se to může stát i při nevychýlené minci. Sázky je ovšem třeba uzavírat konzistentně, tj. dodržovat jistá pravidla, abychom neprohrávali zbytečně. To neznamená nic jiného, něž že musíme respektovat axiomy pravděpodobnosti. Nechť např. pravděpodobnosti výhry koní A, B, C jsou p, q, r. Sázet lze buď na jednotlivé koně nebo na několik dohromady. Při sázce na celou trojici musí platit, že cena této sázky je úměrná $h = p+q+r$, neboť vyhráváme, když vyhraje kterýkoliv z koní A, B, C, a prohráváme, když nevyhraje žádný z nich. Pokud by pravidlo o součtu pravděpodobností neplatilo, bylo by výhodné měnit trojici sázek za sázkou trojnásobnou či naopak.

[18] Příklady z knihy R. Jeffrey: *Probabilistic thinking*, Princeton University, Princeton 1995.

Alespoň stručnou zmínku si zasluhuje V. Šimerka,[19] jenž ve své práci *Síla přesvědčení* (1881) rozvíjí dlouho před Ramseyem a de Finettim představy o subjektivní pravděpodobnosti. Nazývá ji *přesvědčení* a přiřazuje jí hodnoty mezi 0 a 1. Příčiny či zdroje přesvědčení nazývá *důvody* a jejich sílu *věrojatností*. Důvody jsou příčinou přesvědčení $\nu, \nu', \nu'', \dots$, a $\epsilon = 1-\nu$, $\varepsilon' = 1-\nu', \dots$ jsou jim příslušející *nedokonalosti*. Celková síla přesvědčení V je potom dána vztahem $1-V' = (1-\nu)(1-\nu')(1-\nu'')\cdots$ Když $\nu = \nu' = \nu'' \cdots = 0$, pak je *mysl prázdná* a $V = 0$, neboť *„prázdné důvody* nepodávají žádné přesvědčení". Jestliže jen $\nu \neq 0$, pak $V = \nu$, což vede k podnětnému závěru:

„V prázdné mysli ujímá se každý důvod plnou silou. Dle toho může prázdná mysl i planými důvody oklamána býti, což jinak není snadné. Že na tom i nemravná zásada: columniare audacter, tamen aliquid haerebit [jen drze pomlouvej, však něco ulpí] se zakládala, patrně samo sebou."

Dále Šimerka číselně vyjadřuje stupeň jistoty a zápas dvou opačných mínění („trpí na síle slabší ... vysvítá i možnost případu, kdy se dva stejně silné bludy konečně obapolně zmaří").

3. Zmrtvýchvstání logické pravděpodobnosti[20]

V poslední době se objevuje řada prací, které se pokoušejí vrátit logickou interpretaci do obecné diskuse o filosofickém obsahu pojmu pravděpodobnosti. Hlavní námitkou proti ní bylo, že předpokládané intuitivní logické poznání vztahu mezi výchozí hypotézou, resp. její apriorní pravděpodobností $P(h)$, a výslednou posteriorní pravděpodobností $P(h|e)$ modifikovanou na základě evidence e je těžko prokazatelné, resp. objektivně i subjektivně postižitelné (viz Ramseyova kritika výše). Druhý a možná podstatnější, i když vnitřní problém, se týkal určení pravděpodobnosti $P(h)$, vzhledem k níž by pak $P(h|e)$ bylo možno považovat za bayesovsky podmíněnou pravděpodobnost. Přirozeným způsobem určení $P(h)$ byla obvykle úvaha založená na symetrii úlohy (u mince dvě ekvivalentní polohy, tedy 1/2, u kostky šest poloh, tedy 1/6). Avšak právě symetrické úvahy vedly často k různým apriorním pravděpodobnostem. Příkladem je již vrh dvěma mincemi: jsou ekvivalentní stavy tři: $pp, oo, po \equiv op$ (neboť mince jsou v zásadě nerozlišitelné) nebo čtyři: pp, oo, po, op? Nebo otázka po barvě: je jedna koule tažená ze tří červená? Bud je nebo není, je to symetrický případ, takže apriorní pravděpodobnost položíme rovnou jedné polovině. To je postup předepsaný Carnapem. Ale jsou-li koule každá jiné barvy, pak pravděpodobnost červené je přece 1/3, a není-li mezi nimi červená, pak je dokonce 0. Další

[19] Václav Šimerka (1818–1887), katolický kněz, farář v Jenšovicích, a matematik.
[20] Název oddílu je titulem článku J. Franklina v *Erkentniss* 55(2001), 277–305.

problém je spojen s jevy, které jsou spojitě rozloženy na jistém intervalu, např. v závislosti na proměnné $t \in [0,1]$. Lze položit otázku, zda lze ekvivalentně či dokonce s výhodou jevy vztahovat k proměnným t^2 či naopak $\sqrt{t}$? Jiným problémem je apriorní pravděpodobnost sériového jevu bez přerušení (problém of succession – problém podobnosti či následnosti), např. východu Slunce. Pokud dodnes vyšlo za sebou n-krát, je pravděpodobnost, že vyjde i zítra, rovna $(n+1)/(n+2)$. Potom však apriorní pravděpodobnost (při nulové zkušenosti) je $1/2$ ve shodě se symetrií úlohy – může vyjít a taky nemusí. S tak velkým souborem paradoxů se žádná jiná pravděpodobnostní interpretace nemusí vyrovnávat a proto je pochopitelné, že na určitou dobu logická pravděpodobnost byla všeobecně opomíjena. Ve snaze o její oživení je proto třeba provést modifikace, jež jsou třech typů:

i) na konkrétních hodnotách apriorní pravděpodobnosti příliš nezáleží a nemusejí být jednoznačné, *ii)* většinou lze rozlišit rozumné a nerozumné hodnoty, *iii)* ve většině reálných případů existují předběžné informace a rozdíly v apriorních pravděpodobnostech jsou důsledkem využití různých z nich.

ad i) Především nemá smysl uvažovat případy, v nichž evidence zcela zřejmě vůbec nesouvisí s hypotézou (P(měsíc je ze zeleného sýra | u Přerova se srazily vlaky)). Tam, kde je k tomu důvod, je třeba přijmout přesnou hodnotu, např. P(Karel měří víc než 160 cm | Karel je žák IV.b a 90% žáků IV.b měří víc než 160 cm)= 0.9. Dále je třeba rozlišovat evidence podle jejich významu – váhy. Tak evidence „mince vypadá jako symetrická“ má nižší váhu, než evidence „mince vypadá jako symetrická a z 1000 vrhů padlo zhruba 500 orlů“. Může se pak stát, že $P(h|e) \cong P(h|e \cup e')$, jestliže váha e' je zanedbatelná ve srovnání s vahou e. Evidencím s nízkou vahou se ovšem nelze vyhýbat; v teorii jsou nezbytné, neboť každá možnost by měla být prozkoumána; v aplikované vědě je mnohonásobné opakování pokusů často příliš náročné, v průzkumech organizovaných medii je běžné. Největší problémy se vyskytují v soudnictví (např. při řešení dopravních nehod s čelní srážkou vozidel bez přeživších osob je výsledkem obvykle evidence s vykonstruovanou dokonalou symetrií). Problémy sériových jevů s nízkým počtem zaznamenaných opakování jsou zdrojem pobavení v případě východů Slunce. Jindy však mohou být zcela vážné. V Talmudu je řešena situace, kdy ženě po obřízce zemře první i druhé dítě, a je položena otázka, zda je zbavena povinnosti dát obřezat již třetí nebo až čtvrté dítě. Problém je pak rozšířen na případ čtyř sester se závěrem, že čtvrtá z nich již své dítě může obřízky ušetřit, jestliže děti tří jejich sester po ní zemřely.

Možná, že to však může udělat již třetí z nich. Podobná situace nastává u opakovaného sňatku ženy, jejíž dva či tři předcházející manželé zemřeli. Četnostní interpretace pravděpodobnosti je v těchto případech k ničemu a přitom pravděpodobnostní úvaha má cenu života či smrti.

ad ii) Jestliže symetrií pro určení apriorní pravděpodobnosti je možných více, je třeba připustit, že tato situace také může být neoddělitelnou podstatou řešeného problému. Při hledání optimálního parametru při spojitě rozložených jevech lze pro volbu mezi t, t^2 či naopak $\sqrt{t}$ použít racionální úvahy a je zřejmé, že t^{20} ani t^{50} nepřipadají v úvahu, tj. musíme rozhodovat jen mezi několika málo možnostmi. Obecně je ovšem třeba konstatovat, že nalezení vhodné výchozí hypotézy je často obtížné; tím důležitější je pak racionální úvaha.

ad iii) K jaké situaci máme vztáhnout apriorní pravděpodobnost $P(h)$, je citlivý problém. Jestliže je k dispozici nějaká vhodná předběžná evidence, není důvod se jí vyhýbat. Není přece nutné vztahovat apriorní pravděpodobnost k samotnému počátku poznání. Volba symetrické výchozí hypotézy může ostatně mít dvě zásadně rozdílné příčiny, „není znám žádný důvod k preferenci jedné alternativy před druhou" (to je onen často používaný *„princip nedostatečného poznání"*) je první z nich, ale také je možné, že „je důvod nepreferovat jednu hypotézu před druhou". Tak pravděpodobnost 1/2 přiřazená oběma stranám mince může být výsledkem jen zběžného prohlednutí mince, ale také jejího pečlivého proměření. Citovaný Carnapův požadavek přiřazení apriorních pravděpodobností 1/2 hypotézám P(má vlastnost A), P(nemá vlastnost A) je ovšem obecně nepřijatelný.[21] Vliv dodatečné evidence může mít na apriorní hypotézu zcela zásadní vliv, a to i v případě, že ji nepopírá. Na příklad pravděpodobnost P(všichni lidé jsou menší než 5m)=1 se bezpochyby zmenší, bude-li nalezen jedinec výšky 4.99 m, neboť výška je spojitá veličina a může-li nabýt hodnoty 4.99 m, nelze vyloučit ani 5.01.

Ukazuje se tedy, že úplné potlačení logické interpretace pravděpodobnosti bylo patrně předčasné a zbytečně usnadněné příliš kategorickou formulací principů podanou jejími zakladateli. Na řadě příkladů lze ostatně dovodit, že zastánci objektivní i čistě subjektivní interpretace si zhusta více či méně skrytě pomáhají logickými úvahami. Je patrně nemožné uvažovat o jakýchkoliv jevech, psát o nich filosofické či filosoficko-matematické stati, a přitom ponechat zcela stranou vypěstované logické uvažování. Ani od svého podvědomí ani od objektivního jevu se o pod-

[21]Ostatně i u Keynese (*A Treatise on Probability*, MacMillan, London 1921, kap. IV) lze najít kritiku principu nedostatečného poznání, který doporučuje nazývat *principem nedostatečného zájmu* či *lhostejnosti* (the principle of indifference místo zavedeného názvu the principle of unsufficient reason).

statě pravděpodobnosti z *jejich* hlediska nedovíme nic, a každý psychologický experiment i každý fyzikální pokus nakonec interpretujeme pomocí logických úvah.

Za připomínku stojí širší pojetí pravděpodobnosti, o něž se pokoušel v 19. stol J. von Kries,[22] oceněný a především v pozdějších letech využitý Keynesem (nikoliv ve výše citované knize). Von Kries postuluje, že pravděpodobnost musí být založena na objektivních fyzikálních rysech reality a záměrně zavádí rozporný termín *objektivní* či *fyzikální možnost* (možnost může být chápána jako subjektivně založená nejistota). Tuto dvojakost pak řeší zavedením nomologické a ontologické determinovanosti. Nomologické požadavky charakterizují třídu věcí a dějů fyzikální povahy a ontologické nároky se vztahují na nejisté individuální rysy jednotlivých dějů. Oba typy jsou zcela nezávislé, takže poznání jedněch zákonitostí nedává žádnou informaci o zákonitostech druhých. Von Kriesovým cílem byla aplikace pravděpodobnosti k testování účinků léků, tj. podchycení pozitivních či negativních účinků jejich užívání. Na rozdíl od omezeného počtu jevů při hrách, při tomto využití je hlavním problémem definování souboru jevů podmiňujících průběh choroby (druh použitého léku, způsob a četnost jeho aplikace, hodnocení příznaků, především však stav a predispozice pacientů). Von Kries si také uvědomil, že podobný soubor problémů se vyskytuje při studiu společenského chování v pracích W. Lexise. Pravděpodobnost chápal jako logickou reakci založenou na analogii mezi minulostí a přítomností, spolehlivost odhadu však závisí na stupni podobnosti mezi nynějším a předcházejícím jevem, přičemž situace se v životě prakticky nikdy neopakují a předpokládané analogie jsou vždy nepřesné:

> „Když jsme pozorovali jeden či více případů jistého druhu uskutečňujících se jistým způsobem a očekávali jsme týž průběh pro nějaký podobný případ, pak toto očekávání nemá jistotu předpokladů, na nichž je založeno. Jestliže tyto předpoklady jsou jisté, očekávání je pouze více či méně pravděpodobné. Pravděpodobnost výsledku roste s počtem pokusů, ale závisí také na stupni a druhu podobnosti případů a zvláště na podobnosti mezi případem, k němuž se očekávání vztahuje a případech, jež se staly v minulosti (citovaná kniha, str. 26).“

Podstatnou von Kriesovou myšlenkou je, že v převážné většině případů pravděpodobnost *nelze* vyjádřit numericky. Možné je to pouze tehdy, když jednotlivé případy jsou shodné, jako při hodech stejnou kostkou či stejnou mincí; jakmile kostku či minci vyměníme, již opět přichází ke slovu analogie. Von Kries připouští, že numerické vyjádření

[22] Johannes von Kries (1853–1928), německý fysiolog a filosof, autor knihy *Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1886).

pravděpodobnosti je možné, že subjektu může být vnuceno (jak se o to dnes pokoušíme na bázi sázek v rámci subjektivní přístupu), pochybuje však o jeho jednoznačnosti.

Pro prezentaci souboru možných jevů zavádí von Kries geometrickou představu „prostoru" v lidské mysli, který nazývá Spielraum (hřiště, volný prostor) a pomocí nějž zavádí číselný pojem pravděpodobnosti. Tyto prostory jsou však ostře vymezené a vzájemně srovnatelné pouze u jevů s číselnými pravděpodobnostmi, zatím co v obecných případech jsou jejich hranice neurčité (*fuzzy* hřiště v dnešní terminologii). Přesné rozměry nejsou ostatně striktně dodrženy ani u her díky různosti kostek a mincí. Von Kries ovšem zdůrazňuje, že jeho prostory nejsou objektivními vlastnostmi jim odpovídajících jevů, nýbrž jsou konstruovány v mysli osoby, která na základě dostupné evidence zvažuje jednotlivé jevy. Základní von Kriesovo stanovisko je v podstatě logicko-pravděpodobnostní a rozlišuje několik typů logického rozvažování spočívajících v soudech o hodnotě (např. morální), skutečnosti (to definuje jako „první základní uchopení reality subjektem") a konečně o vztazích mezi jevy. Vztahové soudy jsou hlavním polem pravděpodobnosti, která vychází jednak z analogií (úsudek z několika předcházejících opakování na jeden jev budoucí), jednak z indukce (obecný soud založený na několika pozorováních). Von Kries patrně ovlivnil i Wittgensteinovo pojetí pravděpodobnosti[23] obsažené v *Tractatus logico-philosophicus.* Wittgenstein se o pravděpodobnosti zmiňuje několikrát:

4.464 Pravdivost tautologie je jistá, věty možná, kontradikce nemožná. (Jistý, možný, nemožný: zde je naznačeno stupňování, které potřebujeme v nauce o pravděpodobnosti.)

5.15 Je-li P_r počet důvodů pravdivosti věty „r", P_{rs} počet těch důvodů pravdivosti věty „s", které jsou současně i důvody pravdivosti „r", pak poměr $P_{rs} : P_r$ nazýváme *mírou pravděpodobnosti*, kterou dává věta „r" větě „s".

Definice 5.15 je velmi blízká pojetí von Kriesovu, podstatný rozdíl je však v tom, že von Kries uvažuje předpoklady, jevy a evidence jako informace o skutečných zákonech přírody a tedy o empiricky možném světě, zatímco Wittgenstein se omezuje na logicky možný svět. Užívá také termínu Spielraum v pojetí blízkém von Kriesovi, ovšem opět pouze v rámci logiky a nikoliv skutečnosti:

4.463 Pravdivostní podmínky určují volný prostor [Die Wahrheitsbedingungen bestimmen den Spielraum ...], který věta ponechává faktům. (Věta, obraz, model jsou v negativním smyslu jako pevné těleso ohraničující volnost pohybu

[23]Detailní rozbor je v práci M. Heidelberga: Origins of the logical theory of probability: von Kries, Wittgenstein, Waismann. *Int. Studies in Philos. Sci.* **15**(2001), 177–188.

jiných těles ...) Tautologie ponechává skutečnosti celý – nekonečný – logický prostor, kontradikce zaplňuje celý logický prostor a neponechává skutečnosti ani bod. Žádná z nich nemůže tedy nějak skutečnost určovat.

V současné době budí von Kriesovo dílo opět značný zájem (viz citovaný M. Heidelberg,[23] popisující též vliv von Kriese na dalšího příslušníka vídeňského kruhu F. Waismanna[24]) a řada prací G. Fioretti.[25]

4. Četnostní interpretace pravděpodobnosti

V zakladatelském díle četnostní interpretace pravděpodobnosti *Logic of chance* rozvíjí J. Venn myšlenku, že pravděpodobnost je metoda správného zacházení s posloupnostmi jevů, v níž všechny subjektivní přístupy jsou (pokud možno – viz výběr posloupnosti níže) pečlivě vyloučeny. Pravděpodobnost je podle něj relativní četnost jevů určitého typu v posloupnosti jevů zvolených ke studiu. Volba posloupnosti není snadná a Venn doporučuje provést subjektivní úvahu s požadavkem, aby posloupnosti nebyly ani příliš velké ani příliš omezené („... neither too large nor too limited") a s ohledem na zdravý rozum. Zdůrazňuje přitom, že přiřazení takto definované pravděpodobnosti, která se týká celé třídy jevů, jednomu jejímu prvku je zcela nesmyslné. Pro využití pravděpodobnosti postuluje úplné zanedbání jednoho jevu: „the employment of Probability postulates ignorance of the single event" (*Logic of chance*, 1866, str. 142).

Teprve v pozdější formulaci von Misesově se objevuje požadavek nekonečné posloupnosti:

„The sequence [of trials] can be indefinitely extended and the frequency [of certain results a_i] n_i/n [n is the number of trials] approaches a limit as n approaches infinity ... [the frequency] is called the limiting frequency or chance of a_i within the sequence under consideration." (*Mathematical theory of probability and statistics*, 1964, str. 5).

A tamtéž (str. 2): „The subject of probability theory is long sequences of experiments or observations repeated very often and under a set of invariable conditions ... Probability theory, as considered in this book, has nothing to do with questions such as: „Is there a probability of Great Britain some time in the near future being involved in a war in Egypt?". Similarly, a question concerning the probable historical truth of biblical narrations does not interest us ... Each of these questions can be discussed adequately from various points of view ... [they] deal with particular situations, and such questions concerning „then" and „there" cannot be answered in our theory ... we limit our scope, roughly speaking, to a mathematical theory of repetitive events."

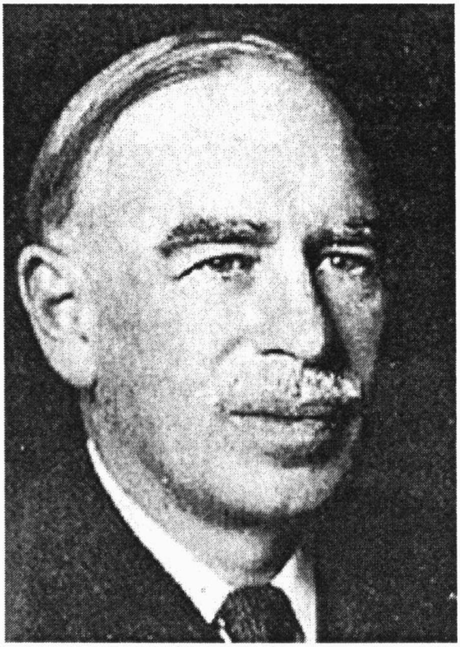
[24]Friedrich Waismann (1896–1959), rakouský fyzik a filosof, po emigraci v r. 1937 působil do své smrti v Cambridgi a Oxfordu.

[25]Např. G. Fioretti: Von Kries and the other „German logicians": Non-numerical probabilities before Keynes. *Economics and Philosophy* **17**(2001), 245–273.

Pravděpodobnost, která nemůže být aplikována na jednu událost, nemůže být použita jako rozhodovací kriterium. Pro názornost uveďme jednoduchou úlohu formulovanou Keynesem, která je obtížně řešitelná kterýmkoliv přístupem, důvody neřešitelnosti jsou však rozdílné a v literatuře bývá často probírána z různých hledisek. Hypotéza této úlohy je, že jdeme na procházku, barometr ukazuje vysoký tlak, ale na obloze jsou černé mraky. Problém je, může-li nám teorie pravděpodobnosti pomoci v rozhodování, zda si vzít deštník.

Představme si odpověď J. Venna: Bylo by nutné mít k dispozici pozorování četností deště jednak za vysokého tlaku, jednak při černých mracích na obloze. Po výběru referenčních posloupností bychom určili pro oba případy pravděpodobnosti deště. Avšak žádná souvislost mezi těmito hodnotami a přesvědčením, na jehož základě se rozhodneme, neexistuje, neboť to se řídí osobními úvahami. Pravděpodobnost tedy pomoci nemůže.

Další zastánce četnostní interpretace, F. Y. Edgeworth na Keynesův problém odpovídá, že i v případě, kdyby z dat vyplynula velká pravděpodobnost deště, nic by to neznamenalo. Podle jeho představ se důvěryhodnost dat obecně nepřevádí v přesvědčení řídící naši činnost. Pouze v případě, že důvěryhodnost pravděpodobnostních hodnot je mimořádně vysoká, může se stát, že sama o sobě vytvoří přesvědčení. Obecně však bychom mohli pravděpodobnostních údajů využít k tomu, abychom minimalizovali četnost zmoknutí v posloupnosti procházek.



Obrázek 7: John Maynard Keynes

Keynes ve svém řešení konstatuje možnou neúčinnost pravděpodobnostních závěrů na naše chování jednou ze dvou možných příčin: na základě dat nejsme schopni situaci přiřadit hodnotu subjektivní pravděpodobnosti, nebo nejsme schopni porovnat pravděpodobnosti alternativních situací proto, že jsou založeny na různých druzích znalostí – výskyt deště za vysokého tlaku a výskyt deště při černých mracích. Úvahu končí slovy:

„Když je tlak vysoký a mraky černé, není vždy racionální, aby jedno v naší mysli převážilo, neboť racionální by bylo, abychom se řídili svým rozumem a nemařili čas debatou."

Pojem pravděpodobnosti v četnostní interpretaci je tedy jejími zakladateli záměrně zúžen, avšak řada diskusí tuto sémantickou skutečnost nerespektuje a kritizují neschopnost četnostního pojetí být rádcem našeho života („guide to life"). O to se však četnostní interpretace záměrně nesnaží. Rada, kterou od ní můžeme očekávat, se může týkat jenom těch situací, které se byť v poněkud pozměněném kontextu opakují a pro něž lze doporučit taktiku minimalizující nepříznivé případy. Tak problém typu „jediná událost", totiž zda bude tuto neděli 23.5. odpoledne pršet, patří do posloupnosti květnových dešťů, nedělních odpoledních dešťů, letošních dešťů atd., a studium těchto posloupností a jim odpovídajících četností zahrnutých s patřičnou váhou by mohlo vést k uspokojivé predikci. Volba vhodných posloupností však v těchto případech zdaleka není jednoznačná a zastánci četnostní pravděpodobnosti se nemohou shodnout ani na tom, zda vybraná třída posloupností má být co nejširší či naopak co nejužší. Např. otázka po pravděpodobnosti, že „v příštím roce dojde k úspěšné transplantaci mozku" může být zařazena do úzké třídy transplantací orgánů či do široké třídy chirurgických zákroků, ale ani jedno zařazení neslibuje žádný rozumný výsledek. Volba posloupnosti, jejíž limitu se snažíme určit, však není jednoduchá ani u systematicky se opakujících jevů a vyvolává řadu otázek. Proti nejčastěji diskutované posloupnosti vrhů mince lze např. namítnout, že na celém jevu není nic pravděpodobného, protože v každém vrhu se uplatňuje řada fyzikálních jevů a kdyby byly při každém vrhu naprosto identické, musel by být identický i jeho výsledek, tj. padala by stále panna nebo stále orel. Případně lze namítnout, že každým vrhem se mince trochu opotřebovává a při sledování prvních vrhů právě vyražených mincí je zase výsledek ovlivněn výrobou způsobenými rozdíly, protože žádné dvě mince nemohou být absolutně stejné.

R. von Mises ve snaze upřesnit problém subjektivního výběru z posloupnosti jevů doporučeného Vennem zavedl termín *kolektiv*. Pro případ vrhů mince označme $\{x_n\}$ posloupnost výsledků, tj. $n = 1, 2, \ldots$ a x_i jsou 0 nebo 1. Aby tato posloupnost byla kolektivem, musí splňovat podmínku, že asymptotická relativní četnost nul i jedniček musí být $1/2$. To ovšem nestačí, protože by takovou podmínku splňovala i posloupnost $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, která nemá charakter náhodné posloupnosti. Proto von Mises vyžadoval, aby každá dílčí posloupnost $\{x_{n_i}\}$, $n_1 < n_2 < \cdots$ vybraná za podmínky, že výběr každého x_{n_i} závisí pouze na členech s indexy nižšími než je n_i, měla opět limitu obou relativních četností rovnu

1/2. Model je složitý, vyskytuje se v několika podobných verzích, ale zůstává v něm opět libovůle, zvláště pak termín „závisí pouze na“ je zcela nejasný. Řada argumentů pro i proti této definici, včetně doporučení, aby výběr z $\{x_n\}$ byl realizován nezávislými algoritmy, tj. plně formalizován, se však vztahuje pouze k posloupnostem dvou vzájemně se vylučujících symetrických jevů a nelze ji aplikovat na posloupnost reálných dat, která nejsou ani 0, ani 1. Velmi detailní diskuse těchto problémů je v článku Ch. Friedmana,[26] kde je podán návrh generických (tj. obecně použitelných) výběrových posloupností založených na algoritmech určitého typu a vhodných i pro posloupnosti reálných dat. Možnosti tohoto modelu by ovšem vyžadovaly bližší rozbor; bezpochyby bude použitelný jen pro některé soubory dat, ale vztah mezi modely a realitou je vždy diskutabilní a nikdy se nejedná o totožnost. Bohužel však přínosný a po matematické stránce pečlivě zpracovaný článek zatím nevzbudil žádnou pozornost (jak vyplývá z citačního indexu).

Pokud se jedná o reálná data, je třeba také uvážit, že jejich stabilita se prakticky v žádném skutečně důležitém případě nedá předpokládat. Stačí se zamyslet nad bezesporu významnými tabulkami úmrtnosti, na nichž je založeno nejen pojišťovnictví, ale i státní rozpočtová politika v sociální oblasti, a které se spojitě mění se společenskými podmínkami a pokrokem lékařské vědy.

Závěrem nezbývá než konstatovat, že jakkoliv je četnostní interpretace snad nejsnáze ze všech interpretací napadnutelná a zpochybnitelná ve svých základních principech a koncepcích, v praxi je nesporně nejvíce využívána.

5. Možnost usmíření různých interpretací pravděpodobnosti

Interpretace pravděpodobnosti je na přelomu tisíciletí jedním z neobyčejně živě diskutovaných problémů. Vycházejí desítky článků i knih, na Internetu lze nalézt tisíce odkazů, diskusí kratších i dlouhých, záznamů přednášek i celých knih. Situaci případně charakterizuje J. Savage v knize *The Foundations of Statistics* (1974) slovy: „... pokud se jedná o to, co je pravděpodobnost a jak souvisí se statistikou, pak zřídkakdy od stavby Babylonské věže panoval v něčem tak dokonalý nesoulad názorů.“ Velkým problémem při vytváření filosofických interpretací pravděpodobnosti je snaha o universalitu. W. Salmon[27] formuluje ve své

[26] Chas Friedman: *Adv. Appl. Math.* **23**(1999), 234–254.

[27] Wesley C. Salmon (1925–2001), Reichenbachův žák a zastánce četnostní interpretace pravdě-podobnosti, profesor na universitě v Pittsburghu, věnoval se celý život filosofii vědy, speciálně problému kauzality, v pozdějších letech připouštěl i propensitní

knize *The Foundations of Scientific Inference* (1967) tři základní kriteria, jimž každá pravděpodobnostní interpretace musí vyhovět, aby měla smysl:

i) Přijatelnost – významy přiřazené základním pojmům transformují formální axiomy a teorémy pravděpodobnosti v reálné výroky.

ii) Ověřitelnost – musí existovat metody, kterými alespoň principiálně můžeme hodnoty pravděpodobnosti zjistit.

iii) Použitelnost – pravděpodobnost musí dávat doporučení pro jednání v praktických situacích.

Tato kriteria jsou často diskutována, Salmon pochopitelně dokazuje, že je splňuje právě četnostní interpretace, Salmonův kolega S. Uchii[28] ve svém internetovém příspěvku předvádí, že je tomu právě naopak a P. Bartha[29] dokazuje, že Salmonova kriteria v podstatě nesplňuje interpretace žádná. Vedle monistů, snažících se vztáhnout všechny problémy k interpretaci jediné, přibývá pluralistů, kteří připouštějí koncepcí více. Již Carnap[30] tvrdil, že četnostní a logická interpretace vedle sebe v různém smyslu či kontextu nezávisle existují. Přinejmenším historicky je pravděpodobnost jedno slovo používané podle okolností v mnoha kontextech. Řecké εικοτως znamená pravděpodobně, vhodně, a εικω, −ειν, je též zdáti se, podobati. Tomuto termínu odpovídá latinské probabile v souvislostech diskutovaných v kap. 1. Naproti tomu πιστικος je věrohodný, zaručený, a toto slovo Cicero přeložil jako *probabile a veri simile*, tj. podobné pravdě. Druhé z nich začínalo v teorii pravděpodobnosti, první spíše v soudnictví a občanských vztazích, do teorie pravděpodobnosti přichází s Jakobem Bernoulli a de Moivrem. V duchu těchto historických rozdílů jiná pluralistická koncepce přijímá propensitní interpretaci „jediné události" pro vědecké (přírodní zákony) a Bayesovskou subjektivní interpretaci pro zachycení nejistoty při indukci opírající se o nějakou předběžnou evidenci.

G. Shafer[31] v článku s názvem stejným jako má tento oddíl rozebírá ideálizovaný pluralistický model pravděpodobnostního děje či přesněji systému náhodných situací, v nichž vlastnosti a možnosti jednotlivých

---

interpretaci.

[28]Soshichi Uchii (1943–), profesor filozofie vědy, zvláště biologie, na universitě v Kyotu.

[29]Paul Bartha, profesor na University of British Columbia, Vancouver.

[30]R. Carnap: The Two Concepts of Probability. Philos. Phen. Res. **5**(1945) 513–532. Existuje český překlad v R. Carnap: Problémy jazyka vědy. Svoboda 1968.

[31]G. Shafer: Can the various meanings of probability be reconciled? In: *A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences: Methodological Issues*, edited by Gideon Keren and Charles Lewis. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, 1993, 165–196.

interpretací jsou názorně zachyceny.

Elementárním dějem modelu jsou opakované vrhy dokonalou mincí („pokusy“) v přítomnosti diváků uzavírajících sázky jednak na jednotlivé pokusy, jednak na jejich skupiny. Diváci vědí, že mince je dokonalá, takže zhruba v polovině pokusů se objeví jak panna, tak orel, a že předchozí výsledky nemají žádný vliv na výsledky budoucí.

Před každým pokusem mohou sázet malé stejně vysoké částky na jeho výsledek. Výhry jsou nízké a protože diváci mají omezený kapitál, může se snadno stát, že o něj v drobných prohrách přijdou. Jejich nadějí je tedy zisk v lukrativnějších větších sázkách. Mohou sázet na skupiny pokusů, např. na dvě panny v následujících dvou vrzích nebo také že přesně v pětistém vrhu padne orel. Ani zde však nejsou sázky vysoké a nemohu být zdrojem velkého zisku.

Vysoké sázky lze uzavírat na velké série pokusů, např. 600:1 na to, že počet orlů v následujících tisíci vrzích bude mezi 450 a 550, a 1000:1 proti každé strategii, která by umožnila výhru o mnoho řádů, např. z 20 na 20 000. Vysoké sázky vycházejí ze znalosti zákonitostí hry, tj. uplatňuje se četnostní interpretace a přesvědčení, že symetrická výchozí situace se na dlouhém úseku posloupnosti výsledků musí projevit. Sázkám na jednotlivé pokusy naopak odpovídá situace předpokládaná zakladateli teorie pravděpodobnosti, tj. spravedlivá hra s rovnými šancemi a nezávislostí na předchozích výsledcích; divák se tedy nachází v oblasti epistemologické (logické či subjektivní) interpretace. Odtud je jen krok k formální axiomatické teorii, v níž stejné pravděpodobnosti jsou matematicky zpracovány a jsou zdrojem „oprávněného přesvědčení“, např. takového, že na drobných sázkách se nedá získat velké jmění (avšak jsou zdrojem zábavy a krátkodobého napětí).Uvažování hráče se tedy pohybuje v kruhu s aktivními zastávkami na obou typech sázek přerušovanými okamžiky duševního úsilí při vymýšlení optimální strategie, jejíž dlouhodobost však postrádá zábavnost.

Zdá se, že v podobném kruhu se pohybují i pokusy o interpretaci pravděpodobnosti. Potřebujeme ji k řešení každodenních záležitostí a jejich výsledky v nás vytvářejí různá oprávněná přesvědčení. Na jejich dlouhodobé využití nám však někdy chybí trpělivost, jindy hotovost a nejobvykleji čas, takže jsme opět přinuceni k jednotlivým pokusům a můžeme nejvýš doufat v rovnost šancí. Snaha o jednotnou interpretaci těchto situací je nejspíš předem odsouzena k nezdaru. Toto poznání vztahující se k sémantice pojmu pravděpodobnosti platí i pro její numerické vyjádření (pokud je vůbec možné a smysluplné – připomeňme von Kriese i Keynese). Pravděpodobnost jako číslo vyjadřuje jednou rovnost šancí v symetrických problémech, jindy je oprávněným míněním či přesvědčením, založeným na souboru evidencí či na rozpoznání symetrie situace, nebo konečně je relativní četností sledovaných jevů, které na našem jednání mohou nebo také vůbec nemusejí záviset, jako je tomu většinou u fyzikálních jevů. Praktické využití posledního případu je v nejlepším případě optimalizace jednání při větší sérii pokusů, pro jeden případ jsou však jeho zákonitosti bezcenné.

Literatura

[1] I. Grattan-Guinness (Edit.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge London, 1993, 1293-1302.

[2] F. N. David, *Games, Gods and Gambling, A history of probability and statistical ideas*, Dover Publ., Inc., Mineola (N.Y.) 1998.

[3] D. Gillies, *Philosophical Theories of Probability.* Routledge, London 2003.

[4] I. Hacking, *The Emergence of Probability.* Cambridge University Press, Cambridge 1975.

[5] A. N. Kolmogorov, A. P. Juškevič (Edit.), *Mathematics of the 19th Century. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory.* Birkhäuser, Basel 2001.

[6] K. Mačák, *Počátky počtu pravděpodobnosti.* Prometheus, Praha 1997.

[7] L. E. Majstrov, *Teorija verojatnostej.* Nauka, Moskva 1967.

[8] S. M. Stiegler, *The History of Statistics.* Harvard Iniversity Press, Cambridge (Mass.) 1986.

[9] S. M. Stiegler, *Statistics on the Table.* Harvard Iniversity Press, Cambridge (Mass.) 1999.

[10] I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability.* Cambridge 1865.

Ivan Saxl
Matematický ústav AV ČR, Praha
e-mail: saxl@math.cas.cz