Matematika v proměnách věků. III

Magdalena Hykšová
Historické počátky teorie her

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. III. (Czech). Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. pp. 69–98.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401596

Terms of use:

© Výzkumné centrum pro dějiny vědy

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

HISTORICKÉ POČÁTKY TEORIE HER

MAGDALENA HYKŠOVÁ

1. Úvod

John von Neumann, který je zpravidla pokládán za zakladatele teorie her, formuloval ve svém pojednání [36] z roku 1928 základní problém této teorie slovy:

n hráčů, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, hraje danou společenskou hru B. Jak musí libovolný z těchto hráčů, S_m, hrát, aby dosáhl co nejlepšího výsledku?

([36], str. 295)

Zdůraznil přitom, že hlavní potíž nastává v případech, kdy výsledek ovlivňují alespoň dva hráči, z nichž každý je veden svými vlastními sobeckými zájmy. Následující citát ilustruje šíři von Neumannova pojetí *společenské hry* (*Gesellschaftsspiele*):

Pod toto označení spadá velmi mnoho věcí, cokoli od rulety po šach, od bakaratu po bridž. A nakonec každá událost – jsou-li dány vnější podmínky a účastníci situace (a ti se chovají dle svobodné vůle) – může být považována za společenskou hru, jestliže sledujeme účinek, jaký má na účastníky. ([36], str. 295)

Každý z nás pak může k uvedenému citátu přidat neomezené množství situací, které pod daný pojem spadají; hráči mohou být obchodní společnosti, vojenské jednotky, stíhačky, ponorky, účastníci souboje, národy, politici, politické strany, samci v říji, geny, motoristé, uživatelé počítačové sítě, majitelé téhož pozemku, ctitelé téže dámy, věřitelé zbankrotovaného dlužníka, ...

Aby bylo možné uvedený pojem matematizovat, je třeba jej poněkud zúžit. Jedním z modelů střední obecnosti, který zahrnuje dostatečné množsví reálných situací, zároveň však umožňuje vybudování solidní matematické teorie, je tzv. *hra v normálním tvaru*; než se budeme věnovat historickému vývoji teorie her, připomeňme si základní definici a vlastnosti tohoto pojmu.

DEFINICE 1. Nechť je dána konečná neprázdná n-prvková množina

$$Q = \{1, 2, \ldots, n\}$$

a dále n množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a n reálných funkcí $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. *Hra n hráčů v normálním tvaru* je definována jako uspořádaná $(2n+1)$-tice

$$(Q;\ S_1, S_2, \ldots, S_n;\ u_1(s_1, s_2, \ldots, s_n), \ldots, u_n(s_1, s_2, \ldots, s_n))\,. \tag{1}$$

Množina Q se nazývá *množina hráčů*, množina S_i se nazývá *prostor strategií hráče i*, prvek $s_i \in S_i$ se nazývá *strategie hráče i* a funkce $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ se nazývá *výplatní funkce hráče i*. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o *zisku*, je-li záporná, hovoříme o *ztrátě*. Jsou-li množiny $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konečné, nazývá se hra (1) *konečná*.

DEFINICE 2. Uspořádaná n-tice strategií $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ se nazývá *rovnovážným bodem hry* (1), právě když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a všechna $s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*). \tag{2}$$

Strategie s_i^* se nazývá *rovnovážná strategie hráče i*.

DEFINICE 3. Uvažujme konečnou hru n hráčů v normálním tvaru. Počet prvků prostoru strategií S_i libovolného hráče i označme symbolem m_i. *Smíšenou strategií* hráče i se rozumí vektor pravděpodobností

$$\boldsymbol{p}^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_{m_i}^i), \tag{3}$$

$$\text{kde} \quad p_j^i \geq 0 \quad \text{pro všechna} \quad 1 \leq j \leq m_i, \qquad \sum_{j=1}^{m_i} p_j^i = 1.$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož j-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí j-tou strategii ze svého prostoru strategií. Prvky prostoru strategií S_i se pro odlišení nazývají *ryzí strategie*.

VĚTA 1 (J. NASH). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra v normálním tvaru alespoň jeden rovnovážný bod.*

2. Prehistorie

Ačkoli je teorie her jako samostatná vědní disciplína velmi mladá, její kořeny sahají do daleké minulosti a její základní myšlenky se formovaly po tisíciletí. Od počátku své existence člověk jako inteligentní bytost řeší den co den problémy, jejichž výsledky závisejí nejen na jeho vlastním rozhodnutí a chování, popř. na dalších více či méně předvídatelných jevech nezávislých na rozhodnutí kohokoli jiného, ale také na rozhodnutích dalších inteligentních bytostí. A i když k tomu nepoužívá žádnou teorii, přece jen musí za rozličných okolností analyzovat situaci, v níž se ocitl, a strategie, které má k dispozici, stejně jako možné strategie protivníka či protivníků, a ze všech strategií se musí rozhodnout pro co nejvhodnější. Úvahy, které k tomu používá, se nakonec staly základním pilířem teorie her.

Z celé „prehistorie" uveďme jen několik nejzajímavějších příkladů, kdy řešení jistého problému odpovídá dnešnímu řešení prostředky teorie her.

2.1. Talmud

Připomeňme, že jedním ze základů židovské kultury, práva a náboženství je *Mišna* (*opakování, učení*). Její autor, RABI JEHUDA HA-NASI (135–217) z galilejského města Uša v ní shrnul do té doby převážně ústně tradované pobiblické náboženské právo v ucelenou sbírku. Mišna se pak stala předmětem studia dalších generací učenců; výsledkem jejich činnosti bylo vytvoření *Gemary* (*doplnění*), rozsáhlého komentáře obsahujícího diskuse a polemiky jednotlivých učenců, jejich žáků a škol. Tyto Gemary vznikly dvě: na izraelské půdě a v Babylonii. Soubor Mišny a Gemary se nazývá *Talmud* a podle místa vzniku se rozlišuje *Talmud jeruzalémský* či *palestinský*, který byl dokončen v polovině čtvrtého století,[1] a *Talmud babylonský*, jehož konečnou redakci provedl RABI AŠI (†427) a jeho žáci.[2]

Mišna se člení do šesti oddílů, z nichž pro naše potřeby je nejzajímavější oddíl třetí zvaný *Náším* (*Ženy*), který je tvořen sedmi traktáty; druhý z nich se nazývá *K'tubot*(*Svatební úpisy*) a řeší kromě jiného otázky spojené se svatební smlouvou včetně obnosu, kterým se muž ženě zavazuje pro případ rozvodu nebo své smrti. V traktátu Náším lze nalézt mimořádně zajímavé řešení následujícího problému:[3]

Zemře muž, který po sobě zanechá tři vdovy, z nichž každá měla ve

[1]Svatá země se v té době ocitla pod vládou křesťanských byzantských císařů a hlavní centrum židovského života se přesouvalo do Babylonie; jeruzalémský Talmud se proto nezachoval v takové úplnosti jako dále zmíněný Talmud babylonský.

[2]Talmud babylonský vznikal v příznivějších podmínkách; židovské obce v Babylonii byly obdařeny značnou autonomií a těšily se plným právům.

Podrobnější informace lze nalézt například v monografii [43].

[3]Viz [39], str. 400.

svatební smlouvě stanovenou částku, kterou dostane v případě manželova úmrtí: první žena má dostat 100, druhá 200 a třetí 300 peněžních jednotek *zuz*. Jak mezi vdovy rozdělit pozůstalost, představuje-li pouze 100, 200 nebo 300 zuz?

Řešení uvedené v traktátu lze shrnout do tabulky:

Závazek

		100	**200**	**300**
	100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
Pozůstalost	**200**	50	75	75
	300	50	100	150

Poslední řádek tabulky představuje proporcionální rozdělení, které odpovídá tomu, co by bez dlouhých úvah pravděpodobně zvolila většina z nás. Rovné rozdělení v prvním řádku, kdy pozůstalost nepřevýší hodnotu nejnižšího závazku, má také ještě své logické opodstatnění. Prostřední řádek se však dlouho jevil jako tvrdý oříšek. Čtyři různá zdůvodnění celé tabulky podali R. J. Aumann a M. Maschler v pojednání [1] z roku 1985. Jedno je založeno na dnešní teorii her: všechny tři případy uvedené v tabulce přesně odpovídají nukleolům příslušné kooperativní hry. Tři další zdůvodnění jsou založena pouze na principech obsažených v Talmudu a jistě stojí alespoň za krátkou zmínku.

Autoři studují obecnější problém bankrotu, kdy má být zbylá částka E rozdělena mezi n věřitelů s nároky $d_1, d_2, \ldots, d_n$, kde

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n, \quad d_1 + d_2 + \cdots + d_n = D. \tag{4}$$

Řešením problému bankrotu se rozumí n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kde x_i značí částku přidělenou věřiteli i, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = E$.

1. zdůvodnění: *konzistentnost*

V druhém traktátu *Bava m'cija* (*Prostřední brána*) čtvrtého oddílu Mišny zvaného *N'zikín* (*Škody*) je uvedeno následující pravidlo.

BOJ O ODĚV: *Dva* [u soudu] *drží oděv … jeden říká: „celý je můj!“ A druhý říká: „má je polovina!“ … Potom první dostane tři čtvrtiny a druhý jednu čtvrtinu.* ([39], str. 528–529)

Jeden možný výklad uvedeného pravidla podal RABI RAŠI (†1105) v 11. století: druhý přiznává prvnímu jednu polovinu, jde tedy jen o zbývající polovinu a ta je rozdělena rovným dílem.[4]

Přenese-li se tento princip na problém bankrotu se dvěma věřiteli, pak věřitel i přizná věřiteli j částku $(E - d_i)_+ = \max(E - d_i, 0)$ a zbytek se rozdělí rovným dílem; věřitel i tedy obdrží

$$x_i = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_j)_+ \,. \tag{5}$$

Řešení problému bankrotu (4) se nazývá *konzistentní*, je-li pro každé $i \neq j$ dělení částky $x_i + x_j$ předepsané vztahem (5) pro d_i, d_j rovno (x_i, x_j).

Snadno lze ukázat, že tabulka s hodnotami uvedenými v Talmudu je konzistentní. Aumann a Maschler navíc dokázali, že každý problém bankrotu má právě jedno konzistentní řešení, které lze popsat následujícím způsobem. Uvažujme rostoucí hodnotu částky E. Pro $0 \leq E \leq nd_1/2$ je konzistentním řešením rovné rozdělení, kdy každý dostane částku E/n. Jakmile první věřitel obdrží $d_1/2$, přestane se jeho částka zvyšovat a s rostoucí hodnotou E se částka, která je navíc, rozdělí mezi věřitele $2, 3, \ldots, n$, a to až do okamžiku, kdy druhý obdrží $d_2/2$. Při dalším zvyšování částky E se pak bude vše, co je navíc, dělit mezi věřitele $3, 4, \ldots, n$, atd., až každý obdrží právě polovinu svého požadavku. Pro $E > D/2$ probíhá proces zrcadlově, jen se místo „zisku“ x_i uvažuje ztráta $d_i - x_i$.

2. zdůvodnění: *sociální spravedlnost*

Druhé zdůvodnění je založeno na jiném talmudickém principu, který je obsažen v části *Arachín* (*Odhady*): Obecně ten, kdo půjčí, má automaticky retenční právo na nemovité jmění dlužníka. Je-li však cena nemovitosti menší než polovina hodnoty půjčky, dlužník s ní může v určitých případech volně disponovat.

[4] Jiné zdůvodnění by mohlo znít takto: celkový požadavek je $1\frac{1}{2}$, zatímco cena oděvu je jen 1; ztráta je sdílena rovným dílem.

Na první pohled se nám tento princip může zdát paradoxní, má však svůj hlubší etický a psychologický základ. Je-li totiž cena nemovitosti větší než polovina hodnoty půjčky, je retenční právo důležité a věřitel díky němu získá většinu poskytnutých peněz zpět. Je-li však cena nemovitosti menší než polovina půjčky, právo na ni stejně nehraje velkou roli; půjčka byla pravděpodobně poskytnuta na základě důvěry a bylo by nemorální převzít do vlastnictví nemovitost od člověka, který přijal půjčku v dobré víře. Princip zároveň ilustruje myšlenku, která je pro Talmud typická a kterou lze zjednodušeně zformulovat takto: *„Více než polovina je jako vše, méně než polovina je jako nic.“* Polovina zde představuje významný mezník: máme-li dostat více než jednu polovinu dluhu, zaměříme se na celou částku a staráme se o velikost ztráty; máme-li dostat méně než polovinu, v duchu dluh odepíšeme úplně a jsme pak vděčni za cokoli, co nakonec dostaneme – soustředíme se na „odměnu“. Bylo by tedy sociálně nespravedlivé, kdyby byli různí věřitelé na různých stranách tohoto předělu, tj. aby jeden dostal většinu svého nároku, zatímco jiný by většinu ztratil. Pro $E \leq D/2$ jsou proto zisky opět děleny rovným dílem, jakmile však u některého věřitele přidělená částka přesáhne jednu polovinu jeho požadavku, dostane pouze tuto polovinu a vše, co je navíc, se rozdělí mezi ostatní; pro $E > D/2$ se při dodržení stejných podmínek dělí rovným dílem ztráty.

3. zdůvodnění: *tvorba koalic*

Třetí zdůvodnění vychází z komentáře uvedeného v Jeruzalémském Talmudu:

Samuel říká, že Mišna vychází z toho, že se vdovy navzájem posilují, konkrétně, třetí se spojí s druhou při jednání s první. Mohou jí říci: „Tvůj požadavek je 100, že? Vezmi si 50 a jdi.“ ([1], str. 3)

Druhé dvě ženy tak vytvoří koalici proti první; po vyplacení 50 jednotek si zbytek rozdělí na základě principu (5). Pro $E = 200$ tak získáme rozdělení $(50, 75, 75)$, pro $E = 300$ obdržíme $(50, 100, 150)$. Tento princip ovšem funguje jen pro $150 \leq E \leq 450$, neboť pro $E < 150$ by nebylo zachováno uspořádání a pro $E > 450$ by první žena nesla větší ztrátu než druhé dvě.[5] Konzistentní řešení pak vypadá takto: Pro $0 \leq E < 3d_1/2$ se pozůstalost dělí na rovné díly, pro $3d_1/2 \leq E \leq D - 3d_1/2$ probíhá rozdělení na základě výše uvedeného koaličního principu, pro $D - 3d_1/2 < E \leq D$ se dělí ztráty na rovné díly. Tento postup lze indukcí zobecnit na n věřitelů a lze dokázat, že koaliční proces vede ke konzistentnímu řešení pro všechny problémy bankrotu.

[5] Například pro $E = 100$ bychom obdrželi $(50, 25, 25)$, pro $E = 500$ by vyšlo $(50, 175, 275)$.

4. zdůvodnění: *teorie kooperativních her*

Poslední zdůvodnění je založeno na současné teorii kooperativních her a je zajímavé tím, že ukazuje, že dnešní matematické řešení vede ke stejnému výsledku jako výše naznačené filozofické či etické úvahy založené na talmudických principech. Základem je sestrojení matematického modelu kooperativní hry, tzv. *hry ve tvaru s charakteristickou funkcí*,[6] a nalezení *nukleolu* této hry, který představuje jeden z možných pojmů řešení.[7] Aumann a Maschler dokázali, že každé rozdělení uvedené v Talmudu se přesně shoduje s nukleolem příslušné kooperativní hry.

2.2. Korespondence Blaise Pascala a Pierre de Fermata

Jak je patrné z úvodu, jedním z pilířů teorie her je pojem *smíšená strategie* (viz definici 3 a následující větu 1) založený na pojmu *pravděpodobnost*, bez něhož by se teorie her nemohla dostat k téměř žádným zajímavým výsledkům. O skutečné *prehistorii* teorie her lze proto hovořit až v souvislosti se vznikem počtu pravděpodobnosti, za který je zpravidla pokládána korespondence, kterou spolu vedli BLAISE PASCAL (1623–1662) a PIERRE DE FERMAT (1607–1665) v roce 1654.[8]

2.3. Le Her – první výskyt smíšených strategií

První výskyt řešení hry ve *smíšených strategiích* je spojen s karetní hrou *le Her* a se jménem JAMESE WALDEGRAVA (1684–1741).

Povšimněme si nejprve samotné hry. *Le Her* hrají dva hráči – označme je Petr a Pavel. Petr drží obvyklý balíček 52 karet s hodnotami A, 2, 3, ...,10, J, Q, K a náhodně rozdá jednu kartu Pavlovi a jednu sobě.

---

[6]Připomeňme, že tento model sestává z množiny hráčů $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ a tzv. *charakteristické funkce*, tj. reálné funkce v definované na množině všech koalic, neboli všech podmnožin množiny Q, splňující podmínky 1.–3. ze strany 91.

V našem případě je charakteristická funkce pro libovolnou koalici $K \subseteq Q$ dána vztahem: $v_{E;d}(K) = (E - d(Q \setminus K))_+$, kde $d(Q \setminus K)$ značí celkový požadavek členů koalice $Q \setminus K$.

[7]Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je libovolná imputace (viz str. 91), $K \subseteq Q$ libovolná koalice. Číslo $e(K, \boldsymbol{a}) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$ se nazývá *exces koalice K vzhledem k imputaci* $\boldsymbol{a}$. Označme symbolem $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ vektor o $2^N - 1$ složkách, který je tvořen excesy všech koalic vzhledem k $\boldsymbol{a}$. Uspořádejme jeho složky sestupně podle velikosti a takto vzniklý vektor označme jako $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Každé imputaci $\boldsymbol{a}$ tímto způsobem přiřaďme vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ a na množině $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{a}$ je imputace$\}$ uvažujme lexikografické uspořádání. *Nukleolem hry* se nazývá taková imputace $\boldsymbol{x}$, pro kterou platí: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq_{(\text{lex})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ pro všechny imputace $\boldsymbol{a}$. Podrobněji viz např. [27].

[8]Počátky počtu pravděpodobnosti jsou podrobně popsány v knížce [23] K. Mačáka.

Cílem hry je mít vyšší kartu než protivník. Pravidla hry jsou následující. Je-li Pavel nespokojen, smí přimět Petra k tomu, aby si s ním kartu vyměnil; má-li však Petr krále, měnit nemusí a vyhrává. Je-li následně Petr nespokojen, smí si vyměnit náhodně z balíčku; pokud by však novou kartou byl král, musí si ponechat kartu původní a tedy prohrává. Mají-li oba stejné karty, vyhrává Petr.

Pavlovy strategie lze znázornit jako uspořádanou 13-tici, jejíž i-tá složka udává, zda si má kartu o hodnotě i ponechat, či ji vyměnit, například:

$$(M, D, M, D, D, D, D, M, M, D, D, M, M),$$

kde M značí *měnit* a D *držet*. Teoreticky má Pavel celkem 2^{13} ryzích strategií; samozřejmě jen některé si zasluhují větší pozornost.

Byl-li Petr donucen Pavlem k výměně, ví přesně, jaké karty jsou rozdány a jeho rozhodování je jasné: získal-li výměnou vyšší kartu, ponechá si ji a zvítězí, získal-li kartu nižší, vymění ji za novou z balíčku. Jediná situace, kdy se Petr musí rozhodovat, zda měnit či nikoli, proto nastává v případě, že Pavel si kartu, která mu byla rozdána, ponechává. V tomto okamžiku má stejně jako Pavel na výběr celkem 2^{13} ryzích strategií.

Ohodnoťme vítězství číslem 1 a prohru číslem 0. Dostaneme tak hru dvou hráčů, kterou lze znázornit maticí typu $2^{13} \times 2^{13}$, jejíž prvky pro každou dvojici strategií Pavla a Petra udávají pravděpodobnost výhry jednoho z nich, například Pavla. Pro ilustraci uvažujme dvojici strategií

$$\begin{aligned} \text{Pavel:} \quad & (M, M, M, M, M, M, D, D, D, D, D, D, D), \\ \text{Petr:} \quad & (M, M, M, M, M, M, M, D, D, D, D, D, D). \end{aligned}$$

Odpovídající prvek matice, neboli očekávanou hodnotu Pavlovy výhry (v tomto případě zároveň pravděpodobnost Pavlovy výhry), získáme následujícím způsobem. Pro každé ze 169 možných rozdání karet lze určit pravděpodobnost, s níž v dané situaci Pavel zvítězí, a tyto pravděpodobnosti lze uspořádat do matice:[9]

[9]Uvědomme si, že například na pozici $(5, 3)$ je v matici číslo 0, neboť Pavel na základě své strategie kartu o hodnotě 5 vymění s Petrem za kartu o hodnotě 3; Petr po výměně ví, že drží vyšší kartu, ponechá si ji a zvítězí. Podobně pro dvojici $(10, 9)$: oba si podle svých strategií kartu ponechají a Pavel s vyšší kartou zvítězí. Hodnotu na pozici $(2, 6)$ lze nalézt takto: Pavel bude měnit s Petrem, který výměnou získá kartu nižší než protivník a následně bude měnit z balíčku; pravděpodobnost, že vylosuje kartu nižší než 6 nebo krále, kterého si nesmí vzít, je rovna $23/50 = 0,46$. Podobně lze postupovat v ostatních případech.

		Petr												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
	1	0	0,14	0,22	0,30	0,38	0,46	0,54	0,62	0,70	0,78	0,86	0,94	0
	2	0	0	0,22	0,30	0,38	0,46	0,54	0,62	0,70	0,78	0,86	0,94	0
	3	0	0	0	0,30	0,38	0,46	0,54	0,62	0,70	0,78	0,86	0,94	0
	4	0	0	0	0	0,38	0,46	0,54	0,62	0,70	0,78	0,86	0,94	0
	5	0	0	0	0	0	0,46	0,54	0,62	0,70	0,78	0,86	0,94	0
	6	0	0	0	0	0	0	0,54	0,62	0,70	0,78	0,86	0,94	0
Pavel	7	0,54	0,54	0,54	0,54	0,54	0,54	0,48	0	0	0	0	0	0
	8	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0	0	0	0	0	0
	9	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	1	0	0	0	0	0
	10	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	1	1	0	0	0	0
	J	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	1	1	1	0	0	0
	Q	0,94	0,94	0,94	0,94	0,94	0,94	0,94	1	1	1	1	0	0
	K	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Vynásobíme-li každý prvek a_{ij} uvedené matice pravděpodobností, s níž bude daná dvojice (i, j) rozdána, a tyto hodnoty sečeteme, obdržíme očekávanou hodnotu Pavlovy výhry při výše uvedených strategiích, a to $\frac{2628}{5525}$.[10]

Lze dokázat, že každá ryzí strategie každého z hráčů je dominována jistou strategií tvaru $(M, M, \ldots, M, D, D, \ldots, D)$, a všechny tyto strategie jsou dominovány jednou ze dvou strategií: pro Pavla *„drž 7 a vyšší“* nebo *„měň 7 a nižší“*, pro Petra *„drž 8 a vyšší“* nebo *„měň 8 a nižší“*.[11]

Původní matice $2^{13} \times 2^{13}$ se tak zredukuje na matici 2×2 :

[10] Pro $i = j$ je pravděpodobnost, že budou rozdány karty (i, j), rovna $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$; pro $i \neq j$ je příslušná pravděpodobnost rovna $\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}$.

[11] Připomeňme, že o strategii s_i prvního hráče se řekne, že *dominuje* strategii s_j, je-li pro každou strategii t protivníka $u_1(s_i, t) \geq u_1(s_j, t)$, kde u_1 je výplatní funkce prvního hráče. Analogicky pro druhého hráče.

		Petr	
		„drž 8 a vyšší“	*„měň 8 a nižší“*
Pavel	*„drž 7 a vyšší“*	$\frac{2828}{5525}$	$\frac{2838}{5525}$
	„měň 7 a nižší“	$\frac{2834}{5525}$	$\frac{2828}{5525}$

Označíme-li symbolem p pravděpodobnost, že Pavel zvolí strategii *„drž 7 a vyšší“*, a symbolem q pravděpodobnost, že Petr zvolí strategii *„drž 8 a vyšší“*, pak očekávaná hodnota $\pi(p,q)$ Pavlovy výhry je

$$\frac{2828pq + 2838p(1-q) + 2834(1-p)q + 2828(1-p)(1-q)}{5525}. \tag{6}$$

Prostředky teorie her se snadno odvodí, že rovnovážné smíšené strategie jsou $(3/8, 5/8)$ pro Pavla a $(5/8, 3/8)$ pro Petra.[12]

Hrou *le Her* se ve své vzájemné korespondenci z roku 1713 zabývali PIERRE-RÉMOND DE MONTMORT (1678–1719) a MIKULÁŠ BERNOULLI (1687–1759). Věděli, že Pavel má měnit každou kartu nižší než sedm a držet každou kartu vyšší než sedm a Petr má měnit každou kartu nižší než osm a držet každou kartu vyšší než osm. Nebylo však jasné, jak se hráči mají zachovat v mezních případech. Bernoulli se domníval, že by oba hráči měli měnit, Montmort tvrdil, že není možné určit žádné pravidlo.[13] Montmort rovněž dospěl k předpisu pro očekávanou hodnotu výhry, který odpovídá výrazu (6), kde $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{c}{c+d}$:

$$\frac{2828ac + 2834bc + 2838ad + 2828bd}{13 \cdot 17 \cdot 25(a+b)(c+d)}. \tag{7}$$

Dne 13. listopadu 1713 popsal de Montmort v dopise Mikuláši Bernoullimu řešení, které právě obdržel v listu od JAMESE WALDEGRAVA (1684–1741):

... *pro* $a = 3$ *a* $b = 5$ *je Pavlova* [očekávaná] *výhra vždy* $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \times 4}$, *bez ohledu na to, jakých hodnot nabývají c a d. Jeho výhra je tedy vždy* $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \times 4}$, *ať už Petr zvolí jakoukoli strategii, dostane-li 8 – zda bude*

[12]Stačí si například uvědomit, že mají-li $(p, 1-p)$ a $(q, 1-q)$ být rovnovážné smíšené strategie, musí být $\pi(p,1) = \pi(p,0)$ a $\pi(1,q) = \pi(0,q)$.

[13]Viz [13], str. 15–17.

vždy měnit nebo vždy držet, anebo rozhodnutí ponechá na vylosování jednoho ze střípků zastoupených se stejnou nebo rozdílnou četností.

Pavlova výhra je proto alespoň $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525\times4}$, *neboť k tomu potřebuje jen vzít tři bílé střípky a pět černých a nechat se vést losem ...*

Petr volbou $c = 5$ *a* $d = 3$ *omezí Pavlovu naději na* $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525\times4}$, *zatímco Pavel si stejnou výhru zajistí tím, že položí* $a = 3$ *a* $b = 5$.

([19], str. 7–9)

Řečeno dnešními slovy, Waldegrave poprvé v historii popsal a použil pojem *smíšených rovnovážných* či *minimaxních strategií*:[14] pro každého hráče hledal strategii, která mu zaručí co nejvyšší očekávanou výhru bez ohledu na volbu protivníka, a dospěl k závěru, že Pavel má zvolit strategii *„drž 7 a vyšší"* s pravděpodobností 3/8 a strategii *„měň 7 a nižší"* s pravděpodobností 5/8, Petr má zvolit strategii *„drž 8 a vyšší"* s pravděpodobností 5/8 a strategii *„měň 8 a nižší"* s pravděpodobností 3/8. Bohužel, Waldegrave uvedený postup nikterak nezobecnil, ani jej nepoužil k řešení žádné jiné hry.

De Montmort sice zmíněnou korespondenci včetně dopisu s Waldegravovým řešením zveřejnil jako dodatek k druhému vydání knihy [26], Waldegravovo řešení však zůstalo velmi dlouho téměř bez povšimnutí.[15] Jedinou známou výjimkou je Isaac Todhunter, který je popsal v monografii [44] (str. 106–110); tato kniha však byla pravděpodobně daleko více známa a citována než skutečně čtena a Waldegravovým smíšeným strategiím se nedostalo pozornosti ani jejím prostřednictvím. Slovy Roberta a Mary Ann Dimandových:

Kdyby byl Todhunter temperamentnějším spisovatelem, odborníci na teorii pravděpodobnosti by možná o minimaxních řešeních strategických her a o teorii voleb uvažovali již ke konci devatenáctého století.

([13], str. 18)

2.4. Daniel Bernoulli a počátky teorie užitku

Nedílnou součástí teorie her je *teorie užitku*, která je nezbytná k zavedení *výplatní funkce*, neboli k ohodnocení výsledků různých situací, které v dané hře mohou nastat. První prací, již lze označit za studii teorie užitku, je esej DANIELA BERNOULLIHO (1700–1782):[16] *Výklad nové*

[14]Viz definici 2 a poznámku 26.

[15]Tento dodatek přitom proslul dopisem od Mikuláše Bernoulliho, v němž byl zformulován tzv. *petrohradský paradox*.

[16]Daniel Bernoulli byl bratranec Mikuláše Bernoulliho, o němž se hovořilo v předchozí části.

teorie ohodnocení risku [4], která byla publikována v roce 1838.[17]

Jednou z pozoruhodných a ve své době nových myšlenek byla ta, že risk by neměl být hodnocen podle střední hodnoty finančního zisku (což ostatně ani vždy nelze), ale spíše podle *střední hodnoty užitku*, který tento zisk přinese. Pro ilustraci Bernoulli uvádí následující příklad:

Velmi chudý člověk nějakým způsobem získá los, který se stejnou pravděpodobností přinese výhru dvaceti tisíc dukátů nebo nic. Ocení tento muž svou šanci na vítězství na deset tisíc dukátů? Neprodá neuváženě tento los za devět tisíc dukátů? Mně osobně se zdá, že odpověď je záporná. Na druhou stranu mám sklon věřit, že bohatý muž koupi tohoto losu za devět tisíc dukátů neuváženě odmítne. Pokud se nemýlým, pak je jasné, že při hodnocení hry nemohou všichni lidé používat stejné pravidlo. ... Není pochyb, že zisk tisíce dukátů je mnohem významnější pro žebráka než pro bohatého člověka, i když oba získají stejnou částku.

([4], v přetisku str. 15–16)

Bernoulli vyjádřil *užitek* jako funkci $u(x)$ udávající počet jednotek užitku z vlastnictví peněžní částky x. Předpokládal, že při zvětšení částky x na $x+dx$ je přírůstek užitku $du(x)$ přímo úměrný přírůstku dx a nepřímo úměrný částce x,

$$du(x) = \frac{bdx}{x}, \qquad \text{kde } b > 0 \text{ je jistá konstanta úměrnosti,}$$

a získal řešení

$$u(x) = b \ln \frac{x}{\alpha}, \tag{8}$$

kde α je hodnota počátečního majetku.[18]

Takto zavedenou funkci užitku Bernoulli použil k objasnění tzv. *Petrohradského paradoxu*, jehož podstatu lze popsat takto:

Petr hází mincí a pokračuje v tom tak dlouho, dokud nepadne „hlava“. Souhlasí s tím, že dá Pavlovi jeden dukát, padne-li hlava v prvním hodu, dva dukáty, padne-li v druhém, čtyři, padne-li ve třetím, osm, padne-li ve čtvrtém, a tak dále, takže s každým dalším hodem se počet dukátů, které musí zaplatit, zdvojnásobí. Předpokládejme, že se snažíme určit hodnotu

[17]Esej byla vytvořena během Bernoulliho pobytu v Petrohradě v letech 1725–1733.

[18]Míra přesnosti byla ponechána beze změny. Dnes bychom s využitím limitního přechodu sestavili a vyřešili diferenciální rovnici

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{b}{x}, \qquad b > 0.$$

Pavlova očekávání ... Rozumný člověk by s velkým potěšením prodal svou účast ve hře za dvacet dukátů. ([4], v přetisku str. 23)

Střední hodnota výhry je přitom

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2} + \cdots = \infty\,. \quad (9)$$

Paradox spočívá v tom, že člověk dá přednost poměrně skromné částce, i když očekávaná hodnota jeho výhry je nekonečná.

Bernoulli vyšel z předpokladu, že se lidé nerozhodují podle střední hodnoty peněžní výhry, ale podle střední hodnoty *užitku*, který jim tato výhra přinese:

$$\frac{1}{2} b \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha} + \frac{1}{2^2} b \ln \frac{\alpha + 2}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^n} b \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} =$$

$$= b \ln[(\alpha + 1)^{\frac{1}{2}} (\alpha + 2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - b \ln \alpha\,. \quad (10)$$

Částka D, jejíž přidání k počátečnímu majetku přinese stejný užitek, se snadno určí ze vztahu

$$b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} = b \ln[(\alpha + 1)^{\frac{1}{2}} (\alpha + 2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - b \ln \alpha\,,$$

odkud

$$D = [(\alpha + 1)^{\frac{1}{2}} (\alpha + 2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - \alpha\,. \quad (11)$$

S tímto výrazem pak Bernoulli pracoval jako s očekávanou hodnotou užitku ze hry. Pro nulové počáteční jmění je tato hodnota rovna dvěma dukátům:

$$D = \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \cdots = 2\,.$$

Bernoulliho funkce užitku (8) má samozřejmě řadu nedostatků. Předně je definována jen pro kladné hodnoty částky x, zatímco ve skutečnosti se často jedná i o ztráty; u různých lidí je navíc funkce užitku z peněžních částek různá a neodvíjí se jen z majetkových poměrů. Jedná se však o důležitý podnět, od něhož se mohl odrazit další vývoj.

V závěru svého pojednání [4] Daniel Bernoulli upozorňuje na dopis, který již v roce 1728 zaslal GABRIEL CRAMER (1704–1752) Mikuláši Bernoullimu, kde jsou v souvislosti s petrohradským paradoxem popsány velice podobné – avšak nezávislé – úvahy, a uvádí citát z tohoto dopisu. Cramer, stejně jakou Daniel Bernoulli, vyšel z myšlenky, že lidé hodnotí finanční částky podle užitku, který jim přinesou. Dále předpokládal (bez bližšího vysvětlení), že jakákoli částka převyšující 2^{24} dukátů člověku připadá stejná jako částka 2^{24}. Očekávaná hodnota zisku je pak

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\cdots+\frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=12+1=13. \qquad (12)$$

Cramer píše:

Mé morální očekávání je proto redukováno na hodnotu 13 dukátů a ekvivalentní částka, která mi má být vyplacena, je redukována podobně – to je výsledek, který se zdá být mnohem rozumnější než uvažování této částky rovné nekonečnu. ([4], v přetisku str. 25)

2.5. Hledání rovnováhy – Cournotův model duopolu

V roce 1838 publikoval ANTOINE AUGUSTIN COURNOT (1801–1877) monografii *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* [10], v níž kromě jiného diskutoval speciální případ duopolu; v této souvislosti popsal pojem, který odpovídá Nashovu *rovnovážnému bodu* zavedenému o více než sto let později.

V páté kapitole knihy [10] Cournot podal podrobnou analýzu monopolu. Zavedl pojem *nákladová funkce* a matematicky odvodil, jak má výrobce zvolit množství produkce, aby maximalizoval svůj zisk. V následující kapitole vyšetřoval vliv různých forem daní a dalších poplatků a sledoval jejich vliv na příjem výrobce a zákazníků. V kapitole sedmé pak představil dnes slavný model duopolu, který lze popsat následujícím způsobem.

Uvažujme dva výrobce téhož produktu, z nichž každý přispívá nezanedbatelnou částí k celkovému množství výrobků na trhu. Předpokládejme, že poptávková rovnice udávající vztah mezi cenou a celkovým množstvím výrobků, jež je možné při této ceně prodat, má nejjednodušší možný tvar:

$$p+q=M, \qquad M>>c, \qquad (13)$$

kde p je cena výrobku, q je poptávka na trhu po tomto výrobku při ceně p, c jsou náklady na výrobu jednoho kusu, M je konstanta řádově mnohem větší než c. Duopolisté se současně a nezávisle jeden na druhém rozhodují o tom, jaká množství produktů mají vyrábět.

Vyrábí-li daný produkt jediný výrobce – monopolista, je situace jednoduchá. Monopolista ví, že vyrobí-li q výrobků, pak nejvyšší cena, za kterou může prodávat jeden kus, aby celou produkci vyprodal, je dána rovnicí (13). Protože nikdo jiný celkové vyrobené množství neovlivní, stojí monopolista před úlohou pouhé maximalizace zisku, tj. nalezení maxima funkce

$$u(q) = pq - cq = (M - q)q - cq = (M - q - c)q\,. \tag{14}$$

Maximum lze snadno určit pomocí diferenciálního počtu:

$$q^*_{mon} = \tfrac{1}{2}(M - c) \tag{15}$$

Odpovídající maximální zisk a příslušná cena jsou potom dány vztahem:

$$u^*_{mon} = u(q^*_{mon}) = \left[\tfrac{1}{2}(M - c)\right]^2, \qquad p^*_{mon} = \tfrac{1}{2}(M + c)\,. \tag{16}$$

Problém monopolisty spočíval v nalezení maxima jednoduché kvadratické funkce. U duopolu se již jedná o *hru*, neboť každý z duopolistů ovlivňuje jen část celkového vyrobeného množství. Cena, kterou za své výrobky utrží, tedy závisí nejen na jeho vlastním rozhodnutí, ale také na rozhodnutí konkurenta. Duopolisté se v tomto modelu rozhodují současně a nezávisle jeden na druhém.

Cournot hledal optimální množství, která mají jednotliví duopolisté vyrábět, aby ani pro jednoho nebylo výhodné se od tohoto množství odchýlit.

Označme jako q_1, q_2 množství vyráběná prvním a druhým duopolistou. Maximální cena, za kterou se výrobky prodají, je opět určena poptávkovou rovnicí (13):

$$p = M - q_1 - q_2 \tag{17}$$

Zisky duopolistů jsou nyní funkcemi dvou proměnných:

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) &= (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2)q_1\,, \\ u_2(q_1, q_2) &= (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2)q_2\,. \end{aligned} \tag{18}$$

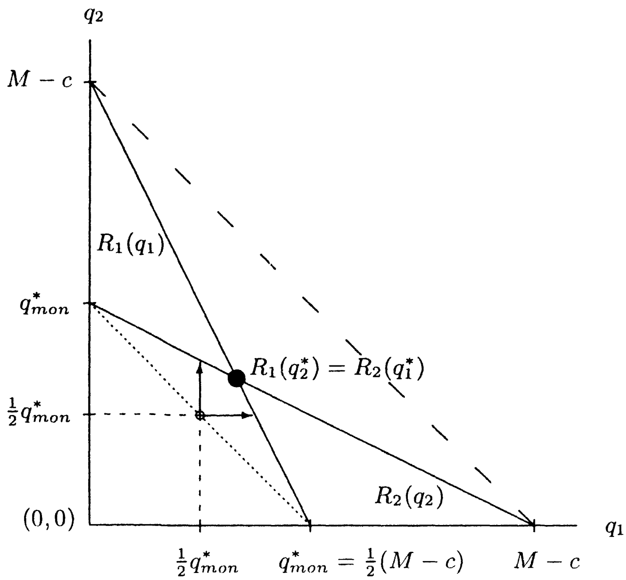
První duopolista hledá funkci, která každé strategii soupeře, to znamená každému množství q_2, přiřadí takové množství $q_1 = R_1(q_2)$, které je na q_2 nejlepší odpovědí v tom smyslu, že hodnota funkce $u_1(q_1, q_2)$ je pro toto q_2 maximální. Jinými slovy, pro každé pevné $q_2 \in S_2$ hledá první duopolista maximum funkce $u_1(q_1, q_2)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = M - c - q_2 - 2q_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad q_1 = R_1(q_2) = \tfrac{1}{2}(M - c - q_2)\,. \tag{19}$$

Podobně druhý duopolista hledá pro každou strategii q_1 nejlepší odpověď $q_2 = R_2(q_1)$, tj. takové množství, které pro dané q_1 maximalizuje jeho zisk $u_2(q_1, q_2)$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = M - c - q_1 - 2q_2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad q_2 = R_2(q_1) = \tfrac{1}{2}(M - c - q_1)\,. \tag{20}$$

Funkce $R_1(q_2)$ a $R_2(q_1)$ se dnes nazývají *reakční křivky*; lze je znázornit graficky:



Řešení Cournot určil jako průsečík reakčních křivek, tj. jako bod, pro který je $R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$:

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\tfrac{1}{3}(M - c), \tfrac{1}{3}(M - c)\right)\,. \tag{21}$$

Příslušné zisky duopolistů a cena, za kterou budou duopolisté prodávat, jsou dány vztahy:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \left[\tfrac{1}{3}(M - c)\right]^2\,, \qquad p = \tfrac{1}{3}M + \tfrac{2}{3}c\,. \tag{22}$$

Cournotovo řešení přesně odpovídá pojmu *rovnovážný bod hry s nekonstantním součtem*, který v roce 1950 zavedl John Nash.

Cournot dále ukázal, jak s rostoucím počtem výrobců roste množství produkce a klesá cena.[19] V následující kapitole potom studoval *neome-*

[19] Analogicky s případem duopolu lze určit zisky jednotlivých oligopolistů:

$$u_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = (p - c)q_i = (M - c - q_1 - q_2 - \cdots - q_n)q_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

zenou soutěž, kde se na celkové produkci podílí velké množství malých firem ($n \to \infty$), které samy o sobě celkové vyráběné množství neovlivní. Toto množství je nyní $M - c$; cena, za níž se výrobky budou prodávat, je rovna přímo výrobním nákladům c a zisk jednotlivých firem je roven nule.

Cournotovy výsledky lze shrnout do následující tabulky:

	Celkové množství q^*	**Cena za kus p^***	**Celkový zisk u^***
Monopol	$\frac{1}{2}(M - c)$	$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M - c)^2$
Duopol	$\frac{2}{3}(M - c)$	$\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M - c)^2$
Oligopol	$\frac{n}{n+1}(M - c)$	$\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M - c)^2$
Dokonalá soutěž	$(M - c)$	c	0

Ve výčtu jednotlivých příkladů, které lze zahrnout do *prehistorie* teorie her, bychom mohli pokračovat ještě poměrně dlouho.[20] Přistupme však již ke „skutečným" počátkům teorie her.

3. Počátky teorie her

3.1. Émile Borel

ÉMILE BOREL (1871–1956) publikoval v letech 1921 až 1927, kdy byl již uznávanou autoritou v oblasti teorie pravděpodobnosti, sérii francouzsky psaných poznámek [6]– [8] věnovaných symetrickým antagonistickým hrám dvou hráčů s konečným počtem n možných strategií.[21] Borel se jako první pokusil o matematizaci pojmu *strategická hra* (i když

Z podmínek

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = M - c - q_1 - q_2 - \cdots - 2q_i - \cdots - q_n = 0$$

se pak určí rovnovážný bod:

$$q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^* = \frac{M - c}{n + 1}.$$

[20] Přehled těchto příkladů lze nalézt například v pojednání [13] nebo na internetové adrese *http://william-king.www.drexel.edu/top/class/histf.html.*

[21] V definici 1 je tedy $S_1 = S_2 = S = \{s_1, \ldots, s_n\}$; $u_1(s_i, s_j) = -u_2(s_i, s_j) = u_2(s_j, s_i)$ pro každé $s_i, s_j \in S$. Hru je možné popsat pomocí matice (a_{ij}) udávající hodnoty výplatní funkce prvního hráče pro všechny dvojice strategií, tj. $a_{ij} = u_1(s_i, s_j)$, $s_i, s_j \in S$.

v uvedeném speciálním případě) a zavedl pojem *metoda hry* odpovídající dnešnímu pojmu *ryzí strategie*. Borel vyšetřoval pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů, které jsou při volbě strategií (s_i, s_j) dány vztahy:

$$\begin{gathered}\pi_1(s_i,s_j)=\tfrac{1}{2}+\alpha_{ij}, \qquad \pi_2(s_i,s_j)=\tfrac{1}{2}+\alpha_{ji},\\ \text{kde}\quad \alpha_{ij}+\alpha_{ji}=0, \quad \alpha_{ii}=0, \quad \alpha_{ij},\alpha_{ji}\in\langle -\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle .\end{gathered} \tag{23}$$

Borel předpokládal, že každý hráč se snaží maximalizovat pravděpodobnost své výhry, a snažil se nalézt *nejlepší metodu hry*. Vzhledem k symetrii přitom stačí sledovat jen strategie prvního hráče. Jako *špatnou* Borel eliminoval každou strategii s_i, pro kterou existuje taková strategie s_k, že

$$\alpha_{ij}\le\alpha_{kj} \quad \text{pro všechna } j=1,2,\ldots,n\,. \tag{24}$$

Za *nejlepší* Borel považoval strategii s_i, pro kterou

$$\alpha_{ij}\ge 0 \quad \text{pro všechna } j=1,2,\ldots,n. \tag{25}$$

Taková strategie však nemusí vždy existovat; proto Borel uvažoval rovněž *smíšené strategie* $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$, $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ udávající rozložení pravděpodobností, s nimiž hráči volí své ryzí strategie (viz definici 3). Pravděpodobnost výhry prvního hráče je nyní

$$\pi_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\tfrac{1}{2}+\alpha, \quad \text{kde} \quad \alpha=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}p_iq_j\,.$$

Pro $n=3$ Borel dokázal, že existuje taková smíšená strategie $\boldsymbol{p}$ prvního hráče, že pro každou smíšenou strategii $\boldsymbol{q}$ protivníka je $\alpha=0$; podobně pro druhého hráče. Později, při hledání protipříkladu, totéž dokázal i pro $n=5$, stále se však domníval, že pro libovolné $n>7$ strategie s uvedenými vlastnostmi není možné nalézt.[22] V pojednání [8] z roku 1927 sice problém formuloval pozitivně, důkaz však nepodal.

Když pak v roce 1928, podle svých slov nezávisle na Borelových pracích, existenci řešení libovolné antagonistické hry dvou hráčů s konečnými prostory strategií dokázal John von Neumann, Borel se tématem přestal zabývat; v práci [9] pak studoval hry se spojitými prostory strategií.

Borelovy práce o strategických hrách zůstaly mimo Francii dlouho téměř neznámé. Teprve poté, co tři z nich, [6]–[8], vyšly roku 1953 v anglickém překladu v časopise *Econometrica* spolu s předmluvou M.

[22] V případě $n=7$ se domníval, že tyto strategie vždy existují.

Frécheta, začalo se o nich diskutovat. Předmětem diskusí a sporů se stala i otázka prvenství: kdo by měl být považován za zakladatele matematické teorie her? Émile Borel, který na jedné straně jako první studoval pojem *strategická hra* v obecnějším smyslu, na straně druhé však nedospěl k základnímu výsledku o řešitelnosti a jeho práce neovlivnily další vývoj teorie, anebo John von Neumann, jehož první práce sice byla publikována o několik let později, zato se však díky své ucelené podobě, přesně vymezeným pojmům a důkazu tzv. *základní věty maticových her* stala skutečným stimulem pro další vývoj teorie? Většina odborníků se shodne na jménu Johna von Neumanna, který navíc posléze položil základy teorie her jako samostatné matematické disciplíny a zasloužil se o rozšíření jejích aplikací do dalších oborů.

3.2. John von Neumann

Jak bylo zmíněno výše, za skutečný mezník ve vývoji teorie her je všeobecně považován článek *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* [36] JOHNA VON NEUMANNA (1903–1957), který byl publikován v Mathematische Annalen v roce 1928. Krátce předtím von Neumann předložil sdělení obsahující hlavní výsledky článku Borelovi, který je prezentoval v pařížské Akademii; sdělení [35] bylo otištěno v Comptes Rendus v květnu roku 1928.[23] O svých výsledcích von Neumann rovněž přednášel v Göttingenské matematické společnosti v roce 1926.

Hlavní přínosy von Neumannovy práce [36] jsou dva: matematizace strategických her a důkaz základní věty maticových her.

Článek jsme začínali citátem ilustrujícím šíři von Neumannova pojetí *hry*. Za zmínku stojí i kvalitativní popis tohoto pojmu zúženého na konečnou hru s nulovým součtem:

Hra se skládá z určité řady událostí, z nichž každá může mít konečný počet výsledků. V některých případech výsledek závisí na náhodě, tj. jsou známy pravděpodobnosti, s nimiž každý z možných výsledků nastane, ale žádný z hráčů je nemůže ovlivnit. Všechny ostatní události závisejí jen na svobodném rozhodnutí hráčů $S_1, S_2, \ldots, S_n$. *Jinými slovy, pro každou z těchto událostí je známo, který hráč* S_m *určuje její výsledek a jaký je stav jeho informovanosti o výsledcích jiných událostí v době, kdy činí své rozhodnutí. Poté, co jsou známy výsledky všech událostí, je možné*

[23] V poznámce pod čarou zde von Neumann uvádí, že svou teorii vytvořil nezávisle na Borelových pracích, na něž byl upozorněn až těsně před odevzdáním pojednání [36] k publikaci.

určit podle pevného pravidla, jakou výplatu si musí hráči $S_1, S_2, \ldots, S_n$ navzájem vyplatit. ([36], str. 296)

John von Neumann nejprve sestrojil matematický model popisující výše vymezenou hru, v němž se vyskytuje velké množství proměnných, z nichž některé představují náhodné veličiny, jiné jsou kontrolovány některým z hráčů. Prvním krokem, který umožnil model podstatně zjednodušit, bylo zavedení pojmu *strategie hráče* S_m jako úplného plánu, podle něhož se hráč bude chovat v jakékoli myslitelné budoucí situaci ve hře; hráč S_m má konečný počet strategií $1, 2, \ldots, \Sigma_m$. Náhodné události pak von Neumann eliminoval tak, že přesné hodnoty výplat nahradil hodnotami *očekávanými*. Tak postupně dospěl k definici, která přesně odpovídá dnešní definici *hry n hráčů v normálním tvaru s konečnými prostory strategií a s nulovým součtem*:

Každý z hráčů $S_1, S_2, \ldots, S_n$ volí číslo bez jakékoli informace o volbách ostatních. S_m vybírá z čísel $1, 2, \ldots, \Sigma_m$. Poté, co hráči zvolí $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $x_m \in \{1, 2, \ldots, \Sigma_m\}$, obdrží částky

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\; g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\; \ldots,\; g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kde $g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0.$ ([36], str. 301–302)

Další teorii von Neumann odvodil jen pro speciální případ, kdy ve hře vystupují dva hráči, S_1, S_2. První hráč nyní volí číslo (strategii) $x \in \{1, 2, \ldots, \Sigma_1\}$, druhý volí $y \in \{1, 2, \ldots, \Sigma_2\}$; po skončení hry pak obdrží $g(x, y)$, $-g(x, y)$.

Uvědomme si, že situaci lze znázornit pomocí matice udávající výhry prvního hráče:

$$\begin{pmatrix} g(1,1) & g(1,2) & \cdots & g(1,\Sigma_2) \\ g(2,1) & g(2,2) & \cdots & g(2,\Sigma_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(\Sigma_1,1) & g(\Sigma_1,2) & \cdots & g(\Sigma_1,\Sigma_2) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Z toho důvodu se v tomto případě hovoří o tzv. *maticových hrách.*

Základní myšlenka, na níž je založeno hledání optimálních strategií, je následující: při výběru své strategie první hráč vždy počítá s tím, že protivník zvolí pro něj tu nejhorší strategii, a snaží se maximalizovat svou zaručenou výhru. V každém řádku tedy uvažuje nejmenší hodnotu, $\min_y g(x, y)$, která pro danou strategii udává minimální zaručenou výhru, a pak vybere řádek, v němž je tato minimální hodnota největší, tj.

nalezne $\max_x \min_y g(x,y)$. Podobně druhý hráč hledá $\min_y \max_x g(x,y)$. Existuje-li dvojice strategií (x_0, y_0), pro něž je

$$g(x_0, y_0) = \max_x \min_y g(x,y) = \min_y \max_x g(x,y), \tag{27}$$

pak (x_0, y_0) představuje *řešení hry*.[24] Bohužel, jak známo, uvedená dvojice strategií nemusí vždy existovat.[25] Obecně je

$$\max_x \min_y g(x,y) \le \min_y \max_x g(x,y). \tag{28}$$

Tento problém von Neumann odstranil zavedením *smíšených strategií*

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{\Sigma_1}), \qquad \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{\Sigma_2})$$

ve smyslu definice 3 a uvažováním očekávané výhry:

$$h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{\Sigma_1} \sum_{j=1}^{\Sigma_2} g(i,j) p_i q_j\,. \tag{29}$$

Analogicky s předchozím postupem pak lze určit minimální očekávanou hodnotu výhry prvního hráče,

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q});$$

druhý hráč může zároveň držet výplatu prvního hráče tak, aby nepřesáhla

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Nejdůležitějším výsledkem von Neumannova pojednání [36] je důkaz věty, která bývá označována jako *základní věta teorie maticových her* či *věta o minimaxu*:

---

[24] Připomeňme, že $g(x_0, y_0)$ se v tomto případě nazývá *sedlový prvek matice*; například:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & \boxed{4} & 5 \\ -4 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

[25] Například pro matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je} \quad -1 = \max_x \min_y g(x,y) \ne \min_y \max_x g(x,y) = 1.$$

VĚTA 2 (VON NEUMANN). Pro každou maticovou hru existují smíšené strategie $(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$,[26] pro které je

$$h(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0) = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = M. \qquad (30)$$

Symetrické hry dvou hráčů, které studoval Borel, jsou zřejmě speciálním případem her vyšetřovaných von Neumannem, kde $\Sigma_1 = \Sigma_2$; $h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = -h(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$. Snadno se ukáže, že ve vztahu (30) je nyní $M = 0$;[27] hry s touto vlastností von Neumann nazýval *spravedlivými.*

V roce 1932 John von Neumann přednášel na semináři v Princetonu o matematickém modelu ekonomiky, která roste s neměnnou strukturou; na podnět Karla Mengera své výsledky publikoval v článku [37] otištěném roku 1937.

4. Teorie her jako matematická disciplína

4.1. John von Neumann a Oskar Morgenstern

Dalším významným mezníkem ve vývoji teorie her bylo vydání rozsáhlé monografie *Theory of Games and Economic Behavior* [38] z roku 1944, jež byla výsledkem plodné spolupráce Johna von Neumanna s ekonomem OSKAREM MORGENSTERNEM (1902–1976) a která znamenala zrod teorie her jako samostatné matematické disciplíny. Autoři zde kromě obsáhlého teoretického výkladu jasně ukázali možnost využití herněteoretických modelů v oblasti modelování ekonomických rozhodovacích situací a tím podnítili mimořádně široké rozšíření teorie her do ekonomie, kde také postupně zakotvila a stala se její nedílnou součástí.

Úvodní kapitola monografie je věnována zevrubné *formulaci ekonomického problému* a jejím hlavním cílem je pravděpodobně přesvědčit čtenáře z řad širší veřejnosti o významu a použitelnosti předložené teorie. Součástí této kapitoly je i axiomatický výklad teorie užitku: autoři uvažují množinu $U = \{u, v, w, \dots\}$, na níž je dána relace "$>$" a pro libovolné reálné číslo α, $0 < \alpha < 1$, je dána operace $\alpha u + (1 - \alpha)v = w$. O prvcích množiny U se řekne, že vyjadřují *užitek*, jsou-li pro všechna $u, v, w \in U$ a všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ splněny následující axiomy:

(A) "$>$" je úplné uspořádání na množině U;

[26] Tyto strategie zřejmě splňují podmínku (2) z definice 2 pro rovnovážné strategie; vzhledem k (30) se také často nazývají *minimaxní.*

[27] Zřejmě platí: $-M = -\max_p \min_q h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_p \max_q(-h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})) =$

$$= \min_p \max_q h(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \min_q \max_p h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = M.$$

(B) je-li $u < v$,[28] resp. $u > v$,
pak $u < \alpha u + (1-\alpha)v$, resp. $u > \alpha u + (1-\alpha)v$;
je-li $u < w < v$ pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, pro které je $\delta u + (1-\delta)v < w$;
je-li $u > w > v$ pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, pro které je $\delta u + (1-\delta)v > w$;

(C) $\alpha u + (1-\alpha)v = (1-\alpha)v + \alpha u$;
$\alpha(\beta u + (1-\beta)v) + (1-\alpha)v = \gamma u + (1-\gamma)v$, kde $\gamma = \alpha\beta$.

V následující kapitole se von Neumann a Morgenstern věnují obecnému formálnímu popisu strategické hry. Potom podávají výklad teorie nekooperativních her dvou hráčů s nulovým součtem a konečnými prostory strategií, který doplňují řadou příkladů.

V dalším přecházejí k hrám více hráčů s nulovým součtem, které chápou v kooperativním smyslu: hráči mohou tvořit koalice, jejichž členové navzájem spolupracují a v závěru si mohou přerozdělit výhru. Uvažujme opět množinu hráčů $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Koalicí* se rozumí libovolná podmnožina $K \subseteq Q$. Autoři zavádějí pojem *imputace* jako vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, jehož i-tá složka udává částku, kterou po skončení hry obdrží hráč i, a pojem *charakteristické funkce*, která pro každou koalici $K \subseteq Q$ udává hodnotu, již jsou pro sebe členové koalice K společně schopni zajistit bez spolupráce s hráči z množiny $Q \setminus K$. Přesněji, charakteristická funkce je zavedena jako reálná funkce v definovaná na množině všech koalic, která splňuje následující podmínky:[29]

1. $v(\emptyset) = 0$;
2. pro každé $K \subseteq Q$ je $v(K) + v(Q \setminus K) = v(Q)$ (*komplementarita*);
3. pro každé $K, L \subseteq Q$, $K \cap L = \emptyset$, je $v(K) + v(L) \leq v(K \cup L)$ (*superaditivita*).

Na imputace jsou pak kladeny podmínky:

$$a_i \geq v\{i\} \text{ pro všechna } i \in Q; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = v(Q)\,. \tag{31}$$

O imputaci $\boldsymbol{a}$ se řekne, že *dominuje* imputaci $\boldsymbol{b}$, existuje-li neprázdná

[28] Tento zápis znamená $v > u$.

[29] Tyto podmínky se objevily již ve von Neumannově pojednání [36]; charakteristická funkce v podstatě udává „sílu" jednotlivých koalic.

Pro hru s nulovým součtem je samozřejmě $v(Q) = 0$; protože se však se von Neumann a Morgenstern později dotkli i her s nekonstantním součtem, uvádíme zde přímo obecnější znění.

množina $S \subseteq Q$, pro kterou platí:[30]

$$\alpha_i > \beta_i \text{ pro všechna } i \in S \qquad \text{a zároveň} \qquad \sum_{i \in S} a_i \leq v(S)\,. \tag{32}$$

Řešením dané kooperativní hry von Neumann a Morgenstern nazývají takovou množinu imputací A, která má následující vlastnosti:

(i) žádná imputace $\boldsymbol{b} \in A$ není dominována jinou imputací $\boldsymbol{a} \in A$,

(ii) každá imputace $\boldsymbol{b} \notin A$ je dominována nějakou imputací $\boldsymbol{a} \in A$.

Toto řešení se dnes nazývá řešením *von Neumannovým-Morgensternovým.* Přestože je intuitivně velmi dobře pochopitelné, má jisté nepříjemné vlastnosti: není jednoznačné, jeho explicitní popis může být prakticky nemožný a jak bylo později ukázáno, nemusí vůbec existovat.

V monografii jsou detailně studovány speciální případy kooperativních her s nulovým součtem tří a čtyř hráčů, autoři se dotýkají i her s nekonstantním součtem a dalších témat.

Jak již bylo zmíněno, vydání knihy [38] způsobilo mohutný rozvoj teorie her a podnítilo její aplikace do ekonomie, později následované řadou dalších oborů. John von Neumann a Oskar Morgenstern podali ucelenou teorii her dvou hráčů s nulovým součtem, jejichž „minimaxní" řešení zaručuje výše uvedená von Neumannova věta, a dále pak studovali především kooperativní hry s nulovým součtem a přenosnou výhrou. Antagonistické hry však tvoří jen malou, dokonce nepříliš významnou část rozhodovacích situací. Stejně tak účastníci konfliktů více hráčů nemají vždy možnost spolupracovat či přerozdělovat výhry. Dalším podstatným krokem je proto řešení nekooperativních her s nekonstantním součtem[31] a s libovolným počtem hráčů a dále pak řešení kooperativních her s nepřenosnou výhrou. Z tohoto důvodu si zvláštní pozornost zaslouží práce Johna F. Nashe.

[30]Jinými slovy, existuje alespoň jedna koalice, která dává přednost imputaci $\boldsymbol{a}$ před imputací $\boldsymbol{b}$ a může si částku, která na ni při výplatě podle $\boldsymbol{a}$ připadá, skutečně zajistit.

[31]Pro ilustraci uvažujme antagonistickou hru danou maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rámečkem je označen sedlový prvek, který v tomto případě existuje a představuje „minimaxní" řešení ve smyslu vztahu (27). Je-li součet výplat obou hráčů nenulový, ale konstantní, ze strategického hlediska se na situaci nic nezmění a minimaxní řešení má stále stejný význam (např. v dalším dvojmatice vlevo). Pro hru s nekonstantním součtem je ovšem obdoba minimaxního řešení zbytečně pesimistická – ve hře s dvojmaticí vpravo je pro oba hráče výhodnější zvolit druhou strategii; bod $(4,5)$

4.2. John Forbes Nash

Jméno JOHNA FORBESE NASHE (*1928) je dnes neodlučitelně spjato s pojmem *rovnovážného bodu*, který se záhy stal ústředním pojmem teorie nekooperativních her. Nash jej poprvé definoval ve stručném příspěvku [29] z roku 1950; podrobně jej studoval ve své disertační práci [31], jejíž hlavní výsledky byly publikovány o rok později v pojednání [32]. Uvedené tři práce obsahují rovněž tři různé důkazy existence rovnovážného bodu ve smyslu věty 1.

Druhý pojem, s nímž je spojeno Nashovo jméno, je tzv. *Nashovo řešení problému vyjednávání dvou hráčů*, tj. řešení kooperativní hry dvou hráčů s prostory strategií $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, výplatními funkcemi u_1, u_2 a nepřenosnou výhrou. Nash se tímto problémem zabýval v pojednáních [30] a [33]. Navrhl systém axiomů, které by racionální řešení mělo splňovat, dokázal existenci tohoto řešení a popsal jeho konstrukci.

Nash zavedl pojem tzv. *společné strategie* jako libovolné matice $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$ s nezápornými prvky, kde $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$; prvek p_{ij} tedy udává pravděpodobnost, s níž bude zvolena dvojice strategií (s_i, t_j). Hodnoty výplatních funkcí jednotlivých hráčů jsou pro společnou strategii P dány vztahem:

$$u_1(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_1(s_i, t_j), \qquad u_2(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_2(s_i, t_j). \tag{33}$$

Označme $K = \{(u(P), v(P));\ P \text{ je } \textit{společná strategie}\}$.[32] Hra nyní spočívá v tom, že její účastníci uzavírají závaznou dohodu o volbě společné strategie.

V článku [33] Nash uvažoval následující axiomy:

(I) Pro kažou hru existuje právě jedno řešení (v_1, v_2), které leží v K.

(II) Je-li $(u_1, u_2) \in K$, $u_1 \geq v_1$, $u_2 \geq v_2$, pak $(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$, tj. řešení není dominováno jiným bodem v K kromě sebe samého.

---

má vlastnost *rovnovážného bodu* z definice 2:

$$\begin{pmatrix} (3,3) & \boxed{(2,4)} \\ (0,6) & (1,5) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} (3,3) & \boxed{(2,4)} \\ (0,2) & \underline{\underline{(4,5)}} \end{pmatrix}.$$

[32]Množina K se dnes nazývá *kooperativní výplatní oblast*.

(III) Řešení se nemění při lineárních transformacích zachovávajících uspořádání.

(IV) Řešení nezávisí na tom, který hráč je označen jako první.

(V) Změní-li se hra omezením množiny K na její podmnožinu K' a řešení původní hry leží v množině K', pak stejný bod bude řešením nové hry.

(VI) Omezení prostoru strategií některého z hráčů nezvýší hodnotu, kterou tento hráč ve hře získá.

(VII) Je možné omezit strategie obou hráčů na jedinou dvojici strategií, aniž by se pro některého z nich zvýšila hodnota, kterou obdrží.

Při studiu kooperativních her Nash využíval jejich redukci na hry nekooperativní; v této souvislosti se dnes také hovoří o *Nashově programu.*

Dodejme, že v roce 1994 získal John F. Nash spolu s Johnem C. Harsanyim a Reinhardem Seltenem Nobelovu cenu za ekonomii *za průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her.*

V druhé polovině dvacátého století došlo k ohromnému rozvoji teorie her do hloubky i do šířky, podrobný popis tohoto vývoje však přesahuje možnosti jednoho článku. V závěru proto již jen naznačme, do kterých oblastí teorie her svými prostředky zasáhla.

5. Rozvoj aplikací teorie her

Nejznámějšími aplikačními oblastmi teorie her jsou pravděpodobně ekonomie a vojenství. Teorie her však nachází uplatnění i takových oborech, jako je politologie, sociologie, psychologie, teorie dopravy, telekomunikací a počítačových systémů, právo či dokonce biologie. Pro ilustraci zde uveďme krátkou zmínku o prvním a posledním z uvedených oborů.

5.1. Politologie

V politologii se teorie her používá k modelování situací souvisejících s volbami, fungováním zákonodárných sborů, politikou zájmových skupin, lobbismem, mezinárodními vztahy, vyjednáváním aj. Řada moderních politologických monografií považuje teorii her za nedílnou součást politologie, za nástroj poskytující přesnou terminologii a metody (což je u společenských věd vždy poněkud problematické). I když jsou modely teorie her často zjednodušené, umožní lépe než cokoli jiného popsat a pochopit základní principy. Teorie her samozřejmě není všemocná a ne vždy může poskytnout optimální řešení daného problému. V každém případě je však silným nástrojem pro analýzu situace a rozhodovatel, který ji používá, tak může být doveden k racionálnímu uvažování bez emocí – již tím lze někdy přispět k nalezení obecně přijatelného řešení. Výklad politologie založený na teorii her může čtenář nalézt například v publikacích [28] a [40].

Z historického pohledu je třeba zmínit práce K. Arrowa ([2], 1951), L. Shapleyho a M. Shubika ([42], 1954), R. D. Luceho a A. A. Rogowa ([22], 1956) a W. H. Rikera ([41], 1962), které představují jedny z prvních politologických aplikací teorie her.

5.2. Biologie

Na první pohled snad překvapivé, o to však pozoruhodnější jsou aplikace biologické. První pokusy byly učiněny již v šedesátých letech dvacátého století v pracích R. C. Lewontina [21] a W. D. Hamiltona ([14], [15]). Nicméně teprve poté, co v roce 1973 publikovali J. Maynard Smith a G. R. Price svou práci [24], došlo doslova k expanzi biologických aplikací teorie her, konkrétně v oblasti *evoluční biologie*. Výsledky dosažené v průběhu prvního desetiletí tohoto vývoje jsou shrnuty ve Smithově knize [25]. Ačkoli se to na první pohled možná zdá paradoxní (může být například kudlanka hráčem ve strategické hře?), postupem času se ukázalo, že nejslibnější aplikace teorie her jsou právě v biologii. Modely teorie her dokonce fungují tím lépe, čím méně vyvinutá je schopnost organismu přemýšlet. Zatímco ve společenských vědách je předpoklad racionálnosti rozhodovatelů často značně problematický, v evoluční biologii potíže s emocemi či iracionalitou odpadají.

Stačí totiž uvažovat následující model: *hráči* ve strategické hře nejsou sledovaní jedinci, ale *geny*, které volí pro své nositele *strategie* v konkrétních situacích. *Strategií* je behaviorální fenotyp, tj. chování „předprogramované" geny, neboli specifikace toho, co bude jedinec dělat v jakékoli situaci, v níž se může ocitnout. Konečně *výplatní funkcí* je tzv. *reprodukční zdatnost*, tedy schopnost genu zachovat se a šířit v genotypu populace.[33] Ústředním pojmem při řešení evolučních modelů je *evolučně*

[33]Připomeňme, že *genotypem* se rozumí soubor všech genů, které má organismus k dispozici pro zajištění svých biochemických, fyziologických a morfologických vlastností a znaků; *fenotyp* je soubor všech pozorovatelných vlastností a znaků organismu.

stabilní strategie, která je obvykle definována takto: používají-li všichni členové populace tuto strategii, pak žádný mutant, tj. jedinec používající jinou strategii, nemůže populaci napadnout ve smyslu přírodního výběru – je méně úspěšný v reprodukci.

Zjednodušeně řečeno, generaci za generací se živé organismy řízené geny utkávají ve vzájemných soutěžích; geny, které svým nositelům zvolily nejlepší strategii a umožnily jim přežití a rozmnožování, se dále šíří a postupně tak dochází k jejich „učení". Výsledkem je, že se jejich nositelé chovají tak, jako by vědomě hledali optimální strategie, jež by jim předepsala teorie her; místo výpočtu však geny k rovnovážné strategii dospěly postupným přizpůsobováním se a přírodním výběrem.

Dnes je teorie her nedílnou součástí evoluční teorie v biologii a naopak, pojem evolučně stabilní strategie se stal součástí nekooperativní teorie her. Zoologické aplikace zahrnují boj, kooperaci a komunikaci živočichů, způsoby páření, konflikty mezi pohlavími, počet a poměr pohlaví potomků, rozdělení jedinců v jejich výskytišti, zdánlivý a reciproký altruismus a mnoho dalších problémů, botanické aplikace se dotýkají otázek rozptýlení a klíčení semen rostlin, konkurence kořenů, produkce nektaru, velikosti květů, aj. Příspěvek zakončeme pozvánkou k četbě doslova dobrodružných knih zoologa R. Dawkinse [11] a [12] věnovaných samotné podstatě naší existence.

Literatura

[1] Aumann, R. J.; Maschler, M.: *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud.* Journal of Economic Theory **36**(1985), 195–213.

[2] Arrow, K.: *Social Choice and Individual Values.* Wiley, New York, 1951.

[3] Baumol, W. J.; Goldfeld, S. M. (ed.): *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology.* The London School of Economics, London, 1968.

[4] Bernoulli, D.: *Speciman theorie novae de mensura sortis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **5**(1738), 175–192 [anglický překlad L. Somera: *Exposition of a New Theory of Risk Evaluation*, Econometrica **22**(1954), 23–36; přetisk v [3], 15–26.]

[5] Binmore, K.: *Fun and Games.* D. C. Heath, Lexington, 1992.

[6] Borel, É.: *La théorie du jeu et les équations, intégrales à novau symétrique gauche.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **173**(1921), 1304–1308 [anglický překlad L. J. Savage: *The Theory of Play and Integral Equations*, Econometrica **21**(1953), 97–100].

[7] Borel, É.: *Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habilité des joueurs.* In: *Théorie des probabilités*, J. Hermann, Paris, 1924 [anglický překlad L. J. Savage: *On Games that Involve Chance and the Skill of Players*, Econometrica **21**(1953), 101–115].

[8] Borel, É.: *Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **184**(1927), 52–53 [anglický překlad L. J. Savage: *On systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play*, Econometrica **21**(1953), 116–117].

[9] Borel, É.: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications.* 4. díl, 2. svazek, Gauthier-Villars, Paris, 1938.

[10] Cournot, A. A.: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.* Hachette, Paris, 1838.

[11] Dawkins, R.: *The Selfish Gene.* Oxford University Press, Oxford, 1976 [český překlad V. Kopského: *Sobecký gen*, Mladá Fronta, Praha, 2003].

[12] Dawkins, R.: *The Blind Watchmaker.* Harlow, Longman, 1986 [český překlad T. Grima: *Slepý hodinář*, Paseka, Praha, 2002].

[13] Dimand, M. A; Dimand, R. W.: *The Early History of the Theory of Strategic Games from Waldegrave to Borel.* In: [46], 15–27.

[14] Hamilton, W. D.: *The Genetical Evolution of Social Behaviour I, II.* Journal of Theoretical Biology **7**(1964), 1–16; 17–52.

[15] Hamilton, W. D.: *Extraordinary Sex Ratios.* Science **156**(1967), 477–488.

[16] Hykšová, M.: *Teorie her – prezentace a motivace. In: Mezinárodní konference prezentace matematiky,* TUL, Liberec, 2003, 35–42.

[17] Hykšová, M.: *Game Theory and Life.* In: *Mezinárodní konference Aplimat 2004*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Bratislava, 495–500.

[18] Kjeldsen, T. H.: *John von Neumann's Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts.* Archive Hist. Exact Sci. **56**(2001), 39–68.

[19] Kuhn, H.: *James Waldegrave: Excerpt from a Letter.* In: [3], 1–9.

[20] Kuhn, H.; Nasar, S.: *The Essential John Nash.* Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002.

[21] Lewontin, R. C.: *Evolution and the Theory of Games.* Journal of Theoretical Biology **1**(1961), 382–403.

[22] Luce, R. D.; Rogow, A. A.: *A Game-Theoretic Analysis of Congressional Power Distributions for a Stable Two-Party System.* Behavioral Science **1**(1956), 83–95.

[23] Mačák, K.: *Počátky počtu pravděpodobnosti.* In: *Dějiny matematiky*, sv. 9, Prometheus, Praha, 1997.

[24] Maynard Smith, J.; Price, G. R.: *The Logic of Animal Conflict.* Nature **246**(1973), 15–18.

[25] Maynard Smith, J.: *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[26] de Montmort, P. R.: *Essai d'analyse sur les jeux de hasard.* 2. vydání: Quilau, Paříž, 1713.

[27] Morris, P.: *Introduction to Game Theory.* Springer Verlag, New York, 1994.

[28] Morrow, J. D.: *Game Theory for Political Scientists.* Princeton University Press, Princeton, 1994.

[29] Nash, J. F.: *Equilibrium Points in n-Person Games.* Proceedings of the National Academy of Sciences **36**(1950), 48–49 [přetisk v [34], str. 9, a v [20], 49–50].

[30] Nash, J. F.: *The Bargaining Problem.* Econometrica **18**(1950), 155–162 [přetisk v [34], 1–8, a v [20], 37–46].

[31] Nash, J. F.: *Non-Cooperative Games.* Disertační práce, Princeton University, Princeton, 1950, 27 stran [faksimile otištěna v [20], 53–84].

[32] Nash, J. F.: *Non-Cooperative Games.* Annals of Mathematics **54**(1951), 286–295 [přetisk v [34], 22–31, a v [20], 85–98].

[33] Nash, J. F.: *Two Person Cooperative Games.* Econometrica **21**(1953), 128–140 [přetisk v [34], 34–46, a v [20], 99–114].

[34] Nash, J. F.: *Essays on Game Theory.* Edward Elgar, Cheltenham, 1996.

[35] von Neumann, J.: *Sur la théorie des jeux.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **186.25**(1928), 1689–1691.

[36] von Neumann, J.: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.* Mathematische Annalen, **100**(1928), 295–320 [anglický překlad S. Bargmannové: *On the Theory of Games of Strategy.* In: *Contributions to the Theory of Games*, vol. 4 (A. W. Tucker, R. D. Luce, ed.), Princeton University Press, Princeton, 1959, 13–42].

[37] von Neumann, J.: *Über ein ökonomische Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.* In: *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* (K. Menger, ed.), Wien, 1937, 73–83.

[38] von Neumann, J.; Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

[39] von Neusner, J.: *The Mishnah. A New Translation.* Yale University Press, New Haven, 1988.

[40] Ordeshook, P.: *Game Theory and Political Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[41] Riker, W. H.: *A Theory of Political Coalitions.* Yale University Press, New Heaven, 1962.

[42] Shapley, L. S.; Shubik, M.: *A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System.* American Political Science Review **48**(1954), 787–792.

[43] Stemberger, G: *Einleitung in Talmud und Midrasch.* Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1992 [český překlad P. Slámy: *Talmud a Midraš*, Vyšehrad, Praha, 1999].

[44] Todhunter, I.: *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace.* Cambridge University Press, Cambridge, 1865; reprint: Chelsea, Bronx, 1965.

[45] Vorobjev, N. N.: *Entwicklung der Spieltheorie.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[46] Weintraub, E. R.; *Toward a History of Game Theory.* History of Political Economy, Annual Supplement to Volume 24, Duke University Press, Durham and London, 1992.

Magdalena Hykšová
Katedra matematiky
Fakulta dopravní ČVUT Praha
e-mail: hyksova@fd.cvut.cz